

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



Duálne čísla

Bakalárska práca

Študijný odbor: Matematika

Vedúci bakalárskej práce:
RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bakalár:
Jakub Mišún

Bratislava 2010

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava, 23. 03. 2010

.....

Vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu mojej bakalárskej práce, doktorovi Pavlovi Chalmovianskému za jeho odbornú pomoc a pripomienky pri jej vypracovaní.

Názov práce: Duálne čísla

Pracovisko: KAGDM, FMFI UK v Bratislave

Autor: Jakub Mišún

Vedúci BP: RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Konzultant

BP:

Dátum: 23.03. 2010

Kľúčové slová: duálne čísla, Studyho sféra, duálny vektor

Anotácia: Skúmanie vlastností a spávania duálnych čísel.

Predhovor

Pre laickú verejnosť sa môžu duálne čísla, podobne ako napríklad aj komplexné, javiť ako zbytočné rozšírenie, už aj tak obrovskej číselnej sústavy.

Veď, týmto spôsobom by sme mohli vymýšľať stále nové a nové číselné množiny, ktoré nikdy nenájdu uplatnenie, možno ak tak ako zaujímavosť spomínanú v popularizačnej literatúre, pretože existujú len v myšliach matematikov a fyzikov.

To však nie je pravda. Číselné sústavy nevznikajú z čistého rozmaru matematikov, ktorí si potrebujú dokázať, že niečím prispeli. Vznikajú z potreby a neodvratnej nutnosti začať si ich všímať. Matematici ich totiž nevymýšľajú, oni sú tu totiž stále prítomné, stačí ich len objaviť.

Tento proces však nemôže trvať donekonečna. Po objavení komplexných čísel, W. Hamilton ešte uverejnil pojem kvaterniony (ktoré číslami vlastne nie sú, ale sú im veľmi blízke), ktoré sa pomocou duálnych čísel rozšírili na oktoniony. Aj napriek pokusom spoločnosť čísel ešte obohatiť, sa napokon ukázalo, že nič nové sa do nej už priniesť nedá.

Moja bakalárska práca sa snaží ukázať, že duálne čísla, nech sú akokoľvek abstraktné, sú plnohodnotnými číslami a nachádzame pre ne široké uplatnenie, najmä na poli fyziky.

To by som už ale predbiehal, takže sa smelo pustite do, dúfam poučného a zaujímavého, čítania.

Jakub Mišún

Obsah

Abstrakt	8
1 Úvod do duálnych čísel	9
2 Analytická funkcia duálnych čísel	13
3 Plückerove súradnice	15
4 Studyho sféra	18
5 Duálny uhol	26
6 Dodatky	34
7 Záver	36
Zoznam použitej literatúry	37

Abstrakt

Táto bakalárska práca má za úlohu objasniť vlastnosti duálnych čísel, ktoré sa v mnohých prípadoch dosť značne líšia od vlastností klasických číselných sústav, s ktorými sa bežne pracuje.

Na úvod si predstavíme duálne čísla ako také a pozrieme sa bližšie ako sa správajú pri najbežnejších matematických operáciách. Neskôr sa budeme zaoberať geometrickou interpretáciou duálnych čísel pomocou Plückerových súradníc a Studyho sféry. Následne zavedieme pojem duálneho uhla a podobne ako v predchádzajúcom, sa budeme zaoberať jeho vlastnosťami a jeho geometrickou interpretáciou. Na záver uvedieme priamu aplikáciu duálnych čísel do praxe, ktorú ale nebudeme skúmať hlbšie.

Na záver treba dodať, že bakalárska práca vychádzala hlavne z knihy Computational line geometry autorov Pottmann a Wallner. Tento ako aj ostatné zdroje sú uvedené na konci práce.

Kapitola 1

Úvod do duálnych čísel

Definícia 1:

Duálnymi číslami nazývame čísla tvaru $a + \varepsilon.b$, kde $a, b \in R$, teda (a, b) je vektor v R^2 a ε je prvok s nasledujúcou vlastnosťou:

$$\varepsilon^2 = 0. \quad (1.1)$$

Množinu takto definovaných čísel značíme D . Všimnime si, že týmto zápisom sme dvojrozmerný vektor z R^2 previedli na prvok z D .

Na množine duálnych čísel si zadefinujeme operácie sčítania a násobenia predpismi:

$$(a + \varepsilon b) + (c + \varepsilon.d) = (a + b) + \varepsilon(b + d) \in D, \quad (1.2)$$

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = (ac) + \varepsilon(ad + bc) + \varepsilon^2(bd) = (ac) + \varepsilon(ad + bc) \in D. \quad (1.3)$$

Vidíme, že sčítanie je klasické sčítanie vektorov po zložkách, ako ho poznáme v prípade reálnych čísel.

Násobenie je zrejme komutatívne, asociatívne aj distributívne, a to vďaka týmto vlastnostiam násobenia a sčítovania v R . Navyše má jednotku, ktorou je $1 + \varepsilon.0 = 1$.

Overme si to:

$$(a + \varepsilon b) = (a + \varepsilon b)(1 + \varepsilon 0) = (a1) + \varepsilon(a0 + b1) = a + \varepsilon b \in D \quad (1.4)$$

Z hore uvedeného vyplýva, že $(D, +, \cdot)$ je komutatívny okruh s jednotkou.

Napriek tomu nemá každý jeho prvok, prvok inverzný vzhľadom na súčin.

$$(0 + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = 0 + \varepsilon(0 + bc) = \varepsilon bc \in D \quad (1.5)$$

Čo sa nemôže rovnať 1 pre žiadnu dvojicu $b, c \in R$, pretože z definície ε je zrejme, že je deliteľom nuly.

Príklad 2.a:

Skúsme zistiť ako vyzerá delenie v D .

Delenie je násobenie inverzným prvkom, preto stačí nájsť inverzný prvok k prvku $a + \varepsilon b$. Nech je to prvok $c + \varepsilon d$, potom

$$1 = (a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = (ac) + \varepsilon(ad + bc) \Leftrightarrow c = \frac{1}{a}, ad + bc = 0$$

$$ad + bc = 0 \Leftrightarrow ad + \frac{b}{a} = 0, \Leftrightarrow a^2d + b = 0 \Leftrightarrow b = -a^2d \Leftrightarrow d = \frac{-b}{a^2}.$$

Teda inverzný prvok má tvar $\frac{1}{a} - \varepsilon \frac{b}{a^2} \in D$.

Preto delenie v D (pre prvky, kde y je nenulové) má nasledujúce vyjadrenie:

$$\frac{a + \varepsilon b}{c + \varepsilon d} = (a + \varepsilon b) \cdot \left(\frac{1}{c} - \varepsilon \frac{d}{c^2} \right) = \frac{a}{c} + \varepsilon \left(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} \right) \in D$$

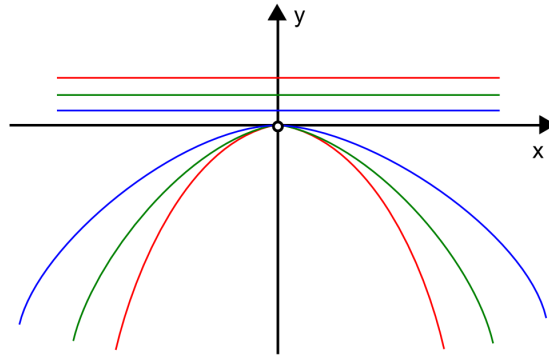
Príklad 2.b:

Pozrime sa ako vyzerá zobrazenie množiny bodov na množinu bodov k ním inverzným.

Je zrejme, že priamka $(0, y)$ takéto zobrazenie nemá, pretože k jej bodom inverzné neexistujú.

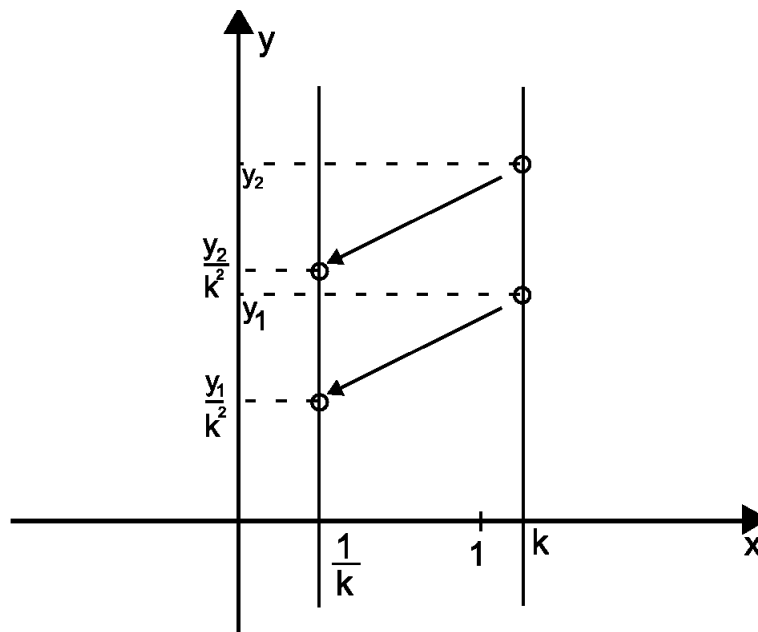
Priamka (x, k) kde k je konštanta sa zobrazí na $(\frac{1}{x}, -\frac{k}{x^2})$ čo je parabola. Jediný bod ktorý sa nezobrazí je priesečník priamky (x, k) s osou y a teda parabola nie je definovaná v bode $(0, 0)$. Zmenou konštanty k sa zrejme parabola sploští alebo zúži.

Obrátene ak zobrazujeme parabolu $(x, -x^2)$ dostávame inverziu $(\frac{1}{x}, -\frac{-kx^2}{x^2}) = (\frac{1}{x}, k)$ čo je priamka tvaru (\bar{x}, k) ktorú sme na túto parabolu zobrazovali. Teda vidíme že inverzný prvok inverzného je v súlade s predpokladom pôvodný prvok.



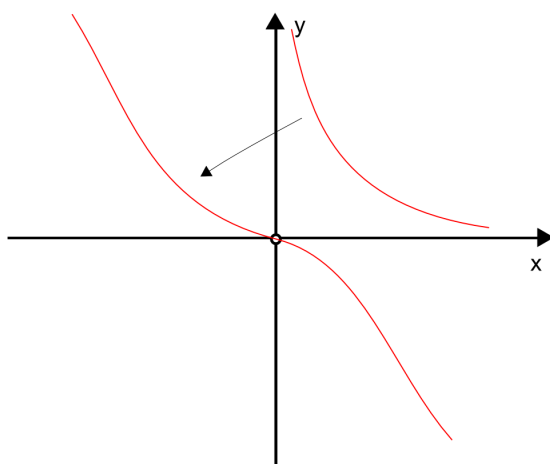
inverzné zobrazenie priamok rovnobežných s osou x

Priamka (l, y) kde l je konštanta sa zobrazí na $(\frac{1}{l}, -\frac{y}{l^2})$ čo je priamka rovnobežná s priamkou (l, y) , pričom nová priamka $(\frac{1}{l}, -\frac{y}{l^2})$ je naškálovaním priamky (l, y) zložené s osovou súmernosťou podľa osi x. Osová súmernosť priamku posunie po osi x a naškálovanie škáluje druhú súradnicu bodov.



inverzné zobrazenie priamky rovnobežnej s osou y

Skúsme ešte zobrazíť funkciu $(x, \frac{1}{x})$. Podľa definície inverzného prvku duálnych čísel sa táto zobrazí na $(\frac{1}{x}, -\frac{\frac{1}{x}}{x^2}) = (\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^3})$.



inverzné zobrazenie funkcie $1/x$

Kapitola 2

Analytická funkcia duálnych čísel

Veta 3:

Reálnu analytickú funkciu konvergujúcu na nejakom intervale možno rozšíriť na okruh duálnych čísel.

Každá reálna analytická funkcia je reprezentovaná radom konvergujúcim na nejakom intervale. Tento polynóm je tvaru:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k. \quad (2.1)$$

Preto vieme funkciu upraviť pre duálne čísla:

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon y) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x + \varepsilon y - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k[(x - x_0) + (\varepsilon y)]^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1} \varepsilon y = f(x) + \varepsilon y f'(x). \end{aligned}$$

Príklad 4:

Vypočítajme $(a + \varepsilon b)^k$.

Vďaka binomickej vete vieme, že

$$(a + \varepsilon b)^k = a^k + \varepsilon k a^{k-1} \cdot b + \varepsilon^2 k^2 a^{k-2} \cdot b^2 + \dots = a^k + \varepsilon k a^{k-1} \cdot b + \varepsilon^2(\dots)$$

Zo všetkých členov postupnosti, okrem prvých dvoch, sme vyňali ε^2 . Takže vidíme, že vďaka rovnosti (1.1) sa nám tieto členy vynulujú. Preto dostávame.

$$f(a, b) = (a + \varepsilon b)^k = f(a) + \varepsilon f'(a)b = a^k + \varepsilon k a^{k-1} b.$$

Príklad 5:

Vyrátajme hodnoty goniometrických funkcií $\sin x$, $\cos x$ a exponenciálnej funkcie e^x rozšírených na množinu D .

Tentoraz použijeme výsledok tvrdenia vety 3.

$$\sin(x + \varepsilon y) = \sin x + \varepsilon y \cos x \quad (2.2)$$

$$\cos(x + \varepsilon y) = \cos x - \varepsilon y \sin x \quad (2.3)$$

$$e^{a+\varepsilon y} = e^x \cdot e^{\varepsilon y} = e^a \cdot (1 + \varepsilon y) = e^a + \varepsilon y e^a \quad (2.4)$$

$$\sqrt{x + \varepsilon y} = \sqrt{x} + \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x}} \quad (2.5)$$

Môžeme si ešte overiť správnosť výsledku z príkladu 4. použitím vety 3.

$$(a + \varepsilon b)^k = a^k + \varepsilon k a^{k-1} b.$$

Pozrime sa ako vyzerá derivácia analytickej funkcie f vo vzťahu k jej rozšíreniu na D :

$$f(x + \varepsilon y) = f(x) + \varepsilon y f'(x).$$

Potom po vyjadrení $f(x)$ dostávame:

$$f'(x) = \frac{f(x + \varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (2.6)$$

kde $h = \varepsilon y$. Čo je pre nás známy výraz z definície derivácie.

Kapitola 3

Plückerove súradnice

Definícia 6:

n -rozmerný euklidovský priestor $E^n = (R^n, V(R^n), +)$ sa nazýva orientovaným, ak v ňom máme vybranú súradnicovú sústavu, ktorá určuje kladnú orientáciu.

Definícia 7:

Jednotkový vektor $\vec{v} \in V^n(R)$ definovaný na n -rozmernom euklidovskom priestore je vektor, ktorého dĺžka je rovná jednej v pevne zvolenej norme $\|\cdot\|$.

V klasickej euklidovskej norme to pre vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ znamená, že:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}$$

Definícia 8:

Priamka p v n -rozmernom euklidovskom priestore $E^n = (R^n, V(R^n), +)$ doplnená o jednotkový vektor rovnobežný s touto priamkou sa nazýva orientovanou priamkou (niekedy aj šípom).

Orientovanú priamku značíme \vec{p} .

Poznámka 9:

Pre každú priamku existujú práve dva vektory ktoré sú s ňou rovnobežné. Tieto vektory sú navyše navzájom opačné (opačne orientované). Preto každá

priamka definuje práve dve orientované priamky.

Množinu orientovaných priamok v $E^n = (R^n, V(R^n), +)$

budeme značiť \vec{L} .

(L- značí lines, šípka nad L značí orientáciu.)

Definícia 10: (Plückerove súradnice)

Majme orientovanú priamku \vec{G} z E^3 určenú bodom $P \in R^3$, ktorý leží na \vec{G} a jednotkovým vektorom $\vec{g} \in V(R^3)$, rovnobežným s \vec{G} . Vektor \vec{g} je smerovým vektorom \vec{G} . Označme vektor $(P-O)$ ako \vec{p} . Toto značenie budeme používať aj v ďalšom texte.

Potom jej Plückerove súradnice sú určené vektorom $(\vec{g}, \bar{g}) \in R^6$, kde \bar{g} je vektorový súčin

$$\bar{g} = (\vec{p} \times \vec{g}) \quad (3.1)$$

Plückerove súradnice viem normalizovať nasledovným spôsobom

$$\frac{1}{\|\bar{g}\|} \cdot (g, \bar{g}) \quad (3.2)$$

Tieto súradnice sa nazývajú normalizované Plückerove súradnice.

Z definície normalizovaných Plückerových súradníc vidíme, že prvá časť je jednotkový vektor.

Príklad 11: (Plückerove súradnice)

Majme vektor $\vec{g} = (0, 1, 0)$ a bod $P=(1,1,0)$.

Potom $\bar{g} = (\vec{p} \times \vec{g})=(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (0, 0, 1)$.

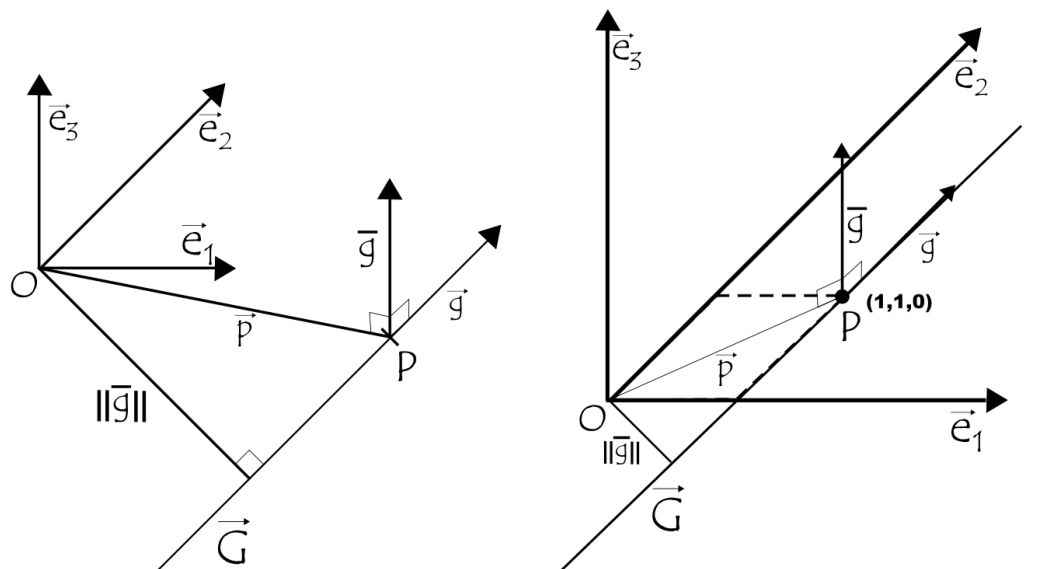
Plückerove súradnice teda sú $((0,1,0),(0,0,1))$.

Tieto súradnice sú už aj normalizované.

Obrázky 12: (Plückerove súradnice)

Majme karteziánsku súradnicovú sústavu v $E^n = (R^n, V(R^n), +)$ so začiatkom O a bázovými vektormi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Nasledujúce obrázky znázorňujú Plückerove súradnice.



a) všeobecné zobrazenie Plückerových súradníc

b) zobrazenie Plückerových súradníc z príkladu

Poznámky 13: (k obrázkom 12)

- a) \bar{g} je momentový vektor sily pôsobiacej v P , danej vektorom \vec{g} .
- b) Báza p, g, \bar{g} je kladne orientovaná.
- c) Dĺžka vektora \bar{g} je vzdialenosť priamky \vec{G} od začiatku O . Tento fakt vyplýva zo samotnej definície vektora \bar{g} . Potom

$$\|\bar{g}\| = \|(\vec{p} \times \vec{g})\| = \|\vec{p}\| \|\vec{g}\| \sin \angle \vec{p}\vec{g},$$

keďže $\|(\vec{p} \times \vec{g})\|$ je obsah rovnobežníka so stranami dĺžky $\|\vec{g}\|$ a $\|\vec{p}\|$, zvierajúcimi uhol $\angle \vec{p}\vec{g}$ respektíve uhol $(\pi - \angle \vec{p}\vec{g})$ a keďže $\|\vec{g}\| = 1$, potom jeho obsah je rovný jeho výške. Veľkosť tejto výšky je vzdialenosť priamky \vec{G} od začiatku O . Zrejme

$$\|\bar{g}\| = \|\vec{p}\| \sin \angle \vec{p}\vec{g}.$$

Kapitola 4

Studyho sféra

Definícia 14:

Normalizované Plückerove súradnice sa dajú spojiť do duálneho vektora

$$\hat{g} = g + \varepsilon \bar{g} = (g_1 + \varepsilon \bar{g}_1, g_2 + \varepsilon \bar{g}_2, g_3 + \varepsilon \bar{g}_3) \in D^3. \quad (4.1)$$

Ako prvý toto spojenie aplikoval E. Study.

Súradnice $(g_1 + \varepsilon \bar{g}_1, g_2 + \varepsilon \bar{g}_2, g_3 + \varepsilon \bar{g}_3)$ duálneho vektora $(g + \varepsilon \bar{g})$ patria D , pretože g_i aj \bar{g}_i patria R pre $i = 1, 2, 3$ a teda spĺňajú definíciu duálnych čísel.

Z toho vyplýva, že duálny vektor \hat{g} patrí D^3 .

Tento vektor má dimenziu 6 ako vektor priestoru nad reálnymi číslami.

Poznámka 15:

V ďalšom texte budeme používať dva druhy súčinov, preto si ich teraz zavedieme ich definície a označenie, ktoré bude platné v celom nasledujúcom texte.

Klasický súčin: Je súčinom jednorozmerných vektorov $a, b \in R$. Značíme ho ab

Skalárny súčin: Je súčinom viacrozmerných vektorov $a, b \in R^n$, kde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ a $a_i, b_i \in R$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Značíme ho $a.b \in R$ a má tvar $a.b = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)$

Definícia 16:

Definujme duálnu bilineárnu formu $\varphi : D^3 \times D^3 \rightarrow D$ ako

$$\hat{g}\hat{h} = g.h + \varepsilon(g.\bar{h} + h.\bar{g}). \quad (4.2)$$

Táto forma zobrazuje dva trojrozmerné vektory v R^3 na dvojrozmerný vektor v R^2 .

Všimnime si normu duálneho vektora

$$\|\hat{g}^2\| = \hat{g}.\hat{g} = \|g\|^2 + 2\varepsilon g.\bar{g} = 1. \quad (4.3)$$

Rovnosť platí pretože $\|g\| = 1$ (keďže je to normalizovaný a teda jednotkový vektor) a navyše vektory g a \bar{g} sú na seba kolmé (4.1), preto ich súčin je rovný nule.

$$2\varepsilon g.\bar{g} = 0.$$

Poznámka 17:

Vidíme, že všetky duálne vektory majú dĺžku 1. Teda reprezentujú množinu bodov vzdialených jedného bodu o jednotku dĺžky. Preto reprezentujú nadplochu.

Túto nadplochu nazývame Studyho sférou.

Definícia 18:

Zobrazenie, ktoré priraďuje orientovanej priamke euklidovského priestoru duálny vektor $\hat{g} = g + \varepsilon\bar{g}$, kde (g, \bar{g}) sú jej normalizované Plückerove súradnice, sa nazýva Studyho zobrazením. Jeho obrazom je Studyho model množiny orientovaných priamok v E^3 .

Studyho model je len iný názov pre Studyho sféru.

Príklad 19:

Pozrime sa teraz ako vyzerajú niektoré bežné konfigurácie priamok na Studyho sfére.

To znamená, že nájdeme ich Plückerove súradnice, z ktorých získame duálne

vektory. Tie ale majú dimenziu R^6 a preto ich duálnou bilineárnou formou prenesieme do R^2 , ktorú už vieme pekne zobrazit'.

Urobíme to pre nasledujúce 3-rozmerné konfigurácie v $E^3 = (R^3, V(R^3), +)$ s euklidovskou normou $\|\cdot\|$.

- i) Zväzok priamok so spoločným bodom
- ii) Rovina, ako množina rovnobežných priamok s rovnakou orientáciou

Neskôr si ešte zobrazíme

- iii) Rovinne útvary ako kružnica, parabola.

- i) Zväzok priamok so spoločným bodom.

Majme zväzok priamok prechádzajúcich jedným bodom. Nech ich spoločným bodom je začiatok $O=(0,0,0)$. Zvoľme si za smerové vektory tie, ktoré majú začiatok v O . Teda vektory sú tvaru $\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Zoberme

$$P = (0, 0, 0), \quad \vec{g} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{h} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2},$$

Ich Plückerove súradnice sú, podľa vzorca $(g, (\vec{p} \times \vec{g}))$

$$\bar{g} = (P \times g) = (y \cdot 0 - z \cdot 0, z \cdot 0 - x \cdot 0, x \cdot 0 - y \cdot 0) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (0, 0, 0) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (0, 0, 0),$$

$$(\vec{g}, \bar{g}) = \left(\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (0, 0, 0) \right),$$

$$\bar{h} = (\vec{p} \times \vec{h}) = (\bar{y} \cdot 0 - \bar{z} \cdot 0, \bar{z} \cdot 0 - \bar{x} \cdot 0, \bar{x} \cdot 0 - \bar{y} \cdot 0) \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} = (0, 0, 0) \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} = (0, 0, 0),$$

$$(\vec{h}, \bar{h}) = \left(\frac{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}}, (0, 0, 0) \right),$$

Potom ich duálne vektory sú nasledovné

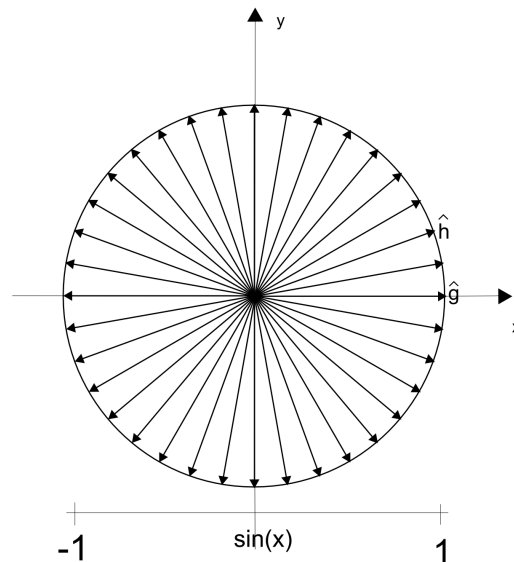
$$\hat{g} = \left(\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \varepsilon(0, 0, 0) = \left(\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

$$\hat{h} = \left(\frac{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \right) + \varepsilon(0, 0, 0) = \left(\frac{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \right).$$

Vidíme, že duálne vektory reprezentujú ten istý priestorový útvar, ako aj jednotkové vektory, ktoré nám určovali Plückerove súradnice. Teda Studyho sféra je jednotková guľa so stredom v začiatku. Pozrime sa čo nám dá duálna bilinéarna forma.

$$\hat{g}\hat{h} = \vec{g}.\vec{h} + \varepsilon 0 = \vec{g}.\vec{h}$$

Keďže vektory \vec{g}, \vec{h} sú jednotkové je táto norma rovná kosínusu uhla medzi týmito vektormi. Norma nadobúda hodnoty z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. To značí, že duálne vektory zvierajú uhly z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Teda v dvo-zrozmernom priestore určujú jednotkovú kružnicu. A to tak, že si zvolíme jeden z duálnych vektorov za pevný a ostatné k nemu ukladáme otočené o príslušný uhol.



Na obrázku vidíme fixovaný vektor \hat{g} a vektory \hat{h} , s ktorými zvierajú všetky uhly od 0 po 360 stupňov. Vektory sú jednotkové a teda tvoria kružnicu s polomerom 1.

b)

Teraz urobíme analogický príklad pre ľubovoľný spoločný bod zväzku priamok. Nech je to $P=(a,b,c)$. Smerové vektory sú jednotkové vektory vychádzajúce z bodu P. Potom

$$\begin{aligned} P &= (a, b, c), \quad \vec{g} = (x, y, z), \quad \vec{h} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \\ \bar{g} &= (\vec{p} \times \vec{g}) = (yc - zb, za - xc, xb - ya), \\ (\vec{g}, \bar{g}) &= ((x, y, z), (yc - zb, za - xc, xb - ya)), \\ \bar{h} &= (\vec{p} \times \vec{h}) = (\bar{y}c - \bar{z}b, \bar{z}a - \bar{x}c, \bar{x}b - \bar{y}a), \\ (\vec{h}, \bar{h}) &= ((\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (\bar{y}c - \bar{z}b, \bar{z}a - \bar{x}c, \bar{x}b - \bar{y}a)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g} &= (x, y, z) + \varepsilon(yc - zb, za - xc, xb - ya), \\ \hat{h} &= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \varepsilon(\bar{y}c - \bar{z}b, \bar{z}a - \bar{x}c, \bar{x}b - \bar{y}a). \end{aligned}$$

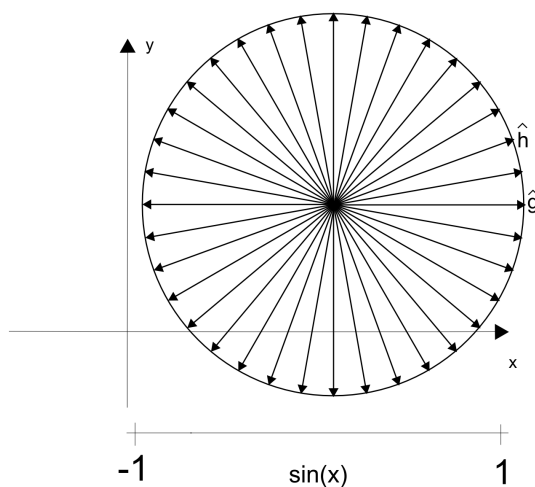
V tomto prípade je Studyho sféra 6-rozmerná kružnica, pretože vektory určujúce Plückerove súradnice reprezentujú guľu so stredom v bode P rovnako ako aj vektory $(\vec{p} \times \vec{g})$ pretože tieto sú kolmé na smerové vektory priamok zo zväzku a teda tvoria tú istú guľu.

Takže ako teraz vyzerajú ich duálne bilinéarne formy? Počítajme

$$\hat{g}\hat{h} = gh + \varepsilon((xyc - xzb + yza - yxc + zxb - zya) + (\bar{x}\bar{y}c - \bar{x}\bar{z}b + \bar{y}\bar{z}a - \bar{y}\bar{x}c + \bar{z}\bar{x}b - \bar{z}\bar{y}a)),$$

$$\hat{g}\hat{h} = gh.$$

Teda vidíme, že aj napriek posunutiu spoločného bodu zväzku priamok sa nič nezmenilo. Výsledok je



Obrázok je rovnaký ako v minulom prípade, až na posunutý stred kružnice.

ii) Rovina, ako množina rovnobežných priamok

Majme rovinu v priestore. Zvoľme si súradnicovú sústavu tak, aby naša rovina bola totožná s rovinou xy . Za body reprezentujúce priamky si zvolíme ich priesečníky s osou x . Teda body sú tvaru $(x,0,0)$. Smerové vektory si zvolíme dĺžky jedna a navyše nech sú rovnako orientované. Vektory sú tvaru $\vec{g} = (0, 1, 0)$.

$$P = (x, 0, 0), R = (y, 0, 0), \vec{g} = \vec{h} = (0, 1, 0),$$

$$\bar{g} = (\vec{p} \times \vec{g}) = (0.1 - 0.0, 0.x - x.0, 0.0 - x.1) = (0, 0, -x),$$

$$(\vec{g}, \bar{g}) = ((0, 1, 0), (0, 0, -x)),$$

$$\bar{h} = (\vec{r} \times \vec{h}) = (0.1 - 0.0, 0.y - y.0, 0.0 - y.1) = (0, 0, -y),$$

$$(\vec{h}, \bar{h}) = ((0, 1, 0), (0, 0, -y)),$$

$$\hat{g} = (0, 1, 0) + \varepsilon(0, 0, -x),$$

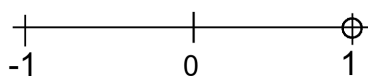
$$\hat{h} = (0, 1, 0) + \varepsilon(0, 0, -y).$$

Prvé tri súradnice sú konštantné a mení sa len piata súradnica a to lineárne. Studyho sféra je teda priamka v 6-rozmernom priestore, rovnobežná s osou piatej súradnice. Vyjadrime duálnu bilineárnu formu

$$\hat{g}h = gh + \varepsilon(0) = gh$$

Keďže sme opäť dostali uhol medzi vektormi g a h a tieto vektory majú buď rovnaký smer, kosínus uhla môže nadobudnúť iba hodnotu 1.

Preto sa nám tento krát útvar zobrazí na jediný bod vzdialený od začiatku o jednotku dĺžky.



Aby sme mohli pristúpiť k riešeniu štvrtej časti príkladu, musíme si najprv vektorový súčin zúžiť na priestor E^2 .

Príklad 20:

V E^2 majme dva dvojrozmerné vektory $\vec{g} = (x, y)$ a $\vec{h} = (a, b)$, kde $a, b, x, y \in R$.

Ich vektorovým súčinom nazveme vektorový súčin rozšírených vektorov \bar{g} a \bar{h} , ktoré získame pridaním tretej súradnice nula, t.j.

$$\bar{g} = (x, y, 0), \quad \bar{h} = (a, b, 0).$$

Potom

$$(\bar{g} \times \bar{h}) = (y0 - 0b, 0a - x0, xb - ya) = (0, 0, xb - ya).$$

Príklad 19:

iii) Rovinné útvary ako kružnica, parabola.

Majme v E^2 parametrizáciu krivky dané predpisom $f : R \rightarrow R^2$, kde $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, $t \in R$ a f je prirodzená parametrizácia.

Bodu krivky priradíme dotyčnicu ku krivke v tomto bode. Toto zobrazenie priradí každej diferencovateľnej krivke jej duálnu krivku, t.j. $t \rightarrow l(t)$, kde

$l(t)$ je dotyčnicou krivky v bode $f(t)$

Preto máme nasledujúce body a vektory:

$$P = (f_1(x), f_2(x)), R = (f_1(y), f_2(y)), \vec{g} = (f'_1(x), f'_2(x)), \vec{h} = (f'_1(y), f'_2(y))$$

Všeobecne si všetko vyrátajme až po duálnu bilineárnu formu, teraz už ale musíme rátať s rozšírenými súradnicami.

$$\bar{g} = (\vec{p} \times \vec{g}) = (0, 0, f_1(x) \cdot f'_2(x) - f'_1(x) \cdot f_2(x))$$

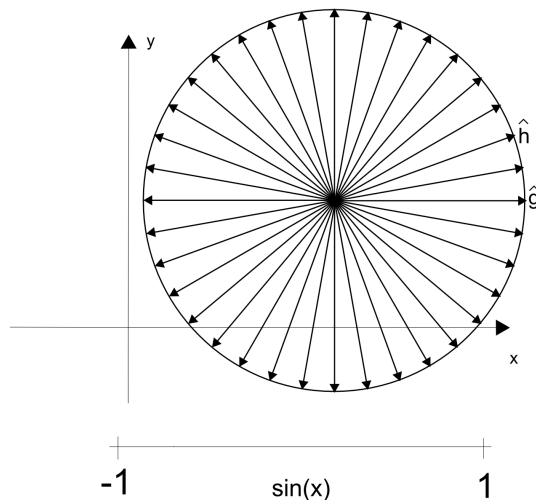
$$\bar{h} = (\vec{r} \times \vec{h}) = (0, 0, f_1(y) \cdot f'_2(y) - f'_1(y) \cdot f_2(y))$$

$$\hat{g} = (f_1(x), f_2(x), 0) + \varepsilon(0, 0, f_1(x) \cdot f'_2(x) - f'_1(x) \cdot f_2(x))$$

$$\hat{h} = (f_1(y), f_2(y), 0) + \varepsilon(0, 0, f_1(y) \cdot f'_2(y) - f'_1(y) \cdot f_2(y))$$

$$\hat{g}\hat{h} = f'_1(x)f'_1(y) + f'_2(x)f'_2(y) + \varepsilon(0) = f'_1(x)f'_1(y) + f'_2(x)f'_2(y)$$

Teda duálna bilineárna forma dvoch duálnych vektorov je rovná skalárnemu súčinu príslušných dotyčníc v E^2 . Opäť sa teda jedná o kosínus uhla medzi týmito dotyčnicami. Obor hodnôt oboch duálnych kriviek je R a teda dotyčnice medzi sebou zvierajú všetky uhly z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Preto dostávame ten istý výsledok ako aj v prvej časti príkladu.



Kapitola 5

Duálny uhol

Definícia 21:

Vzdialenosť medzi dvoma neprázdnyimi množinami A a B v E^3 je rovná minimu vzdialeností bodov týchto množín

$$\inf(\|x - y\|; x \in A, y \in B). \quad (5.1)$$

a označujeme ju $d(A, B)$.

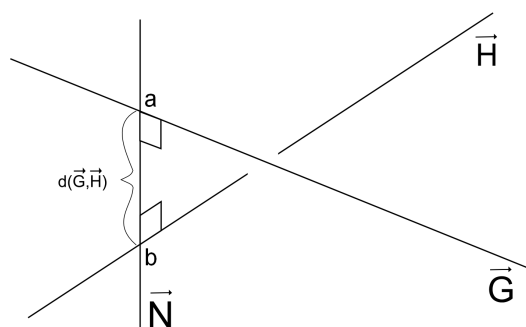
Špeciálne to platí pre aj pre orientované priamky \vec{G}, \vec{H} , ktoré sú špeciálnym prípadom množiny.

Vzdialenosť priamok $d(\vec{G}, \vec{H})$ je dĺžka úsečky xy , kde $x \in G$ a $y \in H$ sú body, ktorých spoločná spojnice je kolmá na obe priamky \vec{G} aj \vec{H} . Spoločnú spojnicu nazývame aj priečkou priamok \vec{G}, \vec{H} .

Samozrejme, ak sa priamky \vec{G} a \vec{H} navzájom pretínajú t.j. sú rôznobežné, potom ich vzdialenosť je nulová.

Spoločnej priečke usporiadanej dvojice orientovaných priamok (\vec{G}, \vec{H}) vieme priradiť orientáciu. Ak $(g, \bar{g}) \rightarrow G$ a $(h, \bar{h}) \rightarrow H$ sú normalizované Plückerove súradnice, potom spoločná kolmica \vec{N} má priradenú orientáciu určenú vektorom $\vec{g} \times \vec{h}$. Pre lepšiu ilustráciu pozrite obrázok 22.

Obrázok 22:



Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok

Definícia 23:

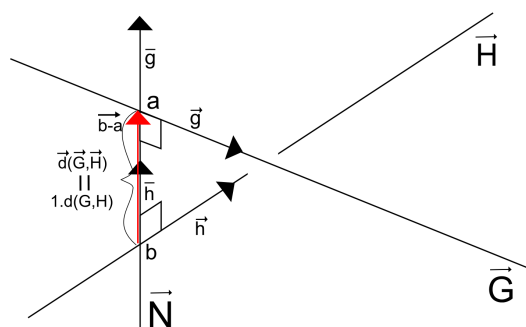
Majme orientovanú spoločnú kolmicu \vec{N} dvoch orientovaných priamok (\vec{G} a \vec{H}). Nech ich vzdialenosť $d(\vec{G}, \vec{H}) = |a - b|$ $a \in G$ a $b \in H$. Potom orientovaná vzdialenosť medzi priamkami G a H je definovaná vzťahom:

$$\vec{d}(\vec{G}, \vec{H}) = \sigma \cdot d(G, H) \quad (5.2)$$

kde $\sigma = 1$, ak vektor $(b - a)$ má rovnakú orientáciu ako \vec{N} . Ak má $(b - a)$ orientáciu opačnú, potom $\sigma = -1$.

Pripomeňme, že orientácia priamky $b - a$ je určená Plückerovými súradnicami $(g, \bar{g}) \rightarrow G$ a $(h, \bar{h}) \rightarrow H$. Pre lepšiu ilustráciu pozrite obrázok 24.

Obrázok 24:



Orientované vzdialenosti dvoch mimobežných priamok

Definícia 25:

Duálny uhol dvoch orientovaných priamok \vec{G} a \vec{H} je definovaný vzťahom

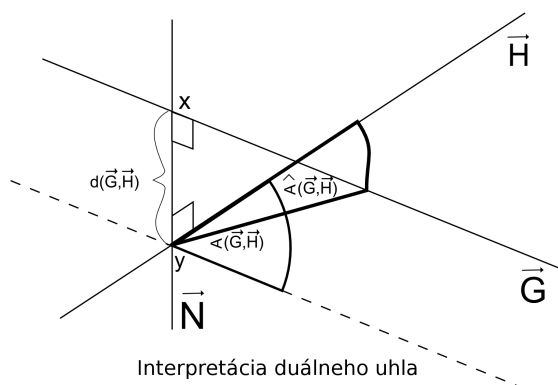
$$\hat{\angle}(\vec{G}, \vec{H}) = \angle(\vec{G}, \vec{H}) + \varepsilon \vec{d}(\vec{G}, \vec{H}) \quad (5.3)$$

Poznámka 26:

Orientovanú vzdialenosť v definícii 25 môžeme chápať aj nasledovne:

$$\vec{d}(\vec{G}, \vec{H}) = \bar{\angle}(\vec{G}, \vec{H}) = (\angle(\vec{G}, \vec{H}) \times X).$$

kde X je vrchol uhla $\angle(\vec{G}, \vec{H})$. Tento zápis samozrejme nemožno chápať doslovne, použil som ho len preto, aby som mohol názornejšie poukázať na analógiu s duálnym vektorom. Grafické znázornenie tejto analógie je na obrázku 27.

Obrázok 27:

Pred nasledujúcou lemmou si musíme najprv zaviesť pojem skalárneho súčinu na duálnych vektoroch D^n .

Poznámka 28:

Vyrátajme ako vyzerá skalárny súčin dvoch duálnych čísel

$$a + \varepsilon b = (a_1 + \varepsilon b_1, a_2 + \varepsilon b_2, \dots, a_n + \varepsilon b_n) \in D^n,$$

$$a c + \varepsilon d = (c_1 + \varepsilon d_1, c_2 + \varepsilon d_2, \dots, c_n + \varepsilon d_n) \in D^n,$$

$$(a_1 + \varepsilon b_1, a_2 + \varepsilon b_2, \dots, a_n + \varepsilon b_n) \cdot (c_1 + \varepsilon d_1, c_2 + \varepsilon d_2, \dots, c_n + \varepsilon d_n) =$$

$$\begin{aligned}
& (a_1c_1 + \varepsilon a_1d_1 + \varepsilon b_1c_1 + \varepsilon^2 b_1d_1 + \dots + a_nc_n + \varepsilon a_nd_n + \varepsilon b_nc_n + \varepsilon^2 b_nd_n) = \\
& \quad (a_1c_1 + \varepsilon a_1d_1 + \varepsilon b_1c_1 + \dots + a_nc_n + \varepsilon a_nd_n + \varepsilon b_nc_n) = \\
& (a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n) + (\varepsilon a_1d_1 + \varepsilon b_1c_1 + \dots + \varepsilon a_nd_n + \varepsilon b_nc_n) = \\
& \quad (a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n) + \varepsilon(a_1d_1 + b_1c_1 + \dots + a_nd_n + b_nc_n) = \\
& \qquad \qquad \qquad a.c + \varepsilon(a.d + b.c) \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Definícia 29:

Skalárny súčin v D^n , dvoch duálnych vektoroch $x = a + \varepsilon b \in D^n$ a $y = c + \varepsilon d \in D^n$ je duálne číslo z D , dané predpisom

$$\begin{aligned}
& (a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n) + \varepsilon(a_1d_1 + b_1c_1 + \dots + a_nd_n + b_nc_n) = \\
& \qquad \qquad \qquad a.c + \varepsilon(a.d + b.c). \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Lemma 30:

Skalárny súčin v D^3 je euklidovsky invariantný. Ak \vec{G} a \vec{H} sú dve orientované priamky, ktorých Studyho obrazy sú \hat{g} a \hat{h} , potom platí rovnosť:

$$\hat{g}\hat{h} = \cos \hat{\Phi} = \cos \Phi - \varepsilon \vec{d} \sin \Phi, \tag{5.6}$$

kde

$$\Phi = \angle(\vec{G}, \vec{H}), \quad \hat{\Phi} = \hat{\angle}(\vec{G}, \vec{H}) \text{ a } \vec{d} = \vec{d}(\vec{G}, \vec{H}). \tag{5.7}$$

Dôkaz:

Predpokladajme, že $a \in \vec{G}$, $b \in \vec{H}$ také, že sú prienikom spoločnej kolmice a týchto priamok.

Potom podľa definície duálneho vektora

$$\hat{g}\hat{h} = \vec{g}.\vec{h} + \varepsilon(\vec{g}.\vec{h} + \vec{h}.\vec{g}) \tag{5.8}$$

Vieme, že oba vektory \vec{g} aj \vec{h} sú normalizované a teda $g.h = \cos \angle g, h$

Použijúc definíciu 15 Plückerových súradníc dostávame

$$\begin{aligned}\vec{g}\vec{h} + \vec{h}\vec{g} &= \vec{g}.(\vec{b} \times \vec{h}) + (\vec{a} \times \vec{g}).\vec{h} = \\ &= -\det(\text{vec}b, \vec{g}, \vec{h}) + \det(\vec{a}, \vec{g}, \vec{h})\end{aligned}$$

kde, $\det(x, y, z) = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 \in R$
pre $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ a $z = (z_1, z_2, z_3) \in R^3$

$$= \det(b - a, g, h) = -d \sin \Phi. \quad (5.9)$$

Poslednú rovnosť sme dostali rozvojom determinantu podľa prvého vektora a faktu, že $d(a, b) = |(b-a).e|$, kde \vec{e} je smerový vektor spoločnej kolmice. Teraz už iba stačí nahradiť v (5.7) $g.h$ kosínusom a $\vec{g}\vec{h} + \vec{h}\vec{g}$ hodnotou získanou v (5.8). Následne dostávame hľadanú rovnosť (5.5) t.j.

$$\hat{g}\hat{h} = \cos \Phi - \varepsilon d \sin \Phi. \quad (5.10)$$

QED

Príklady 31:

Overme si, či aj pre duálne uhly platí známa goniometrická rovnosť:

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

Nech $\angle(\vec{G}, \vec{H}) = \alpha$ a $\vec{d}(\vec{G}, \vec{H}) = d$, použijeme pritom Lemmu 30.

$$\begin{aligned}\cos^2(\hat{\angle}(\vec{G}, \vec{H})) + \sin^2(\hat{\angle}(\vec{G}, \vec{H})) &= \\ &= \cos^2(\alpha + \varepsilon d) + \sin^2(\alpha + \varepsilon d).\end{aligned}$$

Podľa definície duálneho uhla 25 a lemy 30 sa to rovná

$$(\cos \alpha - \varepsilon d \sin \alpha)^2 + \sin^2(\alpha + \varepsilon d).$$

My ale z výsledkov v príklade 5 vieme, že

$$\sin(\alpha + \varepsilon d) = (\sin \alpha + \varepsilon d \cos \alpha),$$

teda

$$\sin^2(\alpha + \varepsilon d) = (\sin \alpha + \varepsilon d \cos \alpha)^2.$$

Celkovo teda dostávame

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha - \varepsilon d \sin \alpha)^2 + \sin^2(\alpha + \varepsilon d) = \\ & (\cos \alpha - \varepsilon d \sin \alpha)^2 + (\sin \alpha + \varepsilon d \cos \alpha)^2 = \\ & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha + 2\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha = \\ & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \end{aligned}$$

Lemma 30 má pre nás zaujímavý dôsledok.

Dôsledok 32:

Dve orientované priamky \vec{G} a \vec{H} v euklidovskom priestore E^3 dané bodmi $a \in \vec{G}$ a $b \in \vec{H}$ s Plückerovými súradnicami $(g, \bar{g}) \rightarrow \vec{G}$ a $(h, \bar{h}) \rightarrow \vec{H}$ sa pretínajú práve vtedy, keď

$$g\bar{h} + h\bar{g} = 0 \tag{5.11}$$

Dôkaz:

Najprv dokážeme implikáciu smerom doľava:

Ak rovnosť $g\bar{h} + h\bar{g} = 0$ platí potom sa \vec{G} a \vec{H} pretínajú.

$$0 = g\bar{h} + h\bar{g}$$

Ako sme ukázali v dôkaze lemy 31

$$g\bar{h} + h\bar{g} = -\det(b - a, g, h).$$

Potom nutne platí

$$-\det(b - a, g, h) = 0.$$

Ale, to platí vtedy a len vtedy, keď vektory $(b - a)$, \vec{g} a \vec{h} sú lineárne závislé.

To platí vtedy a len vtedy, ak $a = b$ alebo $g = k.h$.

a.) Ak $a=b$ potom sa pretínajú práve v tomto bode

b.) Ak $g=k.h$ potom sú rovnobežné alebo totožné (teda uhol medzi nimi je nulový).

Z lemy 31 vieme, že

$$\cos \hat{\Phi} = \cos \Phi - \varepsilon \vec{d} \sin \Phi.$$

Keďže uhol Φ je nulový, potom platí

$$\cos \Phi = \cos 0 = 1 \text{ a } \sin \Phi = \sin 0 = 0.$$

A teda

$$\cos \hat{\Phi} = 1 - 0 = 1$$

Preto $\hat{\Phi} = 0$. Z definície 25 duálneho uhla vieme, že

$$\hat{\angle}(\vec{G}, \vec{H}) = \angle(\vec{G}, \vec{H}) + \varepsilon \vec{d}(\vec{G}, \vec{H}).$$

Ale mi už vieme, že

$$\hat{\Phi} = 0 \text{ a } \Phi = 0.$$

Po dosadení do definície 25 duálne uhla dostávame

$$0 = 0 + \varepsilon \vec{d}(\vec{G}, \vec{H}) = \varepsilon \vec{d}(\vec{G}, \vec{H})$$

$$0 = \varepsilon \vec{d}(\vec{G}, \vec{H}) \Leftrightarrow \vec{d}(\vec{G}, \vec{H}) = 0$$

Z čoho vyplýva, že priamky \vec{G} a \vec{H} sú totožné.

Teraz ukážeme implikáciu smerom doprava:

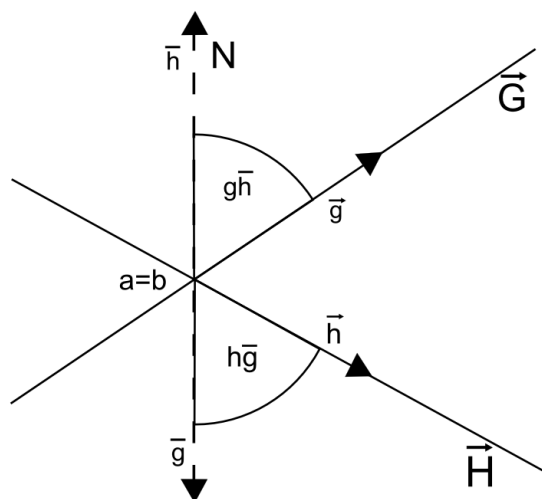
Ak sa \vec{G} a \vec{H} prenikajú, tak platí rovnosť $g\bar{h} + h\bar{g} = 0$.

Keďže sa prenikajú, tak ich vzdialenosť je nulová. A z rovnosti

$$g\bar{h} + h\bar{g} = -d \sin \Phi = 0 \sin \Phi = 0$$

jasne vyplýva pravdivosť tvrdenia.

Obrázok 33:



Sprievodný obrázok k dôsledku 33 lemy 31

Obrázok znázorňuje, že sklárne súčiny $g \cdot \bar{h}$ a $h \cdot \bar{g}$ vyjadrujú kosínusy uhlov medzi (g, \bar{h}) a (h, \bar{g}) , ktoré sú pravé. Preto je $g \cdot \bar{h} + h \cdot \bar{g}$ nulové.

Opäť, túto interpretáciu nemožno brať doslovne, iba sa snaží popísať vzťah z dôsledku.

Kapitola 6

Dodatky

Definícia 34:

Grupou bijektívnych transformácií v D^3 , ktoré sú invariantné vzhľadom na duálny skalárny súčin nazývame duálne sférické posunutia.

Veta 35:

Studyho zobrazenie generuje izomorfizmus medzi grupou posunutí v E^3 a grupou duálnych sférických posunutí.

Dôkaz.:

Lemma 31 nám ukazuje, že posun v E^3 definuje (pomocou Studyho zobrazení) duálny sférický posun. Zobrazenie je taktiež jednoznačne určené:

Invariantnosť duálneho skalárneho súčinu totiž spôsobuje invariantnosť vzdialeností a uhlov. Takáto bijekcia na množine priamok v euklidovskom priestore E^3 musí byť tvorená euklidovským posunom.

△ QED

Poznámka 36:

Každá priamka G má práve dve orientácie G_1 a G_2 . Preto má priradené dva duálne vektory \hat{g}_1 a \hat{g}_2 , pričom platí, že sú opačné

$$\hat{g}_1 = -\hat{g}_2.$$

Potom Studyho model pre neorientované priamky sa dá skonštruovať z modelu pre orientované priamky, a to tak, že nájdeme opačné (protíahlé)

body Studyho sféry pre orientované priamky. Tieto dva body potom určujú neorientovanú priamku na Studyho sfére.

Poznámka 39:

Kinematika priamky popisuje pohyb priamky v priestore. Je blízka kinematike hmotného bodu z klasickej mechaniky vo fyzike, avšak táto popisuje priamku ako množinu bodov namiesto jediného hmotného bodu.

Poznámka 39:

Kinematika priamok euklidovského priestoru je ekvivalentná s duálnou sférickou kinematikou. Tento fakt sa veľmi dobre využíva na budovanie teorie priestorovej kinematike a na praktické výpočty v priestorovej mechanike.

Kapitola 7

Záver

V bakalárskej práci som sa pokúsil objasniť základy duálnych čísel. Dúfam, že úspešne.

Hneď na začiatku práce sme si ukázali čo sú to duálne čísla. Potom sme rozoberali ich základné vlastnosti, ich je správanie sa pri bežných operáciách ako sčítanie či násobenie. Keď sa nám podarilo zdefinovať základné matematické nástroje, ktoré boli potrebné v ďalšom texte, pustili sme sa do aplikácie duálnych čísel v Plückerových súradniciach. Tieto sa stali základom pri výstavbe Duálnych vektorov a duálnych uhlov. Na záver práce sme si ukázali niektoré praktické aplikácie duálnych čísel.

Toto všetko je však len špičkou ľadovca. Mnohé oblasti duálnych čísel som bol nútení vypustiť, pretože ich pre množstvo údajov nebolo možné do práce zahrnúť. Jednou z najzaujímavejších oblastí, ktoré sa do mojej práce nedostali sú oktonióny (duálne čísla na kvaterniónoch). Preto by som rád pokračoval práve oktoniónmi pri písaní svojej diplomovej práce.

Ďakujem vám za vašu pozornosť pri čítaní tejto bakalárskej práce.

Jakub Mišún

Zoznam použitej literatúry

- (1) POTTMANN H. & WALLNER J., Computational line geometry, Springer Berlin, 2001
- (2) BRODSKY V. & SHOHAN M., Dual numbers representation of body dynamics
- (3) poznámky z predmetu Geometria pre grafikov.
- (4) <http://www.euclideanspace.com/maths/algebra/realNormedAlgebra/other/dualNumbers/index.htm>
- (5) http://en.wikipedia.org/wiki/Dual_number