Minkowského priestor a jeho základné vlastnosti

Alexandra Adamíková

2009

Minkowského priestor a jeho základné vlastnosti

BAKALÁRSKA PRÁCA

Alexandra Adamíková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ INFORMATIKY

Študijný odbor 9.2.9 Aplikovaná informatika

Vedúci bakalárskej práce
RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

BRATISLAVA 2009

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som záverečnú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 12. júna 2009

....
Vlastnoručný podpis

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce, RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za odbornú pomoc pri vypracovaní bakalárskej práce.

Bratislava, 12. júna 2009 Alexandra Adamíková

Názov práce: Minkowského priestor a jeho základné vlastnosti
Kľúčové slová: Svetobody, svetelný kužeľ, skalárny súčin
Abstrakt:
Minkowského časopriestor vytvára matematický model pre špeciálnu teóriu relativity. V tejto práci sú popísané základné vlastnosti priestoru. Používame termín udalosť, namiesto bod. Množinu všetkých udalostí, ktoré sú od daného svetobodu svetelne odľahlé, nazývame svetelný kužeľ. Zadefinujeme si pseudoeuklidovský priestor s vlastnou signatúrou, ktorý bude mať vlastnosti podobné euklidovskému priestoru, napr. skalárny súčin. Taktiež sa zaoberáme dilatáciou času, t.j., predĺžením času a kontrakciou dĺžky, kedy dochádza ku skracovaniu rozmerov rovnobežných so smerom pohybu sústavy.

Obsah

Úvod 7

1 Uvedenie 8

2 Geometrická štruktúra 14

- **2.1 Bilineárne zobrazenia, skalárny súčin , Gramova matica** 14
- **2.2 Pseudoeuklidovské priestory** 18
- **2.3 Minkowského časopriestor** 19
- **2.4 Inerciálny pozorovateľ a jeho svetočiara** 22
- **2.5 Lorentzova transformácia** 24
- **2.6 Relatívnosť súčasnosti** 28
- **2.7 Dilatácia času** 29
- **2.8 Kontrakcia dĺžky** 30

3 Hyperbolická geometria 31

- **3.1 Úvod** 31
- **3.2 Začiatky hyperbolickej geometrie** 32
- **3.3 Prečo sa nazýva hyperbolická geometria?** 34
- **3.4 Pochopenie jedno - rozmerného prípadu** 36
- **3.5 Zovšeobecnenie na vyššie dimenzie** 38
- **3.6 Základy Riemanovej geometrie** 39

Záver 41

Zoznam použitej literatúry 42

Úvod

V tejto bakalárskej práci sa zaoberám problematikou Minkowského časopriestoru. Hermann Minkowski vytvoril geometrickú reprezetáciu špeciálnej teórie relativity. Hlavným cieľom činností v rámci bakalárskej práce bolo oboznámenie sa s základnými vlastnosťami a definíciami Minkowského časopriestoru.
Budeme sa zaoberať základnými pojmami ako udalosti, svetelný kužeľ, pretože sú to samotné základy. Pojmy ako relatívnosť súčasnosti či dilatácia času sú zaujímavé svojím vplyvom na myslenie človeka. V neposlednom rade spomeniem aj hyperbolickú geometriu, pretože Minkowského časopriestor nespadá do euklidovskej geometrie. V rámci práce som sa priamo oboznámila s problematikou Minkowského časopriestoru.
Vzhľadom na rozsah a zaujímavosť problematiky ma téma veľmi zaujala a v danej oblasti by som rada pokračovala aj v magisterskom stupni štúdia.

1 Uvedenie

22. jún 1864 Alexotas, Ruské impérium (teraz Litva) – 12. január 1909 Göttingen, Nemecko

Obrázok č. 1. Hermann Minkowski

Vytvoril nový pohľad na priestor a čas, čím položil matematické základy teórie relativity.

Študoval v Nemecku na univerzitách v Berlíne a v Königsbergu, kde aj získal doktorát v roku 1885. Neskôr prednášal aj na univerzite v Zürichu, kde bol jedným z jeho študentov aj Albert Einstein, ktorý chodil na niekoľko jeho prednášok. No mladý Einstein mal svoju a hlavu a Minkowski ho nazval aj lenivým psom, pretože cez niektoré časti kurzov sa radšej zaoberal vlastnými myšlienkami. Neskôr sa ale predsa len chopil Minkowského geometrie priestoročasu.

V roku 1902 získal titul profesora na Univerzite v Göttingene, kde už zostal až do konca svojho života. Časom usúdil, že Lorentzova a Einsteinova práca sa lepšie chápe v neeuklidovskom priestore. Uvažoval o priestore a čase, ktoré boli predtým chápané ako samostatné entity, ako o štvorrozmernom priestoročasovom kontinuu.

Jeden z jeho známych citátov hovorí:

„*Priestor a čas sú pre budúcno odsúdené ku zmiznutiu v tieňoch a len ich spojenie si zachová skutočne nezávislú existenciu.* “ [1]

21.septembra 1908 Hermann Minkowski začal svoje rozprávanie na 80. Zhromaždení nemeckých vedcov a fyzikov so slávnym úvodom:

- Zobrazenia priestoru a času, na ktoré by som sa chcel zamerať ešte predtým ako skočíte z pôdy experimentálnej fyziky, kde spočíva ich sila. Sú radikálne. Odteraz priestor automaticky a tak aj čas, sú odsúdené k zániku v úplnom šere a jedine druh spojenia dvojice zachová nezávislú realitu.

Odvtedy otázka ontologického charakteru tohto spojenia priestoru a času sa stala predmetom neustálej debaty.
Minkowski sa zaoberal obzvlášť čistou matematikou a dlhú dobu študoval aj kvadratické formy. Vynikol však v teórii čísel, kde je jeho originálnym príspevkom geometria čísel.
Minkowski zomrel veľmi náhle, vo veku 44 rokov na prasknutie slepého čreva.

Ako zjednotenie priestoru a času je, podľa Minkowského, 4D svet (Minkowského časopriestor), otázka jeho ontologického charakteru sa javí ako: „Je Minkowského časopriestor nič viac ako 4D matematický priestor, ktorý reprezentuje vyvíjanie v 3D svete, alebo matematický model 4D sveta s časom daným ako štvrtá dimenzia?“ Inými slovami, dôsledok podstaty Minkowského časopriestoru je rovnaký ako dôsledok rozmernosti sveta podľa relativity – či je svet 3D, alebo 4D v makroskopickej mierke [2].

Minkowského priestoročas je všeobecne považovaný za vhodnú oblasť, v rámci ktorej sú vyjadrené tie zákony fyziky, ktoré sa špecificky nevzťahujú na gravitačné javy.
Základným problémom vedy, všeobecne, je popis „udalostí“ a vzťahov medzi nimi. Používame pojem udalosť, no v idealizovanom zmysle „bodová udalosť“, čo je fyzikálny jav bez priestorového rozsahu a trvania v čase. Môže reprezentovať okamžitú kolíziu, výbuch, alebo okamih v histórii nejakej hmotnej častice, či fotónu. V tomto zmysle existencia hmotnej častice, alebo fotónu môže byť reprezentovaná ako spojitá súslednosť udalostí, nazývaná *svetočiara*.
Začneme s abstraktnou množinou M, ktorej prvky sú udalosti. Zostavíme M s matematickou štruktúrou zahŕňajúcou ľudské skúsenosti tak dobre ako niektoré výsledky experimentálnej fyziky. Keďže udalosti sú pozorované, tak my sme čiastočne zahrnutí v triede pozorovateľov. Identifikujeme udalosti podľa ich umiestnenia v čase a priestore, a preto musíme špecifikovať spôsob, podľa ktorého pozorovateľ dosahuje svoju prípustnosť.

> *Každý prípustný pozorovateľ predsedá trojrozmernému, pravouhlému, karteziánskemu priestorovému súradnicovému systému založenom na dohodnutej jednotke dĺžky a ku ktorému sa fotóny šíria relatívne priamočiaro v každom smere.*

Výraz „predsedá“ nie je príliš presný, pretože pozorovateľ nie je všadeprítomný. Väčšinou zobrazujeme pozorovateľa ako len ďalšiu hmotnú časticu spočívajúcu v počiatku jeho súradnicového systému. Akákoľvek informácia týkajúca sa udalostí, ktoré nastanú v rôznych polohách, musí byť s ním spojená spôsob, pre ktorý sa vieme rýchlo rozhodnúť.

Pojem priamka má len relatívny význam na daný priestorový súradnicový systém. Ak sa svetlo v takom systéme šíri pozdĺž priamok, potom to určite nebude v inom systéme.

Poznamenajme priestorový súradnicový systém pozorovateľov $O, \hat{O}, \ldots$ s:

$$\sum\left(x^1, x^2, x^3\right), \hat{\sum}\left(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3\right), \ldots$$

Každý pozorovateľ má zmysel pre vnímanie poradia, ktorý aplikuje na udalosti, ktoré priamo zažil, t.j. na udalosti na jeho svetočiare. No nie je tu „zhodnosť“ pre časové udalosti, čo je možné napraviť tak, že pozorovateľ dostane hodinky.

> *Každý prípustný pozorovateľ je vybavený idealizovanými normalizovanými hodinkami, založenými na dohodnutej jednotke času a s ktorými poskytuje kvantitatívne časové poradie udalostiam na jeho svetočiare.*

Predpokladáme, že pozorovateľ takto môže priradiť čas každej udalosti na jeho svetočiare. A aby bolo možné pre pozorovateľa určiť čas ľubovoľným udalostiam, je potrebné určiť metódu pre umiestnenie a synchronizáciu hodín všade na jeho priestorovom súradnicovom systéme. Ako jedna možnosť je veľkovýroba hodín v počiatku, ich synchronizácia a následné premiestnenie na rôzne body v celom súradnicovom systéme. No tento spôsob, ako sa už dokázalo, má nežiaduci efekt na hodinky.

- Ak dve identické, veľmi presné, synchronizované hodinky sú vyrobené napr. v New Yorku. Jedny sú umiestnené na palube prúdového lietadla a letia okolo sveta. Pri návrate sa zistí, že obe tikajú v rovnakej intenzite, no už nie sú synchronizované.

Aby sme sa vyhli takejto prekážke, požiadame prípustných pozorovateľov, aby vytvorili hodiny v počiatku svojich súradnicových systémov, premiestnili ich do požadovaných umiestnení, tam ich položili a následne sa vrátili k hodinám v počiatku.

Tiež predpokladáme, že každý pozorovateľ má umiestneného pomocníka v mieste každých premiestnených hodín. Teraz musí pozorovateľ komunikovať s každým pomocníkom, povediac mu čas, v ktorom by mali byť jeho hodiny nastavené, tak aby sedelo poradie a aby to bolo synchronizované s hodinami v počiatku. Komunikácia medzi nimi bude prebiehať pomocou svetelných signálov.

- Zo svojho umiestnenia v počiatku 0 pozorovateľ O vyšle svetelný signál v okamihu, keď jeho hodiny prečítajú čas t_0. Signál je následne v bode P odrazený späť k nemu a dorazí do 0 v okamihu t_1. Ak tam nie je žiadne oneskorenie v bode P, kedy je signál odrazený späť, O vypočíta rýchlosť signálu ako vzdialenosť $\left(O,P\right)\big/ 1/2\left(t_1 - t_0\right)$. Táto metóda sa nazýva Fizeauova metóda.

Pre každého prípustného pozorovateľa rýchlosť svetla vo vákuu zistená Fizeauovou metódou je nezávislá, keď experiment je uskutočnený, sústava zariadenia (voľba P), frekvencia signálu, atď., má rovnakú hodnotu c (asi 3x10^8 m/s) pre všetkých pozorovateľov.

Využijeme výnimočné vlastnosti svetelných signálov žiadaním našich pozorovateľov, aby každý z ich údajov násobili konštantou c a merali tak čas v jednotkách dĺžky. S týmito jednotkami sú všetky rýchlosti bezrozmerné a teda aj c = 1. Tieto časové údaje pozorovateľov $O, \hat{O}$,... sú označené $x^4 = (ct), \hat{x}^4 = (c\hat{t}), \ldots$

Teraz môžeme každého nášho pozorovateľa vybaviť systémom synchronizovaných hodín nasledovne:

- V každom bode P umiestnime hodiny totožné s tými v počiatku. V nejakom čase x^4 v 0 sa vyšle sférická elektromagnetická vlna. Keď vlna narazí na bod P, nastaví tam umiestnené hodiny na čas x^4 + *vzdialenosť (O,P)* a nastaví tikanie, zosúladenie, s hodinami v počiatku.

V tomto bode má každý z pozorovateľov $O, \hat{O}$,... zavedený systém referencií $S\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), \hat{S}\left(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4\right)$,... Môžeme si to predstaviť ako mriežkovanie priestorových súradnicových čiar, v každom mriežkovom bode s hodinami a pomocníkom, ktorého úlohou je zaznamenanie polôh a časov udalostí vyskytujúcich sa v jeho bezprostrednej blízkosti. Údaje sú neskôr zozbierané pozorovateľom pre analýzu.

Sú S - súradnice a $\hat{S}$ - súradnice vo vzťahu pomocou zobrazenia $F : R^4 \to R^4$ definovaného ako $F\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) = \left(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4\right)$? V skutočnosti zobrazenie $F^{-1} : R^4 \to R^4$ musí byť súradnicová transformácia z priestorových do nepriestorových súradníc.

Každí dvaja prípustní pozorovatelia sa zhodujú v časovom poradí každých dvoch udalostí na svetočiare fotónu, t.j. ak dve také udalosti majú súradnice $\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$ *a* $\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4\right)$ *v S a súradnice* $\left(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4\right)$ *a* $\left(\hat{x}_0^1, \hat{x}_0^2, \hat{x}_0^3, \hat{x}_0^4\right)$ *v* $\hat{S}$*, potom* $x^4 - x_0^4$ *a* $\hat{x}^4 - \hat{x}_0^4$.

Poznamenajme, že neriešime otázku rovnosti $\Delta\ x^4$ a $\Delta\ \hat{x}^4$, ale len rovnosť ich znamienok. To znamená, že O a $\hat{O}$ sa zhodujú pokiaľ ide o to, ktorá z udalostí nastane skôr. Potom F zachováva poradie vo štvrtej súradnici aspoň pre udalosti ležiace na svetočiare fotónu. Pretože sa fotóny šíria priamočiaro rýchlosťou 1, dve udalosti na svetočiare fotónu majú súradnice v S, ktoré spĺňajú podmienku :

$$x^i - x_0^i = v^i\left(x^4 - x_0^4\right), i = 1,2,3$$

pre konštanty v^1, v^2, v^3 s $\left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2 = 1$ a teda:

$$\left(x^1 - x_0^1\right)^2 + \left(x^2 - x_0^2\right)^2 + \left(x^3 - x_0^3\right)^2 - \left(x^4 - x_0^4\right)^2 = 0 \qquad (0.1)$$

Geometricky myslíme (0.1) ako rovnicu „kužeľa“ v R^4 s vrcholom v $\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4\right)$. Ak všetko musí byť v prípustnom systéme spôsobnosti, tak F musí zachovať kužeľ.

Zhrnutie:

Súradnicové zobrazenie $F : R^4 \to R^4$ prevedie kužeľ (0.1):

$$\left(\hat{x}^1 - \hat{x}_0^1\right)^2 + \left(\hat{x}^2 - \hat{x}_0^2\right)^2 + \left(\hat{x}^3 - \hat{x}_0^3\right)^2 - \left(\hat{x}^4 - \hat{x}_0^4\right)^2 = 0 \qquad (0.2)$$

spĺňajúc $\hat{x}^4 > \hat{x}_0^4$, keď $x^4 > x_0^4$ a (0.1) je splnené.

V jednoduchosti, zobrazenie z priestorových do nepriestorových súradníc $F^{-1} : R^4 \to R^4$ má zrejmé analogické vlastnosti. V roku 1964 Zeeman nazval také zobrazenie F „príčinný automorfizmus“ a dokázal nezvyčajné tvrdenie, že každý príčinný automorfizmus je kompozíciou nasledujúcich troch základných typov:

1. Premiestnenie: $\hat{x}^a = x^a + \Lambda^a$, a = 1,2,3,4 pre niektoré konštanty Λ^a
2. Kladný skalárny súčin: $\hat{x}^a = kx^a$, a = 1,2,3,4 pre kladnú konštantu k
3. Lineárne transformácie: $\hat{x}^a = \Lambda^a{}_b x^b$, a = 1,2,3,4 ,

   (0.3)

   kde matica $\Lambda = \left[\Lambda^a{}_b\right]_{a,b=1,2,3,4}$ spĺňa dve podmienky

$$\Lambda^T{}_\eta \Lambda = \eta \ ,$$

   (0.4)

   kde T znamená „transpozícia“ a

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a

$$\Lambda^4{}_4 \geq 1 \qquad (0.5)$$

Je zvláštne, že ešte na začiatku nie je predpokladané, že F je spojité.

Vzhľadom k tomu, že dva referenčné rámce spojené zobrazením typu 2 sa líšia len jednoduchou a nepotrebnou zmenou mierky, môžeme ich teda odstrániť z predchádzajúcej úvahy.

Taktiež konštanty Λ^a v zobrazení typu 1 môžu byť považované ako $\hat{S}$ - súradnice z priestoročasového počiatku S, preto môžeme požadovať, aby všetci pozorovatelia spolupracovali tak, že vyberú spoločnú udalosť pôsobiacu ako počiatok, preto vezmeme Λ^a = 0 pre a = 1,2,3,4. Všetky, ktoré zostávajú na posúdenie sú potom prípustné referenčné rámce spojené transformáciami (0.3) vzhľadom na (0.4) a (0.5). Sú to takzvané Lorentzove transformácie a sú presnými zobrazeniami zanechávajúcimi invariantnosť kvadratickej formy $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$ a ktoré zachovávajú časovú orientáciu [3].

2 Geometrická štruktúra

2.1 Bilineárne zobrazenia, skalárny súčin , Gramova matica

Nech U, V, W sú vektorové priestory nad R. Hovoríme, že $g : U\times V\to W$ je *bilineárne zobrazenie,* ak pre všetky $v,v_1,v_2\in U,\ w,w_1,w_2\in V,\ a_1,a_2\in R$ platí [3]

$$g(v,a_1w_1+a_2w_2) = a_1g(v,w_1) + a_2g(v,w_2)\ ,$$
$$g(a_1v_1+a_2v_2,w) = a_1g(v_1,w) + a_2g(v_2,w)\ .$$

Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory s bázami $\alpha = (t_1,\dots,t_m)$ resp. $\beta = (u_1,\dots,u_n)$. Potom pre ľubovoľnú maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ je predpisom

$$g(v,w) = (v)_\alpha^T \cdot A \cdot (w)_\beta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i w_j\ ,$$

kde $(v)_\alpha = (v_1,\dots,v_m)^T$, $(w)_\beta = (w_1,..,w_n)^T$ sú súradnice vektorov $v\in U$, $w\in V$ v príslušných bázach.

Maticou bilineárnej formy $g : U\times V\to R$ vzhľadom na bázy α, β nazývame maticu

$$[g]_{\alpha,\beta} = \left(g\left(t_i,u_j\right)\right)\in R^{m\times n}\ ,$$

ktorá je tvorená hodnotami formy g na dvojiciach báz α, β.

Tvrdenie 2.1.1. *Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory s bázami* α, *resp.* β *a $g : U\times V\to R$ je bilineárna forma. Potom pre všetky $v\in U$, $w\in V$ platí*

$$g(v,w) = (v)_\alpha^T \cdot [g]_{\alpha,\beta} \cdot (w)_\beta$$

a $\mathbf{A} = [g]_{\alpha,\beta}$ *je jediná matica s touto vlastnosťou.*

Dôkaz. Nech $(v)_\alpha = (v_1,\dots,v_m)^T$, $(w)_\beta = (w_1,..,w_n)^T$ sú súradnice vektorov $v\in U$, $w\in V$ v príslušných bázach $\alpha = (t_1,\dots,t_m)$, $\beta = (u_1,\dots,u_n)$. S použitím bilinearity g dostávame

$$g(v,w) = g\left(v_1t_1 + \dots + v_mt_m, w_1u_1 + \dots + w_nu_n\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_i w_j g\left(v_i, w_j\right) = (v)_\alpha^T \cdot [g]_{\alpha,\beta} \cdot (w)_\beta\ .$$

Pre ľubovoľnú maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ platí

$$(\forall v\in U)(\forall w\in V)\left(g(v,w) = (v)_\alpha^T \cdot A \cdot (w)_\beta\right) \Rightarrow A = [g]_{\alpha,\beta}\ .$$

Za uvedeného predpokladu voľbou $v = t_i$, $w = u_j$ dostávame

$$g\left(t_i,u_j\right) = \left(t_i\right)_\alpha^T \cdot A \cdot \left(u_j\right)_\beta = e_i^T \cdot A \cdot e_j = a_{ij}\ .$$

Hodnosť h(g) bilineárnej formy g na konečnorozmerných vektorových priestoroch je hodnosť jej matice vzhľadom na ľubovoľnú dvojicu báz.
Označme V ako ľubovoľný vektorový priestor veľkosti $n \geq 1$ nad R. Bilineárna forma na V je tvaru $g: V \times V \to R$, kedy prvá aj druhá premenná prebieha ten istý vektorový priestor V.
Zobrazenie g je *symetrické*, ak pre všetky $v, w \in V$ platí $g(w,v)=g(v,w)$ a nedegenerované, ak z platnosti $g(v,w)=0$ pre všetky $w \in V$ máme $v=0$. Bilineárna forma $g: V \times V \to R$ sa nazýva *antisymetrická,* ak pre všetky $v, w \in V$ platí $g(v,w) = -g(w,v)$. Nedegenerovaná, symetrická, bilineárna forma g sa všeobecne nazýva *skalárny súčin* a znázornenie (v,w) podľa g má častejší zápis $v \cdot w$ ako $g(v,w)$. Štandardným príkladom je skalárny súčin na R^n : ak $v = (v_1,\dots,v_n)$ a $w = (w_1,\dots,w_n)$, potom $g(v,w) = v \cdot w = v_1w_1+\dots+v_nw_n$. Tento čiastočný skalárny súčin je *kladne definitný* , t.j. má vlastnosť, že ak $v \neq 0$, potom $g(v,w)>0$. Nie všetky skalárne súčiny zdieľajú túto vlastnosť.
Skalárny súčin g, pre ktorý $v \neq 0$ znamená $g(v,v)<0$ je *záporne definitný,* zatiaľ čo ak g nie je ani záporne definitné, ani kladne definitné, tak je indefinitné $(g(v,v) < 0 < g(v,v))$.
Ak g je skalárny súčin V , potom dva vektory v a w , pre ktoré $g(v,w)=0$, sú g – *ortogonálne,* alebo jednoducho *ortogonálne,* ak tam nie je mnohoznačnosť, ku ktorej je skalárny súčin určený; teda $v \perp w \Leftrightarrow g(v,w) = 0$. Ak W je podpriestor V, potom *ortogonálny doplnok* $W^\perp$ podpriestoru W vo V je definovaný ako $W^\perp = \{v \in V : g(v,w) = 0, \forall w \in W\}$.
Kvadratická forma spojená skalárnym súčinom g na V je zobrazenie $Q: V \to R$ definované ako $Q(v)=g(v,v)= v \cdot v$ (častejší zápis je v^2).
Vektor v, pre ktorý $Q(v)$ je buď 1, alebo -1, sa nazýva *jednotkový vektor.* Báza $\{e_1,\dots,e_n\}$ pre V, ktorá pozostáva z navzájom ortogonálnych jednotkových vektorov, sa nazýva *ortogonálna báza* [3].

Tvrdenie 2.1.2.: *Nech V je n – rozmerný reálny vektorový priestor, na ktorom je definované nedegenerované, symetrické, bilineárne zobrazenie $g: V \times V \to R$. Potom existuje báza $\{e_1,\dots,e_n\}$ pre V taká, že $g(e_i, e_j) = 0$, ak $i \neq j$ a $Q(e_i) = \pm 1$ pre $i = 1,\dots,n$. Navyše počet bázových vektorov e_i , pre ktorý $Q(e_i)=-1$ je rovnaký pre ľubovoľnú takú bázu.*

Dôkaz: Začneme s pozorovaním. Pretože g je nedegenerované, potom existuje dvojica vektorov (v,w), pre ktorú $g(v,w) \neq 0$. Tvrdíme, že v skutočnosti existuje jediný vektor $u \in V$, že $Q(u) \neq 0$. Samozrejme, ak jeden z $Q(v)$, alebo $Q(u)$ je nenulový, sme hotový. Na druhej strane, ak $Q(v)=Q(w)=0$, potom $Q(v+w) = Q(v)+2g(v,w)+Q(w) = 2g(v,w) \neq 0$, tak môžeme položiť $u = v+w$.

Dôkaz tvrdenia podľa indukcie n. Ak $n=1$, vyberieme ľubovoľné $u \in V$, kde $Q(u) \neq 0$ a definujeme $e_1 = (|Q(u)|)^{-1/2} u$. Potom $Q(e_1) = \pm 1$, teda $\{e_1\}$ je požadovaná báza.

Predpokladajme, že $n>1$ a že každý skalárny súčin vo vektorovom priestore rozmeru menšieho ako n má bázu požadovaného typu. Nech rozmer V je n. Opäť začneme výberom $u \in V$ takým, že $Q(u) \neq 0$ a pridelením $e_n = (|Q(u)|)^{-1/2} u$, teda $Q(e_n) = \pm 1$. Teraz nech je W ortogonálny doplnok V o podpriestor Span$\{e_n\}$ z V generovaného podľa $\{e_n\}$. W je podpriestor V a odtiaľ $e_n \notin W$, $dimW < n$. Obmedzenie g na $W \times W$ je skalárny súčin na W, teda indukcia hypotézy nám zabezpečí existenciu bázy $\{e_1,\ldots,e_m\}$, $m = dimW$, pre W také, že $g(e_i, e_j) = 0$, ak $i \neq j$ a $Q(e_i) = \pm 1$ pre $i = 1,\ldots,m$. Tvrdíme, že $m = n - 1$ a že $\{e_1,\ldots,e_m,e_n\}$ je báza pre V.

Pretože počet prvkov v množine $\{e_1,\ldots,e_m, e_n\}$ je $m + 1 \leq n$, oba z našich výrokov budú jasné, ak ukážeme, že táto množina pokrýva V. Teda, nech v je ľubovoľný prvok V a uvažujme vektor $w = v - (Q(e_n)g(v,e_n))e_n$. Potom $w \in W$ pretože $g(w,e_n) = g(v - (Q(e_n)g(v,e_n))e_n, e_n) = g(v,e_n) - (Q(e_n))^2 g(v,e_n) = 0$. Môžeme písať $v = w^1 e_1 + \ldots + w^m e_m + (Q(e_n)g(v,e_n))e_n$, tak $\{e_1,\ldots,e_m, e_n\}$ generuje V.

Ukážeme, že počet r takých e_i, pre ktoré $Q(e_i) = -1$ je rovnaký pre akúkoľvek ortonormálnu bázu :

Ak $r = 0$, výsledok je zreteľný, lebo $Q(v) \geq 0$ pre každé $v \in V$, t.j., g je kladne definitné. Ak $r > 0$, potom V má podpriestory, na ktorých g je záporne definitné. Ukážeme, že r je rozmer takého ľubovoľného podpriestoru W a tým dáva invariant charakteristiky r. Počet bázových prvkov takých, že $\{e_1,\ldots,e_r, e_{r+1},\ldots,e_n\}$, kde $Q(e_i) = -1$ pre $i = 1,\ldots,r$ a $Q(e_i) = 1$ pre $i = 1+r,\ldots,n$. Nech $X = Span\{e_1,\ldots,e_r\}$ je podpriestorom V generovaný podľa $\{e_1,\ldots,e_r\}$. Potom tým, že g je záporne definitné na X a $dimX = r$ zistíme, že $r \leq dimW$. Aby sme ukázali, že $r \geq dimW$, definujeme zobrazenie $T: W \to X$ nasledovne: Ak $w = \sum_{i=1}^{n} w^i e_i$ je vo W, potom $Tw = \sum_{i=1}^{r} w^i e_i$. Potom T je lineárne. Nech w je také, že $Tw=0$. Potom pre každé $i=1,\ldots,r$, $w^i=0$. Teda,

$$Q(w) = g\left(\sum_{i=r+1}^{n} w^i e_i, \sum_{j=r+1}^{n} w^j e_j\right) = \sum_{i,j=r+1}^{n} g(e_i, e_j) w^i w^j = \sum_{i=r+1}^{n} (w^i)^2$$, ktoré je väčšie alebo rovné nule. Ale g je záporne definitné na W, teda musíme mať $w^i = 0$ pre $i = r+1,\dots,n$, t.j., $w = 0$. Tak nulový priestor T je $\{0\}$ a T je izomorfizmus W do podpriestoru X. V dôsledku toho, $\dim W \leq \dim X = r$ ako je požadované [3]. ■

Počet r vektorov e_i v akejkoľvek ortonormálnej báze pre g s $Q(e_i) = -1$ sa nazýva *index g*. Naďalej budeme predpokladať, že všetky ortonormálne bázy sú indexované tak, že tieto e_i sa vyskytujú na konci zoznamu a tak sú číslované následovne :

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$$

kde $Q(e_i) = 1$ pre $i=1,2,\dots, n-r$ a $Q(e_i) = -1$ pre $i=n-r+1,\dots,n$. V tejto báze pre $v = v^i e_i$ a $w = w^i e_i$ máme:

$$g(v, w) = v^1 w^1 + \dots + v^{n-r} w^{n-r} - v^{n-r+1} w^{n-r+1} - \dots - v^n w^n .$$ [3]

Gramovou maticou (usporiadanej k - tice) vektorov $\alpha = (t_1,\dots,t_k) \in V^n$ nazývame maticu

$$G(\alpha) = G(t_1,\dots,t_k) = \left(\langle t_i, t_j \rangle\right)_{k\times k} ,$$

jej determinant $|G(\alpha)|$ nazývame Gramovým determinantom vektorov $t_1,\dots,t_k$

$$\det G(\alpha) = |G(t_1,\dots,t_k)| = \begin{vmatrix} \langle t_1, t_1 \rangle & \cdots & \langle t_1, t_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle t_k, t_1 \rangle & \cdots & \langle t_k, t_k \rangle \end{vmatrix} .$$

Tvrdenie 2.1.3. *Nech $t_1,\dots,t_k$ sú ľubovoľné vektory na vektorovom priestore V so skalárnym súčinom. Potom*

(a) $G(t_1,\dots,t_k)$ je kladne semidefintná symetrická matica;

(b) vektory $t_1,\dots,t_k$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $G(t_1,\dots,t_k)$ je kladne definitná.

Dôkaz. Označme $G = G(t_1,\dots,t_k)$.

(a) Symetria matice G je priamym dôsledkom symetrie skalárneho súčinu. Treba však ukázať, že pre ľubovoľný vektor $c = (c_1,\dots,c_k) \in R^k$ platí $c \cdot G \cdot c^T \geq 0$. Položíme $v = c_1 t_1 + \dots + c_k t_k$. Potom z bilinearity vyplýva

$$c \cdot G \cdot c^T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle t_i, t_j \rangle = \langle v, v \rangle \geq 0 .$$

(b) Ak $t_1,\ldots,t_k$ sú lineárne nezávislé, tak tvoria bázu lineárneho podpriestoru $S = [t_1,\ldots,t_k] \subseteq V$. Zúženie skalárneho súčinu $g(v,w)$ na podpriestor S je skalárny súčin na S. G je maticou tejto formy vzhľadom na bázu $t_1,\ldots,t_k$.
Ak $t_1,\ldots,t_k$ sú lineárne závislé, tak v R^k existuje vektor $c = (c_1,\ldots,c_k) \neq 0$ taký, že $v = c_1t_1+\ldots+c_kt_k = 0$. Potom podľa (a)

$$c \cdot G \cdot c^T = \langle v,v \rangle = \langle 0,0 \rangle = 0 \ ,$$

teda G nie je kladne definitná.

Dôsledok 2.1.4. *Pre ľubovoľné* $t_1,\ldots,t_k \in V$ *platí*

$$\left|G(t_1,\ldots,t_k)\right| \geq 0 \quad .$$

Pritom $\left|G(t_1,\ldots,t_k)\right| \geq 0$ *práve vtedy, keď vektory* $t_1,\ldots,t_k$ *sú lineárne závislé.*

Špeciálne pre dva ľubovoľné vektory $t, u \in V$ platí

$$\left|G(t,u)\right| = \begin{vmatrix} \langle t,t \rangle & \langle t,u \rangle \\ \langle u,t \rangle & \langle u,u \rangle \end{vmatrix} = \langle t,t \rangle\langle u,u \rangle - \langle t,u \rangle\langle u,t \rangle = \|t\|^2\|u\|^2 - \langle t,u \rangle^2 \geq 0 \ ,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď vektory t, u sú lineárne závislé. Čím sa dokazuje aj nasledujúci vzťah známy ako *Cauchyho – Schwarzova nerovnosť* [4].

Tvrdenie 2.1.5. *Pre ľubovoľné vektory* $t, u \in V$ *v priestore* V *so skalárnym súčinom platí*

$$\left|\langle t,u \rangle\right| \leq \|u\|\|v\| \ ,$$

pričom rovnosť nastane, ak vektory t, u sú lineárne závislé.

Hovoríme, že báza $\alpha = (t_1,\ldots,t_k)$ lineárneho podpriestoru $S \subseteq V$ je ortonormálna, ak pre všetky $i, j \leq k$ platí $\langle t_i,t_j \rangle = 0$, ak $i \neq j$, a $\langle t_i,t_j \rangle = \pm 1$, t.j. práve vtedy, keď jej Gramova matica G(α) je diagonálna, len s prvkami ± 1 na diagonále [4].

2.2 Pseudoeuklidovské priestory

Pseudoeuklidovským priestorom nazývame ľubovoľný konečnorozmerný vektorový priestor V nad poľom R, vybavený regulárnou indefinitnou symetrickou bilineárnou formou. Túto formu nazývame *pseudoskalárny súčin* s označením g(v,w). *Signatúrou pseudoskalárneho priestoru V* rozumieme signatúru príslušnej formy skalárneho súčinu. Táto má tvar (p, q), kde $p, q \geq 1$ a $p+q = \dim V$. Teda signatúra (p, q); hovoríme tiež o *(p, q) – rozmernom pseudoeuklidovskom priestore.*

Štandardný pseudoskalárny súčin signatúry *(p,q)* na vektorovom priestore R^{p+q} je daný predpisom

$$g(v,w)=\sum_{i=1}^{p} v_i w_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} v_i w_i = v^T \cdot diag(I_p, -I_q)\cdot w\,.$$

Pseudoeuklidovský priestor R^n so štandardným pseudoskalárnym súčinom signatúry *(p,q)* budeme značiť $R^{(p,q)}$.
Štruktúra pseudoeuklidovského priestoru vzniká prepojením dvoch euklidovských štruktúr opačných znamienok. V dôsledku toho sa môže Cauchyho – Schwarzova nerovnosť niekedy zmeniť na opačnú [4].

2.3 Minkowského časopriestor

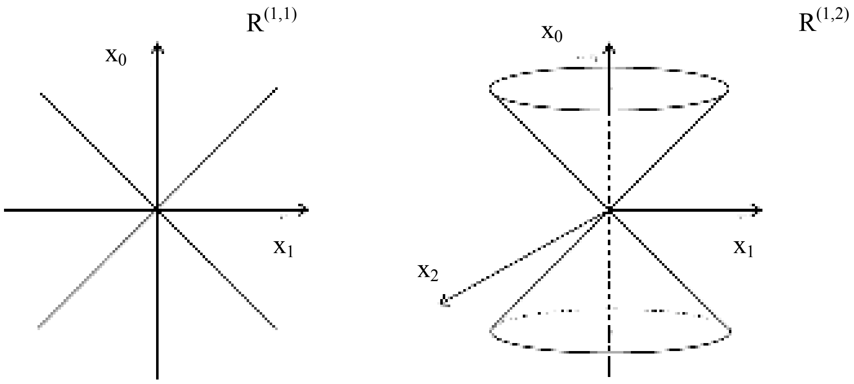
Pod Minkowského časopriestorom zvyčajne rozumieme pseudoeuklidovský priestor R^4 so štandardným pseudoskalárnym súčinom signatúry (1,3), t.j.

$$g(x,y)=x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = x^T \cdot diag(1,-I_3)\cdot y \ ,$$

pre $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)^T$, $y = (y_0,y_1,y_2,y_3)^T$. Súradnica x_0 sa interpretuje ako čas a x_1,x_2,x_3 ako súradnice polohy v euklidovskom priestore. *Minkowského časopriestorom* budeme teda nazývať ľubovoľný pseudoeuklidovský priestor V signatúry $(1,n)$, kde $n \geq 1$. $R^{(1,n)}$ označuje Minkowského časopriestor R^{n+1} so štandardným pseudoskalárnym súčinom signatúry $(1,n)$. Prvky priestoru sú nazývané *udalosťami* alebo *svetobodmi.*
Ak $x,y \in V$ sú dva svetobody, tak pseudoskalárny súčin $g(x-y, x-y)$ nazývame štvorcom ich *časopriestorovej odľahlosti*. Podľa toho, či $g(x-y, x-y)$ je väčšie, rovné alebo menšie ako 0 hovoríme, že udalosti x,y sú *časovo, svetelne,* resp. *priestorovo odľahlé.*
Množinu

$$LC(p)=\{x\in V; g(x-p,x-p)=0\}$$

všetkých udalostí, ktoré sú od daného svetobodu $p \in V$ svetelne odľahlé, nazývame *svetelný kužeľ* s počiatkom v p.



Obrázok č. 2. Svetelný kužeľ

Na obrázku vľavo vidíme svetelný kužeľ v Minkowského časopriestore $R^{(1,1)}$, tvorený dvoma priamkami $x_1 = \pm x_0$; na obrázku vpravo je znázornený svetelný kužeľ v Minkowského časopriestore $R^{(1,2)}$.

Všimnime si, že vyslaniu svetelného signálu v istom okamihu z istého miesta možno priradiť istú udalosť v Minkowského časopriestore $R^{(1,3)}$, ktorú si možno zvoliť za počiatok odpočtu času i súradnicovej sústavy v priestore. Tento signál sa šíri rovnakou rýchlosťou *c* všetkými smermi, takže v čase t > 0 bude vytvárať sférickú vlnoplochu s polomerom *ct* a rovnicou

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = c^2 t^2 .$$

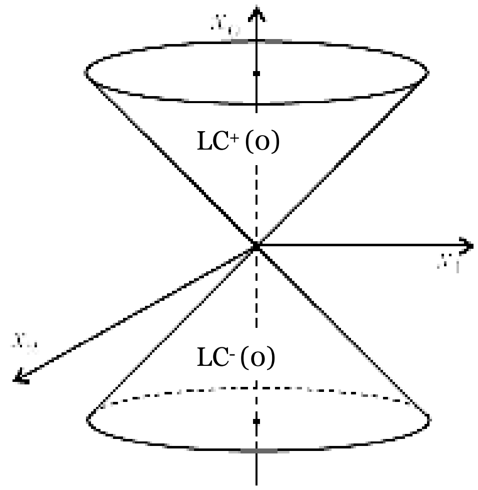
Po voľbe rýchlosti svetla za jednotku rýchlosti a substitúcii $x_0 = ct = t$ vidíme, že všetky svetobody, do ktorých dospeje svetelný signál vyslaný v okamihu 0 z počiatku priestorovej súradnej sústavy, vytvárajú „hornú polovicu“ svetelného kužeľa, nazývanú aj *svetelný kužeľ budúcnosti,*

$$LC^+(0) = \{x \in R^{(1,3)}; x_0 \geq 0 \; \& \; g(x,x) = 0\}.$$

Jeho „dolná polovica“, nazývaná aj *svetelný kužeľ minulosti,*

$$LC^-(0) = \{x \in R^{(1,3)}; x_0 \leq 0 \; \& \; g(x,x) = 0\}$$

je tvorená svetobodmi, z ktorých svetelný signál dospel do počiatku priestorovej súradnej sústavy v okamihu 0.

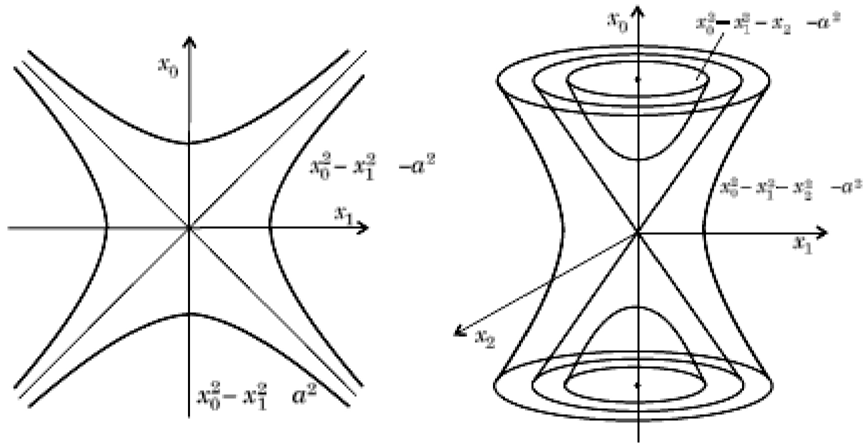


Obrázok č. 3. Svetelný kužel budúcnosti a minulosti

Pri potlačení jednej priestorovej súradnice v_3 možno situáciu názorne ilustrovať v Minkowského časopriestore $R^{(1,2)}$ (obrázok č. 2.). Miesto trojrozmerného priestoru si predstavme dvojrozmernú vodnú hladinu a miesto vyslania svetelného signálu hoďme kameň do vody. Vznikne vlnenie, ktorého čelo sa šíri po hladine v tvare kružnice a za čas $t > 0$ dospeje do vzdialenosti ct, kde c je rýchlosť jeho šírenia. "Hornú polovicu“ svetelného kužeľa si predstavme ako kruhové čelo vlny unášané plynúcim časom - jeho stav v nejakom okamihu t je daný rezom kužeľa rovinou $x_o = ct$.

Pre časový vektor $u \in V$ možno definovať dĺžku $\|u\| = \sqrt{g(u,u)}$ rovnako ako v euklidovskom prípade. Pre priestorový vektor však platí $\|v\| = \sqrt{-g(v,v)}$.

V euklidovskom priestore R^2 vytvárajú vektory rovnakej dĺžky $a > 0$ kružnicu s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 = a^2$; v R^3 je to sféra daná rovnicou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$. V Minkowského časopriestore časové vektory dĺžky $r > 0$ vytvárajú rovnoosú hyperbolu s rovnicou $x_0^2 - x_1^2 = a^2$ v $R^{(1,1)}$ a priestorové vektory dĺžky r vytvárajú rovnoosú hyperbolu $x_0^2 - x_1^2 = -a^2$ (obrázok č. 4. vľavo). V Minkowského časopriestore $R^{(1,2)}$ časové vektory tvoria dvojdielny rotačný hyperboloid s rovnicou $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2$, ktorý leží vnútri svetelného kužeľa, zodpovedajúce priestorové vektory tvoria jednodielny hyperboloid daný rovnicou $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -a^2$, ktorý obaľuje zvonka svetelný kužeľ (obrázok 4. vpravo) [4].



Obrázok č. 4. Rovnoosá hyperbola a hyperboloid

2.4 Inerciálny pozorovateľ a jeho svetočiara

Nehybný bod sa v $R^{(1,n)}$ „pohybuje", z dôvodu plynutia času, po zvislej priamke s parametrickými rovnicami $x_0 = t, x_1 = p_1, ..., x_n = p_n$, kde $(p_1,...,p_n)^T$ sú jeho priestorové súradnice v okamihu $t = 0$. Jej smerový vektor $e_0 = (1,0,...,0)^T$. Bod pohybujúci sa v $R^{(1,n)}$ rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v so zložkami $v_1,...,v_n$ v smere jednotlivých osí $x_1,...,x_n$ má dráhu priamky s parametrickými rovnicami $x_0 = t, x_1 = p_1 + v_1 t, ..., x_n = p_n + v_n t$, kde $(p_1,...,p_n)^T$ sú jeho priestorové súradnice v okamihu $t = 0$ a so smerovým vektorom $(1,v_1,...,v_n)^T$. No fyzikálne nedáva zmysel hovoriť o nehybnom alebo pohybujúcom sa pozorovateľovi, pretože kľud i pohyb sú relatívne. Môžeme však vyvodiť poznatok: *inerciálni pozorovatelia sa v Minkowského časopriestore pohybujú po priamkach s časovými smerovými vektormi.*

Svetočiara inerciálneho pozorovateľa je ľubovoľná *orientovaná* priamka vo V tvaru

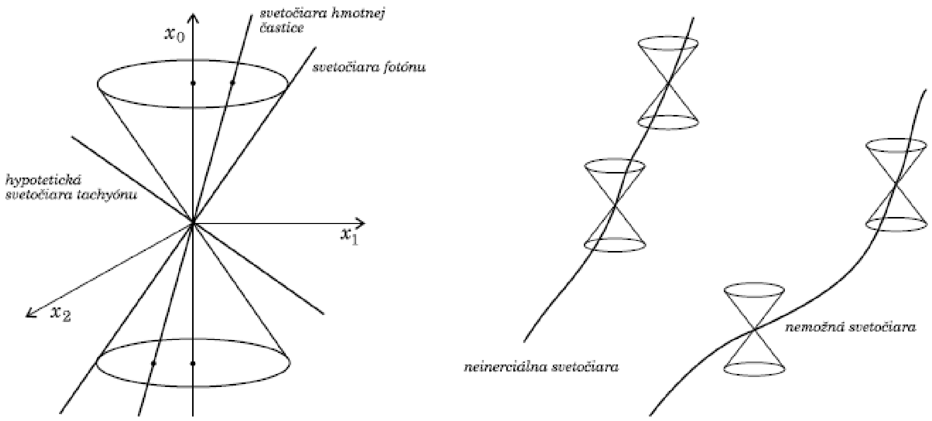
$$WL(p,a) = p + [a] = \{p + ta; t \in R\},$$

kde $p \in V$ je svetobod a $a \in V$ je časový vektor, s orientáciou zadanou vektorom a. Teda, ak je svetočiara orientovaná opačne, t.j. $WL(p,-a)$, považujeme ju za rôznu od $WL(p,a)$.

Svetočiara $WL(0,e_0)$ v $R^{(1,2)}$ je zobrazená ako os svetelného kužeľa $LC(0)$, kým svetočiara $WL(0,a)$ s iným časovým vektorom a akoby viedla bližšie popri jeho okraji. Z postulátu stálosti rýchlosti svetla však vyplýva, že svetočiary všetkých inerciálnych pozorovateľov „majú rovnako ďaleko k okraju svetelného kužeľa".

Svetočiary $WL(p,a)$ možno rovnako zaviesť pre ľubovoľné vektory $a \neq o$ vo V. Svetočiary $WL(p,a)$, kde a je svetelný vektor, t.j. $g(a, a) = 0$, predstavujú pohyb svetelnou rýchlosťou (takto sa však pohybujú len nehmotné častice - fotóny). Svetočiary $WL(p,a)$, kde a je priestorový vektor, teda $g(a,a) < o$, by zodpovedali pohybu nadsvetelnou rýchlosťou (tachyóny).

V Minkowského časopriestore nie je privilegovaná časová os, čím sú si všetky svetočiary rovnocenné. Pohyb inerciálneho pozorovateľa je pohyb vzhľadom na iného inerciálneho pozorovateľa. Svetočiara hmotného bodu v danom časopriestore V pohybujúceho sa premennou rýchlosťou nie je inerciálna. Zmena rýchlosti sa prejaví zakrivením svetočiary. Avšak, okamžitá rýchlosť hmotého bodu je menšia ako rýchlosť svetla, dotykový vektor k tejto svetočiare v každom jej svetobode p je časový, leží „vovnútri" svetelného kužeľa $LC(p)$.



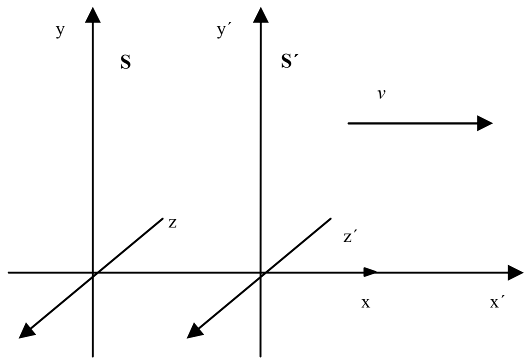
Obrázok č. 5. Svetočiary

K danej svetočiare $WL(p,a)$ inerciálneho pozorovateľa existuje jednoznačne určený vektor $a_o = g(a,a)^{-1/2}a$ taký, že $WL(p,a) = WL(p, a_o)$ a $g(a_o, a_o) = 1$, ktorý nazývame aj *časovým šípom* alebo *šípom času* (vo fyzike je používaný názov *štvorrýchlosť*). Parameter t vo vyjadrení svetobodov $x = p + ta_o$ svetočiary $WL(p,a_o)$ možno interpretovať ako vlastný čas inerciálneho pozorovateľa, počítaný od udalosti p, a daná svetočiara tak predstavuje vlastný tok času pozorovateľa. Orientácia svetočiary zodpovedá orientácii času z minulosti do budúcnosti.

Časové vektory a, b sa nazývajú *súhlasne orientované,* ak $g(a,b) > 0$, ak $g(a,b) < o$, a,b sú *nesúhlasne orientované.* Potom aj svetočiary $WL(p,a)$ a $WL(p,b)$ sú súhlasne alebo nesúhlasne orientované. Podobne aj *svetelný vektor $u \neq o$* je *súhlasne orientovaný s časovým vektorom a,* ak $g(a,u) > 0$, ak $g(a,b) < o$, sú nesúhlasne orientované [4].

2.5 Lorentzova transformácia

Lorentzova transformácia (LT) vo fyzike znamená množinu štyroch rovníc používaných na prepočet súradníc priestoru a času pri prechode medzi inerciálnymi súradnicovými sústavami za predpokladu konštantnej rýchlosti svetla vo všetkých inerciálnych sústavách. O Lorentzovej transformácii sa môže uvažovať aj ako o rotácii v Minkowského priestoročase. Všeobecnejšia množina transformácií zahrňujúca tiež transláciu aj priestorovú rotáciu súradnicových osí sa nazýva Poincarého grupa.
Predstavme si sústavu *S*', ktorá sa pohybuje voči inerciálnej sústave *S* rýchlosťou *v* v kladnom smere osi *x*.



Obrázok č. 6. Lorentzova transformácia

Pričom súradnice *x* a *t* platia v sústave *S* a súradnice *x*' a *t*' v sústave *S*', *c* je rýchlosť svetla.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

V prípade, že je rýchlosť svetla *c* omnoho väčšia ako *v*, je zlomok $\frac{v^2}{c^2}$ veľmi malý (takmer nulový) a môžeme ho zanedbať. Lorentzove transformácie takto prejdú na obyčajné Galileiho transformácie. To je aj dôvod, prečo nepozorujeme efekty ŠTR pri

bežných rýchlostiach. Pre prípad nadsvetelných rýchlostí $v > c$, strácajú Lorentzove transformácie zmysel (pod odmocninou by bolo záporné číslo) .
Lorentzova transformácia sa zapisuje v maticovej forme ako:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

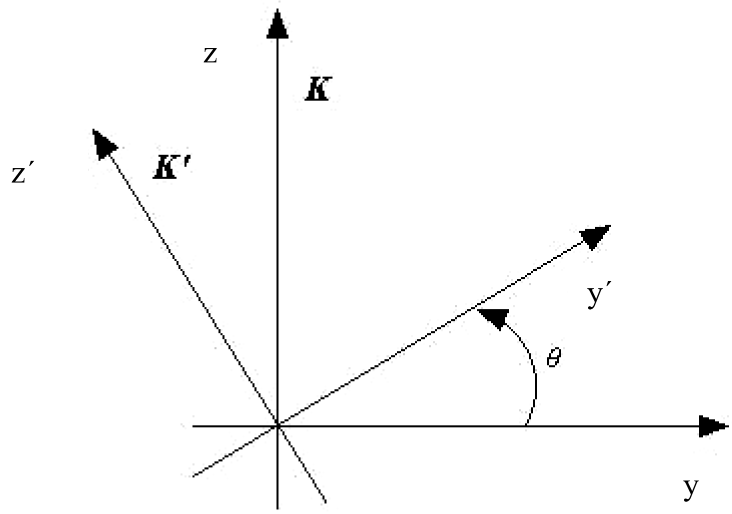
sa nazýva Lorentzov faktor a

$$\beta = \frac{v}{c}$$

je bezrozmerná rýchlosť.
Pri nízkych rýchlostiach sa táto transformácia blíži ku Galileovej transformácii z klasickej fyziky:

$$x' = x + vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t.$$

Teraz opíšeme preformulovanú Lorentzovu transformáciu Minkowskim.
Najprv by sme mali uvažovať situáciu, kedy sa súradnicový systém stáva rotačným vzhľadom na iný súradnicový systém.



Obrázok č. 7. Rotačný súradnicový systém

Ako je vidieť na obrázku č. 7., súradnicový systém K rotuje so zreteľom na $K´$ súradnicový systém pozdĺž x – ovej osi. Nasledujúci vzťah je vyvodený ľahko[5]:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tento vzťah sa nazýva súradnicová transformácia.

Systém $K´$ sa pohybuje rýchlosťou pozdĺž osi z. Podľa Einsteina, súradnicová transformácia medzi dvoma systémami je daná Lorentzovou transformáciou (LT)[5]:

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{zt}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Minkowského formulácia je nasledovná.

Nech je teraz ohnisko na súradniciach *z* a *t*. Potom nasledujúci vzťah nastáva [5]:

$$\begin{pmatrix} z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\gamma & -\beta c/\gamma \\ -\beta/\gamma c & 1/\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$$

Pomocou

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Substitúcia vzťahov

$$x_3 = z$$

$$x_4 = ict$$

dáva

$$\begin{pmatrix} x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\gamma & i\beta/\gamma \\ -i\beta/\gamma & 1/\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Teraz zaveďme

$$\cosh\theta = \frac{1}{\gamma}$$

Používaním vzťahu $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ môže byť vyvodené:

$$\sinh\theta = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\tanh = \beta$$

Nakoniec nahradením výsledku

$$\begin{pmatrix} x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & i\sinh\theta \\ -i\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos i\theta & \sin i\theta \\ -\sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Použitím vzťahov $\cosh i\theta = \cosh\theta$ a $\sinh i\theta = i\sinh\theta$.

Konečná transformačná matica teda je:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos i\theta & \sin i\theta \\ 0 & 0 & -\sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} .$$

Lorentzova transformácia sa zdá byť len rotáciou v úplnom súradnicovom systéme

(x_1, x_2, x_3, x_4) spolu s uhlom $i\theta$. Formulované týmto spôsobom, časová súradnica x_4 pôsobí ako iný súradnicový priestor. To iniciuje myšlienku, že priestor a čas sú dokonca viac navzájom spojené ako uvádza Lorentzova transformácia. Úplný súradnicový systém *(x_1, x_2, x_3, x_4)* je to, čo je nazývané ako Minkowského priestoročas, alebo len priestoročas [5].

2.6 Relatívnosť súčasnosti

Vďaka špeciálnej teórii relativity, čas prestal byť považovaný za absolútne plynúci. Pojem súčasnosti ako sa javí nám, tu stráca zmysel. Pretože ak máme dve udalosti, ktoré nastali v rôznych bodoch priestoru a sú pre jedného pozorovateľa súčasné, tak existuje aj iný pohybujúci sa pozorovateľ a pre neho už súčasné nie sú.
„Predstavme si dve veľmi dlhé rakety. Jedna z nich obrovskou rýchlosťou obieha druhú. Pritom v strede rýchlej rakety je silný zdroj svetla, ktorý zasvieti v okamžiku, keď sa rakety dostanú na rovnakú úroveň. Pozorovateľ C stojaci v strede obiehanej rakety bude vidieť, ako sa z miesta záblesku šíri guľová svetelná vlna. Pritom pozorovateľ B sa bude od miesta záblesku vzďaľovať a pozorovateľ A sa k nemu bude približovať. Pozorovateľovi C sa preto zdá úplne prirodzené, že pozorovateľ A bude prvým, ku ktorému dorazí svetelná vlna. Až potom ju zaregistruje pozorovateľ B. Pozorovatelia A a B na pohybujúcej rakete to však budú vnímať inak. Svetelný záblesk vyšiel zo stredu ich rakety. Keďže rýchlosť svetla nezávisí na rýchlosti rakety a oni majú od zdroja svetla rovnakú vzdialenosť, dorazí k nim záblesk v rovnakom čase. Pozorovatelia A a B teda zaregistrujú svetelný záblesk súčasne. Pozorovateľ C však bude tvrdiť, že registrácia záblesku pozorovateľmi A a B súčasná nebola. Keďže všetci traja sa nachádzajú v inerciálnych sústavách, nie je možné rozhodnúť, ktorý z nich má pravdu. Jednoducho každý má svoju pravdu a ukazuje sa, že pojem súčasnosti nie je dobre zadefinovaným pojmom.“ Bežne sa však stretávame len s rýchlosťami podstatne menšími ako je rýchlosť svetla, a teda aj odchýlka bude zanedbateľne malá.
Ak by sme ďalej uvažovali, mohli by sme aj zameniť poradie udalostí. Takže ak v jednej sústave sa odohrajú udalosti v poradí prvá, druhá. V inej, dostatočne rýchlej, sa odohrajú v poradí druhá, prvá. Zmeny ale nemôžu byť ľubovoľné. Pomocou Lorentzovej transformácie sa dá ukázať, že ak sa dve udalosti odohrajú v priestore dostatočne ďaleko od seba, môžeme zmeniť ich časové poradie. Dostatočná vzdialenosť je pritom taká, že medzi nimi nestihne preletieť svetelný lúč Takže tie

udalosti, ktorých poradie môžeme zameniť, nemôžu kauzálne súvisieť (prvá nemôže byť príčinou druhej). Ak by tieto udalosti súviseli, museli by byť spojené nejakou interakciou. Všetky známe interakcie sa ale šíria rýchlosťami nanajvýš rovnými rýchlosti svetla. A preto sa bežne nemôže stať zámena poradia udalostí. No a druhým dôvodom je, keď Lorentzove transformácie strácajú zmysel pri nadsvetelnej rýchlosti. Konkrétne: Nech v pohybujúcej sa sústave *S'* nastanú dve udalosti v rovnakom čase *t'* v dvoch rôznych bodoch $x_1^{'}$ a $x_2^{'}$. Hovoríme, že v sústave *S'* sú tieto udalosti súčasné ($\Delta t' = t_2^{'} - t_1^{'} = 0$) a nesúmiestne ($\Delta x' = x_2^{'} - x_1^{'} \neq 0$). Použitím LT určíme, kedy nastanú tieto dve udalosti pre pozorovateľa v sústave *S*, voči ktorému sa sústava *S'* pohybuje. Dostaneme

$$t_1 = \gamma\left[t' + \frac{v}{c^2}x_1^{'}\right]$$

$$t_2 = \gamma\left[t' + \frac{v}{c^2}x_2^{'}\right] \quad .$$

Pričom pre zjednodušenie zápisu používame vzťah $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Tieto dve udalosti sú z pohľadu pozorovateľa v sústave *S* oddelené časovým intervalom $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma v(x_2^{'} - x_1^{'}) / c^2 \neq 0$. Je teda jasné, že pozorovateľovi v *S* sa tieto dve udalosti nebudú zdať súčasné. Súčasné by boli len za predpokladu, že by boli aj súmiestne, čiže v sústave *S'* by sa odohrali na tom istom mieste [6].

2.7 Dilatácia času

Známy jav, kedy všetky deje prebiehajúce v pohybujúcich sa sústavách, sa z hľadiska nehybného pozorovateľa predlžujú. Predlžuje sa totiž samotné plynutie času v pohybujúcej sa sústave.

Majme hodiny H' pevne umiestnené v sústave S', kde majú súradnice $[x_1',0,0]$. V okamihu t_1', resp. t_2', meranom na hodinách H' míňajú iné hodiny H_1, resp. H_2, pevne umiestnené v sústave *S* v polohe $[x_1,0,0]$, resp. $[x_2,0,0]$. Potom

$$t_1 = \frac{t_1^{'} + \frac{v}{c^2}x_1^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ,$$

kde t_1 je čas meraný na hodinách H_1, t_1' je čas meraný na hodinách $H´$, $x_1^{'}$ je poloha hodín H_1 v S' rovnaká s polohou hodín $H´$ v S'.

V okamihu míňania hodín v S platí:

$$t_2 = \frac{t_2^{'} + \frac{v}{c^2}x_2^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

kde t_2 je čas meraný na hodinách H_2, t_2' je čas meraný na hodinách $H,$ $x_2^{'}$ je poloha hodín H_2 v S' a je rovnaká s polohou hodín $H´$ v S'.

Po dobu míňania hodín v S platí:

$$t_2' - t_1 = \frac{\overbrace{t_2' - t_1'}^{\neq 0} - \frac{v}{c^2}\overbrace{(x_2' - x_1')}^{0}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Dostávame:

$$-\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

Δt je doba medzi míňaním bodu v S' a $\Delta t´$ je doba medzi míňaním bodu v S.

Platí $v < c \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$, t.j. $\Delta t > \Delta t'$, čiže doba ľubovoľného deja meraná v sústave, v ktorej sa tento dej odohráva, je vždy kratší ako doba rovnakého deja meraná pozorovateľom, voči ktorému sa míňaná sústava pohybuje [6].

2.8 Kontrakcia dĺžky

Podľa ŠTR v pohybujúcej sa sústave dochádza ku skracovaniu rozmerov rovnobežných so smerom jej pohybu. Predstavme si dve sústavy S a $S´$, ktoré sa vzhľadom na seba pohybujú rýchlosťou *v*. V smere tohto pohybu máme v sústave $S´$ položenú tyč dĺžky l_0. Pozorovateľovi v sústave S sa bude zdať táto tyč kratšia. Keby zmeral jej dĺžku, zistil by, že platí vzťah $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Takže čím rýchlejšie sa sústava *S'* pohybuje voči sústave *S*, tým bude dĺžka *l* kratšia.

Nech v pohybujúcej sa sústave *S'* leží v x - ovej osi tyč dĺžky l_o. Jej konce majú súradnice x_1' a x_2' ($l_o = x_2' - x_1'$). Keď teraz chceme zistiť jej dĺžku v systéme *S*, voči ktorému sa *S'* pohybuje, môžeme zmerať súčasne súradnice koncových bodov tyče. Tomuto meraniu budú v sústave *S* zodpovedať dva body (x_1,t) a (x_2,t). Pomocou LT určíme, súradnice týchto udalostí pre pozorovateľa v sústave *S'*

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt)$$
$$x_2' = \gamma(x_2 - vt)$$

Odčítaním týchto vzťahov máme

$$l_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1).$$

V sústave *S* nameriame preto dĺžku

$$l = (x_2 - x_1) = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Vidíme, že dĺžka tyče *l* je kratšia oproti jej pôvodnej dĺžke l_o. Takže pri pohybujúcich sa telesách dochádza ku skracovaniu (kontrakcii) dĺžok [6].

3 Hyperbolická geometria

3.1 Úvod

Hyperbolická geometria bola vytvorená v prvej polovici 19.storočia uprostred pochopenia euklidovského axiomatického základu pre geometriu. Jedná sa o jeden typ neeuklidovskej geometrie, ktorá vyraďuje jednu Euklidovu axiómu. Einstein a Minkowski našli v neeuklidovskej geometrii geometrický základ pre pochopenie fyzikálneho času a priestoru.

Na začiatku 20. stor. každý vážny študent matematiky a fyziky študoval neeuklidovskú geometriu. To nebola pravda z matematikov a fyzikov našej generácie. Avšak s postupom času je čoraz viac zrejmé, že negatívne zakrivené geometrie, z ktorých hyperbolická neeuklidovská geometria je prototyp, sú generické formy geometrie. Majú hlboké aplikácie pre štúdium komplexných premenných, na topológiu dvoj- a troj-dimenzionálnych variet, k štúdiu nekonečných usporiadaní prezentovaných konečne, na fyziku, a ostatných rôznorodých oblastí matematiky [7].

3.2 Začiatky hyperbolickej geometrie

Euklidove postuláty:

1. Každá dvojica bodov môže byť spojená jednou a len jednou priamkou.

2. Každá priamka môže byť nekonečne predĺžená v oboch smeroch.

3. Z ľubovoľného bodu možno opísať kružnicu s ľubovoľným polomerom.

4. Všetky pravé uhly sú zhodné.

5. Ak priamka pretínajúca dve priamky vytvára vnútorné uhly rovnakej strane menšie ako dva pravé uhly, tak sa tie dve priamky, ak sú nekonečne predĺžené, stretnú na tej strane, na ktorej sú uhly menšie ako dva pravé uhly. (Keď dve priamky pretínajú tretiu tak, že súčet vnútorných uhlov na niektorej strane je menší ako dva pravé uhly, potom tieto dve priamky sa musia nutne pretnúť práve na tejto strane.)

Z týchto piatich postulátov, piaty je zďaleka najviac komplikovaný a neprirodzený. Vzhľadom k prvým štyrom, piaty postulát možno ľahko vidieť ako ekvivalent k nasledujúcemu paralelnému postulátu:

5'. Bodom neležiacim na danej priamke možno viest práve jednu rovnobežku s danou priamkou.

Za dvetisíc rokov sa matematici pokúsil odvodiť piaty postulát zo štyroch postulátov jednoduchšie. V každom prípade jeden skrátený dôkaz piateho postulátu na spojenie z prvých štyroch postulátov s dodatočným prirodzeným postulátom, ktorý sa v skutočnosti ukázal byť rovnocenný piatemu:

Proclus (cca. 400 ad), používal ako doplnkový postulát predpoklad, že body v konštantnej vzdialenosti od danej krivky na jednej strane tvoria priamku.

Angličan John Wallis (1616-1703) používal predpoklad, že ku každému trojuholníku je podobný trojuholník každej danej veľkosti.

Talian Saccheri Girolamo (1667-1733) považoval štvoruholníky s dvoma uhlami pri základni rovnajúcim sa pravým uhlom a s kolmými stranami majúcimi rovnakú dĺžku a vyvodil dôsledky z (ne-euklidovskej) možnosti, že zostávajúce dva uhly neboli pravé uhly.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) pokračoval v podobnej móde a napísal rozsiahlu prácu na túto tému, posmrtne publikovanú v roku 1786.

Gottingenský matematik Kastner (1719-1800) usmernil prácu študenta Klugela (1739-1812), ktorý dáva približne tridsať dôkazových pokusov o paralelný postulát. Rozhodujúci pokrok prišiel v devätnástom storočí, keď matematici opustili snahu nájsť rozpor v popieraní piateho postulátu a namiesto toho vypracovali starostlivo a kompletne následky takého popretia. Zistilo sa, že koherentná teória vzniká, ak namiesto toho jeden predpokladá, že:

Majme priamku a bod neležiaci na nej, daným bodom prechádza viac ako jedna priamka, ktorá je rovnobežná s danou priamkou

Tento postulát je pre hyperbolickú geometriu niečo ako je paralelný postulát 5' pre euklidovskú geometriu.
Nezvyčajné dôsledky tejto zmeny sa stali uznávanými ako základné a prekvapujúce vlastnosti neeuklidovskej geometrie: rovnomerné krivky na rovnakej strane priamky neboli v skutočnosti rovné, ale zakrivené; podobne torjuholníky boli kongruentné; sumy uhlov v trojuholníku neboli rovnajúce sa π, atď.

Gauss, Bolyai a Lobačevský rozvinuli neeuklidovskú geometriu samozrejme na syntetickej báze. Nemali žiadne analytické ponímanie, ani analytický model neeuklidovskej geometrie.
Nedokázali nespornosť ich geometrií. Namiesto toho sa uspokojili s presvedčením, že dosiahli rozsiahli prieskum v neeuklidovskej geometrii, kde teoréma po teoréme sa dôsledne zhoduje s tým, čo objavili. Lobačevský vyvinul neeuklidovskú trigonometriu, ktorá je paralelná s trigonometrickými vzorcami euklidovskej geometrie.
Základ nevyhnutný pre analytickú štúdiu hyperbolickej neeuklidovskej geometrie bol položený Leonhardom Eulerom, Gaspardom Mongeom a Gaussom v ich štúdiách zakrivených plôch. V roku 1837 Lobačevský naznačil, že zakrivené plochy konštantného negatívneho zakrivenia môžu reprezentovať neeuklidovskú geometriu. O dva roky neskôr, pracujúc nezávisle a značne ignorujúc Lobačevského prácu, ešte aj publikovanú v rovnakom žurnáli, Minding urobil rozsiahlu štúdiu plôch konštantného zakrivenia a potvrdil Lobačevského tvrdenie. Bernhard Riemann (1826–1866) v jeho úplnom zovšeobecnení [Riemann 1854] zakrivených plôch štúdia o tom, čo sa teraz nazýva Riemannove variety, uznávanú všetkými týmito vzťahmi a v

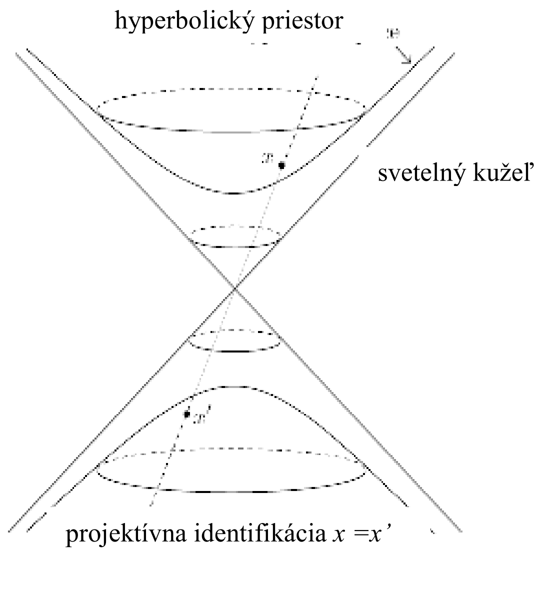
skutočnosti sa do určitej miery používa ako odrazový mostík pre jeho štúdium. Všetky spojenia medzi týmito predmetmi boli čiastočne zdôraznené Eugeniom Beltramim v roku 1868. Táto analytická práca poskytla osobitné analytické modely pre neeuklidovskú geometriu a stanovila skutočnosť, že neeuklidovská geometria bola presne tak konzistentná ako sama euklidovská geometria [7].

3.3 Prečo sa nazýva hyperbolická geometria?

Neeuklidovská geometria Gaussa, Lobačevského a Bolya je zvyčajne nazývaná *hyperbolická geometria,* kvôli jedenému z jej veľmi prirodzených analytických modelov.

Model je opísaný následovne.

Klasický priestor a čas boli považované za nezávislé veličiny; udalosť mohla byť daná súradnicami $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in R^{n+1}$, so súradnicou x_{n+1} reprezentujúcou čas a jedinou rozumnou metrikou bola euklidovská metrika s kladne definovanou štvorcovou normou $x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2$.



Obrázok č. 8. Minkowského priestor

Relativita zmenila všetko; v rovinnej priestoro-časovej geometrii rýchlosť svetla by mala byť konštantná pri pohľade z akejkoľvek inerciálnej sústavy. Minkowského model pre priestoro-časovú geometriu je opäť R^{n+1}, ale s indefinitnou normou $x_1^2+\ldots+x_n^2-x_{n+1}^2$ definujúcou vzdialenosť. *Svetelný kužeľ* je definovaný ako množina bodov normy 0. Pre body $(x^1,\ldots,x^n,x^{n+1})$ na svetelnom kuželi, euklidovská priestorová vzdialenosť

$$\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{1/2}$$

od počiatku sa rovná času x^{n+1} od počiatku; táto rovnosť vyjadruje konštantnú rýchlosť svetla začínajúcu v počiatku.

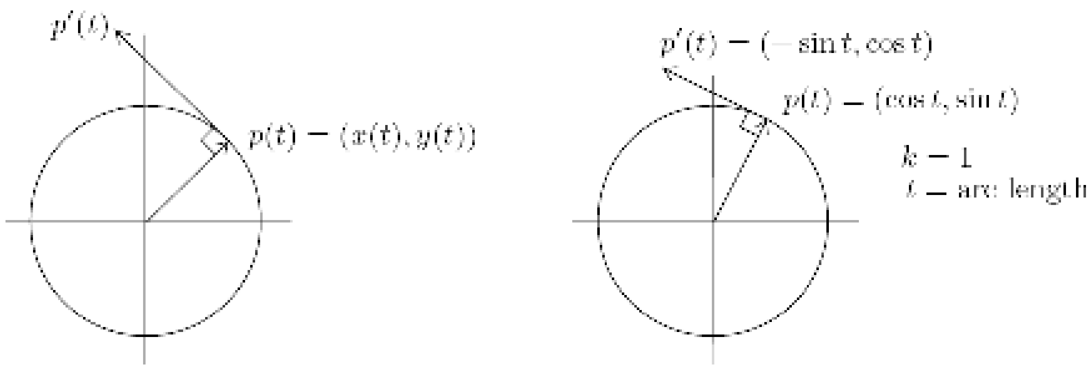
Tieto normy majú združené vnútorné súčiny, označenie . pre euklidovský vnútorný súčin a * pre neeuklidovský.

$$v\cdot w=v_1w_1+\ldots+v_nw_n$$
$$v*w=v_1w_1+\ldots-v_nw_n\quad.$$

Ak vezmeme do úvahy množinu bodov konštantnej štvorcovej vzdialenosti od počiatku, získali sme v euklidovskom prípade gule rôznych polomerov a v Minkowského priestore hyperboloidy jedného alebo dvoch dielov. Môžeme teda definovať jednotku *n -rozmernej* gule v euklidovskom priestore R^{n+1} podľa vzorca $S^n=\{x\in R^{n+1}:x\cdot x=1\}$ a n-rozmerný hyperbolický priestor podľa vzorca $\{x\in R^{n+1}:x*x=-1\}$

Tak hyperbolický priestor je dvojdielny hyperboloid, ktoré je možné uvažovať ako „guľu“ štvorcového polomeru -1 alebo ako polomer $i=\sqrt{-1}$; odtiaľ meno hyperbolická geometria. Pozri obrázok č. 8. .

Zvyčajne sme sa vzťahovali len na jeden z dvoch dielov hyperboloidu alebo sme identifikovali dva diely pomocou projekcie [7].



hlavná cesta cesta rýchlosti 1

Obrázok č. 9. Kruh S^1

3.4 Pochopenie jedno - rozmerného prípadu

Kľúčom k pochopeniu hyperbolického priestoru H^n a jeho vlastnej metriky pochádza z indefinitného Minkowského skalárneho súčinu *, najskôr rozoberme prípad $n=1$. Argumentujeme podobne ako v euklidovskom prípade a zostavíme obdobu obnovením známeho euklidovského prípadu kružnice S^1.

Nech $p : (-\infty,\infty) \to S^1$ *je hladká cesta s* $p(0)=(1,0)$. *Ak napíšeme súradnice* $p(t)= (x(t),y(t))$ *kde* $x^2 + y^2 = 1$, *potom derivovaním tejto rovnice nájdeme*

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)=0 ,$$

Alebo inými slovami $p(t)\cdot p'(t)=0$. To znamená, že vektor rýchlosti $p'(t)$ je euklidovsky kolmý na pozíciu vektora $p(t)$. Najmä môžeme písať $p'(t) = k(t)(-y(t), x(t))$, pretože dotyčnica priestoru na S^1 v $p(t)$ je jednorozmerná a $(-y(t), x(t))$ je euklidovsky kolmá na $p=(x,y)$. Pozri obrázok 2.

Ak budeme okrem toho predpokladať, že $p(t)$ má *konštantnú rýchlosť* 1, potom

$$1=\left|p'(t)\right|=|k(t)|\sqrt{(-y)^2+x^2}=|k(t)|$$

a tak $k \equiv \pm 1$. Položením $k \equiv 1$ vidíme, že $p = (x, y)$ cestuje po jednotkovej kružnici v euklidovskej rovine konštantnou rýchlosťou1. Preto môžeme podľa definície identifikovať t s euklidovskou dĺžkou oblúka na jednotkovej kružnici, $x = x(t)$ $\cos t$ a $y = y(t)$ $\sin t$, vidíme, že sme urobili kompletný dôkaz tvrdenia o derivácii sínusu a kosínusu. Vo vzorcoch, pričom $k=1$, musíme preukázať, že x a y (kosínus a sínus) spĺňajú systém diferenciálnych rovníc

$$x'(t) = -y(t)\ , \qquad y'(t) = x(t)\ ,$$

s počiatočnou podmienkou $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Ak potom potrebujeme aplikovať len niektorú základnú metódu, ako je metóda neurčitých koeficientov pre ľahké odhalenie klasických mocninových radov pre sínus a kosínus

$$\cos t= 1 - t^2/2! + t^4/4! - \dots ,$$

$$\sin t = t - t^3/3! + t^5/5! - \dots ,$$

Hyperbolický výpočet v H^1 vyžaduje len nový východiskový bod $(0,1)$ miesto $(1,0)$, nahradenie kružnice S^1 hyperbolou H^1, nahradenie euklidovského vnútorného súčinu . hyperbolickým vnútorným súčinom * , príležitostné nahradenie +1 na -1, nahradenie euklidovskej oblúkovej dĺžky hyperbolickou oblúkovou dĺžkou, nahradenie kosínusu hyperbolickým sínusom a nahradenie sínusu hyperbolickým kosínusom. Tu je výpočet.

Nech p: (- ∞, ∞) → H^1 je hladká cesta s p (0) = (0,1). Ak napíšeme v súradniciach p(t)= (x(t) ,y (t)), kde $x^2 - y^2 = -1$, potom deriváciou tejto rovnice nájdeme

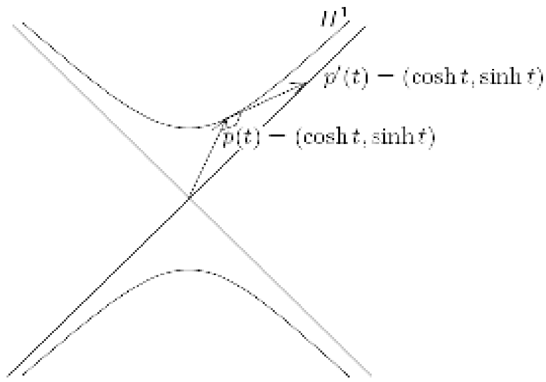
$$2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t)=0 ;$$

Inými slovami *p(t)* ∗ p*´(t)* = 0. To znamená, že vektor rýchlosti *p´(t)* je hyperbolicky kolmý

na pozíciu pozíciu vektora *p(t)*. Predovšetkým môžeme písať *p´(t) = k(t)(y(t),x(t))*, pretože dotyčnica priestoru na hyperbolu H^1 v *p(t)* je jednorozmerná a vektor *(y(t), x(t))* je hyperbolicky kolmý na *p = (x, y)*. Pozri obrázok 3.

Ak budeme okrem toho predpokladať, že *p(t)* má *konštantnú rýchlosť* 1, potom

$1 = |p'(t)| = |k(t)|\sqrt{y^2 - x^2} = |k(t)|$ a teda $k \equiv \pm 1$. Ak $k \equiv 1$ vidíme, že *p = (x, y)* sa pohybuje doprava pozdĺž „jednotkovej“ hyperboly v Minkowského rovine konštantnou hyperbolickou rýchlosťou 1. Preto môžeme a priori určiť *t* s hyperbolickou oblúkovou dĺžkou na jednotkovej hyperbole H^1, *x* = *x*(*t*) so *sinh t* a *y* = *y(t)* s *cosh t*. Vidíme, že sme dali kompletný dôkaz o derivácii hyperbolického kosínusu a hyperbolického sínusu.



Obrázok č. 10. Hyperbolická čiara H^1

Vo vzorcoch, kde *k=1*, sme ukázali, že *x* a *y* (hyperbolický sínus a kosínus) spĺňajú systém diferenciálnych rovníc

$$x'(t) = y(t), \qquad y'(t) = x(t),$$

s počiatočnou podmienkou *x(0)=0, y(0)=1*. Ak potom potrebujeme aplikovať niektoré základné metódy, ako je metóda neurčitých koeficientov pre ľahšie objavenie klasických mocninových radov pre hyperbolický sínus a kosínus:

$$\cos t = 1 + t^2/2! + t^4/4! + \dots ,$$

$$sin\ t = t + t^3/3! + t^5/5! + \ldots .$$

Poznamenajme pozoruhodnú skutočnosť, že náš výpočet ukázal, že nenulová dotyčnica vektora na H^1 má štvorcovú normu s ohľadom na indefinitný vnútorný súčin * ; to znamená, že indefinitný vnútorný súčin v Minkowského rovine ohraničuje kladne definitný vnútorný súčin na hyperbolickom jedno – priestore. Nájdeme tiež podobné pravdivé výsledky vo vyšších dimenziách a vzorce, ktoré sme vypočítali pre hyperbolickú dĺžku v jednorozmernom priestore rovnako aplikujeme do viacrozmerných priestorov [7].

3.5 Zovšeobecnenie na vyššie dimenzie

Vo vyšších dimenziách, H^n je vnútri R^{n+1} ako hyperboloid. Ak p: $(-\infty, \infty) \rightarrow H^n$ opäť opisuje hladkú cestu, potom z definovaných rovníc stále máme $p(t)*p'(t) = 0$. Položením ciest v rôznych smeroch idúcimi cez bod $p(t)$ vidíme, že vektor dotyčnice k H^n v $p(t)$ vytvára hyperbolický ortogonálny doplnok k vektoru $p(t)$ (vektory sú hyperbolicky ortogonálne, ak ich vnútorný súčin vzhľadom na * je 0).

Prvá metóda využíva Cauchyho – Schwarzovu nerovnosť $(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y)$. Predpokladajme, že $p = (\hat{p}, p_{n+1})$ je v H^n a $x = (\hat{x}, x_{n+1}) \neq 0$ je v dotykovom priestore z H^n v p, kde $\hat{p}$, $\hat{x} \in R^n$. Ak $x_{n+1} = 0$, potom $x * x = x \cdot x$. Odtiaľ $x * x > 0$ ak $x_{n+1} = 0$, teda môžeme predpokladať, že $x_{n+1} \neq 0$. Potom $0 = x * p = \hat{x} \cdot \hat{p} - x_{n+1} p_{n+1}$ a $-1 = p * p = \hat{p} \cdot \hat{p} - p_{n+1}^2$. Odtiaľ Cauchy – Schwarz dáva

$$(\hat{x} \cdot \hat{x})(\hat{p} \cdot \hat{p}) \geq (\hat{x} \cdot \hat{p})^2 = (x_{n+1} p_{n+1})^2 = x_{n+1}^2 (\hat{p} \cdot \hat{p} + 1)$$

Preto $(x * x)(\hat{p} \cdot \hat{p}) \geq x_{n+1}^2$, čo znamená $x * x > 0$, ak $x \neq 0$.

Druhá metóda analyzuje vnútorný súčin * algebraicky. Položme bázu $p, p_1, \ldots, p_n$ pre R^{n+1}, kde p je bod záujmu v H^n a zvyšné vektory tvoria n – rozmerný dotykový priestor k H^n v p. Teraz aplikujeme Gram – Schmidtov ortogonalizačný proces na túto bázu. Vzhľadom k tomu, že $p * p = -1$ podľa definičných rovníc pre H^n, vektor p, teraz už jednotka vektoru, je procesom nezmenený a zvyšok výslednej bázy zahŕňa ortogonálny doplnok p, ktorý je dotykovým priestorom k H^n v p. Pretože vnútorný súčin * nie je degenerovaný, výsledná matica je diagonálna so vstupmi ±1 na diagonálach, jedna z -1-tkových zodpovedá vektoru p.

Podľa Sylvesterovej vety o zotrvačnosti rozdiel počtov -1 a +1 na diagonále je invariantom vnútorného súčinu (číslo 1 je rozmer najväčšieho podpriestoru, na ktorom je metrika kladne definitná). Ale so štandardnou bázou pre R^{n+1} existuje práve jedna -1 na diagonále a zostávajúce vstupy sú +1. A preto je to rovnaké ako na našej báze. Teda matica vnútorného súčinu obmedzená na náš dotykový priestor je rovnaká matici usporiadania n; to znamená, že obmedzenie metriky na dotykový priestor je kladne definitné.
Takže vnútorný súčin * obmedzený na H^n definuje nefalšovanú Riemanovu metriku na H^n.

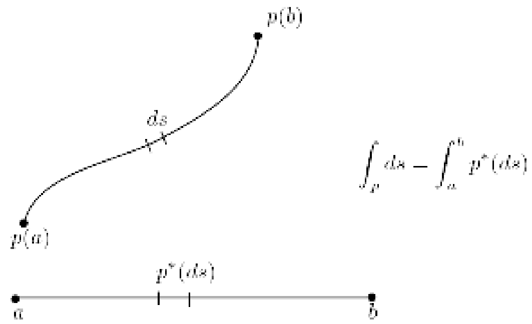
3.6 Základy Riemanovej geometrie

Naše analytické modely hyperbolickej geometrie budú všetky diferencovateľné variety Riemanovou metrikou.
Prvý definuje Riemanovu metriku a súvisiace geometrické prvky na Euklidovskom priestore.
Riemanova metrika ds^2 na Euklidovskom priestore R^n je funkcia, ktorá každému bodu $p \in R^n$ priradí kladne definovaný symetrický vnútorný súčin na dotykovom priestore v p, tento vnútorný súčin je rôzne diferencovateľný bodom p. Vzhľadom k tomuto vnútornému súčinu je možné definovať ľubovoľný počet štandardných geometrických pojmov, ako je dĺžka $|x|$ vektora x, kde $|x|^2 = x \cdot x$, uhol θ medzi dvoma vektormi x a y, kde $\cos \theta = (x \cdot y)/(|x| \cdot |y|)$, potom dĺžka prvku $ds = \sqrt{ds^2}$ a okolie prvku dA, kde dA sa počíta nasledovne: ak $x_1, \ldots, x_n$ sú štandardné súradnice na R^n, potom ds^2 má tvar $\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dy_j$ a matica (g_{ij}) závisí diferenciálne od x a je kladne definovaná a symetrická. Nech $\sqrt{|g|}$ označuje druhú mocninu determinantu (g_{ij}). Potom $dA = \sqrt{|g|} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Ak $f : R^k \to R^n$ je diferencovateľné rozdelenie, môžeme definovať stiahnutie $f^*(ds^2)$ vzorcom

$$f^*(ds^2)(v, w) = ds^2(Df(v), Df(w))$$

Kde v a w sú dotykové vektory v bode u z R^k a Df je derivované rozdelenie, ktoré zobrazuje dotykové vektory v u na dotykové vektory v $x=f(u)$. Stiahnutie sa dá vypočítať aj formálne nahradením $g^{ij}(x)$, kde $x \in R^n$, $g_{ij} \circ f(u)$, kde $u \in R^k$ a $f(u)=x$, nahradením dx_i $\sum_j \left(\partial f_i / \partial u_j\right) du_j$. Môžeme vypočítať dĺžku cesty $p:[a,b] \rightarrow R^n$ integrovaním *ds* cez *p:*

$$\int_p ds = \int_a^b p^*(ds).$$



Obrázok č. 11. Dĺžka cesty

Riemanova vzdialenosť *d(p,q)* medzi dvoma bodmi *p* a *q* v R^n je definovaná ako infimum dĺžky cesty všetkých ciest spájajúich *p* a *q*.

Napokon zovšeobecníme všetky tieto pojmy do variety vyžiadaním Riemanovej metriky na každú súradnicovú tabuľku s týmito metrikami invariantnými pod stiahnutím pre prechod funkcií spájajúcich tieto tabuľky; to znamená, ak ds_1^2 je Riemanova metrika v tabuľke jedna a ak ds_2^2 je Riemanova metrika v tabuľke dva, potom $f^*\left(ds_2^2\right) = ds_1^2$. Štandardná zmena rôznych vzorcov z výpočtu ukazuje, že dĺžka cesty a oblasti sú invariantné pri zmene tabuľky [7].

Záver

Minkowského časopriestor má významný prínos z matematického hľadiska. Slúži pre lepšiu predstavivosť špeciálnej teórie relativity jej geometrickou reprezentáciu. Teda si vieme graficky znázorniť body v priestore, ale to už nielen ako v klasickom 3D priestore, ale už ako v 4D priestore. Tým vzniká časopriestor, pretože ako štvrtú súradnicu berieme čas.

Daná téma sa však môže javiť zložitou z dôvodu, že sa nejedná o klasickú euklidovskú geometriu.

Predložená práca sa zaoberá problematikou Minkowského časopriestoru. Dáva základný prehľad o jeho vlastnostiach a definíciách.

Pre mňa to bola nová oblasť predmetu skúmania, ktorá ma obohatila o nové myšlienky chápania priestoru a času ako celku a vzťahov medzi nimi.

Zoznam použitej literatúry

[1] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Minkowski.html

[2] http://www.spacetimesociety.org/minkowski.html

[3] Naber Gregory L. The geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of the special theory of relativity. New York: Springer – Verlag, Inc. 1992, s. 1-9. ISBN 0-387-97848-8

[4] http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/leto16.pdf

[5] http://www.ronaldkoster.net//minkowski.pdf

[6] http://www.physics.sk/subory/clanky//data/jemny%20uvod%20do%20STR.pdf

[7] Cannon James W., Floyd William J., Kenyon Richard, Parry Walter R. Hyperbolic Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, s. 59 – 69. ISBN 0-521-62962-4