Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky Fyziky a Informatiky
Katedra Geometrie

Diplomová práca

Autor: Martin Cieker
Vedúci diplomovej práce: RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, Apríl 2004

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky Fyziky a Informatiky
Katedra Geometrie

Boolovské operácie na telesách s hranicou vzniknutou prerozdeľovaním

Diplomová práca

Autor: Martin Cieker
Vedúci diplomovej práce: RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Bratislava, Apríl 2004

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne len s použitím literatúry, ktorá je uvedená v zozname.

V Bratislave, 1. apríla 2004

.....
Martin Cieker

Touto cestou vyslovujem poďakovanie **RNDr. Pavlovi Chalmovianskému PhD.** za pomoc, odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní mojej diplomovej práce.

Obsah

1 Úvod **2**

2 Základy princípu prerozdeľovania **4**
2.1 Niektoré princípy modelovania rekurzívnymi schémami 4
2.1.1 Splajny 4
2.1.2 Definícia B-Splajnu pomocou konvolúcie 5
2.1.3 Prerozdeľovanie na báze splajnov 5
2.1.4 Matica prerozdeľovania 6
2.1.5 Konvergencia prerozdeľovacej schémy 8
2.1.6 Analýza prerozdeľovacej schémy 9
2.2 Plochy vzniknuté rekurzívnym prerozdeľovaním 12
2.2.1 Hladkosť plochy 12
2.2.2 Najznámejšie prerozdeľovacie metódy 14

3 Aproximácia boolovskej operácie **21**
3.1 Charakteristika boolovských operácií 22
3.2 Dátová štruktúra okrídlených polhrán 23
3.3 Prienik hraníc dvoch telies 24
3.3.1 Prienik dvoch trojuholníkových stien 24
3.3.2 Algoritmus hľadania hraničnej krivky 25
3.4 Orezanie mešu nájdenou hraničnou krivkou 28
3.4.1 Zjemňovanie stien a stotožňovanie vrcholov 28
3.4.2 Triangulácia netrojuholníkových stien 31
3.4.3 Alternatívny prístup k orezaniu mešu. 32
3.5 Úprava hraníc mešov 33
3.5.1 Stotožnenie hraničných kriviek 33
3.6 Implementácia 37

4 Výsledky **38**

5 Záver **43**

Kapitola 1

Úvod

Pred viac ako 20-timi rokmi články Catmull a Clarka [1] a Doo a Sabina [2] znamenali začiatok používania rekurzívneho prerozdeľovania na modelovanie plôch s ľubovoľnou topológiou. Odvtedy si takto vytvorené plochy našli široké uplatnenie v aplikáciách počítačovej grafiky, kde sa využívajú na modelovanie telies. Avšak pri samotnom modelovaní si nevystačíme s ich reprezentáciou pomocou iba jednej plochy, zvlášť, ak sú dosť zložité. Boolovské operácie (prienik, zjednotenie, rozdiel telies), predstavujú prirodzenú cestu, ako vhodne skonštruovať objekty zložitejšie od základných primitívov (guľa, kužeľ, valec, kváder ...). Tento prístup je bežný vo väčšine aplikácií počítačom podporovaného modelovania. Na zabezpečenie presnej reprodukcie požadovaného tvaru modelovaného telesa sa boolovské operácie a telesá, na ktorých boli vykonané, ukladajú do tzv. CSG stromu v takom poradí, v akom boli vykonané. Napriek tomu pre mnoho aplikácií nie je takýto prístup najúčinnejší a najvhodnejší. Napr. implementácia booloských operácií na najčastejšie používanú hraničnú reprezentáciu (B–rep.) telies je dosť obtiažna. Existujúce systémy obvykle spracúvajú B–rep. ako súbor orezaných splajnových záplat zdieľajúcich hranice. Hranice jednotlivých záplat sú navzájom pospájané iba približne, pretože je veľmi obtiažne zaistiť, aby dve orezané krivky v rozdielnych parametrický oblastiach boli identické v priestore. Každá operácia prieniku vedie k čoraz zložitejšej a ťažko ovládateľnej orezanej hraničnej krivke. Na takomto modeli je náročné použiť hladké deformácie. Základnou operáciou, potrebnou na túto plošnú reprezentáciu je prienik dvoch orezaných NURBS–ových záplat, ktorá je sama o sebe problémom. Ako výsledok, boolovské operácie sú často pomalé a nie celkom priame, hoci často sa dosiahnu skvelé výsledky.

Pre mnohé aplikácie počítačovej grafiky a animácie nie sú v nich podstatné exaktné a zložité techniky, ale práve pohotové a rýchle výpočty a ich priamosť, tak ako zaistenie ovládateľnosti aj zložitejších objektov.

Cieľom našej práce bude vypočítať výsledok boolovskej operácie, vykonanej na telesách ohraničených plochami vzniknutými rekurzívnym prerozdeľovacím procesom (tzv. subdivision plochami). Následne porovnať výsledky nasledujúcich dvoch postupov,

- Na dvoch mešoch vykonáme boolovskú operáciu a výsledný meš prerozdelíme (zjemníme)
- Najskôr prerozdelíme meše, na ktorých následne vykonáme boolovskú operáciu

z hľadiska kritérií presnosti výsledného tvaru a časovej náročnosti.

Keďže telesá na ktoré budeme aplikovať boolovskú operáciu, sú reprezentované subdivision plochami, pozrieme sa ne podrobnejšie v kapitole 2, ktorá je im venovaná. Rozoberieme si základné myšlienky princípu prerozdeľovania na modelovanie kriviek a plôch. Zameriame sa na najznámejšie prerozdeľovacie pravidlá, ako aj na hladkosť plochy v jednotlivých bodoch.

Kapitola 3 popisuje náš algoritmus na výpočet boolovskej operácie dvoch telies, ktorý sme vypracovali na základe niektorých myšlienok, uvedených v [9]. Celý algoritmus môžeme zhrnúť do nasledujúcich krokov:

- nájdenie hraničnej krivky dvoch telies, charakterizovaných mešom;
- orezanie mešu nájdenou hraničnou krivkou;
- upravenie hraníc oboch mešov;
- spojenie takto upravených mešov.

Popisujeme riešenie ťažkostí, s ktorými sme sa stretli v priebehu implementácie, ako aj možnosti ďalšieho postupu pri rozšírení našej práce.

V závere popisujeme dosiahnuté výsledky.

Kapitola 2

Základy princípu prerozdeľovania

2.1 Niektoré princípy modelovania rekurzívnymi schémami

Podľa [3] môžeme zhrnúť základnú myšlienku nasledovne:
Rekurzívne prerozdeľovanie definuje hladkú krivku alebo plochu ako limitu série postupných zjemnení.

Nasledujúce časti nám objasnia základy tohoto postupu.

2.1.1 Splajny

Splajn je po častiach polynomická krivka nejakého vopred zvoleného stupňa. V prípade kubického splajnu (stupeň každého segmentu je maximálne 3), každý segment krivky môže byť zapísaný ako

$$\begin{aligned} x(t) &= a_3^i t^3 + a_2^i t^2 + a_1^i t + a_0^i \\ y(t) &= b_3^i t^3 + b_2^i t^2 + b_1^i t + b_0^i \end{aligned}$$

kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R^4}$ sú vektory konštantných koeficientov formujúcich tvar krivky. Index i označuje príslušný segment. Táto reprezentácia používa monomiálnu bázu, teda $(t^3, t^2, t^1, 1)$. My však budeme pre naše potreby používať vyjadrenie splajnovej krivky ako lineárnej kombinácie posunutých B-*splajnov*, kde každý z koeficientov $(x_i, y_i)^T = p_i \in \mathbf{R}^2$ nazývame riadiacim bodom.

$$x(t) = \sum_i x_i B_l^i(t-i)$$
$$y(t) = \sum_i y_i B_l^i(t-i)$$

Nové bázické funkcie $B_l^i(t)$ sú vybrané tak, že výsledná krivka je vždy spojitá vopred zvoleného rádu a vplyv riadiacich bodov je lokálny. V prípadoch, kde nám nezáleží na intervale, na ktorom je zadefinovaná splajnová funkcia, použijeme označenie $B_l(t)$, kde chýba horný index, vyjadrujúci práve túto vlasnosť.

2.1.2 Definícia B-Splajnu pomocou konvolúcie

Je veľa spôsobov na odvodenie B-Splajnov. Pre naše potreby je najvhodnejšia opakovaná konvolúcia.

Začneme s najjednoduchším prípadom: po častiach konštantná bázická funkcia (tzv. box funkcia) je zadefinovaná ako

$$B_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

a funkcia označená $B_0^i(t) = B_0(t-i)$ je posunutím $B_0(t)$. Spojitú konvolúciu dvoch funkcií reprezentujeme ako

$$(f \otimes g)(t) = \int f(s)g(t-s)\mathrm{d}s.$$

Teraz B-splajnové bázické funkcie ľubovoľného stupňa n získame konvolúciou bázickej funkcie stupňa $n-1$ s box funkciou $B_0(t)$. Tak napríklad B-splajn stupňa 1 je zadefinovaný ako konvolúcia $B_0(t)$ samého so sebou

$$B_1(t) \quad = \quad \int B_0(s)B_0(t-s)\mathrm{d}s.$$

Podobne môžeme vypočítať B-splajn stupňa 2 konvolúciou $B_1(t)$ opäť s box funkciou $B_0(t)$

$$B_2(t) \quad = \quad \int B_1(s)B_0(t-s)\mathrm{d}s.$$

V tomto prípade, výsledná krivka obsahuje tri kvadratické segmenty zadefinované na intervaloch (0,1),(1,2),(2,3). Vo všeobecnosti opakovaním konvolúcie n-krát dostaneme B-splajn stupňa n

$$B_n(t) \quad = \quad \int B_{n-1}(s)B_0(t-s)\mathrm{d}s.$$

Zadefinovanie B-splajnov takýmto spôsobom okamžite poukazuje na mnoho ich užitočných vlastností. Jednou z nich je spojitosť, o ktorej hovorí nasledujúca veta z [3] na strane 25.

Veta 2.1.1 *Ak f(t) je C^k-spojitá, potom $(B_0 \otimes f)(t)$ je C^{k+1}-spojitá.*

Z toho pre nás vyplýva, že B-splajn stupňa n je C^{n-1}-spojitý, pretože B-splajn stupňa 1 je C^0-spojitý.

2.1.3 Prerozdeľovanie na báze splajnov

Keďže tento princíp je totožný tak pre krivky ako aj plochy, zameriame sa v ďalších úvahách na krivky z dôvodu väčšej zrozumiteľnosti a jednoduchosti.

Prerozdeľovanie splajnov. Ďalšia mimoriadna vlastnosť B-splajnov je, že sa riadia tzv. *rovnicou zjemnenia.* Táto rovnica ukazuje ako možno zapísať B-splajn pomocou kombinácie posunutých a škálovaných kópií samého seba.

$$B_l(t) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} B_l(2t-k) \tag{2.1}$$

Táto vlastnosť je kľúčom k odvodeniu prerozdeľovacieho procesu pomocou splajnov. Dokážeme ju. Na začiatok sa pozrieme na splajn nultého stupňa $B_0(t)$.

$$B_0(t) = B_0(2t) + B_0(2t-1)$$

Preň môžeme túto vlastnosť ľahko overiť priamo výpočtom. Zopakujme, že sme definovali B-splajn stupňa l ako.

$$B_l(t) = \bigotimes_{i=0}^{l} B_0(t) = \bigotimes_{i=0}^{l} (B_0(2t) + B_0(2t-1))$$

Tento výraz môžeme upraviť použijúc nasledovné vlastnosti konvolúcie pre funkcie $f(t), g(t)$ a $h(t)$ uvádzané v [3]

$$\begin{aligned} f(t) \otimes (g(t) + h(t)) &= f(t) \otimes g(t) + f(t) \otimes h(t) \\ f(t-i) \otimes g(t-k) &= m(t-i-k) \\ f(2t) \otimes g(2t) &= \frac{1}{2} m(t-i-k), \end{aligned}$$

kde $m(t) = f(t) \otimes g(t)$. Napríklad v prípade $B_1(t)$ dostávame:

$$\begin{aligned} B_1(t) &= B_0(t) \otimes B_0(t) \\ &= (B_0(2t) + B_0(2t-1)) \otimes (B_0(2t) + B_0(2t-1)) \\ &= B_0(2t) \otimes B_0(2t) + 2(B_0(2t) \otimes B_0(2t-1)) + B_0(2t-1) \otimes B_0(2t-1) \\ &= \frac{1}{2} B_1(2t) + \frac{1}{2} B_1(2t-1) + \frac{1}{2} B_1(2t-1) + \frac{1}{2} B_1(2t-1-1) \\ &= \frac{1}{2} (B_1(2t) + 2B_1(2t-1) + B_1(2t-2)) \\ &= \frac{1}{2^1} \sum_{k=0}^{2} B_1(2t-k) \end{aligned}$$

2.1.4 Matica prerozdeľovania

Prerozdeľovanie splajnových kriviek. Teraz, keď už máme v rukách tento aparát, vráťme sa späť ku splajnovým krivkám. Nech

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \sum_i p_i B_l^i(t)$$

je splajnová krivka stupňa l s riadiacimi bodmi $(x_i, y_i)^T = p_i \in \mathbf{R}^2$. Keďže nás zatiaľ nezaujímajú hranice, ponechali sme index v sume nešpecifikovaný. Podľa definície

B-splajnu $B_l^i(t) = B_l(t-i)$, každý riadiaci bod má lokálny vplyv na malú časť krivky pre parameter $t \in \langle i, i+l)$. Uvažujme teraz vektor $\mathbf{p}$ pozostávajúci z riadiacich bodov

$$\mathbf{p} = [\ldots, p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \ldots]^T$$

a vektor $\mathbf{B}(t)$ pozostávajúci z posunutých kópií funkcie $B(t)$, zadefinovaných vyššie.

$$\mathbf{B}(t) = [\ldots, B(t+2), B(t+1), B(t), B(t-1), B(t-2), \ldots]$$

V takomto označení môžeme zapísať krivku γ ako skalárny súčin $\mathbf{B}(t).\mathbf{p}$. Každý z prvkov vektora $\mathbf{B}(t)$, vyjadríme podľa rovnice zjemnenia, ako lineárnu kombináciu posunutých a škálovaných kópií samého seba, kde B-splajnové funkcie zapíšeme do vektora $\mathbf{B}(2t)$

$$\mathbf{B}(2t) = [\ldots, B(2t+2), B(2t+1), B(2t), B(2t-1), B(2t-2), \ldots]$$

a príslušné koeficienty kombinácie do matice S. Táto matica nám zachytáva vzťah medzi pôvodnými a rozšírenými B-splajnovými funkciami, ktorý zapíšeme nasledujúcou rovnicou.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(2t)S.$$

Ako vyplýva z rovnice (2.1) jednotlivé prvky matice S majú tvar

$$S_{2i+k,i} = s_k = \frac{1}{2^l}\binom{l+1}{k}.$$

Nenulové prvky v každom stĺpci matice S sú kópiou predchádzajúceho stĺpca posunuté o dva rady nadol. Použitím týchto vzťahov môžeme krivku γ(t) vyjadriť nasledovne:

$$\gamma(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{p} = \mathbf{B}(2t)S\,\mathbf{p}.$$

Je to stále tá istá krivka, ale popísaná pomocou rozšírených B-splajnov ($\mathbf{B}(2t)$), ktoré sú nenulové na intervale polovičnej dĺžky a dvakrát hustejšie rozložené ako pôvodné B-splajny ($\mathbf{B}(t)$) Ukázali sme zmenu od starej bázy $\mathbf{B}(t)$ k novej báze $\mathbf{B}(2t)$ a súbežne zmenu vektora starých riadiacich vrcholov $\mathbf{p}$ na primeraný vektor nových riadiacich vrcholov $S\,\mathbf{p}$. Tento proces môžeme opakovať nasledovným spôsobom,

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \mathbf{B}(t)\mathbf{p}^{\,0} \\
&= \mathbf{B}(2t)\mathbf{p}^{\,1} &&= \mathbf{B}(2t)S\,\mathbf{p}^{\,0} \\
&\quad\vdots \\
&= \mathbf{B}(2^j t)\mathbf{p}^{\,j} &&= \mathbf{B}(2^j t)S^j\,\mathbf{p}^{\,0},
\end{aligned}$$

z ktorého môžeme odvodiť nasledovný vzťah pre riadiace vrcholy na rôznych úrovniach prerozdeľovania,

$$\mathbf{p}^{\,j+1} = S\,\mathbf{p}^{\,j}$$

kde S je matica prerozdeľovania. Uvedomme si, že nekonečná. Pri bližšom pohľade na jeden prvok vektora $\mathbf{p}^{\,j+1}$, na riadiaci vrchol p_i^{j+1} vidíme že

$$p_i^{j+1} = \sum_l S_{i,l}p_l^j.$$

Aby sme presne zistili, ktoré prvky matice S (s_k) ovplyvňujú tento výraz, rozdeľme prístup na párne a nepárne kroky. Pre nepárne kroky máme

$$p_{2i+1}^{j+1} = \sum_l S_{2i+1,l} p_l^j = \sum_l s_{2(i-l)+1} p_l^j$$

a pre párne

$$p_{2i}^{j+1} = \sum_l S_{2i,l} p_l^j = \sum_l s_{2(i-l)} p_l^j.$$

Z toho sme dostali dve odlišné prerozdeľovacie pravidlá, jedno pre nové *párne* riadiace body krivky a jedno pre nové *nepárne* riadiace body.

Poznamenajme ešte, že nepárne body v $(j+1)$ úrovni sú nanovo vkladané, kým párne body priamo korešpondujú so starými bodmi na $j-$tej úrovni. Prerozdeľovaciu schému, ktorá má túto vlastnosť budeme ďalej nazývať *interpolačnou*. Pri *aproximačnej* schéme môže dochádzať ku zmene párnych aj nepárnych bodov.

Všimnite si, že môžeme zjemňovať postupnosť bodov zoradených do vektora $\mathbf{p}$ obyčajným násobením tohto vektora maticou prerozdeľovania S, ktorá zachytáva "zjemňovací vzťah" pre B-splajny použité v definícií krivky. Ak by tieto body boli riadiacimi bodmi krivky, potom po opakovanom prenásobení maticou S dostaneme stále hustejšiu a hustejšiu postupnosť riadiacich bodov, pospájaním ktorých dostaneme krivku, ktorá bude od pôvodnej len ťažko rozlíšiteľná už po niekoľkých krokoch.

Tento fakt môžeme použiť na vytvorenie algoritmu a jadra prerozdeľovacej paradigmy. Namiesto vykresľovania krivky (plochy) na obrazovku budeme vykresľovať riadiaci polygón, po častiach lineárnu krivku získanú prerozdeľovaním.

2.1.5 Konvergencia prerozdeľovacej schémy

Je viac spôsobov konvergencie postupnosti funkcií k limitnej funkcií. My použijeme rovnomernú konvergenciu. Táto forma konvergencie je pre nás najvhodnejšia, pretože má užitočnú vlastnosť. Ak postupnosť spojitých funkcií konverguje rovnomerne k nejakej limitnej funkcií f, tak táto limitná funkcia je tiež spojitá.

Postupnosť funkcií, ktorú chceme analyzovať, je postupnosťou riadiacich polygónov, vzniknutých v procese prerozdeľovania resp. zjemňovania, použitím prerozdeľovacieho pravidla S. Nezávisle na prerozdeľovacom pravidle, môžeme použiť lineárne B-splajny na zadefinovanie po častiach lineárnej krivky cez riadiace body ako $P^j(t) = \mathbf{B_1}(2^j t)\mathbf{p}^j$. Jedna cesta ako ukázať, že daná prerozdeľovacia schéma konverguje k spojitej limitnej funkcií, je dokázať, že limita

$$P^\infty(t) = \lim_{j\to\infty} P^j(t)$$

existuje pre všetky t a postupnosť $P^j(t)$ konverguje rovnomerne. Na ukázanie tejto vlastnosti potrebujeme dodatočný predpoklad, že pre každý riadok matice S je súčet všetkých jeho prvkov je rovný 1. Pravidlo spojitosti pri prerozdeľovaní je rozdiel dvoch priľahlých riadiacich bodov $p_{i+1}^j - p_i^j = (\Delta\mathbf{p}^j)_i$. Ukážeme, že ak rozdiel medzi susednými riadiacimi bodmi klesá dosť rýchlo, limitná krivka bude existovať a bude spojitá.

Lema 2.1.1 *Ak* $\| \Delta\mathbf{p}^j \| < c\gamma_j$ *pre nejaké* $c > 0$ *a* $0 < \gamma < 1$ $\forall j > j_0 \geq 0$ *potom* $P^j(t)$ *konverguje k spojitej limitnej funkcií* $P^\infty(t)$. *A naviac*

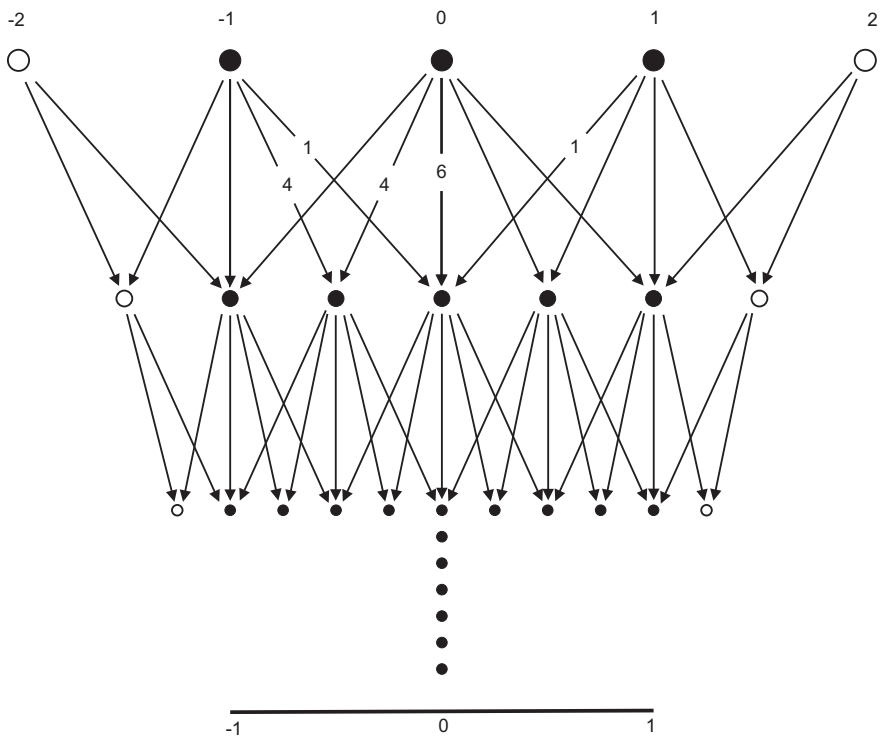
$$\| P^{j+1}(t) - P^j(t) \| < \frac{\|D\|c}{1-\gamma}\gamma_j.$$

Dôkaz tejto lemy sa nachádza v [3] na strane 33. Z uvedenej lemy vyplýva rovnomerná konvergencia a spojitosť limitnej funkcie $P^\infty(t)$.

2.1.6 Analýza prerozdeľovacej schémy

Invariantné susedstvo. Predstavme si, že chceme študovať limitnú krivku nejakej prerozdeľovacej schémy v blízkom okolí nejakého bodu. Na určenie lokálnych vlastností tejto krivky nepotrebujeme celý nekonečný vektor riadiacich bodov, alebo nekonečnú maticu popisujúcu prerozdeľovanie celej krivky. Diferencovateľnosť napríklad je lokálnou vlastnosťou krivky. Toto nás vedie k otázke, ktoré riadiace body vplývajú na krivku v okolí bodu v ktorom ju chceme študovať.

Ako príklad uvažujme kubické B-splajnové prerozdelenie. Nech skúmaným bodom je práve počiatok, teda $P(0)$. Jeden kubický segment sa nachádza naľavo od skúmaného bodu s hodnotou parametra $t \in [-1, 0]$ a druhý napravo s hodnotou parametra $t \in [0, 1]$. Obrázok 2.1 ukazuje, že potrebujeme 5 bodov v najhrubšej úrovni, na dosiahnutie ľubovoľného bodu limitnej krivky, ktorý je spojený s hodnotou parametra medzi -1 a 1.



Obrázok 2.1: V prípade kubického B-splajnového prerozdeľovania, je invariantné susedstvo veľkosti 5. Zahŕňa 5 riadiacich bodov v najhrubšej úrovni na určenie správania limitnej krivky pozdĺž dvoch segmentov priľahlých k počiatku.

Hovoríme, že invariantné susedstvo má veľkosť 5. Toto číslo závisí od počtu nenulových prvkov v každom riadku prerozdeľovacej matice. V našom prípade to je 2 pre nepárne body a 3 pre párne body. Pre určenie párnych vrcholov na okrajoch budeme

potrebovať ešte jeden riadiaci bod na pravo od 1 a jeden na ľavo od -1. Z faktu, že 5 centrálnych riadiacich bodov ovláda správanie limitnej krivky v počiatku, vyplýva nezávislosť na úrovni. S týmito piatimi riadiacimi bodmi na j-tej úrovni, môžeme vypočítať päť riadiacich bodov na $j+1$ úrovni. Z tohto všetkého vyplýva, že ak chceme študovať správanie krivky v počiatku, všetko čo musíme analyzovať je malý 5×5 podblok nekonečnej prerozdeľovacej matice

$$\begin{pmatrix} p_{-2}^{j+1} \\ p_{-1}^{j+1} \\ p_0^{j+1} \\ p_1^{j+1} \\ p_2^{j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-2}^{j} \\ p_{-1}^{j} \\ p_0^{j} \\ p_1^{j} \\ p_2^{j} \end{pmatrix}.$$

Niektoré vlastnosti kriviek vygenerovaných pomocou prerozdeľovania môžu byť odvodené z lokálnej prerozdeľovacej matice. Odteraz nech symbol S označuje *lokálnu* prerozdeľovaciu maticu.

Analýza pomocou vlastných vektorov a k nim príslušných vlastných hodnôt. Zopakujme si z lineárnej algebry, že *vlastný vektor* $\mathbf{x}$ matice M je nenulový vektor taký že preň platí $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, kde λ je skalár. Hovoríme že λ je *vlastná hodnota* prislúchajúca k vlastnému vektoru $\mathbf{x}$. Predpokladajme, že lokálna prerozdeľovacia matica S má veľkosť $n \times n$ a má reálne vlastné vektory $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$, ktoré formujú bázu s korešpondujúcimi vlastnými hodnotami $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}$. Tak napríklad v prípade kubického splajnu n=5 a

$$\begin{aligned} (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}) \\ (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poznámka: Nie všetky prerozdeľovacie schémy majú iba reálne vlastné hodnoty, alebo kompletnú množinu vlastných vektorov. Predpokladajme preto odteraz, že máme kompletnú množinu vlastných vektorov.

Pri tomto označení môžeme zapísať ľubovoľný vektor $\mathbf{x}$ ako lineárnu kombináciu vlastných vektorov

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{x}_i.$$

Podobne môžeme zapísať rozklad takéhoto typu aj pre vektor $\mathbf{p}$ pozostávajúci z n 2-D bodov. V tomto prípade bude každý z koeficientov a_i 2-D bod. Vlastné vektory $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$, sú obyčajné vektory skladajúce sa z n reálnych čísel. V báze vlastných vektorov môžeme ľahko spočítať výsledok použitia prerozdeľovacej matice na vektor

riadiacich bodov, čo sú vlastne riadiace body na vyššej úrovni

$$\begin{aligned} S\mathbf{p}^0 &= S\sum_{i=0}^{n-1} a_i\mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i S\mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda_i\mathbf{x}_i. \end{aligned}$$

Použitím S j-krát dostaneme

$$\mathbf{p}^j = S^j\mathbf{p}^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda_i^j\mathbf{x}_i.$$

Konvergencia prerozdeľovacej schémy. Ak by $\mid \lambda_0 \mid > 1$, potom výraz $S^j\mathbf{x}^0$ bude neohraničený a prerozdeľovanie nebude konvergovať. Vidíme, že na to aby postupnosť $S^j\mathbf{p}^0$ vôbec konvergovala, je potrebné aby všetky vlastné hodnoty boli menšie ako 1. Tiež je možné ukázať, že iba jedna môže nadobudnúť hodnotu 1, inak by schéma oscilovala. Nech je to λ_0. (pozri [4])

Jednoduchým dôsledkom tejto analýzy je, že môžeme spočítať limitnú pozíciu priamo v báze vlastných vektorov

$$P^\infty(0) = \lim_{j\to\infty} S^j\mathbf{p}^0 = \lim_{j\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda_i^j\mathbf{x}_i = a_0,$$

pretože pre všetky vlastné hodnoty platí $\mid \lambda_i \mid < 1$.

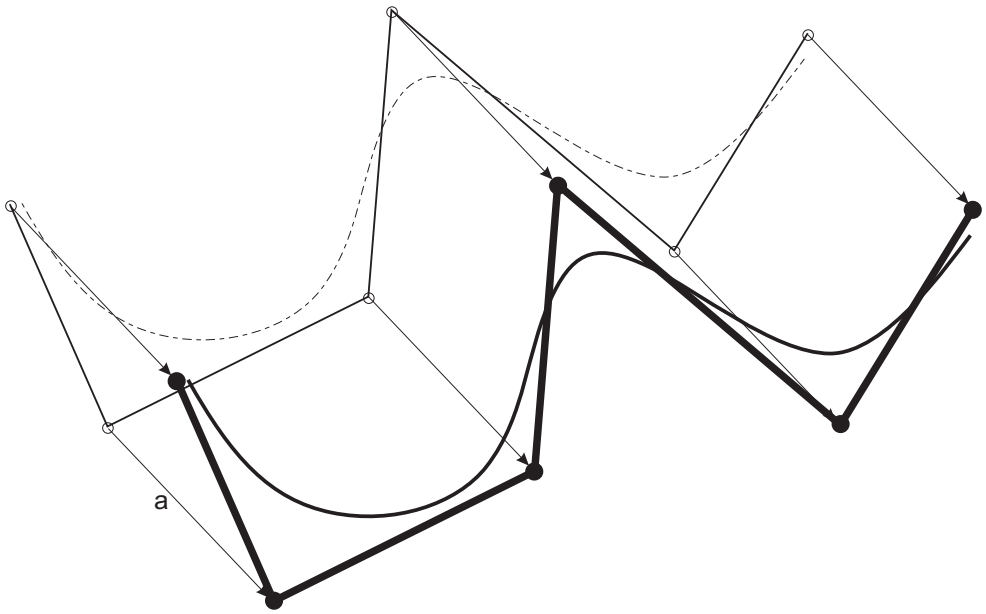
Invariantnosť vzhľadom na afinné transformácie. Ak by sme súbežne pohli všetkými riadiacimi bodmi, budeme očakávať, že krivka zadefinovaná týmito bodmi sa bude pohybovať v rovnakom smere ako pevný objekt. Inak povedané, krivka by mala byť invariantná vzhľadom na transformácie zachovávajúce dĺžku, ako je posunutie, či rotácia. Vyplýva to z linearity prerozdeľovania. Ak metóda prerozdeľovania je invariantná so zreteľom na transformácie zachovávajúce euklidovskú dĺžku, tak by mala byť invariantná vzhľadom na ľubovoľnú afinnú transformáciu. Nech $\vec{1}$ je vektor pozostávajúci z n jednotiek a $a \in \mathbf{R}^2$ je posunutie v rovine (pozri obrázok 2.2). Potom $\vec{1}.a$ reprezentuje posunutie našich šiestich bodov o vektor a. Použitím prerozdeľovania na posunuté body dostaneme

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}^j + \vec{1}.a) &= S\mathbf{p}^j + S(\vec{1}.a) \\ &= \mathbf{p}^{j+1} + S(\vec{1}.a). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Z tohto vidíme, že pre invariantnosť vzhľadom na posunutie potrebujeme:

$$S(\vec{1}.a) = \vec{1}.a$$

Preto $\vec{1}$ by mal byť vlastný vektor matice S s vlastnou hodnotou $\lambda_0 = 1$. Pripomeňme, že keď sme dokazovali konvergenciu prerozdeľovacej metódy, predpokladali sme, že $\vec{1}$ je



Obrázok 2.2: Invariantnosť vzhľadom na posunutie.

vlastný vektor s prislúchajúci k vlastnej hodnote 1. Teraz vidíme, že tento predpoklad bol veľmi užitočný. Nebolo by prirodzené, ak by sa tvar krivky zmenil s posunutím riadiacich bodov.

Z predchádzajúcich úvah vyplývajú nutné vlastnosti prerozdeľovacej matice S:

- vlastné vektory tvoria bázu;
- vlastná hodnota $\lambda_0 = 1$;
- vlastná hodnota $\mid \lambda_1 \mid < 1$;
- pre všetky ostatné vlastné hodnoty platí: $\mid \lambda_1 \mid > \mid \lambda_i \mid, \quad i > 1$.

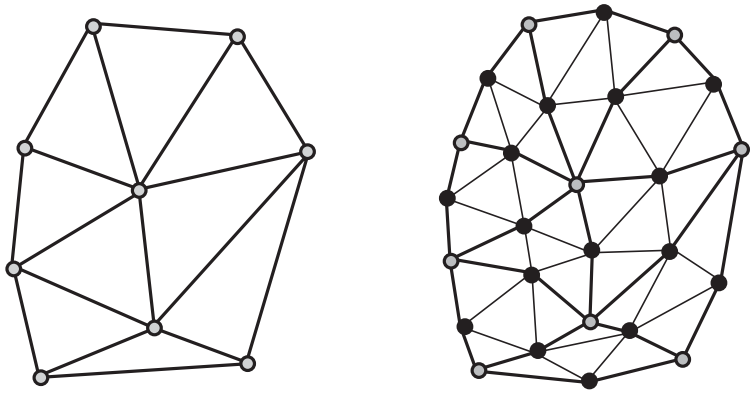
2.2 Plochy vzniknuté rekurzívnym prerozdeľovaním

Keďže princíp prerozdeľovania funguje v 3D podobne ako v 2D prípade, nebudeme sa ním až tak podrobne zaoberať. Poukážeme však na niektoré významné odlišnosti (vyplývajúce práve z 3D priestoru).

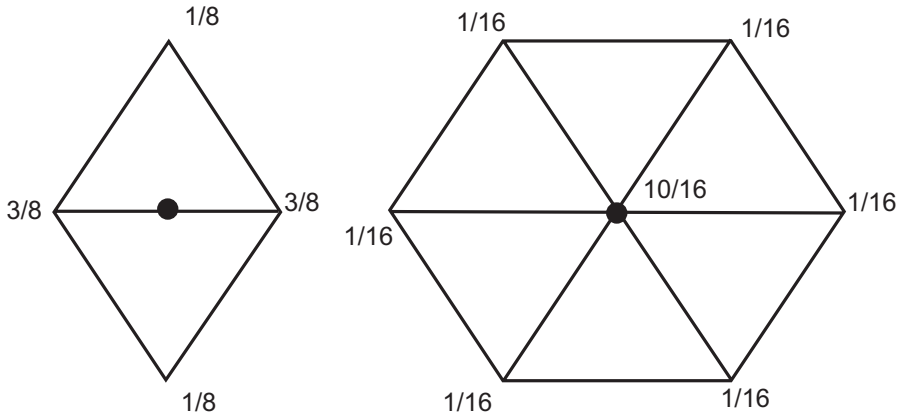
2.2.1 Hladkosť plochy

K tomu nám poslúži ako príklad jedna z najjednoduchších prerozdeľovacích schém Loopova schéma. Táto je zadefinovaná na trojuholníkovom meši. Pravidlo zjemňovania, ktoré nazývame *vkladanie vrchola*, ukazuje obrázok 2.3. Táto schéma je založená na splajnovej bázickej funkcií, nazývanej three-directional quadratic box slpajn[1], definovaná na trojuholníkovej mriežke. Táto splajnová bázická funkcia je C^2 spojitá. Prerozdeľovacie pravidlo spolu s váhami pre túto funkciu ukazuje obrázok 2.4.

[1]trojsmerový kvadratický box-splajn.



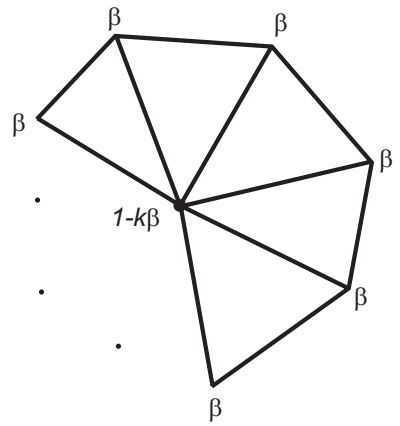
Obrázok 2.3: Zjemnenie trojuholníkového mešu. Nové vrcholy sú označené čiernymi bodkami.



Obrázok 2.4: Prerozdeľovacie koeficienty pre troj smerovú box splajnovú funkciu.

V prípade kriviek, keď máme vybranú splajnovú bázu, všetky koeficienty pre prerozdeľovacie pravidlo sú ňou určené. Táto situácia je radikálne odlišná a podstatne zložitejšia v prípade plôch, lokálna štruktúra ich mešu sa môže meniť. Výsledkom toho pravidlá odvodené od splajnovej bázy sa môžu použiť iba na tie časti mešu, ktoré sú lokálne regulárne, v našom prípade iba na tie vrcholy ktoré majú stupeň rovný 6. Pre vrcholy s odlišným stupňom musíme vytvoriť nové pravidlo. Takéto vrcholy nazývame špeciálne(extraordinárne). Loop navrhuje koeficienty zobrazené na obrázku 2.5. Výber týchto koeficientov zaručí, že limitná plocha tejto schémy bude hladká.

Intuitívne hovoríme ploche hladká, ak existuje v každom bode dotyková rovina a je spojitá. Na presnú definíciu hladkosti však potrebujeme túto plochu vyjadriť ako nejakú funkciu zadefinovanú na parametrickej oblasti s hodnotami v $\mathbf{R}^3$. Pokúsme sa preto o takúto definíciu. Zoberme teda ako parametrickú oblasť mnohosten z ktorého vychádzame pri tvorbe plochy, nazývame ho *inicializačný riadiaci meš* a pre jednoduchosť predpokladajme, že nepretína sám seba. Samotný prerozdeľovací proces produkuje postupnosť mnohostenov so vzrastajúcim počtom vrcholov, hrán a stien. Pod plochou vzniknutou prerozdeľovaním, rozumieme limitu tejto postupnosti. Predpokladajme, že zakaždým keď použijeme prerozdeľovacie pravidlo na vypočítanie jemnejšieho mešu, na inicializačný meš aplikujeme midpoint pravidlo. To znamená, že budeme vkladať



Obrázok 2.5: Loopova schéma, koeficienty pre extraordinárne vrcholy. Koeficient k označuje stupeň vrchola, β je vhodne zvolené číslo.

nové body do stredu každej hrany. Tieto body potom navzájom pospájame, ponechajúc pritom staré body na svojom pôvodnom mieste. Poznamenajme, že každý riadiaci vrchol vzniknutý použitím prerozdeľovacieho pravidla, korešponduje s bodom v meši vytvorenom pomocou midpoint pravidla. Tento budeme ďalej považovať za našu parametrickú oblasť. Označme ju $|K|$. V každom kroku prerozdeľovania dostaneme hustejšiu parametrickú oblasť a meš vytvorený prerozdeľovacím procesom nám určí po častiach lineárnu funkciu na oblasti |K|. Ak postupnosť týchto funkcií konverguje rovnomerne, jej limitou je zobrazenie f z |K| do $\mathbf{R}^3$. Teraz máme zadefinovanú subdivision plochu ako funkciu f : |K|$\rightarrow \mathbf{R}^3$ na mnohostene.

Definícia 2.2.1 *Plocha $f : |K| \rightarrow \mathbf{R}^3$ je parametricky (C^1) spojitá, ak pre každý bod $x \in |K|$ existuje regulárna parametrizácia $\pi : D \rightarrow f(U_x)$ z jednotkového kruhu D do $f(U_x)$ kde U_x je okolie x v $|K|$. Regulárna parametrizácia π je spojito diferencovateľné, jedno-jednoznačné zobrazenie s Jakobiho maticou maximálnej hodnosti.*

V niektorých prípadoch je výhodnejšie použiť definíciu slabšej geometrickej hladkosti.

Definícia 2.2.2 *Plocha $f : |K| \rightarrow \mathbf{R}^3$ je geometricky (G^1) spojitá, v bode $x \in |K|$ vtedy a len vtedy, keď normály plochy sú zadefinované v okolí bodu x a existuje limita týchto normál v bode x.*

Toto je užitočná definícia, pretože geometrická spojitosť sa dá dokázať jednoduchšie ako parametrická. Treba však poznamenať, že geometrická spojitosť má oslabené požiadavky a teda je „slabšia" ako parametrická.

2.2.2 Najznámejšie prerozdeľovacie metódy

Teraz popíšeme najznámejšie prerozdeľovacie schémy, vytvárajúce C^1-spojité plochy na ľubovoľných mešoch. Na prvý pohľad sa rozmanitosť existujúcich schém môže zdať chaotická. Existuje však priama cesta ako klasifikovať väčšinu schém, založená na troch kritériách:

- typ zjemňovacieho pravidla (vkladanie vrchola alebo orezávanie rohov);

- typ vytváraného mešu (trojuholníkový alebo štvoruholníkový);
- či schéma je aproximačná alebo interpolačná.

Klasifikácia prorozdeľovacích schém je znázornená v tabuľkách 2.1 a 2.2. Ako z týchto

	Vkladanie vrchola	
	Trojuholníkový meš	*Štvoruholníkový meš*
Aproximačné	Loop	Catmull-Clark
Interpolačné	Modifikovaný Butterfly	Kobbelt

Tabuľka 2.1: Klasifikácia prerozdeľovacích schém založených na princípe vkladania vrchola.

Orezávanie rohov
Doo-Sabin
Midedge

Tabuľka 2.2: Prerozdeľovacie schémy využívajúce princíp orezávania rohov.

tabuliek vidíme, väčšina schém produkuje odlišné typy plôch. Pozrime sa teda podrobnejšie na tieto klasifikačné kritéria.

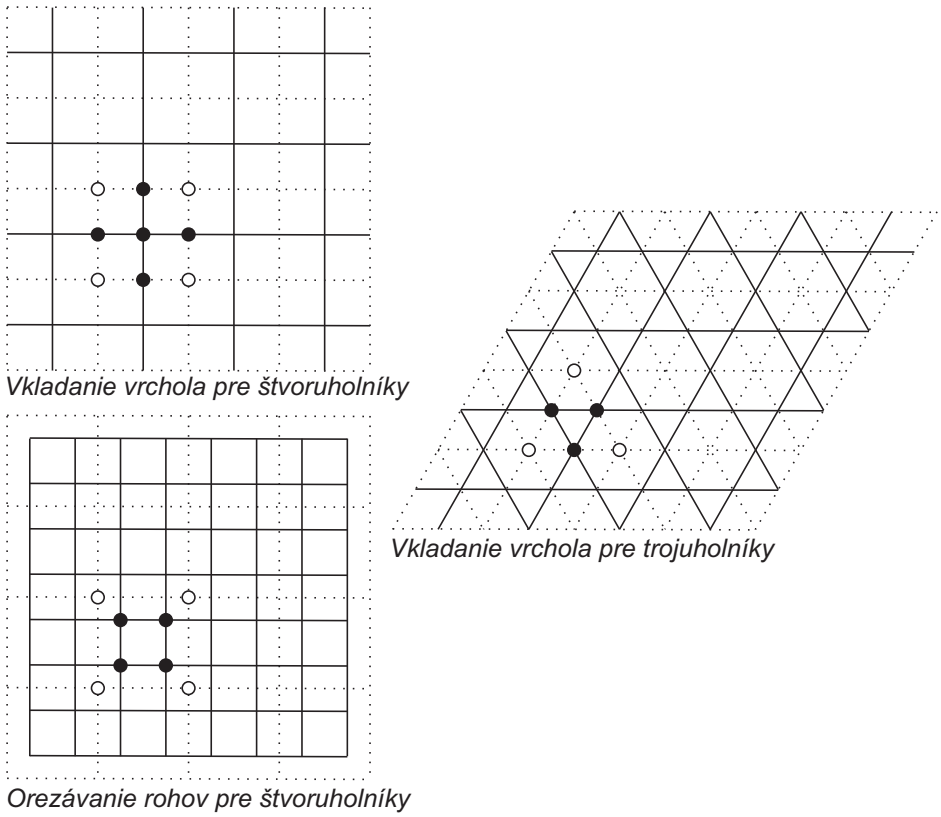
Najskôr však poznamenajme, že každá prerozdeľovacia schéma zadefinovaná na meši ľubovoľnej topológie, je založená na *regulárnej prerozdeľovacej schéme*. Naša klasifikácia je hlavne klasifikáciou regulárnych prerozdeľovacích schém – raz ak máme pevne zvolenú schému, ďalšie pravidlá budú vytvorené iba pre extraordinárne vrcholy alebo steny, ktoré nemôžu byť časťou regulárneho mešu.

Typ mešu. Regulárne prerozdeľovacie schémy fungujú na regulárnom riadiacom meši tak, že vrcholy mešu korešpondujú s regulárne rozloženými bodmi v rovine. Avšak steny mešu môžu byť formované odlišne. Pre regulárny meš je prirodzené použiť steny, ktoré sú identické. Ak naviac predpokladáme, že tieto steny sú regulárne polygóny, potom máme iba tri spôsoby pre výber stenových polygónov: môžeme použiť iba štvorce, rovnostranné trojuholníky a pravidelné šesťuholníky. Meš pozostávajúci z pravidelných šesťuholníkov nie je veľmi všeobecný, ale prvé dva typy sú vhodné pre praktické účely.

Vkladanie vrchola a orezávanie rohov. Ak máme určené dláždenie roviny, musíme definovať ako súvisí zjemnené dláždenie, vytvorené prerozdeľovacou schémou, s pôvodným. Poznáme dva prístupy na vytvorenie zjemneného dláždenia: jeden je *vkladanie vrchola* a druhý *orezávanie rohov* (pozri obrázok 2.6). V prvom prípade každá hrana trojuholníkového alebo štvoruholníkového mešu je rozdelená na dve, staré vrcholy sú ponechané a novo vložené na hrany sú pospájané. Pri štvoruholníkovom meši je vložený jeden dodatočný vrchol pre každú stenu.

V druhom prípade, pre každú starú stenu je vytvorená nová, podobná, vo vnútri starej steny. Novovzniknuté steny sú pospájané. Ako výsledok dostaneme štyri nové vrcholy pre každú starú hranu, novú stenu pre každú hranu a každý vrchol. Staré vrcholy sú vymazané. Pre štvoruholníkové dláždenie to môže byť urobené tak, že zjemnené

dláždenie má iba štvoruholníkové steny. Pre trojuholníky môžeme dostať iba šesťuholníkové dláždenie. Hoci regulárny algoritmus orezávania vrcholov pre trojuholníky by musel striedať medzi trojuholníkovým a šesťuholníkovým dláždením.



Obrázok 2.6: Vkladanie vrchola a orezávanie rohov.

Aproximačná a interpolačná schéma. Schémy založené na vkladaní vrchola môžu byť interpolačné alebo aproximačné. Pre každý vrchol je zadefinovaná postupnosť bodov, korešpondujúca s rozdielnymi úrovňami prerozdeľovania. Ak všetky body v tejto postupnosti sú rovnaké, tak schéma je interpolačná. Inak ju nazývame aproximačná. Interpolácia je atraktívna vlastnosť z viacerých dôvodov:

- pôvodný riadiaci bod definujúci plochu je tiež bodom limitnej plochy, čo umožňuje jej riadenie intuitívnejším spôsobom,
- veľa algoritmov môže byť podstatne zjednodušených a mnoho výpočtov vykonaných na mieste (ušetrených).

Žiaľ výsledný tvar takýchto plôch nie je taký kvalitný ako u plôch vzniknutých aproximačnými schémami. Ďalšou nevýhodou je pomalá konvergencia k limitnej ploche v porovnaní s aproximačnými schémami.

Zhrňme si ešte niektoré dôležité pojmy, ktoré budeme ďalej používať. Niektoré z nich sme už spomínali:

Regulárne a extraordinárne vrcholy. Prerozdeľovacia schéma, ktorá je zadefinovaná na trojuholníkovom meši, vytvára vo vnútri nové vrcholy iba stupňa 6. Na hranici majú novo vytvorené vrcholy stupeň 4. Podobne na štvoruholníkovom meši vznikajú vo vnútri regulárneho mešu vrcholy stupňa 4 a na hranici vrcholy stupňa 3. Vrcholy stupňa 6 pre trojuholníkový meš a vrcholy stupňa 4 pre štvoruholníkový meš nazývame regulárne. Vrcholy iných stupňov nazývame extraordinárne.

Párne a nepárne vrcholy. Pre schémy na báze vkladania vrchola sú vrcholy na hrubšej úrovni mešu tiež vrcholmi zjemneného mešu (v zmysle topológie). Pre ktorýkoľvek úroveň prerozdeľovania voláme všetky nové vrcholy, vzniknuté v danej úrovni *nepárnymi vrcholmi.* Vrcholy z predchádzajúcej úrovne nazývame *párnymi vrcholmi.*

Stenové a hranové vrcholy. Pre trojuholníkové schémy existuje iba jeden druh nepárnych vrcholov. Pre štvoruholníkové schémy sú niektoré vrcholy vložené, keď hrana v hrubšej úrovni je rozdelená, iné vrcholy sú vložené pre stenu. Tieto dva typy nepárnych vrcholov sa nazývajú hranové a stenové.

Hranice a ryhy. Pre hranicu sa obyčajne vytvárajú špeciálne pravidlá prerozdeľovania. Sú vytvárané tak, že hraničná krivka limitnej plochy spravidla nezávisí od žiadnych vnútorných vrcholov a je hladká, alebo po častiach hladká. Rovnaké pravidlo môže byť použité pri vytváraní ostrých hrán na inak hladkej ploche. Takto vzniknuté body potom vytvárajú ryhy.

Maska prerozdeľovania. Často špecifikujeme prerozdeľovacie pravidlo pomocou jeho masky. Maska je vlastne obrázok, ktorý ukazuje vrcholy spolu s ich váhami, použité na výpočet nového vrchola, označovaného čiernou bodkou.

Teraz sa stručne pozrime sa jednotlivé prerozdeľovacie schémy.

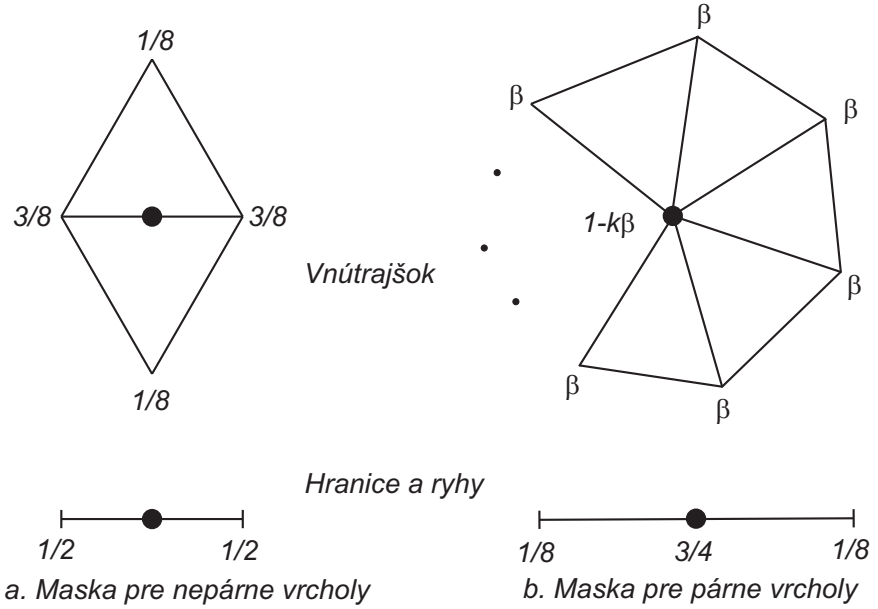
Loopova schéma

Loopova prerozdeľovacia schéma je jednoduchá aproximačná schéma na báze vkladania vrchola, vytvorená Charlesom Loopom [5]. Táto schéma vytvára plochu C^2-spojitú na regulárnom meši, na hraniciach a extraordinárnych vrcholoch dosahuje C^1-spojitosť.

Maska pre Loopovu schému je na obrázku 2.7. Pre hranice a hrany označené ako ryhy sú použité špeciálne pravidlá. Tieto vytvárajú kubický splajn pozdĺž hranice, ryhy.

Modifikovaná Butterfly schéma

Butterfly schéma bola navrhnutá Dynom, Gregorym a Levinom v [6]. Avšak hoci originálna Butterfly schéma je zadefinovaná na ľubovoľnom trojuholníkovom meši, limitná plocha nie je C^1-spojitá v extraordinárnych vrcholoch stupňa $k = 3$ a $k > 7$. Na regulárnom meši je C^1-spojitá. Na rozdiel od aproximačných schém založených na splajnoch, táto schéma nevytvára v limite po častiach polynomickú plochu. V [7] bola ponúknutá modifikácia, ktorá zaručuje, že schéma vytvára C^1-spojité plochy. Táto schéma je C^1 ale nie C^2-spojitá na regulárnom meši. Maska je na obrázku 2.8.



Obrázok 2.7: Na obrázku hore, β môže byť vybraná ako $\frac{1}{n}(5/8 - (\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos(\frac{2\pi}{n}))^2)$ (originálna Loopova voľba [5]), alebo pre $n > 3, \beta = \frac{3}{8n}$ ponúkané Warrenom [4]. Pre $n = 3$, môže byť použitá $\beta = 3/16$ (n je stupeň vrchola).

Catmull-Clarkova schéma

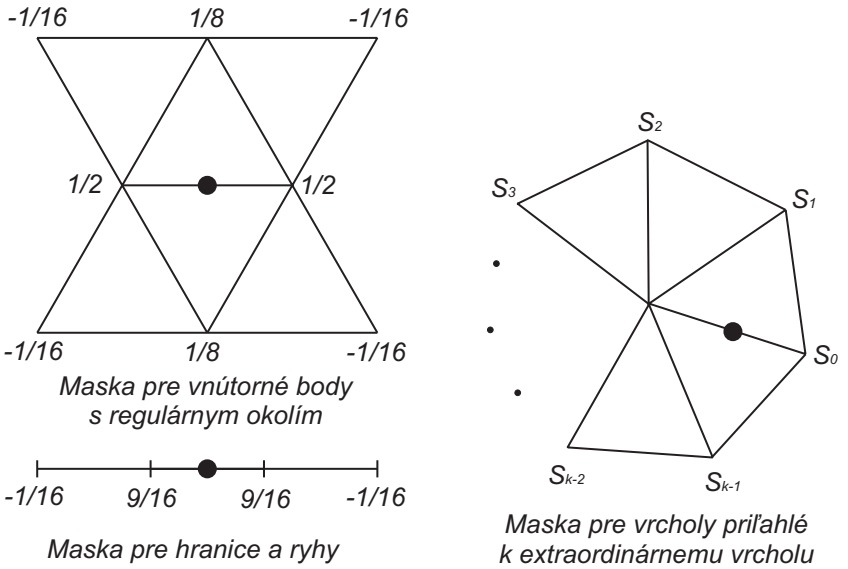
Catmull-Clark schéma bola opísaná v [1]. Je založená na bikubickom tenzorovo-súčinovom splajne. Schéma vytvára plochu, ktorá je C^2 všade okrem extraordinárnych vrcholov, kde je C^1-spojitá. Maska je zobrazená na obrázku 2.9.

Kobbeltova schéma

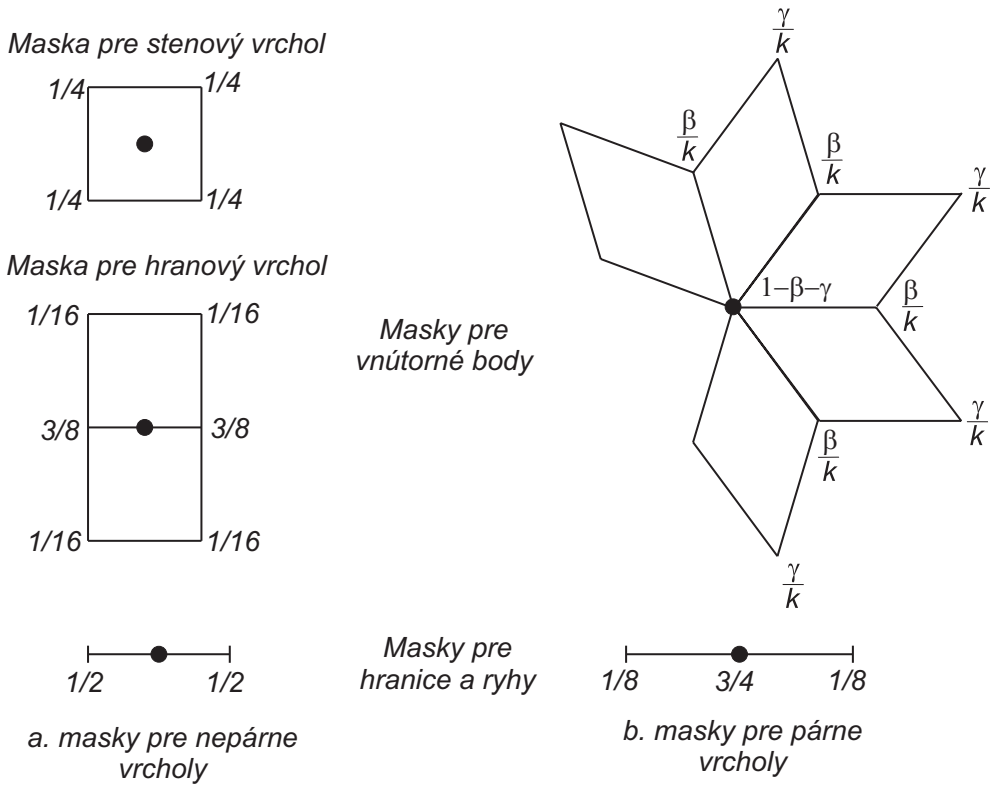
Táto schéma bola popísaná pánom Kobbeltom v [8]. V prípade regulárneho mešu sa redukuje na tenzorový súčin schémy štyroch bodov. Táto schéma vytvára plochy, ktoré sú všade vo vnútorných bodoch C^1-spojité. Maska je na obrázku 2.10.

Doo-Sabinova schéma

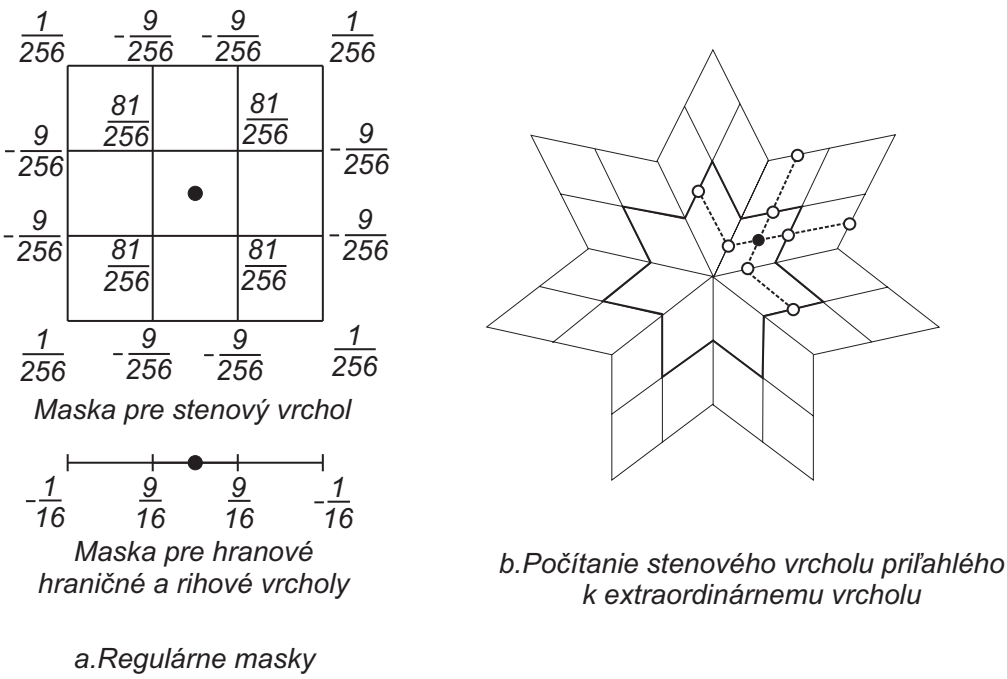
Táto schéma je pojmovo celkom jednoduchá, medzi párnymi a nepárnymi vrcholmi nie je žiaden rozdiel, a tak na zadefinovanie schémy nám postačí jedna maska. Špeciálne pravidlo potrebujeme iba pre hranice, kde takto limitne vznikne kvadratický splajn. Maska je na obrázku 2.11.



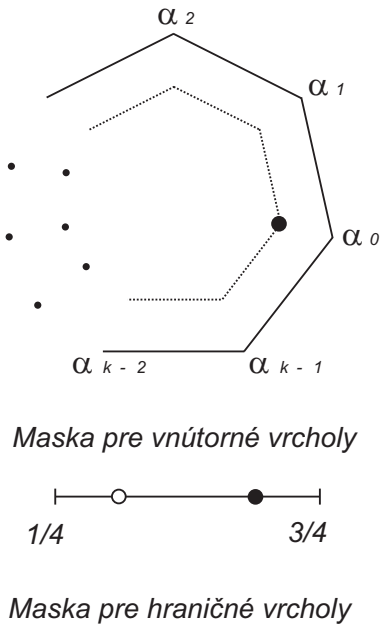
Obrázok 2.8: Modifikovaná Butterfly schéma. Koeficienty s_i sú $\frac{1}{k}(\frac{1}{4} + \cos(\frac{2i\pi}{k}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{4i\pi}{k}))$ pre $k > 5$. Pre $k = 3, s_0 = \frac{5}{12}, s_{1,2} = -\frac{1}{12}$; pre $k = 4, s_0 = \frac{3}{8}, s_2 = -\frac{1}{8}, s_{1,3} = 0$.



Obrázok 2.9: Catmull a Clark odporúčajú nasledujúce koeficienty: $\beta = \frac{3}{2k}$ a $\gamma = \frac{1}{4k}$, kde k je stupeň vrchola.



Obrázok 2.10: Masky pre Kobbeltovu prerozdeľovaciu schému.



Obrázok 2.11: Doo-Sabinova prerozdeľovacia schéma, koeficienty sú zadefinované: $\alpha_0 = 1/4 + 5/4k$ a $\alpha_i = (3 + 2\cos(2i\pi/k))/4k$ pre $i = 1 \ldots k-1$.

Kapitola 3

Aproximácia boolovskej operácie

Vykonanie boolovských operácií na dvoch telesách s hranicou vzniknutou rekurzívnym prerozdeľovaním, nie je ľahkou úlohou. Na zvládnutie tejto úlohy ako celku je potrebné vyriešiť veľa čiastkových problémov. Postupne sa im budeme venovať a analyzovať metódy riešenia týchto pod problémov. Sú to tieto:

1. Implementácia vybranej prerozdeľovacej schémy;
2. Nájdenie hraničnej krivky a pásu hraničných stien pre obidve plochy charakterizujúce telesá;
3. Orezanie týchto plôch hraničnou krivkou a upravenie novovzniknutého okraja;
4. Odstránenie nepotrebných častí hraničných plôch mešu;
5. Spojenie jednotlivých častí a vytvorenie nového telesa.

Sústredíme sa hlavne na body 2 až 5. Podrobnejšie popíšeme hľadanie hraničnej krivky, respektíve jej aproximácie, spôsob odstránenia v ďalšom už nepotrebných častí mešu, prispôsobeniu okraja plochy a nakoniec spôsobu spojenia takto upravených plôch do výsledného telesa. Výsledným zhrnutím týchto bodov je algoritmus nájdenia boolovskej operácie na telesách s hranicou vzniknutou prerozdeľovaním. Stručný pseudo kód tohoto algoritmu vyzerá nasledovne:

```
    Algoritmus aproximácie boolovskej operácie.

    Vstup:   Dva telesá P, K charakterizované mnohostenmi.
    Výstup:  Teleso, ktoré je výsledkom boolovskej operácie.

 1. Aproximuj_BO(P,K)
 2. {
 3.    Najdi_hranicu(hranica,pas_P,pas_K,P,K); //nájde hraničnú krivku
 4.    Odstran_nepotrebny_mes(Najdi_pociatok(P),pas_P, P);
 5.    Odstran_nepotrebny_mes(Najdi_pociatok(K),pas_K, K);
 6.    vysledok=Orez_mes(hranica, pas_P,P);
 7.    Odstran_mes(P,vysledok);
 8.    Trianguluj(P);              //trianguluje mnohosten P
```

```
 9.    vysledok=Orez_mes(hranica,pas_K,F);
10.    Odstran_mes(K, vysledok);
11.    Trianguluj(K);              //trianguluje mnohosten K
12.    Stotozni_hranice(P, K);     //stotožní hranice mnohostenov
13.    Spoj_polyhedrony(P, K);     //spojí mnohosteny
14. }
```

Tento algoritmus popisuje spôsob výpočtu boolovskej operácie na telesách ohraničených plochami vzniknutými rekurzívnym prerozdeľovacím procesom. Zdrojový kód a spúšťateľnú verziu implementácie tohoto algoritmu možno nájsť na priloženom CD.

Pozrieme sa teraz na význam týchto operácií v procese modelovania telies a popíšme si jednotlivé boolovské operácie, ktoré spomínaný algoritmus dokáže vypočítať.

3.1 Charakteristika boolovských operácií

Pojem boolovské operácie pochádza od pána Georgeho Boolea (1815 – 1864), ktorý prišiel so spôsobom kombinácie logických elementov, používajúc operátory nazývané: And, Or, Not, If, Then, Except. Odvtedy si našli široké uplatnenie vo všetkých oblastiach matematiky. V počítačovej grafike sa využívajú na modelovanie zložitých objektov.

Boolovské operácie sú prirodzenou cestou konštrukcie objektov zložitejších od základných primitívov (kocka, kváder, guľa, valec, kužeľ, polpriestor, torus). Tento postup je veľmi všeobecný, dovoľujúci skonštruovať veľa objektov zložitého tvaru.

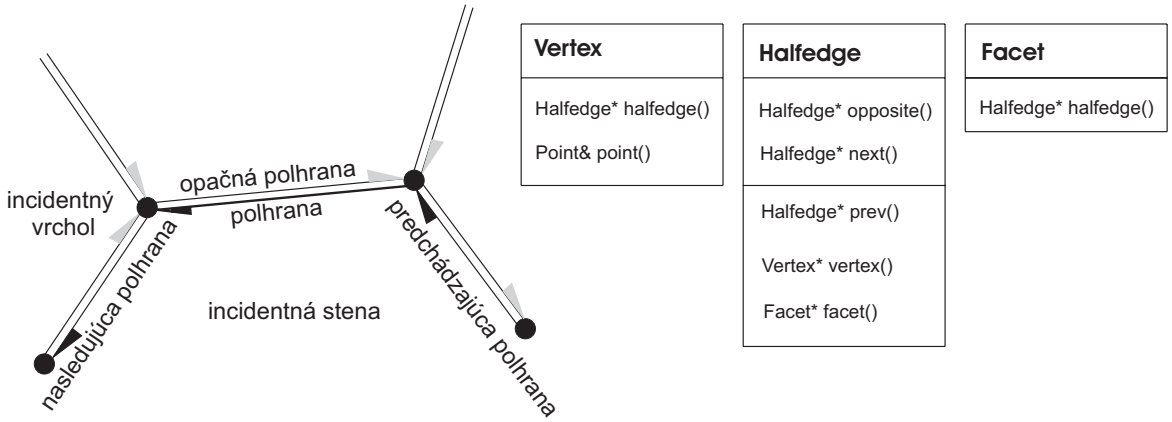
V [9] sa uvádza, že málo reprezentácií pevných telies je výpočtovo uzavretých vzhľadom na boolovské operácie. To znamená, že výsledok boolovskej operácie nemôže byť vo väčšine prípadov reprezentovaný precízne. Jeden spôsob ako sa vyhnúť tomuto problému, je použiť strom boolovských operácií ako reprezentáciu objektu a realizovať algoritmy priamo na takejto reprezentácií. Tento prístup využíva konštruktívnu geometriu telies (constructive solid geometry - CSG). Vo väčšine (prípadov) aplikácií umožňujúcich robiť boolovské operácie sa tieto vykonávajú na telesách reprezentovaných ich hranicou (hraničná reprezentácia) a samotné operácie musia byť realizované na sústave plôch reprezentujúcich hranicu. My budeme používať na reprezentovanie hranice telesa plochy vzniknuté rekurzívnym prerozdeľovacím procesom.

Predpokladajme, že máme dva takéto telesá $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{R^3}$. Základné boolovské operácie, ktoré budeme v ďalšom aplikovať a ktoré na týchto telesách môžeme urobiť sú:

Prienik Táto operácia odstráni všetko okrem prekrývajúcich sa oblastí dvoch vopred zadaných objektov A a B. Výsledný objekt (A∩B) môžeme charakterizovať A∩B $= \{x \in R^3;\ (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

Zjednotenie Operácia zjednotenia spojí tieto dva objekty do jedného výsledného A∪B $= \{x \in R^3;\ (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Rozdiel Táto operácia na rozdiel od dvoch predchádzajúcich nemá vlastnosť komutatívnosti, teda výsledný objekt závisí od poradia telies v akom sú brané pri vykonávaní tejto operácie
A−B $= \{x \in R^3; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ B−A $= \{x \in R^3; (x \in B) \wedge (x \notin A)\}$.



Obrázok 3.1: Tri triedy *Vrcholy*, *Polhrany* a *Steny* dátovej štruktúry okrídlených polhrán a členské prístupové funkcie týchto tried.

Vzhľadom na to, že naše telesá sú danné svojimi hranicami, boolovská operácia pre nás znamená nájdenie hraničnej reprezentácie výsledku tejto operácie.

3.2 Dátová štruktúra okrídlených polhrán

Miera obtiažnosti s akou sa dá vykonať prienik či zjednotenie ako boolovská operácia na dvoch telesách ohraničených plochami vo všeobecnosti závisí od spôsobu, akým sú jednotlivé plochy zadefinované. My (ako sme už spomínali) budeme používať plochy zadefinované rekurzívnym prerozdeľovacím princípom, tzv. subdivision plochy. Jednou z výhod použitia týchto plôch je aj to, že na charakterizovanie plochy nám stačí riadiaci meš a príslušné pravidlá, na určenie ďalších bodov plochy. V našom prípade sme volili Loopovu prerozdeľovaciu schému. Pri jej implementácií sme použili štruktúru okrídlených polhrán implementovanú v CGAL[1](Computational Geometry Algorithms Library) knižnici.

Táto štruktúra je sústredená hlavne na hrany, schopná udržovať informácie o incidencií vrcholov, hrán a stien. Skladá sa z troch základných tried, ktorými sú Vrchol (*Vertex*), Polhrana (*Halfedge*) a Stena (*Facet*), medzi ktorými sú definované vzájomné vzťahy.

Každá hrana je rozložená na dve polhrany rozlíšené opačnou orientáciou. Pre každú polhranu je uchovávaná susedná stena a susedný vrchol. Pre každú stenu a každý vrchol je uchovávaná práve jedna incidentná polhrana. Každá polhrana tiež obsahuje informáciu o predchádzajúcej a nasledujúcej polhrane ako aj o polhrane opačne orientovanej, s ktorou navzájom vytvárajú hranu. Vrchol obsahuje smerník na polhranu, ktorá je s ním incidedntná a dátovú zložku obsahujúcu súradnice bodu. Stena ako posledná trieda obsahuje smerník na polhranu s ňou incidentnú. Všetky tieto vzťahy sú zachytené na obrázku 3.1.

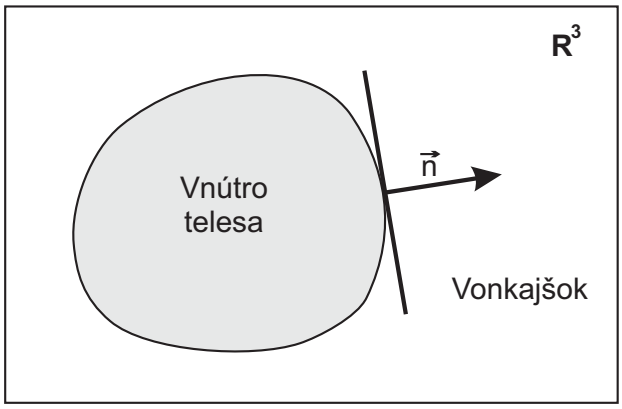
Využitím topologických vlastností tejto dátovej štruktúry sa nám implementácia Loopovej schémy podstatne zjednodušila.

[1] www.cgal.org

Teraz popíšeme prvý krok algoritmu aproximácie boolovskej operácie, a to nájdenie prieniku plôch charakterizujúcich jednotlivé telesá.

3.3 Prienik hraníc dvoch telies

Pre jednoduchosť ďalej predpokladajme, že telesá, na ktorých chceme urobiť boolovskú operáciu sa pretínajú pozdĺž jednoduchej krivky, teda takej ktorá nepretína samu seba. Ako sa uvádza v [9] pri hľadaní hraničnej krivky je hlavnou prekážkou, že topológia tejto krivky je vo všeobecnosti neznáma a môže byť nestála s ohľadom na malé perturbácie plochy. Predpokladáme preto, že telesá sa v oblasti nášho záujmu pretínajú transverzálne. To znamená, že dotykové roviny telies v mieste pretínania sú rôznobežné. Tento predpoklad však nemusí platiť pre meše charakterizujúce jednotlivé telesá. Ďalším predpokladom je, že meše charakterizujúce skúmané telesá sú orientované tak, že normála každej steny mešu je orientovaná smerom von z telesa. Poznamenajme, že vnútrom telesa budeme rozumieť časť $\mathbf{R^3}$ priestoru ohraničenú plochou charakterizovanou mešom, vonkajškom potom nazveme jeho doplnok (obrázok 3.2).



Obrázok 3.2: Schematický nákres orientácie telesa.

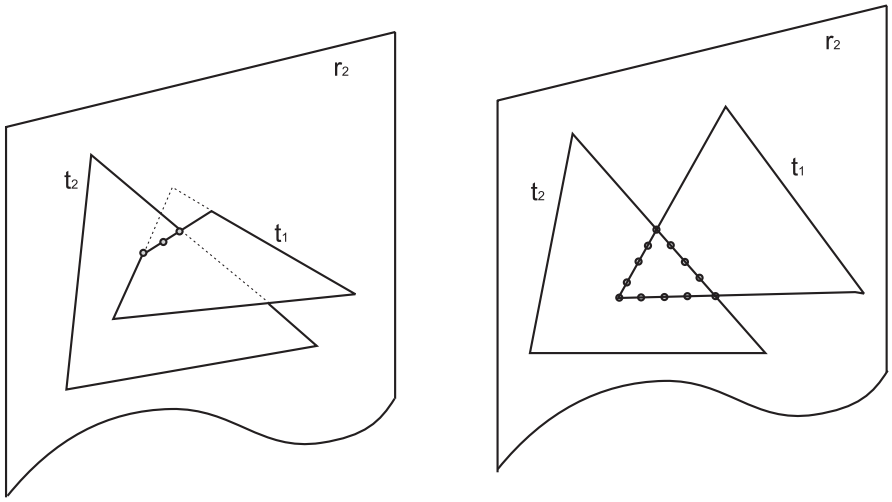
Cieľom tohoto kroku algoritmu aproximácie boolovskej operácie je nájsť po častiach lineárnu aproximáciu hraničnej krivky. Ďalším produktom sú dva hraničné pásy trojuholníkov na obidvoch telesách, kde každý z trojuholníkov v tomto páse obsahuje istú časť výslednej aproximácie hranice a vzájomným prienikom týchto pásov je samotná aproximácia hraničnej krivky.

Pri hľadaní prieniku dvoch telies charakterizovaných mnohostenom, sme potrebovali robustnú metódu na nájdenie prieniku dvoch ohraničených stien v 3D priestore.

3.3.1 Prienik dvoch trojuholníkových stien

Predpokladali sme, že trojuholníky, ktorým budeme hľadať prienik, budú nezdegenerované. Keďže sme pri programovaní použili CGAL knižnicu, táto nám poskytla funkcie na zistenie prieniku pre prípad 2D, čo nám uľahčilo počiatočnú pozíciu. Na základe týchto optimalizovaných funkcií sme vytvorili funkciu, ktorá hľadá prienik dvoch trojuholníkov v 3D priestore.

Prvým krokom tejto funkcie bolo zistiť prienik trojuholníka t_1 s rovinou r_2 ktorá obsahovala druhý trojuholník t_2. Ak bol tento prienik nenulový a trojuholníky neboli koplanárne, zistili sme čo tvorí prienik z hľadiska topológie, teda či je to bod alebo úsečka. Následne sme testovali polohu tohoto prieniku, ležiaceho v rovine r_2 na polohu vzhľadom na trojuholník t_2. Z tohoto testu sme sa dozvedeli spoločný prienik trojuholníkov t_1 a t_2.



Obrázok 3.3: Prienik dvoch trojuholníkov neležiacich v rovine *obr. vľavo* a v rovine ležiacich *obr. vpravo*. Prienik je vyznačený malými kruhmi.

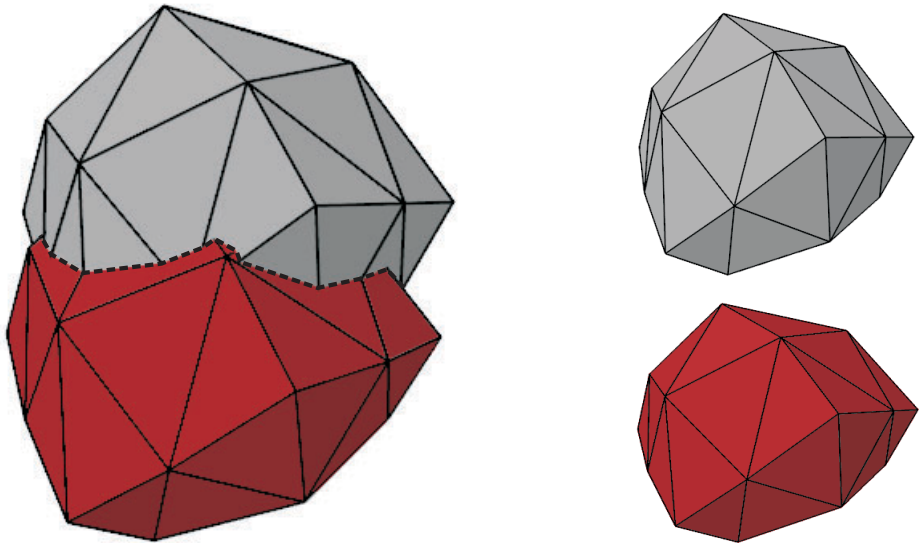
V prípade, že trojuholníky boli koplanárne, ich 3D súradnice sme previedli na 2D a zistili prienik priamo pomocou funkcií z CGAL knižnice. Takto vzniknutý prienik sme následne museli previesť späť do 3D priestoru. Výsledkom celého postupu bolo nájdenie prieniku dvoch trojuholníkov, tak ako to ukazuje obrázok 3.3. Týmto prienikom mohol byť bod, úsečka, trojuholník, alebo množina bodov, tvoriacich uzavretú lomenú čiaru.

Úspešné vyriešenie úlohy hľadania prieniku dvoch trojuholníkov, bolo základným predpokladom k algoritmu hľadania hraničnej krivky.

3.3.2 Algoritmus hľadania hraničnej krivky

Tento algoritmus namiesto hľadania prieniku dvoch hladkých plôch hľadá prienik dvoch mnohostenov charakterizujúcich plochy ohraničujúce telesá. Tieto mnohosteny sú vlastne inicializačné meše, na ktorých sú pomocou presne určených pravidiel zadefinované subdivision plochy. Takto zistený prienik nazývame hraničnou krivkou, na ktorú ak by sme použili zmieňované pravidlá, dostali by sme hladkú krivku, ktorá je postačujúcou aproximáciou prieniku dvoch hladkých plôch.

Náš algoritmus zisťuje prienik každej dvojice trojuholníkov z dvoch mešov. Hoci tento prístup pri väčšom počte stien z ktorých sa skladajú jednotlivé meše nie je veľmi rýchly, našim potrebám vyhovoval. V optimálnej implementácií však treba použiť algoritmus s lineárnou zložitosťou, vytvorenie ktorého je podstatne obtiažnejšie. Nami použitý algoritmus nájde postupnosť úsečiek, ktoré sme usporiadali tak, že tvoria orientovanú hraničnú krivku. Aby sme ho urýchlili, použili sme metódu ohraničujúcich boxov.



Obrázok 3.4: Príklad dvoch mešov so zvýraznenou hraničnou krivkou. Vpravo sú znázornené samostatné telesá, na ktoré sme aplikovali boolovskú operáciu.

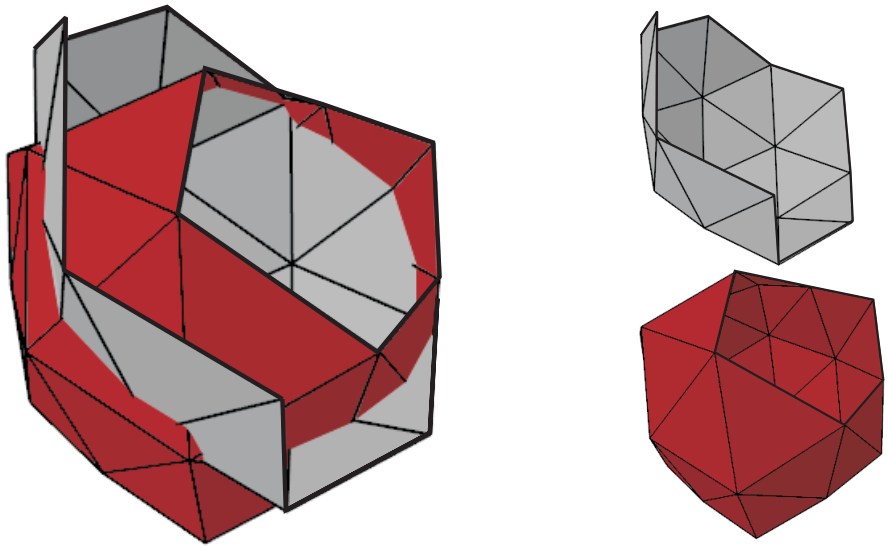
Metóda ohraničujúcich boxov

Táto metóda využíva ohraničujúce schránky (kvádre), ktoré majú hrany rovnobežné so súradnicovými osami, na otestovanie existencie prieniku dvoch objektov. Takto sme mohli jednoduchým testom vylúčiť prípady dvoch trojuholníkov ktoré určite nemajú spoločný prienik. Avšak to nám ešte nezaručovalo existenciu prieniku vo zvyšných skúmaných dvojiciach trojuholníkov.

Po nájdení prienikov všetkých dvojíc stien, sme odstránili všetky prieniky pozostávajúce iba z jedného bodu. Takéto prípady prieniku boli pre nás nezaujímavé. Zostali nám iba tie prieniky trojuholníkov, ktorých zložením získame výslednú orientovanú hraničnú krivku. Príklad hraničnej krivky dvoch testovacích mešov (obrázok 3.4), na ktorých budeme ukazovať postupne jednotlivé kroky nášho algoritmu na vytvorenie boolovskej operácie.

Nájdená hraničná krivka je rovnaká pre oba meše. Následne prevedieme medzikrok, ktorým odstránime vnútorné časti mešu. Práve v tomto medzikroku určíme ktorú z boolovských operácií (prienik, zjednotenie, rozdiel) vykonáme.

Na určenie konkrétnej boolovskej operácie použijeme hraničné pásy trojuholníkov získané pri hľadaní hraničnej krivky. V hraničných pásoch trojuholníkov nájdeme také dva trojuholníky, ktoré majú úsečku ako spoločný prienik. Jeden trojuholník vnoríme do roviny a skúmame polohu bodov druhého trojuholníka vzhľadom na túto rovinu. Nájdeme bod, ktorý bude buď na kladnej alebo zápornej strane roviny, podľa typu plánovanej boolovskej operácie. Tento bod určite susedí so stenou, ktorú chceme odstrániť a u ktorej môžeme spustiť rekurzívne rušenie stien mešu. Rekurzívne sa zrušia všetky steny, ktoré sú ohraničené hraničným pásom trojuholníkov. Tento medzikrok vykonáme pre obidva meše (obrázok 3.5). Ako vidieť na obrázku, skutočný okraj mešu sa dosť líši od hraničnej krivky, ktorú sme našli v predchádzajúcom kroku. Tento nedostatok sa pokúsime odstrániť v nasledujúcom kroku.



Obrázok 3.5: Testovacie meše po odstránení nepotrebných častí (stien). Všimnime si, že takto vzniknutý okraj mešu sa podstatne líši od hraničnej krivky nájdenej predchádzajúcim krokom.

Celý algoritmus hľadania hraničnej krivky zapísaný pseudo kódom vyzerá nasledovne:

```
Algoritmus nájdenia hraničnej krivky
Vstup: Mnohosteny P, K.
Výstup: Hraničná krivka (hranica) a hraničné pásy trojuholníkov
        pas_P, pas_K pre jednotlivé mnohosteny P a K.

Najdi_hranicu(hranica,pas_P,pas_K,P,K)
{
   for(všetky steny E z mnohostenu P){
      for(všetky steny F z mnohostenu K){
         if(možný_prienik(E,F)){  //otestuje možnosť prieniku
            S=Prienik(E,F);       //nájde prienik stien
            if(S je neprázdny){
               ulož S do premennej hranica;
               ulož E do pas_P;
               ulož F do pas_K;
            }
         }
      }
   }
}
```

Pri hľadaní hraničnej krivky sme mali veľké problémy s konečnou aritmetikou. Táto nám spôsobila značné ťažkosti pri vývoji druhého algoritmu na hľadanie hraničnej krivky s lineárnou zložitosťou. V tomto algoritme sme najprv našli prvotný prienik, teda dve navzájom sa pretínajúce steny mešov. Prienik týchto stien bol pre nás počiatkom pri hľadaní hraničnej krivky. Tento prienik sme orientovali a pokračovali v

hľadaní ďalších segmentov na jeho konci. V prípade, že koncový bod posledne nájdeného segmentu ležal na hrane niektorej zo stien, zobrali sme jej susediacu stenu a zistili prienik so stenou z druhého mešu. Tento postup sme cyklicky opakovali až kým sme sa nedostali do bodu z ktorého sme pôvodne vychádzali. Dbali sme pri tom na to, aby sa v každom cykle zmenila iba jedna zo stien.

Problémy nastali pri zisťovaní, či koncový bod posledne nájdeného segmentu leží na hranici steny. Funkcia zisťujúca tento stav často považovala bod za vnútorný trojuholníku, hoci jeho nenulová vzdialenosť od hrany bola spôsobená chybou. Tento stav bol spôsobený použitím konečnej aritmetiky. V prípade, že sa v priebehu hľadania hraničnej krivky „stretli" takéto body na oboch mešoch, došlo k prerušeniu krivky. Následne bola v jednom meši vybraná stena, ktorá nemala žiaden prienik so stenou druhého mešu. Toto spôsobilo prerušenie hľadania a zacyklenie celého procesu.

Tento algoritmus je podstatne rýchlejší avšak nie je taký spoľahlivý. Rozhodli sme sa preto v programe ho nepoužiť. Jeho robustná verzia je nad rámec tejto práce. Ďalším krokom algoritmu aproximácie boolovskej operácie je prispôsobenie vytvoreného okraja mešu hraničnej krivke.

3.4 Orezanie mešu nájdenou hraničnou krivkou

Pri medzikroku, ktorým sme odstránili časti mešu nachádzajúce sa vo vnútri druhého telesa, sme vytvorili meš s hranicou iba veľmi hrubo aproximujúcou skutočnú hraničnú krivku. Na dosiahnutie väčšej presnosti, sme sa rozhodli pre úpravu okraja mešu orezaním hraničnou krivkou. Celý tento proces môžeme rozdeliť na niekoľko krokov, a to:

- zjemňovanie stien a stotožňovanie vrcholov hraničnej krivky s vrcholmi mešu;
- odstránenie nepotrebných častí mešu;
- triangulácie vzniknutých netrojuholníkových stien.

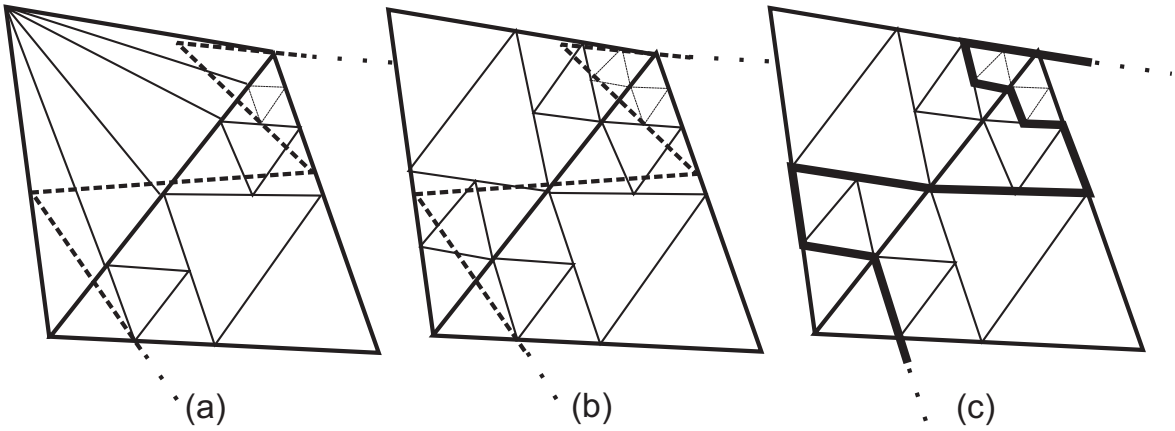
Pozrime sa teraz podrobnejšie na jednotlivé kroky.

3.4.1 Zjemňovanie stien a stotožňovanie vrcholov

Pri orezaní mešu hraničnou krivkou sme vychádzali z nasledujúcich troch úvah, ktoré sú uvedené v [9].

1. topológia výsledného rezu (výslednej hranice mešu) by mala byť rovnaká ako topológia hraničnej krivky;
2. do mešu by malo byť pridaných čo možno najmenej nových vrcholov;
3. stupne vložených vrcholov by mali byť čo najnižšie.

Posledné dva predpoklady si však často protirečia, preto treba nájsť vhodný kompromis. Tak napríklad, môže byť potrebné rozdeliť jednu hranu na veľa malých kúskov, aby sme zachytili topológiu hraničnej krivky. Ak by sme tam nevložili žiadne ďalšie vrcholy, a jednoducho by sme pospájali všetky body tejto hrany s protiľahlým vrcholom,



Obrázok 3.6: Orezanie mešu hraničnou krivkou: (a) vznik nevhodných trojuholníkov; (b) pôvodná nájdená hraničná krivka; (c) hraničná krivka po úprave.

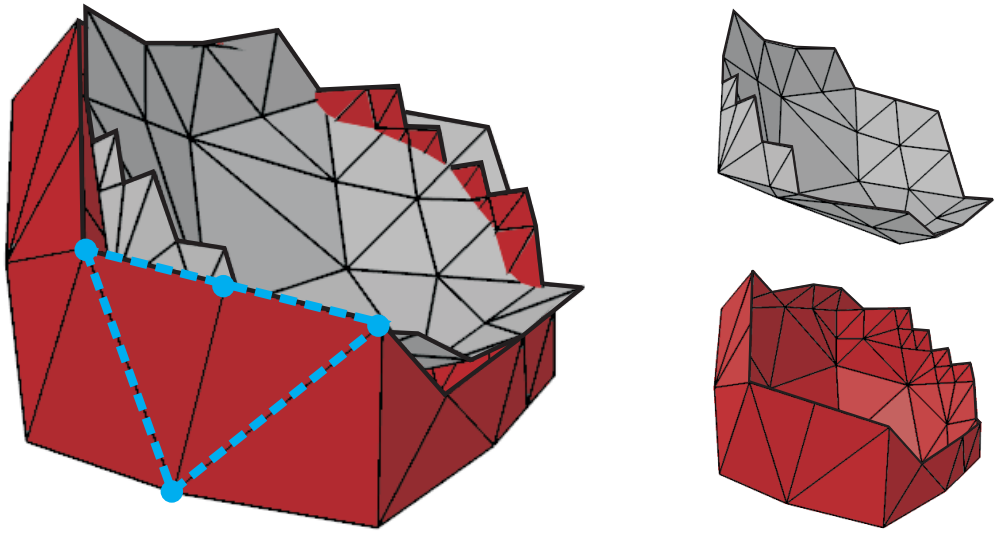
značne by sme zväčšili jeho stupeň. Takýmto situáciám pri vkladaní nových bodov sme predišli použitím kvadrisekcie trojuholníka. Z pôvodného trojuholníka sme získali štyri menšie podobné pôvodnému, ktoré vznikli pospájaním stredov hrán pôvodného trojuholníka. V [9] používajú následne bisekciu priľahlých trojuholníkov.

My sme od takéhoto postupu upustili, pretože ak by sme boli nútení vykonať kvadrisekciu v jednom trojuholníku viac krát, veľmi pravdepodobne by jedna z jeho hrán obsahovala viac bodov spojených s rovnakým protiľahlým vrcholom, čo by vytvorilo veľa pre nás nevhodných trojuholníkov (obrázok 3.6 (a)). Za nevhodný trojuholník považujeme taký, kde veľkosť najmenšieho z vnútorných uhlov je menšia ako vopred zvolená konštanta. Takéto trojuholníky by nám v ďalších výpočtoch spôsobovali značné nepresnosti, keďže sme často používali transformáciu 3D bodov trojuholníka do 2D roviny.

Rozhodli sme sa pre postup, pri ktorom sme orezávali meš hraničnou krivkou s použitím kvadrisekcie. Netrojuholníkové steny vzniknuté v tomto procese sme následne pretriangulovali. Treba poznamenať, že pri tomto procese sa geometria pôvodne nájdenej hraničnej krivky môže zmeniť a namiesto nej dostaneme aproximáciu, ktorá je presnejšia ako hranica mešu. Toto však nie je v rozpore s prvou podmienkou, pretože topológia sa zachová. Pri postupnej aproximácii používame nasledovné metódy .

Metóda zjemňovania. Hlavným princípom tejto metódy je zjemňovanie trojuholníkových stien mešu použitím kvadrisekcie, takto získame jemnejšiu štruktúru mešu, na ktorej budeme hľadať aproximáciu hraničnej krivky.

Metóda stotožňovania. Pomocou tejto metódy sme rozhodovali, ktorými vrcholmi bude viesť naša aproximácia hraničnej krivky. V postupnom rekurzívnom procese sme stotožnili (priblížili) každý vrchol hraničnej krivky s niektorým vrcholom mešu (obrázok 3.6). Tento vrchol bol vrcholom trojuholníka, ktorému bola daná časť hraničnej krivky vnútorná. Trojuholník sme postupne zjemňovali, aby sme dosiahli čo najlepšie priblíženie. Pri procese stotožňovania si zvolíme vhodnú hranicu z intervalu $(0.5, 1\rangle$ (v našej aplikácií sme zvolili 0.6), ktorá nám určí s akou presnosťou budeme stotož-



Obrázok 3.7: Testovacie meše po orezaní hraničnou krivkou pred triangulaciou. Okraj každého z nich je zvýraznený. Všimnime si zvýraznenú stenu, ide o stenu so štyrmi vrcholmi, kde tri z nich ležia na jednej hrane.

ňovať. Táto hranica určuje potrebný rozsah najväčšej barycentrickej súradnice bodu vzhľadom na trojuholník v ktorom sa nachádza, aby ho bolo možné stotožniť. Samotný proces stotožňovania má niekoľko fáz:

- vyjadrenie barycentrických súradníc bodov krivky vzhľadom na skúmaný trojuholník, s vrcholmi ktorého chceme stotožňovať;
- stotožnenie vrchola hraničnej krivky, ak aspoň jedna z barycentrických súradníc bola väčšia ako nami zvolená hranica;
- prerozdelenie trojuholníka a pokračovanie na každom zo štyroch nových trojuholníkoch v prípade, že sa nepodarilo stotožniť celú krivku ležiacu v trojuholníku.

Takto sme postupovali, až kým sme nedosiahli aproximáciu hraničnej krivky s vopred zvolenou úrovňou. No aby sme zabránili prílišnému vnoreniu rekurzie, vytvorili sme možnosť ukončiť rekurziu presným počtom dovolených vnorení. V tom prípade sme v poslednom kroku nepoužili barycentrické súradnice, ale iba sme jednoducho stotožnili vrchol hraničnej krivky s tým vrcholom trojuholníka, ku ktorému bol najbližšie.

Takto upravená hranica mešu obsahovala novú hraničnú krivku, ktorej každá časť je hranou niektorého trojuholníka mešu (obrázok 3.6 (c), obrázok 3.7). Celý algoritmus orezania mešu hraničnou krivkou zapísaný pseudo kódom vyzerá nasledovne.

```
Algoritmus orezania mešu
Vstup:  Mnohosten P, pás hraničných trojuholníkov pas_P,
        hraničná krivka hranica.
Výstup: Orezaný meš mnohostenu P.
```

```
 1. Orez_stenu(Vysledok,V,F,Iteracia)
 2. {
 3.    if(môžeš stotožniť celé V){
 4.       Vysledok=Vysledok+Stotozni(V);
 5.       return;
 6.    }
 7.    else{
 8.       if(iteracia==0){
 9.          Vysledok=Vysledok+Stotozni(V);
10.          return;
11.       }
12.       else{
13.          Prerozdel(F);    //vykoná kvadrisekciu steny F
14.          Nájdi prienik V s novovzniknutými stanami F1,F2,F3,F4;
15.          Priraď ho do V1,V2,V3,V4;
16.          Orez_stenu(Vysledok,V1,F1,Iteracia-1);
17.          Orez_stenu(Vysledok,V2,F2,Iteracia-1);
18.          Orez_stenu(Vysledok,V3,F3,Iteracia-1);
19.          Orez_stenu(Vysledok,V4,F4,Iteracia-1);
20.       }
21.    }
22. }
23.     // Hlavný program
24. Orez_mes(hranica, pas_P, P)
25. {
26.    for(pre všetky steny F z pas_P){
27.       V=Prienik(hranica,F);
28.       Orez_stenu(Vysledok,V,F,Iteracia);
29.    }
30.    return Vysledok;
31. }
```

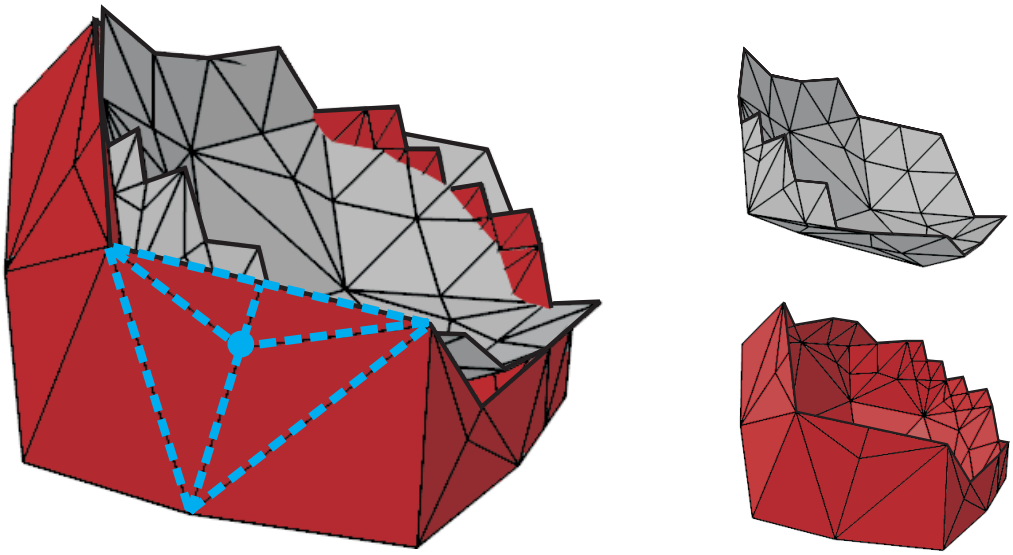
Pri získavaní tejto novej hraničnej krivky sme sa opäť stretli s problémom nepresnosti, ktorý môže v konečnom dôsledku spôsobiť nespojitosť tejto krivky. Preto sme boli nútení túto krivku testovať na spojitosť a chýbajúce úseky krivky vhodne doplniť. Takto sme zaručili celistvosť hraničnej krivky a mohli sme odstrániť tie časti mešu, ktoré sa pri tomto procese stali nepotrebnými.

Zostal nám meš, ktorý mal hranicu totožnú s novovytvorenou hraničnou krivkou, pričom niektoré zo stien mešu neboli trojuholníkmi. Výsledok orezania mešou hraničnou krivkou, pred trianguláciou, znázorňuje obrázok 3.7. Na upravenie netrojuholníkových stien, vzniknutých pri tomto procese sme použili triangulačnú metódu.

3.4.2 Triangulácia netrojuholníkových stien

Pri procese orezávania mešu hraničnou krivkou sme vytvorili steny tvarovo podobné trojuholníkom, ktoré však obsahovali viac ako tri vrcholy. De facto sme takto vytvorili ne-trojuholníkové steny. Aby sme na meš obsahujúci takéto steny mohli použiť Loopovu

prerozdeľovaciu schému, museli sme pretriangulovať všetky steny, ktoré mali viac ako tri vrcholy. Na výber sme mali viacero možností metód triangulácie.



Obrázok 3.8: Testovacie meše orezané hraničnou krivkou po triangulácií. Na zvýraznenej stene je demonštrovaná metóda triangulácie. Na nej vyznačený vrchol je barycentrickou kombináciou pôvodných vrcholov steny.

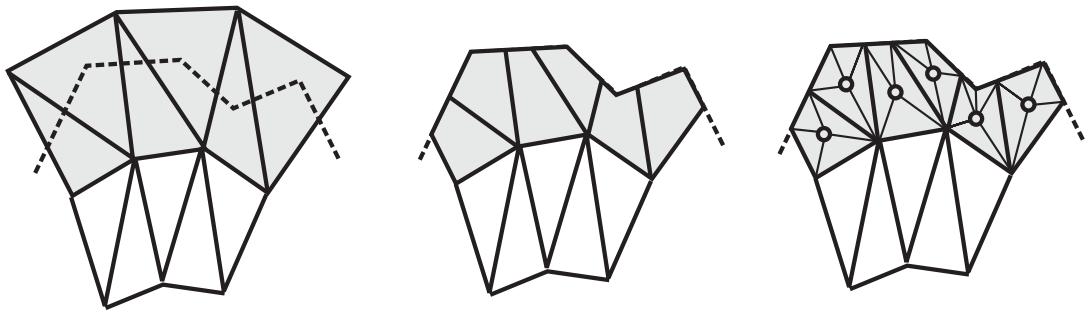
Hlavná myšlienka nami vybranej metódy spočíva v nájdení barycentrického ťažiska všetkých vrcholov steny a jeho následnom pospájaní s každým vrcholom tejto steny (obrázok 3.8). Takýmto spôsobom sme vytvorili zväčša extraordinárne vrcholy (vrcholy stupňa rôzneho od 6) nachádzajúce sa v strede každej takejto steny. Ich stupeň bol zvyčajne nižší ako šesť. Tým sme zvolili istú mieru rovnováhy medzi predpokladmi 2 a 3, ktoré sme uviedli v úvode odseku 3.4.1.

3.4.3 Alternatívny prístup k orezaniu mešu.

Uvedený postup na orezanie mešu hraničnou krivkou však nie je jediný. Ďalšou možnosťou by bolo orezať meš priamo, bez použitia zjemňovacej a stotožňovacej metódy. Takto by sme orezali práve steny (trojuholníky), obsiahnuté v hraničnom páse trojuholníkov. Hranica takto novovzniknutých stien sa budú skladať z častí hrán pôvodných stien a hrán, ktoré patrili hraničnej krivke, tak ako to znázorňuje obrázok 3.9.

Následne by mali byť odstránené tie časti mešu, ktoré sa nachádzajú „za" hraničnou krivkou. Sú to práve tie steny, ktorých odstránením dostaneme meš s hranicou totožnou s hraničnou krivkou. Takýmto orezaním bude meš obsahovať niekoľko stien, ktoré nebudú trojuholníkmi. Aby sme ďalej mohli používať prerozdeľovaciu schému, zadefinovanú na trojuholníkovom meši, všetky takéto steny upravíme trianguláciou, ktorú sme už popisovali.

Podstatnou nevýhodou tejto metódy je vytvorenie veľkého množstva extraordinárnych vrcholov, sústredených v blízkosti hraničnej krivky. Extraordinárne vrcholy rozložené pozdĺž celej hraničnej krivky nepriaznivo vplývajú na výsledný tvar plochy, res.



Obrázok 3.9: Orezanie mešu „na” hraničnú krivku. Po triangulácií mešu vznikne v okolí hranice mnoho extraordinárnych vrcholov, ktoré sme zvýraznili.

telesa. Plocha vytvorená pomocou Loopovej prerozdeľovacej schémy je v extraordinárnych vrcholoch C^1-spojitá, na rozdiel od regulárnych vrcholov, kde je C^2-spojitá. Miera spojitosti sa odráža na konečnom tvare plochy výsledného telesa. Plocha v extraordinárnych vrcholoch vytvára mierne vypukliny, ktoré nepriaznivo vplývajú na výsledný tvar telesa. Pre tento dôvod sme sa vzdali takéhoto postupu pri orezaní mešu.

Ďalším krokom algoritmu vykonania boolovskej operácie, bolo prispôsobenie hraníc oboch mešov tak, aby bolo možné uskutočniť spojenie.

3.5 Úprava hraníc mešov

Doposiaľ získaný meš, mal okraj totožný s hraničnou krivkou, získanou v predchádzajúcom kroku. Avšak hranice mešov, ktoré sme chceli spojiť, obsahovali rôzny počet nerovnako rozložených bodov (obrázok 3.10). Potrebovali sme preto upraviť obe hraničné krivky tak, aby obsahovali rovnaký počet vrcholov a boli navzájom úplne rovnaké. Algoritmus, ktorým sme vykonali túto úpravu sme nazvali stotožnením hraničných kriviek. Samotný algoritmus sa skladá z nasledujúcich krokov,

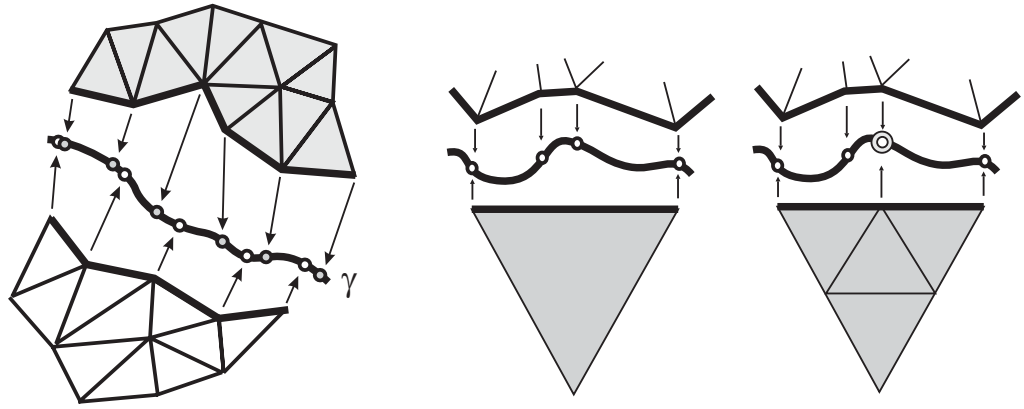
- nájdenie počiatočného bodu pre stotožňovanie hraničných kriviek (dvojice najbližších bodov z oboch mešov);
- upravenie hraničných kriviek vhodným vložením potrebného počtu nových vrcholov a stotožnením všetkých vrcholov hraničných kriviek;

ktoré si v nasledujúcom odstavci podrobnejšie popíšeme.

3.5.1 Stotožnenie hraničných kriviek

Nech $p_1, \ldots, p_m$ sú vrcholy na hranici mešu telesa P a $k_1, \ldots, k_n$ sú vrcholy na hranici mešu telesa K. Prvým krokom tohoto algoritmu bolo nájdenie dvojice najbližších vrcholov (p_i, k_j). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať že $i = 1$, $j = 1$. Vrcholy p_1 a k_1 sme posunuli do stredu (S_1) úsečky, ktorá bola ich spojnicou. Tento stred bol zároveň pre nás vrcholom, ktorý sme nazvali *počiatočný* pri stotožňovaní hraničných kriviek mešov (obrázok 3.11 vpravo).

Keďže sme predpokladali, že každé teleso je charakterizované plochou, orientácia tejto plochy zároveň udáva aj orientáciu telesa. Tento fakt sme zobrali do úvahy, pri



Obrázok 3.10: *vľavo:* príklad dvoch mešov s rôzne rozloženými bodmi na hraniciach, zobrazené na krivke γ v zodpovedajúcom poradí; *v strede a vpravo:* príklad zjemňovania hraničnej krivky kvadrisekciou ku krivke priľahlého trojuholníka.

zisťovaní orientácie kriviek, ktoré sme chceli stotožniť. Keď sme napríklad vykonali boolovskú operáciu rozdielu, obe hraničné krivky boli rovnako orientované. Ak sme sa pohli z počiatočného vrcholu po kladnom smere do najbližšieho ďalšieho vrcholu jednej krivky, tento sa nachádzal v kladnom polpriestore určenom počiatočným vrcholom a prvou hranou druhej krivky v kladnom smere. Opačná situácia nastala pri boolovskej operácií prieniku, kde krivky mali navzájom opačnú orientáciu.

Zistenie orientácie bolo dôležité pre určenie smeru, ktorým sme sa mali pohybovať po jednotlivých krivkách, aby sme sa dostali do rovnakého polpriestoru, určeného spoločným vrcholom a prvou hranou na jednej z kriviek.

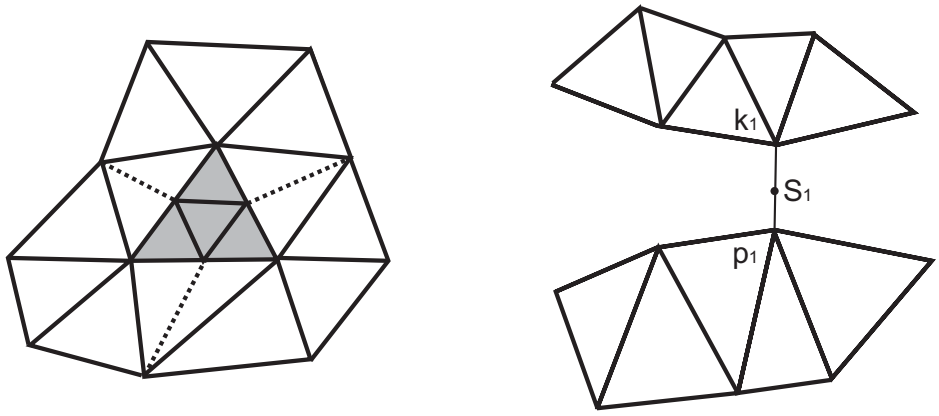
Na samotnú úpravu kriviek sme použili metódu stotožňovania vrcholov a metódu zjemňovania krivky podobné tým, ktoré sme popísali v odseku 3.4.1.

Zjemňovanie krivky

Pod pojmom zjemňovanie budeme rozumieť kvadrisekciu trojuholníka, ktorého jedna hrana je súčasťou hraničnej krivky (obrázok 3.10). Takto na krivke získame nový vrchol v strede hrany, ktorá je súčasťou trojuholníka. Aby nám však v meši neostali netrojuholníkové steny, vykonáme následne bisekciu priľahlých trojuholníkov (obrázok 3.11). Hoci sme ju zavrhli pri orezávaní mešu hraničnou krivkou, dôvod pre ktorý sme to urobili sa tu stal neopodstatneným. Použitie bisekcie v tomto prípade sa nám zdalo vhodné. Ušetrilo nám prehľadávanie mešu kvôli triangulácií netrojuholníkových stien.

Stotožňovanie vrcholov hraničných kriviek

V prvom kroku sme našli dva najbližšie vrcholy oboch mešov a stotožnili ich. Tak sme získali dve hraničné krivky nerovnakého tvaru so spoločným bodom (vrcholom). Tieto aproximujú skutočnú hraničnú krivku, ktorú sme označili γ. Všetky vrcholy, ktoré obsahujú hraničné krivky, obsahuje aj krivka γ. Nevedeli sme však v akom poradí sú na nej rozložené. Potrebovali sme preto nájsť nejakú parametrizáciu hraničných kriviek, ktorá by nám ich dovoľovala porovnávať vzhľadom na krivku γ. Ako riešenie



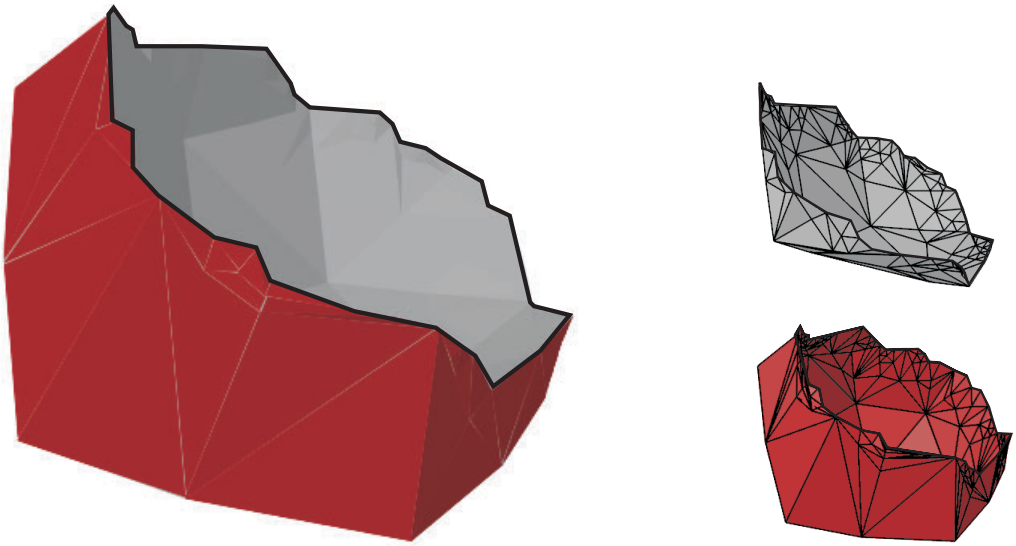
Obrázok 3.11: *vľavo*: bisekcia priľahlých trojuholníkov po vykonaní kvadrisekcie, *vpravo*: nájdenie dvojice najbližších vrcholov z oboch mešov.

sme použili parametrizáciu vzhľadom na dĺžku krivky. Pred umiestňovaním vrcholov hraničných kriviek telies P a K na krivku γ, sme museli zabezpečiť, aby obe hranice mali rovnakú dĺžku. To sme dosiahli prenásobením vzdialeností na jednej z hraníc, podielom celkových dĺžok hraníc. Takto sme získali parametrizáciu, pomocou ktorej sme mohli umiestňovať vrcholy obidvoch hraničných kriviek na krivku γ. Počiatkom obidvoch kriviek je počiatočný bod S získaný v prvom kroku algoritmu, teda je to bod s parametrom $(t = 0)$, kde sme začali so stotožňovaním.

Od tohoto bodu sme na krivku γ postupne zobrazovali po jednej hrane z hraníc telies P a K. Dĺžku hrany (p_i, p_{i+1}) sme vždy považovali za jednotkovú a dĺžku hrany (k_i, k_{i+1}) sme podľa toho patrične upravili. Takto sme mali viac možností, ako si zvoliť stotožňovaciu konštantu. Jednou z nich bolo vybrať číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, ktoré by vyjadrovalo časť jednotkovej hrany (p_i, p_{i+1}). Veľkosť tejto časti by potom určovala maximálnu povolenú vzdialenosť dvoch vrcholov umožňujúcu stotožnenie. Ak by vzdialenosť (medzi nimi) bola väčšia, vrcholy nestotožníme. Pri takejto voľbe, bola maximálna vzdialenosť dvoch vrcholov, ktoré sme mohli stotožniť, závislá na dĺžke hrany, ktorú sme považovali za jednotkovú. To malo za následok vznik nežiadúcich vypuklín a nerovnomerné spájanie mešov.

My sme používali ako stotožňovaciu konštantu časť dĺžky najkratšej hrany zo všetkých hrán ležiacich na hraniciach mešov telies P a K . Túto sme pri výpočtoch prispôsobovali rovnakým spôsobom ako hranu (k_i, k_{i+1}). Hrany (p_i, p_{i+1}) a (k_i, k_{i+1}) začínali vždy v rovnakom vrchole S_i. Ak rozdiel dĺžok týchto hrán bol menší ako vybraná stotožňovacia konštanta ε ($|\ \|(p_1, p_{i+1})\| - \|(k_1, k_{i+1})\|\ | < \varepsilon$), vrcholy p_{i+1} a k_{j+1} sme stotožnili, teda posunuli do stredu S_{i+1} ich spojnice. V opačnom prípade sme prerozdelili dlhšiu z hrán a posunuli sa späť do spoločného vrcholu S_i, z ktorého sme predtým vyšli. Takto sme postupovali ďalej, pokiaľ sme nestotožnili všetky vrcholy hraničných kriviek (obrazok 3.12). Stručný pseudo kód algoritmu stotožnenia hraničných kriviek vyzerá nasledovne:

```
Algoritmus stotožnenia hraníc
Vstup:  Mnohosteny P, K.
Výstup: Mnohosteny P, K so stotožnenou hranicou.
```

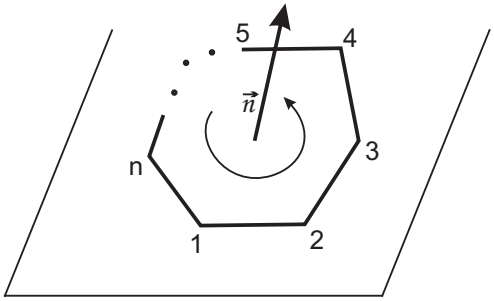


Obrázok 3.12: Testovacie meše po stotožnení hraníc. Obidva meše majú rovnakú hranicu. Navzájom ich spojiť je už jednoduché.

```
 1. Stotozni_hranice(P,K)
 2. {
 3.    S=Pociatok(P,K);          //nájde počiatočný bod
 4.    Eps=0.49*Min_hrana(P,K); //časť najkratšej z hrán hraníc
 5.    do{
 6.       ++G; ++H                     //prejdi na ďalšiu hranu
 7.       DL=DĺžkaHrany_H(G,H,P,K);  // H je nejednotková hrana
 8.       if(|DL-1|<Eps){
 9.          Stotozni_hrany();
10.       }
11.       else{
12.          if(DL>1){
13.             Prerozdel(H);
14.             Posuň späť do spoločného bodu;
15.          }
16.          else{
17.             Prerozdel(G);
18.             Posuň späť do spoločného bodu;
19.          }
20.    }while(G,H sú rôzne od počiatku S);
21. }
```

Výsledkom tohoto algoritmu bola nová hranica (rovnaká pre oba meše), ktorá umožňovala jednoduché spojenie dvoch mešov do jedného.

Predtým ako sme spojili meše s takto upravenou hranicou, zabezpečili sme ich rovnakú orientáciu, tak aby po ich spojení vzniklo teleso s rovnakou orientáciou po celom povrchu. Toto sme dosiahli pomocou jednoduchého testu, ktorý porovnával orientácie hraničných kriviek jednotlivých mešov. Ak boli hranice orientované rovnako, zmenili



Obrázok 3.13: Kladná orientácia steny vzhľadom na vonkajšiu normálu.

sme orientáciu jedného z mešov na opačnú, v opačnom prípade sme ponechali pôvodné orientácie a spojili sme meše do jedného výsledného (obrázok 3.12). Tento výsledný meš predstavoval výsledok boolovskej operácie na telesách, ktoré boli charakterizované plochami vzniknutými rekurzívnymi prerozdeľovacími schémami.

3.6 Implementácia

Skôr ako sme začali s implementáciou vybranej prerozdeľovacej schémy, museli sme sa rozhodnúť, pre presný formáte dát, ktoré budeme požadovať na vstupe a výstupe nášho algoritmu. Na vstupe algoritmu sme sa rozhodli pre dáta mešov vo formáte OFF (Object File Format, pozri [10]). V tomto sa na začiatku nachádzajú informácie o počte bodov, stien a hrán, za ktorými nasleduje zoznam bodov so súradnicami. Súbor uzatvára časť, kde je uložená topologická informácia o stenách. Tá pre každú stenu začína číslom označujúcim počet vrcholov, ktoré danú stenu tvoria, nasledované číslami označujúcimi poradie vrcholov v zozname, tak aby body steny mali kladnú orientáciu vzhľadom na vonkajšiu normálu plochy (obrázok 3.13).

Pre výstup sme zvolili dva formáty, prvým je už spomínaný OFF formát, umožňujúci opätovné editovanie mešu a druhým je VRML (Virtual Reality Modeling Language, pozri [11]) formát na popisovanie objektov a scén, ktorý nám umožní zobrazenie tvaru výsledného objektu. Takto si budeme môcť prezrieť výsledok na niektorom zo štandardných prehliadačov umožňujúcich prezeranie súborov v tomto formáte. My používame prehliadač *vrmlview.exe*. Príklady mešov v OFF a VRML (wrl) formáte a spomenutý prehliadač sa nachádzajú na priloženom CD.

Pri implementácií sme použili CGAL knižnicu. Využili sme rozsiahlu funkcionalitu, ktorú ponúka a taktiež štruktúru tzv. okrídlených polhrán (*halfedge data structure*) ako základnú dátovú štruktúru na uloženie informácií o ploche reprezentovanej mnohostenom.

Kapitola 4

Výsledky

Cieľom našej práce bolo vypočítať výsledok boolovskej operácie a porovnať nasledujúce postupy:

1. Na dvoch mešoch vykonať boolovskú operáciu a výsledný meš prerozdeliť
2. Najskôr prerozdeliť meše a následne vykonať boolovskú operáciu

z hľadiska presnosti a časovej náročnosti. Vytvorili sme preto jednoduchý program implementujúc algoritmus aproximácie boolovskej operácie. Program sme vytvorili v prostredí Microsoft Visual C++ pod Windows 98. Pomocou tohoto programu sme vytvorili všetky nasledujúce obrázky v tomto odseku. Pri porovnávaní časovej náročnosti sme použili počítač s procesorom Pentium 2 333Mhz a 128MB RAM. Pri porovnávaní sme volili rovnaké parametre pre obidva popisované postupy.

Porovnali sme meše vzniknuté rozdielom (obrázok 4.1) a zjednotením (obrázok 4.2) dvoch mešov.

Boolovská operácia rozdielu

Postup číslo 1: Výsledný meš vznikol z mešu znázorneného na obr. 3.12, ktorý sme štyrikrát prerozdelili (pozri obr. 4.1 (a)).
Postup číslo 2: Boolovskú operáciu sme vykonali na rovnakých mešoch ako v prvom prípade, ktoré sme ale predtým trikrát prerozdelili. Výsledný meš sme eštš raz prerozdelili, aby sme sa dostali na úroveň výsledného mešu z postupu č. 1 (pozri obr. 4.1 (b)).

Porovnaním tvaru výsledných telies, sme zistili:

- teleso vytvorené prvým postupom má hladší okraj, ktorý je však značne zdeformovaný rovnako ako aj samotné teleso;
- hoci okraj na telese vytvorenom druhým postupom obsahuje drobné zuby, deformácia výsledného tvar telesa je veľmi malá, takmer zanedbateľná.

Z pohľadu výsledného tvaru telies je lepší postup č 2. Toto porovnanie sa však zakladá iba na subjektívnom dojme. V budúcnosti by sme chceli robiť porovnanie presnosti na základe nejakej presne merateľnej veličiny.

Porovnanie časovej náročnosti uvádzame v tabuľke 4.1. V nej je v sekundách uvedené trvanie jednotlivých krokov algoritmu. Uvádzame čas pre obidva mnohosteny.

Prienik	Prvý postup	Druhý postup
Nájdenie hraničnej krivky	1.26 s	1718.45 s
Orezanie mešov hraničnou krivkou	0.66 + 0.6 s	39.99 + 39.38 s
Odstránenie mešu a triangulácia	0.06 + 0.05 s	4.67 + 5.17 s
Stotožnenie hraníc, výsledné teleso	1.76 s	29.82 s
Následné prerozdelenie	(4×) 156.48 s	(1×) 27.68 s
Spolu	160.87 s	1835.34 s

Tabuľka 4.1: Porovnanie časovej náročnosti obidvoch postupov pri vykonaní boolovskej operácie rozdielu.

Postup, ktorý uvádzame ako druhý trval v porovnaní s prvým postupom viac ako 11-krát dlhšie. Teda z tohoto hľadiska je nevýhodnejší.

Boolovská operácia zjednotenia

Pri zjednotení sme aplikovali rovnaký postup (rovnaký počet prerozdelení), s tým rozdielom že sme použili boolovskú operáciu zjednotenie (obrázok 4.2).

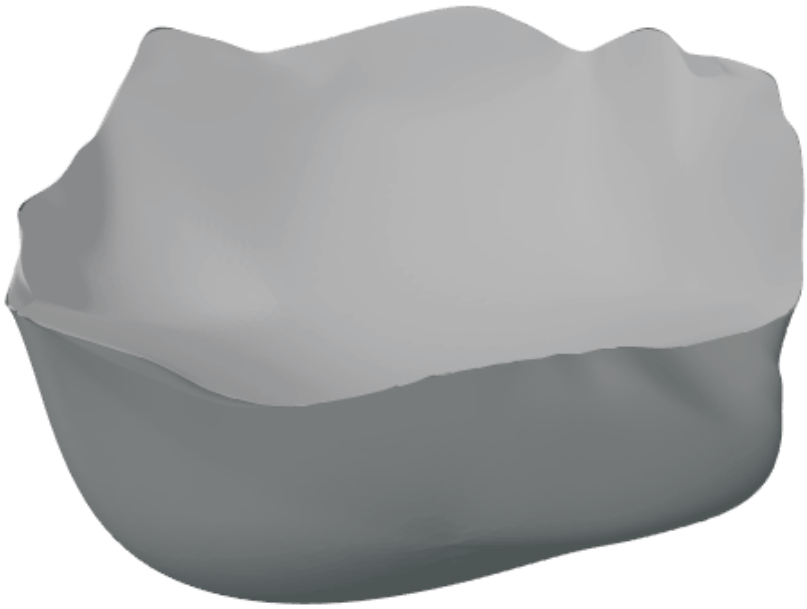
Keď porovnáme výsledné telesá získané dvomi postupmi aproximácie boolovskej operácie (obrázok 4.2) so skutočnou (presnou) boolovskou operáciou (obrázok 4.3) vidíme, že druhý postup dáva výsledok lepšie aproximujúci skutočnú boolovskú operáciu zjednotenia. Výsledné teleso vytvorené týmto postupom neobsahuje rozsiahle deformácie a jeho tvar dobre vystihuje očakávaný výsledok. Od presnej boolovskej operácie sa líši len minimálne, aj to iba pozdĺž spoju.

Vyjadrenie časovej náročnosti obidvoch postupov uvádzame v tabuľke 4.2. Aj v tomto prípade trvalo vytvorenie telesa druhým postupom takmer 11-krát dlhšie.

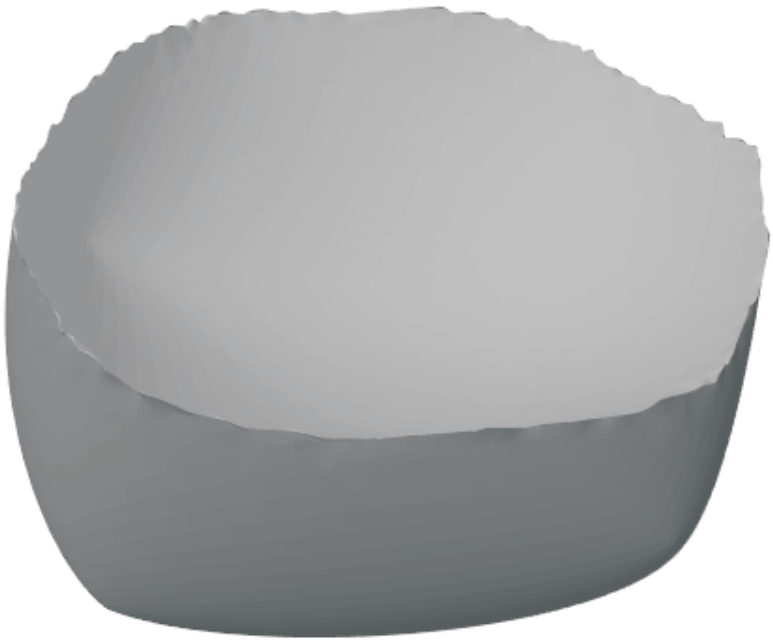
Zjednotenie	Prvý postup	Druhý postup
Nájdenie hraničnej krivky	1.26 s	1719.66 s
Orezanie mešov hraničnou krivkou	0.61 + 0.6 s	39.43 + 39.33 s
Odstránenie mešu a triangulácia	0.06 + 0.05 s	4.55 + 4.56 s
Stotožnenie hraníc, výsledné teleso	1.87 s	36.25 s
Následné prerozdelenie	(4×) 156.48 s	(1×) 33.39 s
Spolu	172.19 s	1877.17 s

Tabuľka 4.2: Porovnanie časovej náročnosti obidvoch postupov pri vykonaní boolovskej operácie zjednotenia.

Pri vytváraní obrázkov, sme nemenili parametre ovplyvňujúce kvalitu výsledných telies, aby bolo možné korektne porovnať jednotlivé postupy. Avšak ak by sme chceli dosiahnuť čo najlepšiu kvalitu telesa vytvoreného boolovskou operáciou, tieto parametre je potrebné si vhodne zvoliť. Všetky VRML modely telies použitých v tejto práci spolu s ďalšími modelmi a elektronickou verziou tejto práce sa sa dajú nájsť na priloženom CD.

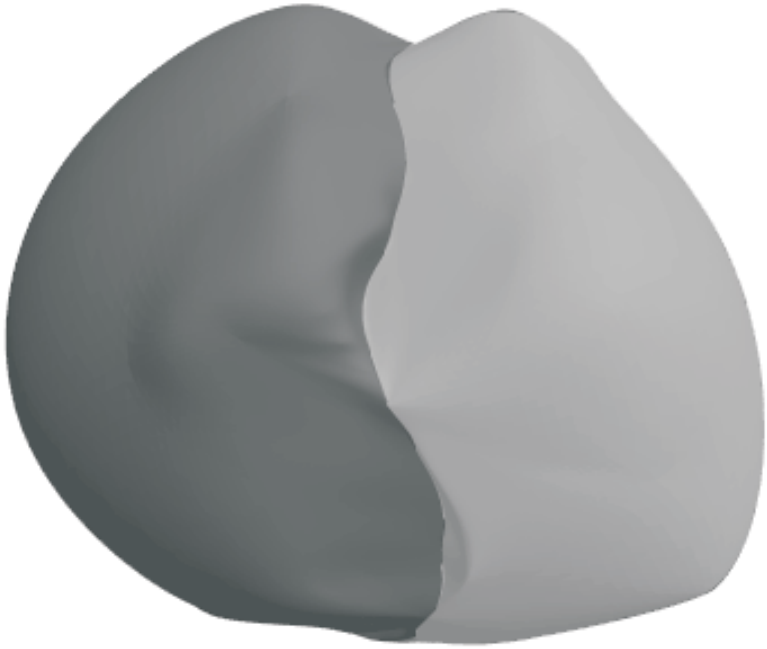


(a)



(b)

Obrázok 4.1: Výsledky boolovskej operácie rozdielu dvoch telies: (a) výsledné teleso vytvorené postupom č. 1. Najskôr sme vypočítali výsledok boolovskej operácie a ten následne 4-krát prerozdelili; (b) výsledný objekt sme získali prerozdelením výsledku boolovskej operácie rozdielu aplikovanej na vopred tri-krát prerozdelených mešoch.



(a)

(b)

Obrázok 4.2: Výsledky boolovskej operácie zjednotenia dvoch telies: (a) objekt vytvorený postupom č. 1. Všimnime si značnú deformáciu telesa pozdĺž vytvoreného spoju; (b) výsledok zjednotenia dvoch telies získaný postupom č. 2.

Obrázok 4.3: Skutočná boolovská operácia zjednotenia.

Kapitola 5

Záver

V súčasnosti väčšina programov určených na modelovanie telies využíva pri modelovaní boolovské operácie na vytvorenie zložitejších telies zo základných primitívov. Tento postup je vykonávaný na telesách ohraničených plochou zadefinovanou rôznymi spôsobmi.

My sme sa v tejto práci zaoberali boolovskými operáciami vykonanými na telesách s hranicou vzniknutou rekurzívnym prerozdeľovacím procesom. Popísali sme nami vytvorený základný algoritmus na aproximáciu boolovskej operácie realizovanej na dvoch telesách.

Vytvorili sme funkčnú implementáciu tohoto algoritmu a jej výsledky sme dokumentovali výstupmi programu. Porovnali sme dva postupy pri aplikovaní boolovskej operácie spomenuté v úvode, z hľadiska presnosti a časovej náročnosti.

Hoci naša implementácia je funkčná, nerieši všetky možné prípady, ktoré by mohli nastať pri jednotlivých boolovských operáciách. Chceli by sme preto vylepšiť a optimalizovať niektoré postupy nášho algoritmu. Jedná sa hlavne o orezanie mešu hraničnou krivkou a odstránenie nepotrebných častí mešu. Tu by sme chceli rozšíriť postup orezávania o topologický prístup, ktorý by akoby „ohýbal" hraničnú krivku a nepripustil tak jej pretrhnutie. Potom by bolo možné presnejšie orezanie mešu ako aj rýchlejšie odstránenie nepotrebných častí mešu v ďalšom kroku.

Ďalšou optimalizáciou by bolo upravenie a použitie rýchlejšieho algoritmu na výpočet hraničnej krivky, ktorý sme popisovali. Po vyriešení spomínaných problémov by sme chceli aplikovať algoritmus aproximácie boolovskej operácie na telesá s hranicou zadefinovanou pomocou prerozdelenia na štvoruholníkovom meši.

Otvorená zostáva otázka, ako prispôsobiť prerozdelenie mešu na hrubšej úrovni tak, aby po zjemnení výsledok lepšie aproximoval skutočný výsledok. V tejto chvíli sa ako rozumný kompromis javí vhodná voľba prerozdelenia a následného výpočtu boolovskej operácie.

Literatúra

[1] Catmull, E., and Clark, J. Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Computer Aided Design 10,* 6 (1978), 350–355.

[2] Doo, D.,and Sabin, M. Analysis of the Behaviour of Recursive Division Surfaces near Extraordinary Points. *Computer Aided Design 10,* 6 (1978), 356–360.

[3] Zorin, D., Schröder, P., DeRose, T., Forsey, D. R., Kobbelt, L., Lounsbery, M., and Jögr, P. Subdivision for Modeling and Animation. *SIGGRAPH 98 Course Notes,* (1998), 13–81

[4] Warren, J. Subdivision Methods for Geometric Design. *Unpublished manuscript,* November 1995.

[5] Loop, C. Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles. Master's thesis, University of Utah, Department of Mathematics, 1987.

[6] Dyn, N., Levin, D., and Gregory, J. A. A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Implementation with Tension Control. *ACM Trans. Gr. 9,* 2 (April 1990), 160–169.

[7] Zorin, D., Schröder, P., and Sweldens, W. Interpolating Subdivision for Meshes with Arbitrary Topology. *Computer Graphics Proceeding (SIGGRAPH 96)* (1996), 189–192.

[8] Kobbelt, L. Interpolatory Subdivision on Open Quadrilateral Nets with Arbitrary Topology. In *Proceedings of Eurographics 96,* Computer Graphics Forum, 409–420, 1996.

[9] Biermann, H.,Kristjansson, D., Zorin, D. Approximate Boolean Operations on Free-form Solids. *SIGGRAPH 2001,*

[10] Phillips, M. Geomview Manual: Geomview Version 1.5 for Silicon Graphics Workstations. *The Geometry Center, University of Minnesota,* October 1994. `http://www.geom.umn.edu/software/download/geomview.html`.

[11] The virtual reality modeling language specification: Version 2.0, ISO/IEC CD 14772. `http://www.vrml.org/`, August 1996.