Obsah :

Úvod **2**

1. Základné pojmy

1.1 Geometrická spojitosť kriviek 3

1.2 Geometrická spojitosť plôch 5

1.3 Euklidovská vzdialenosť 9

1.4 Dupinova cyklida 9

1.5 Dupinova indikatrix 10

1.6 Metóda trsu kužeľosečiek 10

1.7 Priamkové plochy 12

2. Metódy stmeľovania **13**

3. Stmeľovanie objektov v implicitnom tvare **14**

3.1 Neohraničené stmeľovanie 14

3.2 Objemovo - ohraničené stmeľovanie 14

3.3 Pásmovo - ohraničené stmeľovanie 22

3.4 Krivosťou - ohraničené stmeľovanie 32

3.5 Valiace elipsoidové stmeľovanie 40

4. Implementácia výsledkov **42**

4.1 Implementácia metódy trsu kužeľosečiek 42

4.2 Implementácia Hoffmannovho stmeľovania 43

4.3 Implementácia supereliptického stmeľovania Rockwooda a Owena 44

4.4 Implementácia CR stmeľovania Rockwooda a Owena 45

5. Záver **45**

Literatúra **47**

Úvod

V tejto práci sa budeme zaoberať rôznymi metódami stmeľovania. Napíšeme pre jednotlivé metódy výhody, resp. nevýhody a pokúsime sa o odstránenie nevýhod jednotlivých metód.

Pri konštruovaní geometrického modelu veľakrát dostaneme model, ktorý sa skladá z viacerých častí. Tieto časti buď majú nejaké prieniky, alebo sa nepretínajú. Aby sme dostali nejaký „ súvislý “ geometrický model, tak použijeme stmeľovanie. Pomocou týchto metód dostaneme hladko spojené hrany, resp. povrchy rôznych častí geometrického modelu. Pre jednotlivé modely vždy máme k dispozícii iné vstupné dáta, výstupné dáta ako aj možnosti ďalšieho spracovania. Preto vždy zvolíme tú metódu, ktorá nám vyhovuje. Ak poznáme obsah, v ktorom stmeľovanie leží, tak použijeme objemovo - ohraničené stmeľovanie, ak poznáme nejaké vzdialenosti, tak pásmovo - ohraničené stmeľovanie a keď chceme dosiahnuť nejakú krivosť a vopred daný priečny rez, tak použijeme krivosťou - ohraničené stmeľovanie.

Z predchádzajúcich už vieme predstaviť, aké široké uplatnenie môže mať stmeľovanie. Asi jeho najznámejším používaním je v CAD - systémoch. Tieto programy sú efektívnou pomôckou pri projektovaní domov, ale aj v konštruovaní rôznych objektov, vrátane od malých súčiastok, až po obrovské stroje a zariadenia. Ak chceme byť konkrétne, tak stmeľovanie používajú napríklad pri konštruovaní áut, lietadiel, domov ale aj topánok, samozrejme nie len v CAD - systémoch.

V tejto práci sa zaoberáme funkciami, ktoré sú dané v implicitnom tvare. Diplomová práca sa skladá zo štyroch častí. Prvá časť nás oboznámi so základnými pojmami, resp. definíciami, ktoré budeme používať v práci. Druhá časť sa zaoberá základným rozdelením metód stmeľovania. V tretej časti môžeme nájsť podrobný popis jednotlivých metód z literatúry, rozdelených podľa typu stmeľovania. V tejto časti je aj vypracovaná metóda valiacej elipsoidy, ktorú som odvodila od metódy stmeľovania valiacou sférou. Štvrtá časť je stručný popis programu, ktorý implementuje výsledky v 2D a 3D. Pomocou tohto programu sú konštruované všetky obrázky v diplomovej práci.

1. Základné pojmy

1.1 Geometrická spojitosť kriviek

Táto kapitola obsahuje stručný prehľad základných pojmov, definícii, viet a výsledkov, ktoré ďalej používame pri jednotlivých metódach stmeľovania..

Definícia 1.1.1 :

Majme p: [a,b] $\rightarrow R^n$ zobrazenie reálneho intervalu [a,b] do R^n. Potom hovoríme, že p je ***regulárne parametrické zobrazenie*** triedy C^k , pre $k \geq 1$ ak

1. $p \in C^k$ [a,b] (1.1.1)

2. $p^{(1)}(t) \neq 0 \quad \forall t \in$ [a.b], (1.1.2)

kde (1.1.1) znamená, že p je k - krát spojito diferencovateľné na (a,b). Ďalej majme zobrazenie ϕ : [a´,b´] $\rightarrow$ [a,b], $\phi \in C^k$ [a´,b´] pričom, $\phi^{(1)}(\tau) \neq 0$ pre všetky $\tau \in$ [a´, b´], potom zložené zobrazenie

$p'(\tau) := p(\varphi(\tau)) : [a',b'] \rightarrow R^n$ a $p'_+{}^{(i)}(a') = p_-^{(i)}(b)$ pre $i = 0, 1, \ldots, k$ (1.1.3)

sa nazýva ***regulárna reparametrizácia regulárneho zobrazenia.*** O reparametrizácii, pre ktorú $\phi^{(1)} > 0$ (teda ϕ je monotónne rastúca funkcia) hovoríme, že ***zachováva orientáciu*** (orientation preserving).Podrobnejšie, ak označíme

$$s := \varphi(t) = \int_{t_o}^{t} || p^{(1)}(t) || \, dt \qquad (1.1.4)$$

ako dĺžku oblúka (arc length) krivky od pevného bodu t_o , potom

$$p'(s) = p(\varphi^{-1}(s)) \qquad (1.1.5)$$

sa nazýva ***prirodzená parametrizácia krivky*** .

Definícia 1.1.2 :

Nech p : [a,b] $\rightarrow R^n$ a q : [c,d] $\rightarrow R^n$ sú dve regulárne parametrické zobrazenia triedy C^k . Potom p a q sú ***geometricky spojité*** GC^k v $b \in$ [a,b] a $c \in$ [c,d], ak tam existuje C^k zobrazenie $\varphi : R \rightarrow R$, definované v okolí c , ktoré je určené nasledovne :

$$\varphi(c) = b \text{ a } \varphi^{(1)}(c) > 0 \qquad (1.1.6)$$

$$\frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} q(t) \Big|_{c+} = \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} p(\varphi(t)) \Big|_{c-} \quad \text{pre } i = 0, 1, \ldots, k \qquad (1.1.7)$$

Z definície vyplýva, že $p(\varphi(t))$, pre $t \le c$ a $q(t)$ pre ktoré $t > c$ definujú regulárne parametrické zobrazenie triedy C^k v okolí c, kde $p(\varphi(t))$ je regulárna reparametrizácia zobrazenia, ktorá zachováva orientáciu.

Pravú stranu (1.1.7) môžeme rozšíriť nasledovne :

$$q^{(i)}(c) = \sum_{j=0}^{i} a_{ij}\, p^{(j)}(b), \quad \text{pre} \quad i = 0, \ldots, k, \qquad (1.1.8)$$

kde $a_{i0} = \delta_{i0}$ pre $i = 0, \ldots, k$,

$$a_{ij} = \sum_{i_1 + \ldots + i_j = i} \left[\begin{matrix} i \\ i_1 \ldots i_j \end{matrix} \right] \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_j}, \quad 1 \le j \le i \le k. \qquad (1.1.9)$$

$$\text{Tu} \quad \beta_i = \varphi^{(i)}(c) \quad \text{kde } i = 1, \ldots, k \qquad (1.1.10)$$

a členy v sume (1.1.9) sú len prirodzené čísla, kde ak $\{i_1, \ldots, i_j\}$ obsahuje *r* rôznych prvkov s početnosťami $m_1, \ldots, m_r$ potom

$$\left[\begin{matrix} i \\ i_1 \ldots i_j \end{matrix} \right] = \frac{i!}{i_1! \ldots i_j!\; m_1! \ldots m_j!} \,. \qquad (1.1.11)$$

V praxi to znamená :

$$a_{ii} = (\beta_1)^i \,, \qquad (1.1.12)$$

kde $\beta_1 = \varphi^{(1)}(c) > 0$ (1.1.13)

GC^k (arc length) spojitosť (1.1.8) môžeme potom písať v maticovom tvare ako

$$[\, q(c), q^{(1)}(c), \ldots, q^{(k)}(c) \,]^T = A\, [\, p(b), p^{(1)}(b), \ldots, p^{(k)}(b) \,]^T \,, \qquad (1.1.14)$$

kde riadková a stĺpcová dolná trojuholníková matica $A = [\, a_{ij} \,]$ typu $(k + 1, k + 1)$ sa nazýva transformačná ***matica spojitosti*** . Napríklad GC^3 v maticovom tvare vyzerá takto :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & \beta_1 & & \bigcirc \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1 * \beta_2 & \beta_1^3 \end{pmatrix} \qquad (1.1.15)$$

Potom

$q^{(0)}(c) = p^{(0)}(b)$ sa nazýva spojitosť tzv. polohová hladkosť,

$q^{(1)}(c) = \beta_1 * p^{(1)}(b)$ sa nazýva spojitosť dotyčnice, resp. jednotkového dotykového vektora,

$q^{(2)}(c) = \beta_1{}^2 * p^{(2)}(b) + \beta_2 * p^{(1)}(b)$ sa nazýva spojitosť vektora krivosti.

Veta 1.1.3 :

Krivky p a q z definície (1.1.2) sú spojené s geometrickou spojitosťou GC^k $\Leftrightarrow$ ak existujú konštanty $\beta_1 > 0$ a $\beta_2 , \ldots , \beta_k$, ktoré majú tvar ako (1.1.8), kde a $_{ij}$ vyhovujú (1.1.9) (viď [1]).

Dôkaz :

C^k zobrazenie musí byť skonštruované tak, aby vyhovovalo (1.1.6) a (1.1.10). Napríklad to môžeme dosiahnuť pomocou Taylorovho interpolanta:

$$\text{t.j. } \varphi(t) := b + \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j * (t - c)^j}{j!} \qquad (1.1.16)$$

1.2 Geometrická spojitosť plôch

Podľa [2] C^k záplata, pre $k \geq 1$ je zobrazenie $p : \Omega \rightarrow R^3$ uzavretej oblasti v R^3, ktorá je ***regulárnym parametrickým zobrazením triedy C^k*** , t. j. p je k - krát spojito diferencovateľné na Ω a jeho diferenciál je $\partial p|_x : \Omega \rightarrow R^3$ má hodnosť dva pre všetky $x \in \Omega$.

Definícia 1.2.1 :

Nech Ω je uzavretá regulárna oblasť v R^2. Vektorovú funkciu $g = (g_1, g_2, g_3) : \Omega \rightarrow R^3$ nazývame ***difeomorfizmom*** (podľa [3]), ak existuje otvorená množina $G \subset R^2$ obsahujúca množinu Ω a vektorová funkcia $h = (h_1, h_2, h_3) : G \rightarrow R^3$, ktorá je na G triedy C^1, pre ktorú sú vektory

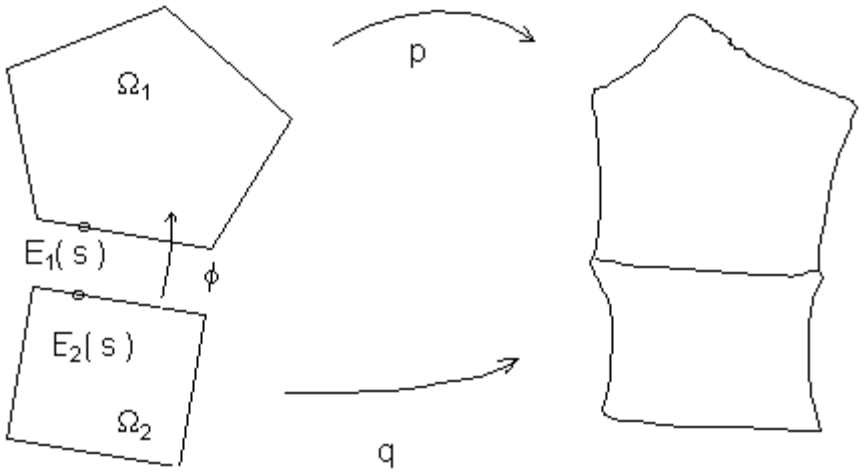
$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial h_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial h_3}{\partial u}(u, v) \right) , \quad \left(\frac{\partial h_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial h_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial h_3}{\partial v}(u, v) \right)$$

v každom bode $(u, v) \in G$ lineárne nezávislé a také, že $g = h|_\Omega$.

Ak $g : \Omega \rightarrow R^3$ je difeomorfizmus a h nejaké jeho rozšírenie uvedených vlastností, potom v každom bode $(u, v) \in \partial\Omega$ (kde hrΩ je hranica Ω, ktorá je tvorená jednou po častiach hladkou krivkou) definujeme

$$\frac{\partial g_i}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial h_i}{\partial u}(u, v), \qquad \frac{\partial g_i}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial h_i}{\partial v}(u, v),$$

kde $i \in \{ 1, 2, 3 \}$.



Obr. 1a. Reparametrizácia pre spojené C^k plochu

Definícia 1.2.1 :

Majme $p : \Omega_1 \to R^3$ a $q : \Omega_2 \to R^3$ sú dve záplaty triedy C^k definované na uzavretých oblastiach Ω_1 a Ω_2 . A nech $E_2 : [\,0,1\,] \to R^2$ je regulárna C^k parametrizácia na jednej hrane Ω_2 . Potom p je spojená s q s geometrickou spojitosťou GC^k (cez hranu E_2), ak tam existuje C^k difeomorfizmus φ, definovaný v okolí E_2 ako :

(i) **Oblasťové predĺženie** (Domain continuation)

Pre $s \in [\,0,1\,]$ platí $E_1(\,s\,) := \varphi(\,E_2(\,s\,)\,)$ (1.2.1)

je jedna hrana Ω_1, a vnútorné body Ω_1 v okolí E_1 sú zobrazené z externých bodov Ω_2 .

(ii) **Záplatová spojitosť**

Pre $s \in [\,0,1\,]$

$$\partial^i q\,|_{E_2(\,s\,)} = \partial^i (\,p \circ q\,)\,|_{E_2(\,s\,)}, \quad \text{pre } i = 0, \ldots, k \qquad (1.2.2)$$

kde $\partial^i q\,|_{E_2(\,s\,)}$ je diferenciál, ktorá má hodnosť i pre všetky $E_2(\,s\,)$.

Z definície vyplýva, že zložené zobrazenie

$$X \to \begin{cases} p \circ \varphi\,(\,X\,) = p\,(\,\varphi\,(\,X\,)\,), & X \notin \Omega_2\,, \quad \varphi(\,X\,) \in \Omega_2 \\ q\,(\,X\,), & X \in \Omega_2 \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

je regulárne parametrické zobrazenie triedy C^k v okolí hrany E_2 , (viď obr.1a).

Druhá spojitosť (1.2.2) znamená, že vyššie derivácie (vrátane k - tej) funkcie q a zložené zobrazenie $p \circ \varphi$ sa zhodujú na E_2 . V nasledujúcom použijeme jednu poznámku o smerových derivácií

$$\frac{\partial\, q\,(X)}{\partial U_1 \ldots \partial U_i} = \frac{\partial^i}{\partial s_1 \ldots \partial s_i}\, q\,(X + s_1 * U_1 + \ldots s_i * U_i)\,\Big|_{s_1 = \ldots s_i = 0} \qquad (1.2.4)$$
$$= \partial^i q\,\Big|_X (U_1, \ldots, U_i),$$

kde U_j , $j = 1, \ldots, i$ sú vektory (smernice) v R^2.

Touto metódou ľahko dostaneme derivácie až do k - tého rádu, keď použijeme (1.2.2). Potom máme :

Lema 1.2.2 :

Majme U (s) nejaké nenulové C^{k-1} vektorové pole definované cez hranu E_2 (s), ktoré je transverzálne k tejto hrane. Potom (1.2.2) môžeme nahradiť podmienkou pre $s \in [0,1]$:

$$\frac{\partial^i q(X)}{\partial U^i}\,\Big|_{X = E_2(s)} = \frac{\partial^i p\,(\varphi\,(X))}{\partial U^i}\,\Big|_{X = E_2(x)} \qquad i = 0, \ldots, k. \qquad (1.2.5)$$

Dôkaz :

Dostaneme to hneď z pozorovania, že môžeme diferencovať v (1.2.5) len určitý počet krát cez smernicou hrany E_2 (s). Odtiaľ dostaneme všetky možné derivácie vyššieho (vrátane k - tého) rádu v podmienkach derivácií pozdĺž lineárne nezávislých smerníc U (s) a E_2 (s).

Podmienky (1.2.1) a (1.2.5) pre plochy sú vlastne analógiou vzorcov (1.1.6) a (1.1.7) pre krivky, t.j. aplikovanie krokov a výsledkov predpisov, na pravú stranu (1.2.5) dostaneme pre plochu zasa analógiu vzorca (1.1.8). Presnejšie :

$$q(E_2(s)) = p(E_1(s)) \qquad (1.2.6) \quad \text{a}$$

$$\frac{\partial^i q}{\partial U}\,\Big|_{E_2(s)} = \sum_{j=1}^{i} \sum_{i_1 + \ldots + i_j = i} \begin{bmatrix} i \\ i_1 \ldots i_j \end{bmatrix} \frac{\partial^i p}{\partial V_{i_1} \ldots \partial V_{i_j}}\,\Big|_{E_1(s)}, \quad i = 1, \ldots, k \qquad (1.2.7)$$

kde

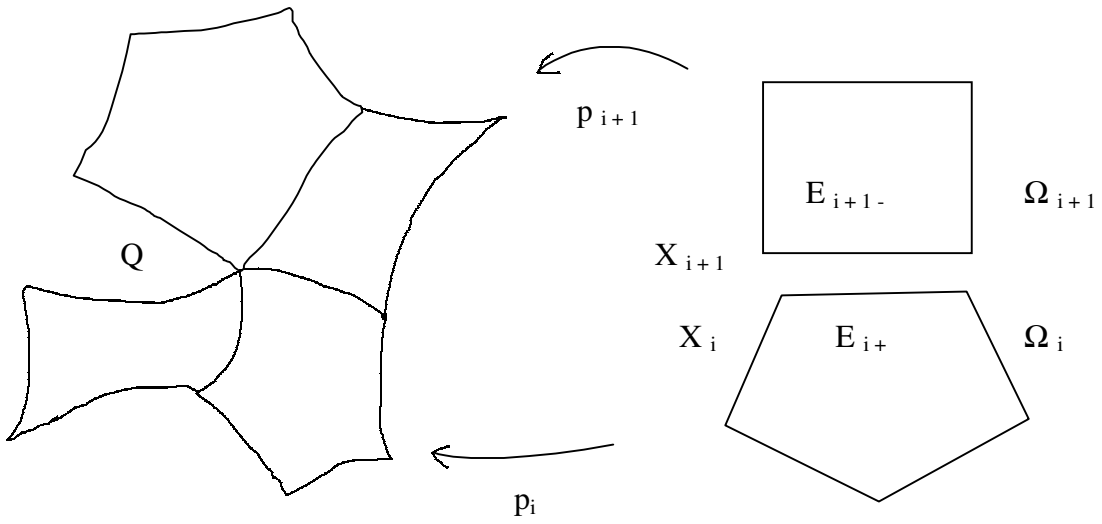
$$\bigvee_i (s) = \frac{\partial^i q}{\partial U^i}\,\Big|_{E_2(s)}, \qquad i = 1, \ldots, k. \qquad (1.2.8)$$

Rovnicu (1.1.8) pre krivky dostaneme v špeciálnom prípade, keď $V_i(s) = \beta_i(s) * V(s)$, kde $V_i(s)$, pre $i = 1, \ldots, k$, leží pozdĺž danej smernice V (s). Z podmienky oblasťového predĺženia vo φ v definície (1.2.1) vyplýva , že ak U (s) sú body zvonka na strane E_2 (s), potom V_1 (s) sú body zvnútra k strane E_1 (s).

Veta 1.2.3 :

Majme E_1: [0,1] $\rightarrow R^2$ a E_2 : [0,1] $\rightarrow R^2$ regulárne C^k pararmetrizácie hraničných segmentov Ω_1 a Ω_2, ktoré sú C^0 spojité podľa (1.2.6).Majme U : [0,1] $\rightarrow R^2$ nejaké nenulové C^{k-1} vektorové pole, ktoré je transversálne k E_2 (s) vo vonkajšom smere. Potom záplaty *p* a *q* sú spojité s geometrickou spojitosťou GC^k, ak existuje C^{k-i} vektorové polia V_i : [0,1] $\rightarrow R^2$, pre i = 1, . . . ,k také, že podmienka (1.2.7) je dodržaná, kde V_1 (s) je nenulová transverzálna k E_1 (s) vo vnútornom smere (inward direction).

Nutná podmienka tejto vety je demonštrovaná, keď je dané C^{k-1} vektorové pole U (s), potom triedy spojitostí V_i , i = 1, . . . , k , dostaneme zo vzorca (1.2.8).



Obr. 1b. Záplaty, ktoré sa stretli v spoločnom bode Q

Uvažujme teraz o situácii, kde sa nejaký počet polygonálnych záplat p_i: $\Omega_1 \rightarrow R^3$, i = 1, . . . , n stretne v spoločnom vrchole Q $\in R^3$. Potom $X_i \in R^2$ je externý bod Ω_i, pre ktorý platí, že p_i (X_i) = Q_i , i = 1, . . . , n, t.j. p_{i+1} je spojité s p_i geometrickou spojitosťou GC^k pozdĺž hrany prilepené E_{i+1}- a E_{i+} , i = 1, . . ., n - 1, pozri obr. 1b. ***Dotyčnicový sektor*** (tangent sector) p_i v X_i je definovaný, ako množina dotyčnicových vektorov

$$\frac{d}{ds} p_i (c (s)) \Big|_{s = 0},$$

ktoré sú dané všetkými regulárnymi krivkami c : [0,1] $\rightarrow \Omega_1$, kde c (0) = X_i. Hahn [2] tvrdí, že záplaty sú spojené s geometrickou spojitosťou GC^k vo vrchole Q, ak dotyčnicové sektory záplat nie sú zhodné, a potom buď

(i) ich zjednotenie je vhodná podmnožina dotyčnicovej ploche ku Q, alebo

(ii) ich zjednotenie je dotyčnicová plocha k Q a p_1 je spojitý s p_n geometrickou spojitosťou GC^k pozdĺž hrany E_{1-} a E_{n+}. Neskoršie budeme hovoriť, že záplaty ***obklopujú*** (surround) daný vrchol. Je neprípustný prípad, keď záplaty navíjajú viac ako jedenkrát okolo daného vrcholu.

1.3 Euklidovská vzdialenosť

Euklidovská vzdialenosť ***r*** od krivky T_1 k ploche G_1 je :

$\rho (T_1, G_1) = \inf \{ \rho (X, Y), X \in T_1, Y \in G_1 \}$. Euklidovská vzdialenosť dvoch bodov A a B je :

$\rho (A, B) = \langle B - A, B - A \rangle^{1/2}$, kde $\langle . , . \rangle$ je skalárny súčin.

1.3 Dupinova cyklida

Dupinova cyklida, označená ako *c,* podľa [4], je obalová (enveloping) plocha z 1 - parametrickej sústavy gúľ, ktoré sa dotýkajú troch fixovaných gúľ.

Je daná rovina P_h a dva kružnice c_1 a c_2 ležiace v P_h. Kružnice c_1 a c_2 určujú nesingulárnu cyklidu, kde c_1 a c_2 sú extrémne kružnice cyklidy ležiace v rovine P_h , vtedy a len vtedy, ak

1. c_1 a c_2 nemajú spoločný prienik, a
2. žiadny z c_1 ani c_2 neobsahuje vo vnútri druhú.

Výsledná cyklida je určená jednoznačne.

Má tri parametre *a, e* a μ, ktoré slúžia na kontrolovanie jej tvaru. Parameter *b* dostaneme zo vzorca $b = (a^2 - e^2)^{1/2}$, kde $a^2 > e^2$. V štandartnej pozícii je cyklida reprezentovaná algebricky nasledujúcimi rovnicami :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 = 4*(a*x - e*\mu)^2 + 4*b^2*y^2, \qquad (1.4a)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 = 4*(e*x - a*\mu)^2 - 4*b^2*z^2. \qquad (1.4b)$$

Keďže znamienka *a, b, e* a μ ukazujú zmenu cyklidy pozdĺž roviny x = 0, berieme ich ako pozitívne. *C* je ***rohovitá*** (horned) cyklida vtedy a len vtedy, ak $e \geq \mu$, a *c* je ***vretenovitá*** (spindle) cyklida $\Leftrightarrow \mu \geq a$. Vnútorné kružnice v rovine P_h pre cyklidu sú dané rovnicami (1.4a) a (1.4b). Parameter *a* je polovica vzdialenosti stredov c_1 a c_2. Označme polomer kružníc c_1 a c_2, ako r_1 a r_2. Potom platí, že $r_2 = \mu + e$, $r_1 = \mu - e$, $\mu = (r_1 + r_2) / 2$ a pre parameter *e* platí $e = (r_2 - r_1) / 2$.

1.4 Dupinova indikatrix

Dupinova indikatrix v bode P plochy je množina

$$\{ P + | K (u) |^{-1/2} * u,\ u \in V (\tau (P)),\ | u | = 1,\ K (u) \neq 0 \}$$

kde K (u) je normálová krivosť v smere $\overline{u}$ a τ (P) je dotyková rovina.

1.5 Metóda trsu kužeľosečiek

Kužeľosečkové splinové segmenty sú konštruované cez dané body zo zadanými dotyčnicami. Táto konštrukcia dovoľuje jeden voľný parameter, a tak všeobecná forma kužeľosečky v (x, y) - rovine je daná :

$$a*x^2 + 2*b*x*y + c*y^2 + 2*d*x + 2*e*y + f = 0. \qquad (1.6.1)$$

Okrem počítania tohto voľného parametra potrebujeme ešte jeden bod cez ktorý prechádza krivka, ale aj aby sme mohli určiť typ krivky (či ide o parabolu, elipsu alebo hyperbolu).

Typ kužeľosečky je počítaný pomocou vlastnej hodnoty matice kvadratickej formy (1.6.1)

- ak má dve reálne pozitívne (alebo negatívne) vlastné čísla, potom kužeľosečka je elipsou (alebo dvojnásobným bodom)
- ak má jedno pozitívne a jedno negatívne vlastné číslo, potom je hyperbolou (alebo dvojicou pretínajúcich sa priamok)
- ak má jedno vlastné číslo a je to 0 a druhé je nenulové, potom je parabolou (alebo dvojnásobnou priamkou alebo dvojicou rovnobežných priamok)

Kužeľosečku môžeme opísať aj v geometrickej forme, viď [5]. Sú dané dve kužeľosečky s rovnicami $S_1(x, y) = 0$ a $S_2 = (x, y) = 0$, potom ich lineárna kombinácia je

$$(1 - \lambda)*S_1 + \lambda*S_2 = 0, \qquad \text{kde } \lambda \in R, \qquad (1.6.2)$$

je systém kužeľosečiek. Tento systém sa nazýva ***trs kužeľosečiek*** (pencil of conic section), a pôvodné dve kužeľosečky S_1 a S_2 sa nazývajú ***bázou trsu*** (support of the pencil). Vzorec (1.6.2) je automaticky splnený každou kužeľosečkou v trse určenom bodmi v $S_1 \cap S_2$, ak $S_1 = 0$ a $S_2 = 0$.

Každá voľba parametra λ zodpovedá jednej kužeľosečke trsu. Pre trs, pri ktorom bázou sú S_1 a S_2 ,môžeme riešiť (1.6.2) nájdením parametra

$$\lambda = S_1 (x_1, y_1) / (S_1 (x_1, y_1) - S_2 (x_1, y_1)),$$

ktorý popíše kužeľosečku, ktorá prechádza bodom $P_1 = (x_1, y_1)$, kde $P_1 \notin S_1 \cap S_2$. Bázou trsu kužeľosečiek môžu byť tiež ***singulárne kužeľosečky*** (singular conic section).

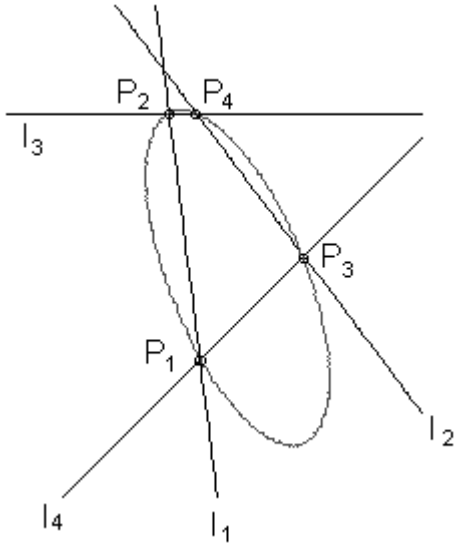
Začíname so štyrmi priamkami :

$$l_i : = a_i*x + b_i*y + c_i = 0, \qquad \text{pre } i = 1, 2, 3, 4$$

potom výsledok $l_1*l_2 = 0$ sa zhoduje s degenerovanou kužeľosečkou.
Lineárna kombinácia je potom :

$$(1 - \lambda)*l_1*l_2 + \lambda*l_3*l_4 = 0 ,$$

ktorá nám udáva trs kužeľosečiek, ktorý prechádza cez štyri body prieniku $(l_1 \circ l_2) \cap (l_3 \circ l_4)$.
Pozri obr. 2.



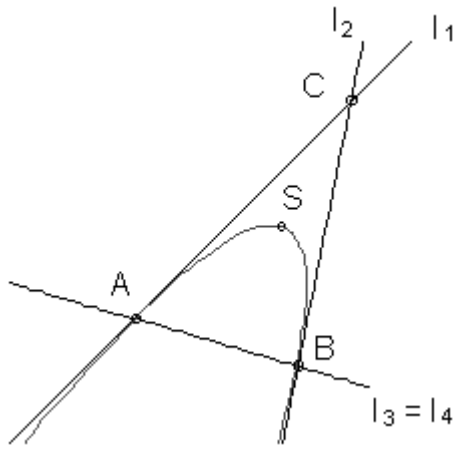
Obr. 2. Trs kužeľosečiek s bázou štyri priamky

Špeciálne pre $l_3 = l_4$ dostaneme rovnicu trsu :

$$(1 - \lambda)*l_1*l_2 + \lambda*l_3^2 = 0. \qquad (1.6.3)$$

Z čoho vyplýva, že všetky kužeľosečky trsu sú dotyčnicami k priamkam l_1 a l_2 a prejdú cez body prieniku A : = $l_1 \cap l_3$ a B : = $l_2 \cap l_3$. Priamky l_1 a l_2 sú dotyčnicami v A a B, lebo na A a B môžeme pozerať ako na dvojitý bod. Body P_1 a P_3 konvergujú k bodom P_2 a P_4, z čoho vyplýva, že l_3 konverguje k l_4.

Ak kužeľosečka je zvolená z trsu kužeľosečiek určeného tvarom (1.6.3) a požadujeme od nej, aby prechádzala ďalším bodom, potom tento bod *S* voláme ako ***ramenný*** (shoulder) bod. Ak *S* leží v trojuholníku (A, B, C), potom kužeľosečka je spojitá krivka v trojuholníku (A, *S*, B). Pozri obr.3.



Obr. 3. Krivka z trsu s dvoma zhodujúcimi rovnými čiarami, ktoré sú bázou trsu

Výsledok :

Ak ramenný bod *S* je stredný bod úsečky, ktorá spojí stredné body úsečiek AC a BC, potom spojená kužeľosečka je ***parabola***. Ak *S* leží zvnútra paraboly (a nie na l_3), potom kužeľosečka je ***elipsa.*** Ak *S* leží zvonka paraboly (a nie na l_1, l_2), potom kužeľosečka je ***hyperbola.***

1.6 Priamkové plochy

Priamkové plochy sú špeciálnym prípadom Coonsových záplat. Sú to interpolačné plochy. Majme dve krivky C_0 (u) a C_1 (u). Chceme dostať plochu medzi týmito krivkami, t.j. chceme vlastne vyplniť. Výslednú plochu potom nazývame ***priamková plocha*** (ruled surface), t.j. pre (u, v) $\in$ [0,1] x [0,1] Coonsová interpolačná priamková plocha, označme ho ako C (u, v), je :

$$C(u, v) = (1 - v) * C_0(u) + v * C_1(u) .$$

2. Metódy stmeľovania

Pre realistické zobrazenie v počítačovej grafike musíme konštruovať rôzne spojenia kriviek a plôch, ako aj zaoblenie ostrých hrán a rohov.

Pre riešenie tejto problematiky existuje mnoho metód, ktoré sa spoločne nazývajú ***metódy stmeľovania.***

Stmeľovanie je hladký prechod medzi krivkami, prípadne plochami, alebo viacerými krivkami a plochami geometrického modelu. Tento prechod musí byť vyriešený tak, aby vyzeral reálne, pričom musí spĺňať požadované hodnoty, napríklad : rád spojitosti, faktor zakrivenia atď.

Pri volení metódy musíme rozlíšiť medzi prípadmi, keď plochy alebo krivky geometrického modelu sú už spojené (t.j. majú spoločné body), alebo nie sú spojené.

Matematicky môžeme stmeľovanie zapísať vo viacerých tvaroch ako napríklad : parametricky, implicitne, pomocou splinov alebo nejakými známymi numerickými metódami ako sú napríklad : interpolácia, Laplacove parciálne diferencie.

V týchto metódach sa pokúsime dosiahnuť čo najvyšší stupeň spojitosti a čo „najrealistickejší vzhľad“ geometrického modelu.

V tejto práci sú napísané niektoré metódy v implicitnom tvare .Konkrétne, v implicitnom tvare sú zaradené do skupín, viď [5] :

- ***neohraničené stmeľovanie*** (unbounded blends) - kde stmeľovanie globálne pôsobí na tvar objektu (Blinn´s blobby model),
- ***objemovo ohraničené*** (volume - bounded blends) - kde rozsah stmeľovania je kontrolovaný s nejakým dopredu určeným obsahom (napr. Sabinova metóda)
- ***pásmovo - ohraničené stmeľovanie*** (range - bounded blends) - kde rozsah stmeľovania je kontrolovaný nejakou danou vzdialenostnou hodnotou (supereliptická metóda Rockwooda a Owena atď.)
- ***krivosťou - ohraničené stmeľovanie*** (curvature - bounded blends) - kde polomer zakrivenia je fixovaný (stmeľovanie valiacou sférou s konštantným a nekonštantným polomerom).

3. Stmeľovanie v implicitnom tvare

3.1 Neohraničené stmeľovanie

Unbounded blends

Krivky a plochy v implicitnom tvare sú zapísane rovnicami $F(x, y) = 0$ a $F(x, y, z) = 0$.

Základná myšlienka tejto metódy je : nahradenie matematických operácií, ako je zjednotenie a prienik daných objektov, s algebricky definovanými aproximáciami.

Výsledný stmeľovaný objekt vždy leží mierne vnútri alebo zvonka požadovaného zjednotenia alebo prieniku jednotlivých objektov.

Objekty pre stmeľovania sú zadané funkciami $G_i = G_i(x)$, pre ktoré platí $0 \leq G_i \leq 1$ $\forall x \in R^3$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Aproximácia prieniku podľa [6] je potom

$$F = (G_1^{\mu} + \ldots + G_n^{\mu})^{1/\mu} \qquad (3.1.1)$$

a pre zjednotenie platí

$$F = (G_1^{-\mu} + \ldots + G_n^{-\mu})^{-1/\mu}, \qquad (3.1.2)$$

kde μ je ***parameter hladkosti*** (smoothing parameter), ktorý slúži na riadenie mieri stmeľovania. Pre malé hodnoty μ objekty G_i sú „zhruba“ stmeľované (hladko ak boli aj pôvodne rozpojené), pre veľké hodnoty μ vzorce (3.1.1) a (3.1.2) sú blízko k týmto teoretickým operáciám.

V ***Blinn´s blobby modely*** [7] sú stmeľované objekty zadané pomocou polpriestorov, definované funkciami $G_i = G_i(x)$, kde $G_i \leq 0$. Aproximácia pre prienik je potom daná ako :

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i * e^{-a_i * G_i} . \qquad (3.1.3)$$

Parameter a_i nám určí stupeň rozkladu oblasti G_i, a c_i je váha príspevku G_i k celkovému vyjadreniu $F(x)$. Rozpojené objekty sú opäť dovolené.

3.2. Objemovo - ohraničené stmeľovanie

Volume - bounded blends

Oblasť, v ktorej stmeľovanie leží je zadaná obsahom, ktorý je najčastejšie opísaný vo vzorcoch pre jej hraničné plochy. Túto vlastnosť použijeme priamo v definícii stmeľovania.

Sabinova metóda (viď [8]) vyzerá nasledovne :

Stmeľovanie plôch $G_1 (x) = 0$ a $G_2 (x) = 0$ má formu :

$$F = (1- \lambda^2) * G_1 + \lambda^2 * G_2 + (1- \lambda^2)* \lambda^2 * M = 0,$$

kde $\lambda = H1/ (H1 + H2).$ (3.2.1)

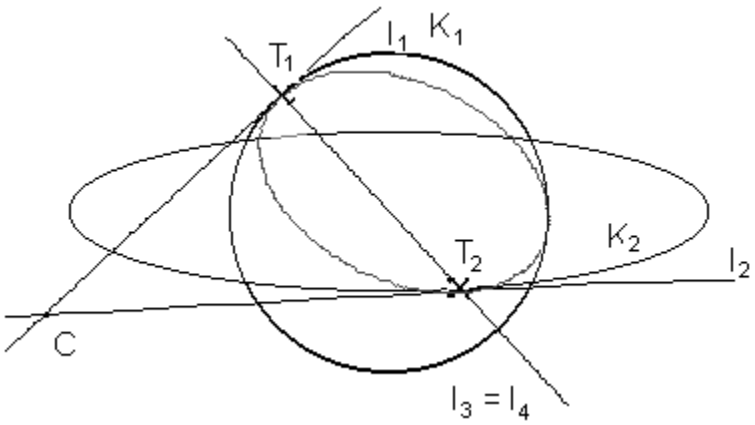
V tomto prípade H_1 a H_2 sú ***pomocné*** (supplementary) plochy, ktoré použijeme na kontrolovanie miery stmeľovania. V praxi to znamená, že sa fixujú hraničné krivky T_1 a T_2 stmeľovania, ktoré ležia v plochách G_1 a G_2. Tieto krivky sa nazývajú aj ako ***kontaktné*** (contact) ***krivky, spájacie*** (link) ***krivky,*** alebo ***okrajové*** (trim) ***krivky.*** Bez člena $(1- \lambda^2)* \lambda^2 * M$, ktorý sa nazýva ***opravný*** (correction) výraz s konštantou M, stmeľovaná plocha môže obsahovať prienik $G_1 \cap G_2$, ktoré vedie ku konkavite alebo ku konvexite.

Tu používané metódy sú blízke metóde ***trsu kužeľosečiek*** (conic section pencil method), ktorá je popísaná v kapitole 1.6. Napr. ak GC^1 spojitá stmeľovaná krivka medzi dvoma krivkami K_1 a K_2 , konštruovaná ako na obr.4 , tak dotyčnice k okrajovým bodom T_1 a T_2 na krivkách K_1 a K_2 môžeme interpretovať ako oporné krivky l_1 a l_2 trsu kužeľosečiek. Tu priamka T_1 T_2 je tretia oporná priamka zodpovedajúca $l_3 = l_4$.

Tieto oporné priamky určia potom všetky možné kužeľosečky stmeľovania :

$$K = (1 - \lambda)*l_1*l_2 + \lambda*l_3^2 \qquad \lambda \in [0,1].$$ (3.2.2)

Celá leží v oblasti ohraničený tými troma opornými priamkami. Toto stmeľovanie je zobrazené na obr. 4 s červenou čiarou.



Obr. 4. Dotyčnicovo spojité stmeľovanie (červená elipsa) medzi kružnicou K_1 a elipsou K_2

Ak priamky l_i v (3.2.2) nahradíme krivkami K_i , potom túto metódu môžeme použiť na dotyčnicovo - spojité stmeľovanie. Vzorec (3.2.2) ľahko prepíšeme aj na stmeľovanie plôch. Výsledná stmeľovaná plocha je potom valcovitého alebo kužeľovitého tvaru. Okrajové krivky sú zobrazené priamkami. V tomto prípade je problematické skonštruovať plochu H, lebo musí mať prienik s oboma plochami G_1 a G_2 pozdĺž okrajových priamok. Jedna možná jednoduchšia cesta k H je, ak to dostaneme ako súčin dvoch plôch H_1 a H_2 , kde H_1 definuje okrajovú priamku T_1 v G_1 a H_2 definuje okrajovú priamku T_2 v G_2. Potom rovnica pre stmeľovanú plochu dostaneme ako :

$$F = (1 - \lambda)*G_1*G_2 + \lambda*H_1^2*H_2^2 = 0 , \qquad \lambda \in [0,1] \qquad (3.2.3)$$

Vo všeobecnosti : $$F = (1 - \lambda)* \prod_{i=1}^{m} G_i + \lambda*\prod_{i=1}^{n} H_i^2 = 0 , \ \lambda \in [0,1] \qquad (3.2.4)$$

nám dá plochu stmeľujúcu *m* plôch G_i, ktoré ležia v oblasti definované s *n* ohraničujúcimi plochami H_i .

Predchádzajúce vzorce slúžili len pre GC^1 spojitosť. Na dosiahnutie vyššieho stupňa spojitosti, musíme použiť iné vzorce, ako napr.:

$$F = (1 - \lambda)*G - \lambda*H^{\mu} = 0 \qquad \text{pre } \lambda \in [0,1] \qquad \text{a } \mu \geq 2 . \qquad (3.2.5)$$

Tu G sa nazýva ako ***základná*** (basis) krivka alebo plocha, H je ***transverzálna*** (transversal) krivka alebo plocha a F je ***stmeľujúca*** (blending) krivka alebo plocha alebo ***funkcionálny spline***. Nasledujúci výsledok dostal Li [9], Hoschek [10] .

Veta 3.2.1 :

Nech $P = G \cap H$ s $G, H \in C^{\mu} (P)$ a predpokladajme že F je ako (3.2.5). Potom v bode P funkcionálny spline F má spoj so základnou priamkou (plochou) G s rádom spojitosti (aspoň) $\mu - 1$.

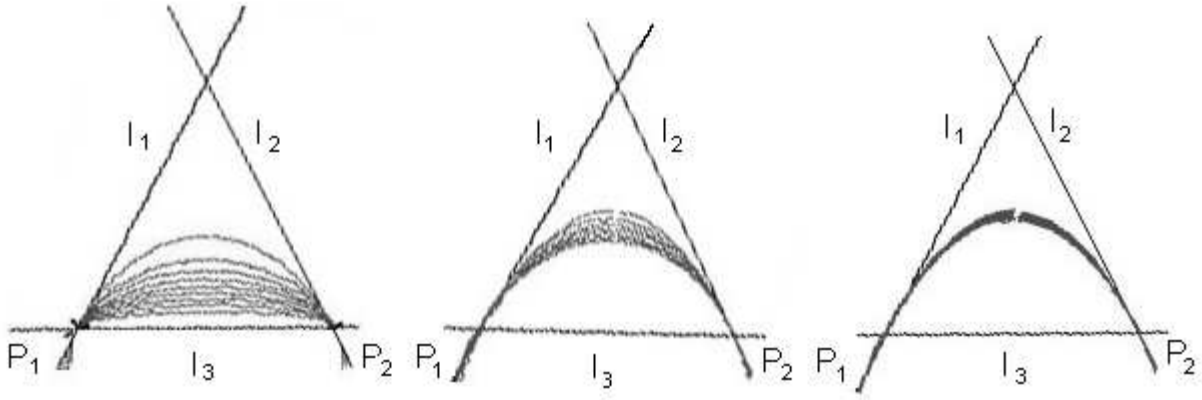
Pre $\mu \geq 3$ to znamená, že F a G majú rovnakú krivosť (Dupinova indikatrix uvedená v kapitole 1.5) v bode P. Pre rovinné krivky prvé $\mu - 3$ derivácie krivosti sú rovnaké ak $\mu > 3$.

Príklad 1 :

Majme $G = l_1*l_2$ a $H = l_3$ .Potom funkcionálny spline :

$$F = (1 - \lambda)*l_1*l_2 - \lambda*l_3^{\mu} = 0, \qquad \lambda \in [0,1], \qquad \mu \geq 3,$$

má nulovú krivosť v bode $P_1 = l_1 \cap l_2$ a $P_2 = l_2 \cap l_3$. Pre rastúcu hodnotu μ a/alebo klesajúcu hodnotu λ, F približuje sa k prieniku priamok l_1 a l_2. Pozri obr. 5 !



Obr. 5. Funkcionálné spliny pre $\lambda = \langle 0.1, 1 \rangle$ (vľavo), $\lambda = \langle 0.01, 0.1 \rangle$ (v strede) a $\lambda = \langle 0.001, 0.005 \rangle$ (vpravo)

Stmeľovaná krivka alebo plocha definovaná ako funkcionálny spline leží úplne zvnútra v oblasti ohraničenej G a H a najviac $F \cap G = F \cap H = G \cap H$.

Podrobnejším skúmaním predchádzajúcich metód môžeme vidieť, že nie vždy dostaneme ako výsledok stmeľovania elipsu, kruh alebo parabolu.

Do vzťahu (3.2.2) za l_i, i = 1, 2, 3 dosadíme priamky, a do vzorca (3.2.5) za G a H a $\mu = 2$ dosadíme tiež priamky, tak rozdielom medzi vzorcami bude znamienko pred druhým členom, t.j.

$$K = (1 - \lambda)*l_1*l_2 + \lambda*l_3^2 ,$$

$$F = (1 - \lambda)*l_1*l_2 - \lambda*l_3^{\mu} = 0.$$

Vypočítaním týchto rovníc dostaneme kužeľosečku v tvare :

$$a*x^2 + 2*b*x*y + c*y^2 + 2*d*x + 2*e*y + f = 0.$$

Podľa [11] označme

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} ,$$

potom dostaneme elipsu, ak $A_{33} > 0$ a $\triangle < 0$

parabolu, ak $A_{33} = 0$ a $\triangle \neq 0$

hyperbolu, ak $A_{33} < 0$ a $\triangle \neq 0$.

Tieto kužeľosečky prechádzajú cez body $l_1 \cap l_3$ a $l_2 \cap l_3$, t.j. keď použijeme označenie zo vzorca (3. 2. 2), tak cez body T_1 a T_2. Ako výsledok môžeme dostať „celú“ elipsu, nie len časť, a takto ešte vždy je otázkou, ktorá časť elipsy je stmeľovanie. Keď dostaneme ako výsledok hyperbolu, tak táto hyperbola prechádza cez body T_1 a T_2, ale zle stmeľuje krivky (pozri obr. 8a). Máme dva problémy :

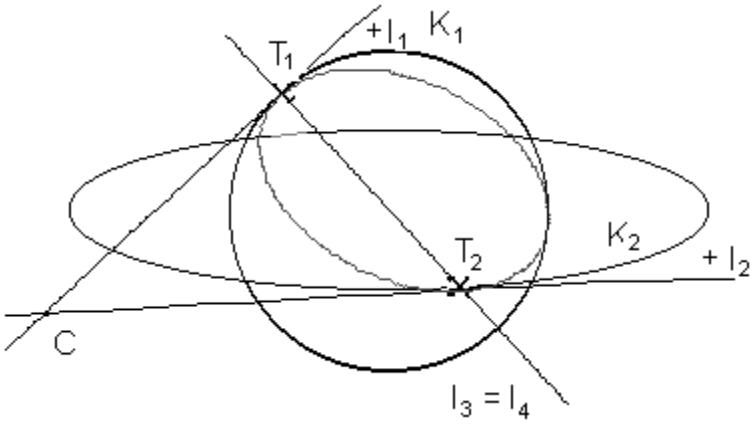
1. chceme dostať stmelenie tak, aby výsledná krivka nebola časťou hyperboly,
2. chceme určiť, ktorá časť výslednej kužeľosečky je stmeľovanie.

Môžeme to zistiť nasledujúcim spôsobom:

1.Zoberme K_1 ako kružnicu a K_2 ako elipsu. Aby sme dostali GC^1 stmeľovanie, tak l_1 musí byť dotyčnicou v bode T_1 ku K_1, resp. l_2 dotyčnicou v bode T_2 ku K_2. Potom priamka l_3 je prechádza cez T_1 a T_2. Označme bod $l_1 \cap l_2$, ako C. Takto vznikne trojuholník T_1T_2C.

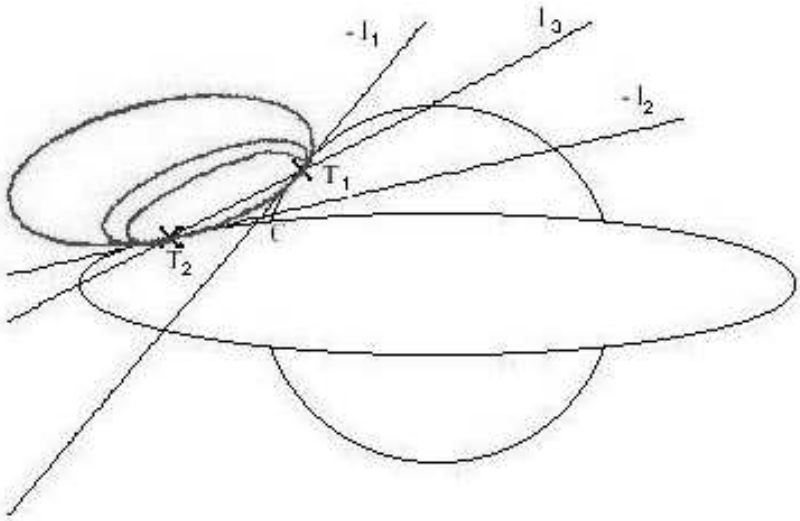
Predpokladajme, že l_1 a l_2 sú priamky, ktoré rovinu, v ktorej ležia rozdelia na polroviny (priamky sú hranice polrovín). Potom označíme „ + “ tú polrovinu :

1. v prípade l_1 ,v ktorej leží kruh,
2. v prípade l_2 , v ktorej leží elipsa (viď obr. 6).



Obr. 6. Stmeľovanie pri znamienkach +, +

Potom dostaneme dve znamienka, jednu pre l_1, druhú pre l_2. Teraz skúmajme v ktorej polrovine, vzhľadom na l_1 aj na l_2 leží trojuholník T_1T_2C. Ak trojuholník leží v opačnej polrovine vzhľadom na priamku l_1 ako kruh, vzhľadom na priamku l_2 ako elipsa , tak obidve označíme „ - “ ,ako na obr. 7.

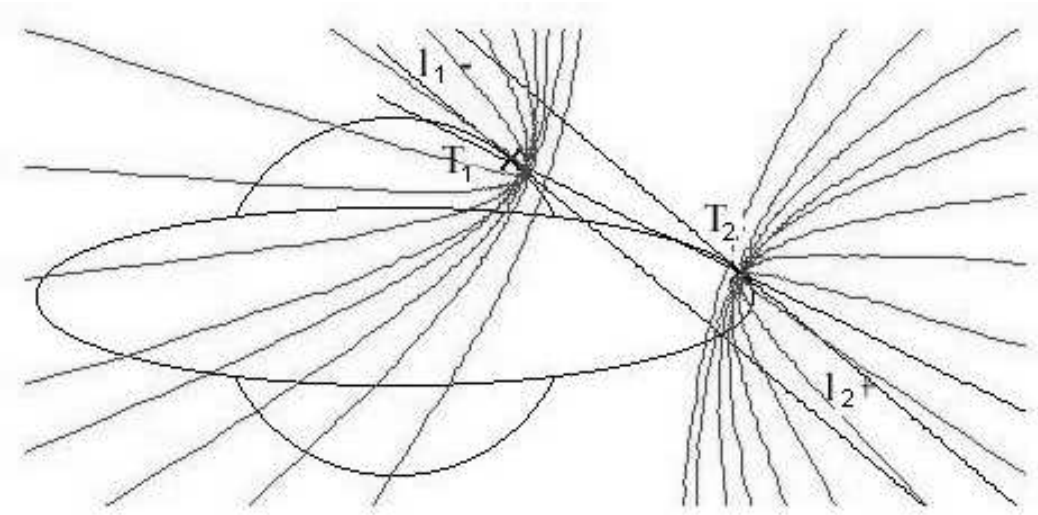


Obr. 7. Stmeľovanie pri znamienkach -, -

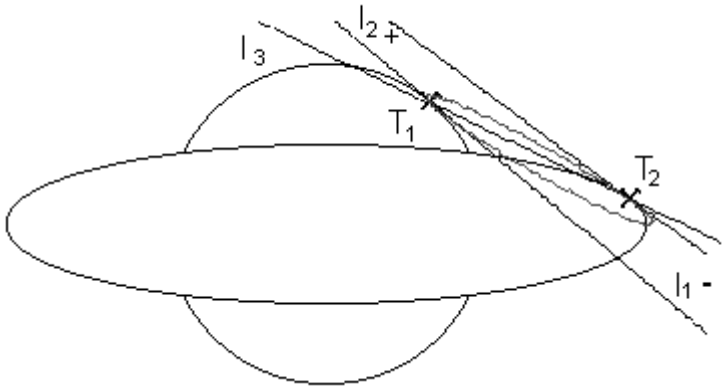
Výsledok :

ak nechceme dostať hyperbolu, tak sa musia obidve znamienka rovnať, t.j. sú buď + , +, alebo - , -. Ak dostaneme +, - alebo -, + v tomto prípade je výslednou stmeľovacou krivkou hyperbola, viď obr. 8a .

V tomto prípade je riešenie jednoduché: zmením znamienko pred druhým členom vo vzoroch (3. 2. 2) a (3. 2. 5) z plusu na mínus alebo opačne, podľa toho ktorý vzorec sme použili. Potom už výsledná krivka bude elipsa, viď obr.8b.

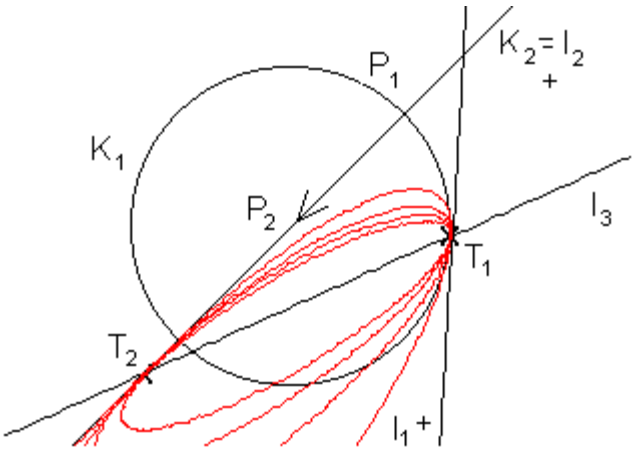


Obr.8a. Stmeľovanie pri znamienkach -, +

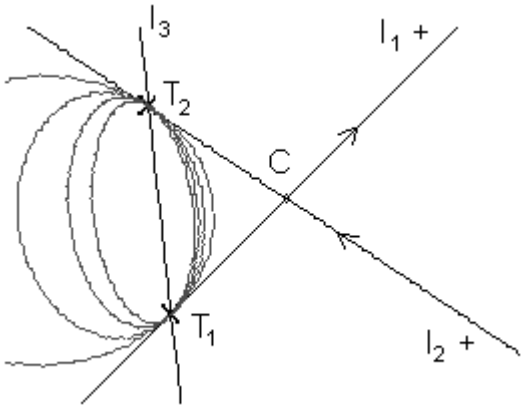


Obr.8b. Stmeľovanie pri znamienkach - , +, ale pre opačné znamienko pred druhým členom

V programe, ktorý je súčasťou práce, je vypracovaná aj taká situácia, keď K_2 je priamka. V tomto prípade l_2 sa rovná priamke K_2. Priamka je daná pomocou dvoch bodov. Poradie týchto bodov určí smer priamky, t. j. ak stojím v prvom bode, tak smer priamky je smer ukazujúci k druhému bodu. Potom „+“ znamienkom označme tú polrovinu, ktorá ak stojím v smere priamky je odo mňa vľavo, viď obr. 9. Takto sa môžeme dostať už k rovnakým výsledkom ako v predchádzajúcom prípade. V programe je aj situácia, ak K_1 aj K_2 sú priamky , tento prípad je ilustrovaný na obr. 10.

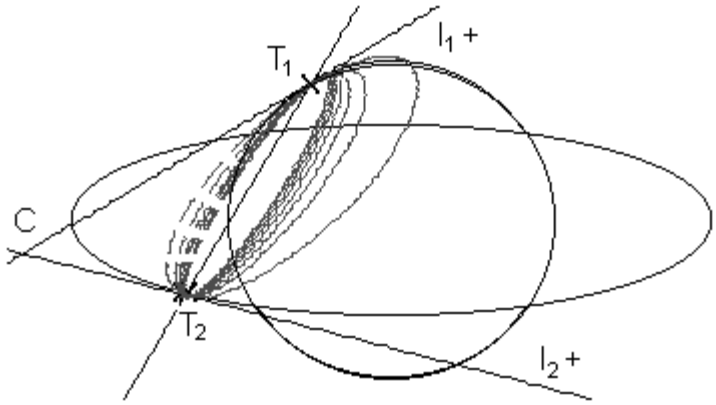


Obr. 9. Stmeľovanie, ak $K_2 = l_2$



Obr. 10. Stmeľovanie dvoch priamok

2.Predpokladajme, že sme dostali ako výsledok stmeľovania elipsu. Na prvý pohľad však určenie časti elipsy, ktorá stmeľuje, je dosť ťažké v niektorých prípadoch, napr. obr. 11.



Obr.11. Stmeľovanie (čiarkovaná čiara) medzi elipsou a kruhom

Jedno možné riešenie je, že stmeľovanie je tá časť výslednej kužeľosečky, spolu s jeho hraničnými bodmi T_1 a T_2, ktorá leží vo vnútri trojuholníku T_1T_2C (na obr.11 je vyznačená čiarkovaním).

Konvexné stmeľované krivky a plochy môžeme konštruovať, ak funkcia G vo vzťahu (3.2.5) je súčinom priamok (plôch) $G_i (x) = N_i*x + c_i$, $|N_i| = 1$, $c_i \in R$, $i = 0, \ldots, m$, kde $G_i (x)$ je orientované ako normály N_i bodov smerom k F.

Z toho vyplýva podľa Hartmanna [12]:

Veta 3.2.2 :

Funkcionálna splinová krivka (plocha)

$$F = (1 - \lambda)* \prod_{i=1}^{m} G_i^{\mu i} - \lambda * G_o^{\mu o} \qquad (3.2.6)$$

je konvexná, ak obal $\{ N_1, \ldots, N_m \}$ leží v R^2 (R^3) a $\mu_0 > \sum_{i=1}^{m} \mu_i$, $\mu_i \in R$,

kde obal $\{ N_1, \ldots, N_m \}$ je lineárna kombinácia $\alpha_1*N_1 + \ldots + \alpha_m*N_m$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in R$.

Táto metóda nám umožňuje skonštruovať veľmi jednoduché stmeľovanie plochy, ak hraničné krivky stmeľovania a plochy sú dané implicitne. Napr. nájsť stmeľovaciu plochu medzi dvoma valcami, ktoré sa pretínajú a majú rovnaký polomer a kolmé osi, ktoré sú ohraničené kruhmi na valcoch. Základnú plochu zvolíme ako prienik dvoch valcov a priečková plocha je prienikom

štyroch rovín ktoré sú uložené pozdĺž kruhov na valcoch. Ak osi dvoch valcov majú prienik v O, a ak tie štyri plochy sú v rovnakej vzdialenosti od O, potom stmeľovaná plocha je zadaná vzorcom :

$$F = (x^2 + z^2 - 3)*(y^2 + z^2 - 3) - \lambda*((x - 4)*(x + 4)*(y - 4)*(y + 4))^{\mu}$$

Ak hraničné krivky stmeľovanej plochy nemôžeme zadať implicitne, môžeme použiť skonštruovanie metódu rezov v priečnom smere (cross - section) napísanú Hartmanom.

Majme dve plochy G_1 a G_2, ktorých prienikom je krivka Γ. Najprv musíme konštruovať dve krivky T_1 a T_2 na G_1 a G_2, ktoré ležia v okolí Γ. Lokálna vzdialenosť medzi T_1 a Γ, a T_2 a Γ závisí od uhla medzi dvoma plochami G_1 a G_2 pozdĺž pretínajúcej krivky. Dotykové body valiacej gule dajú tieto hraničné krivky. Teraz spojme zodpovedajúce si body na T_1 a T_2 priamkovou (ruled) plochou Ψ, ktorej vytvárajúce priamky formujú základné krivky pre požadované stmeľované krivky. Teraz pozdĺž všetkých generovaných priamok určenej plochy Ψ konštruujeme plochu, ktorá rozpojí pretínajúcu krivku daných plôch G_1 a G_2 pravouhlo. Ak plocha Ψ pri týchto prienikov je zadaná rovnicou $H (x) = 0$ a ak $G_i (X) = 0$, potom G^2 spojitá stmeľovaná plocha (s danou orientáciou) je daná :

$$F = (1 - \lambda)*G_1*G_2 - \lambda*H^3 = 0.$$

Konštruovanie stmeľovaných plôch bez predpísaných hraničných kriviek t.j. ak zvolíme $\mu = 0$ vo vzorci (3.2.5) dostaneme :

$$F = (1 - \lambda)*G - \lambda = 0$$

F môžeme interpretovať ako obrysovú plochu G. Z toho vyplýva, že obrysové plochy môžeme použiť aj pre stmeľovanie a aj pre interpoláciu.

Stmeľované plochy medzi krivkami môžeme konštruovať napr. aj takto :

V rovine - (x, y) zvolíme krivku $f (x, y) = 0$ a v (y, z) - rovine zvolíme krivku $b (y, z) = 0$. Potom rovnica pre stmeľovanú plochu je : $F (x, y, z) = f (x, b (y, z)) = 0$.

3.3 Pásmovo - ohraničené stmeľovanie

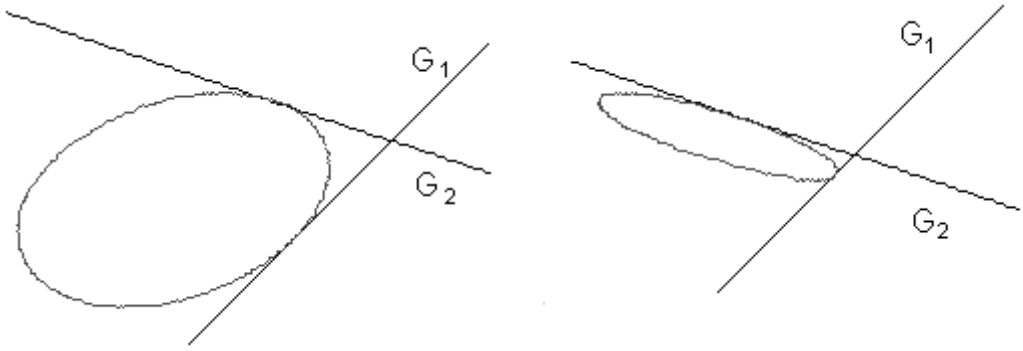
Range - bounded blends

Tvar stmeľovania je kontrolovaný pomocou parametrov vzdialenosti, ktoré sú priamo vložené do definujúcej rovnice.

Supereliptické stmeľovanie Rockwooda a Owena (viď [13], [14]) je definované nasledovne :

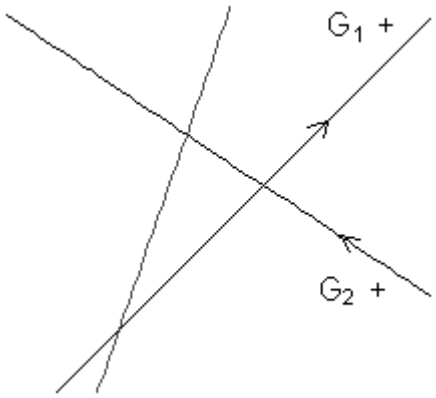
$$F = 1 - (1 - G_1 / r_1)^{\mu} - (1 - G_2 / r_2)^{\mu} = 0 \qquad (3.3.1)$$

Parametre r_1 a r_2 určia rozsah stmeľovania a μ je tvarový parameter. V určitom zmysle ich môžeme prirovnať k hlavnej a vedľajšej poloosi elipsy : pre $r_1 = G_1$, F sa redukuje na plochu G_2, a pri $r_2 = G_2$ sa redukuje na G_1. Parameter μ kontroluje napätie stmeľovania : pre $\mu = 2$ kužeľosečka (3.3.1) je približne kružnica, kým pre väčšie hodnoty je supereliptické, lebo má výraznejšie napätie.



Obr. 12. Supereliptické stmeľovanie vľavo $r_1 = r_2$ pri $\mu = 2$, vpravo $r_1 \neq r_2$ ($r_1 > r_2$) pri $\mu = 2$

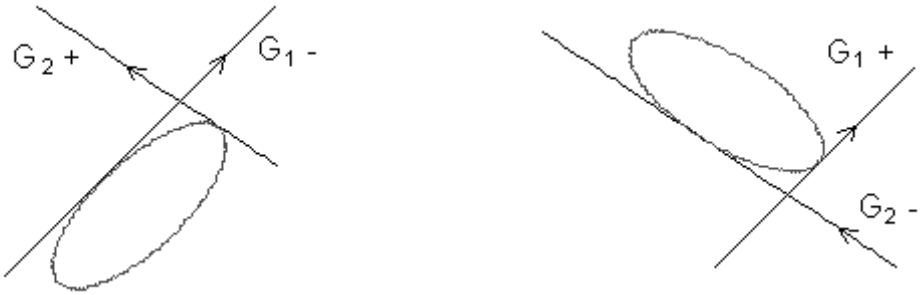
Pre $\mu = 1$ a v prípade, ak G_1 a G_2 sú priamky je výsledná stmeľujúca funkcia tiež priamka (viď obr. 13).



Obr. 13. Stmeľovanie dvoch priamok pre $\mu = 1$

$r_1 = 4000$ a $r_2 = 9000$

V tejto metóde nemôžeme sami zvoliť body dotyku. Môžeme určiť len pásmo pomocou parametrov r_1 a r_2. Pomocou týchto parametrov môžeme určiť aj umiestnenie stmeľujúcej funkcie. Ak volím smer priamky pomocou poradia zadania bodov určujúcich priamky G_1 a G_2, tak znamienko r_1 vplýva na polohu stmeľujúcej funkcie v polrovine určenou priamkou G_1, resp. znamienko r_2 vplýva na polohu stmeľujúcej funkcie v polrovine určenou G_2, napr. na obrázku 14a môžeme vidieť situáciu, ak $r_1 = -2000$ a $r_2 = 5000$ a na obrázku 14b $r_1 = 5000$ a $r_2 = -2000$

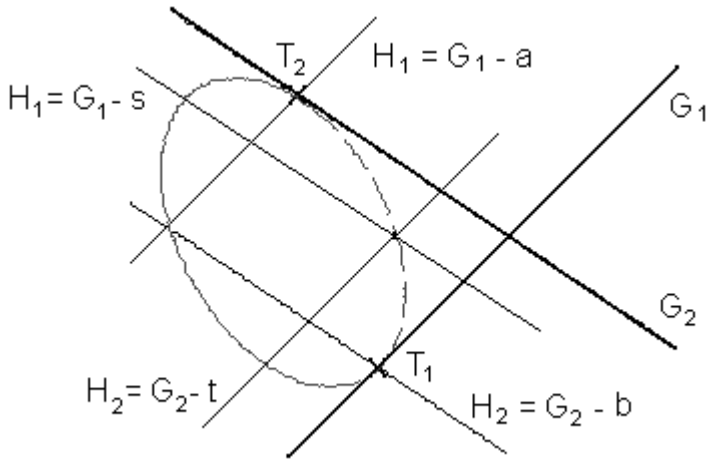


Obr.14a,b Stmeľovanie vľavo pri $r_1 = -2000$, $r_2 = 5000$, vpravo pri $r_1 = 5000$ a $r_2 = -2000$

Stmeľovanú plochu medzi dvoma (pretínajúcimi sa) plochami môžeme konštruovať nasledovne. Najprv zvolíme okrajové krivky na každej ploche (okolo priamky, ktorá určí prienik). Potom tieto sú spojené stmeľovanou funkciou podobne ako používame u interpolácií Coonsových plôch dvoch protiľahlých ohraničujúcich hrán záplaty (podrobnejšie v kapitole 1.7).

Tento prístup je ľahko uskutočniteľný, je možné ľahko automatizovať, a je skutočne použiteľný, lebo pracuje s ľubovoľnými algebrickými plochami. Samozrejme je to efektívna v prípade, ak výsledná stmeľovaná plocha je najnižšieho možného polynomického stupňa.

Potenciálová metóda (potencial) Hoffmana a Hopcrofta [15] je zavedená týmto spôsobom. Nech máme algebrické plochy G_1 a G_2 v implicitnej forme $G_1 (x) = 0$ a $G_2 (x) = 0$. Potenciálne plochy $G_1 = s$, ($H_1 = G_1 - s = 0$) s $s \in R$, a $G_2 = t$ ($H_2 = G_2 - t = 0$) s $t \in R$, majú tvar rovnaký ako G_1 a G_2. Na základe znamienka konštánt s a t, ležia obidve vnútri alebo zvonka G_1 a G_2. Parameter a je približne zvolený maximum s pre ktoré platí $H_1 \cap G_2$ definuje nedegenerovanú priestorovú krivku ležiacu na G_2. Táto krivka je potom okrajová krivka T_2 pre stmeľovanie. Rovnako okrajová krivka T_1 na G_1 je prienik potenciálnej plochy H_2 s G_1, zhodujúci sa so približne zvolenou maximálnou t hodnotou b - čka, (viď obr.15).



Obr.15. Potenciálna metóda pre stmeľovanie algebraických plôch G_1 a G_2

Spojitá plocha je teraz definovaná stmeľovaním týchto dvoch okrajových kriviek. Použijeme tu stmeľovanú funkciu f (*s, t*). Bod (*s, t*) = (*a*, 0) v (*s, t*) - parametrovom priestore sa zhoduje okrajovou krivkou T_2, a bod (*s, t*) = (0, *b*) sa zhoduje s okrajovou krivkou T_1. Hodnoty parametrov (*s, t*) , pre $0 < s < a$, $0 < t < b$ generujú priestorové krivky, ktoré sú prienikmi $H_1 \cap H_2$ potencionálnych plôch $H_1 = G_1 - s = 0$ a $H_2 = G_2 - t = 0$. Pretínajúce krivky formujú plochu pre spojenie F (x) = f (G_1,G_2) = 0. Hoffman [15] prišiel na toto :

Veta 3.3.1 :

Predpokladajme, že stmeľovaná funkcia f (*s, t*) približuje *s* - os dotyčnicovo v (*a*, 0) a tiež približuje *t* - os dotyčnicovo v (0, *b*). Potom F spojí G_2 a G_1 s GC^1 spojitosťou pozdĺž okrajových kriviek T_2 a T_1.

Ak sa stmeľovaná funkcia f (*s, t*) dotýka osi s väčším stupňom spojitosti, tak stmeľovaná plocha F spája G_1 a G_2 takým istým stupňom spojitosti.

V duchu tejto vety sa problematika stmeľovania dvoch krivých algebrických plôch redukuje na jednoduchú problematiku stmeľovania osí (plôch) v parametrovom priestore. Pre GC^1 spojitosť máme splniť štyri podmienky spojitosti, to znamená, že f (*s, t*) musíme zvoliť aspoň kvadratickú. To znamená, že ak chceme polynomický stupeň stmeľovanej plochy, musíme zvoliť f (*s, t*) ako kvadratickú, t.j. kužeľosečku. Keď zoberieme vzorce pre hraničnú spojitosť musíme zvoliť

$$f(s,t) = b^2*s^2 + 2*e*s*t + a^2*t^2 - 2*a*b^2*s - 2*a^2*b*t + a^2*b^2 = 0, \qquad (3.3.3)$$

kde $e \in R$ a stmeľovanú plochu $F(x) = f(G_1, G_2)$ dostaneme

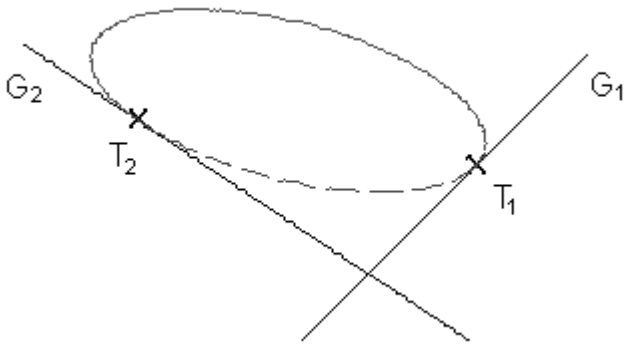
$$F = b^2 * G_1^2 + 2*e*G_1*G_2 + a^2 * G_2^2 - 2*a*b^2*G_1 - 2*a^2*b*G_2 + a^2*b^2 = 0, \qquad (3.3.4)$$

To znamená, že stmeľovaná funkcia F má polynomický stupeň $\max\{2*m, 2*n\}$ ak, G_1 a G_2 sú stupňa m a n. Ak sú kvadratické, dostaneme stmeľovanú plochu stupňa štyri.

Parametre a a b určia rozsah stmeľovania. Ak zadáme rôzne znamienka, tak dostaneme úplne rôzne stmeľované funkcie. Voľba e určí formu kužeľosečky (3.3.3), a to vplýva na krivosť rozdelenia stmeľovanej funkcie F. Pre $a, b > 0$ máme :

$e = -\infty$	$f(s, t)$ je dvojica priamok $s = 0$, $t = 0$
$\infty < e < -(a*b)$	$f(s, t)$ je hyperbola
$e = -(a*b)$	$f(s, t)$ je parabola
$-(a*b) < e < a*b$	$f(s, t)$ je elipsa (kružnica pre $a = b$, $e = 0$)
$e = a*b$	$f(s, t)$ je priamka $b*s + a*t - a*b = 0$ počítané dvakrát.

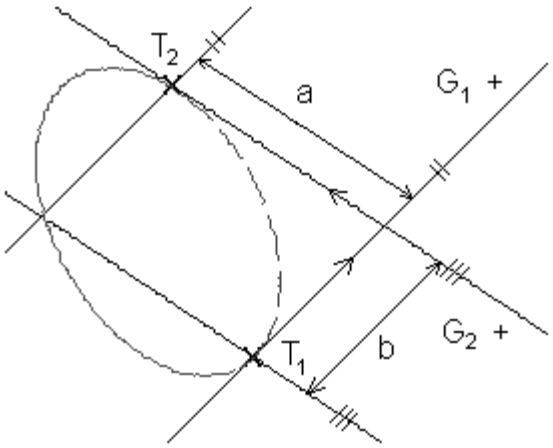
Samozrejme stmeľovanie je len tá časť plochy $F(x) = f(G_1, G_2)$, ktorá sa zhoduje s časťou kružnice $f(s, t) = 0$, kde platí, že $b*s + a*t - a*b < 0$, viď obr.16 čiarkovanú časť.



Obr. 16. Stmeľovanie dvoch priamok G_1 a G_2, keď $-a*b < e < a*b$

Hore uvedená ***afinná*** metóda (affine potencial method) nie je celkom bežná, lebo sú tam niektoré kvadratické stmeľované plochy medzi dvoma kvadrikami , ktoré nemôžeme odvodiť afinnou metódou.

Túto metódu som prerobila pre špeciálny prípad, aby mala lepšiu použiteľnosť. Parametre *a* a *b* môžeme zvoliť tak, že tým presne určíme rozsah stmeľovania. Je to urobené tak, že môžeme zvoliť body T_1 a T_2. V týchto bodoch bude potom stmeľovacia funkcia dotýkať priamky G_1 a G_2. Potom parametre *a*, resp. *b* dostaneme tak, že posunieme rovnobežne G_2 do bodu T_1 resp. G_1 do bodu T_2, potom *a*, resp. *b* dostaneme ako vzdialenosť týchto priamok, viď obr.17.



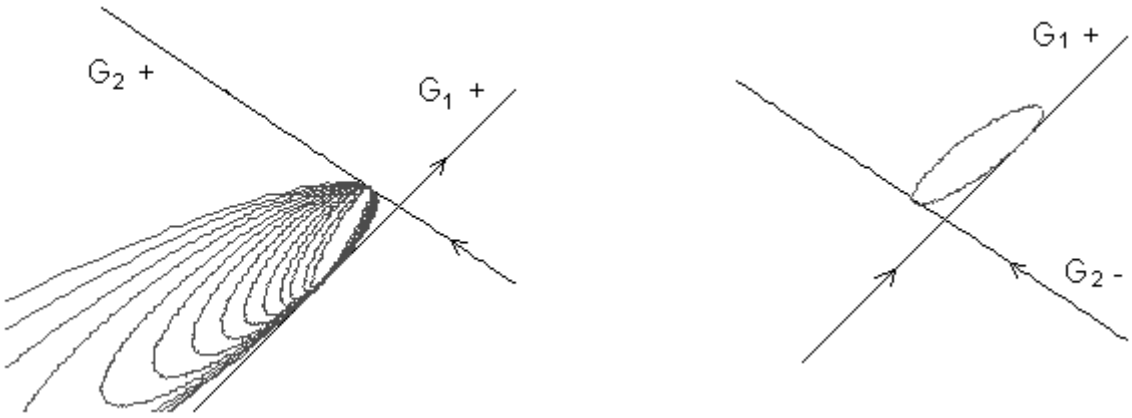
Obr.17. Stmeľovanie dvoch priamok

Aby sme potom dostali elipsu, môžeme zvoliť parameter *e* v rozmedzí $-a*b < e < a*b$. Táto elipsa prechádza cez body T_1 a T_2 a vytvorí GC^1 spojité stmeľovanie.

Ak *a, b* zvolíme ľubovolne, tak platia nasledovné poznámky :

1. $|a| < |b|$

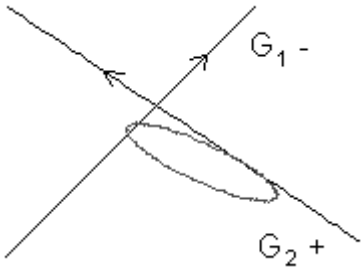
Smer priamky určí poradie bodov, ktorými sme zadali priamky. Potom ozn. „ +“ tú polrovinu, ktorú ak stojíme v smere priamky je od nás vľavo (viď obr. 18a, kde G_1 ja zadaná pomocou bodov (0, 0) a (50, 50) a G_2 ja zadaná pomocou (0, 0) a (-60, 40)). Ak parametre *a* a *b* sú väčšie ako nula, tak výsledná stmeľujúca funkcia (elipsa) je ako na obr. 18a. Podľa znamienka parametrov *a, b* dostaneme elipsu do iných polrovín, napr. ak $a > 0$ a $b < 0$ tak výsledok je ako na obr. 18b. Znamienko parametra *a* vplýva na polohu v polrovine určením G_1 resp. parameter *b* na polohu určenou G_2. Potom pri zmene znamienka *b* na mínus dostaneme elipsu do polroviny označenej „ - “, ako na obr.18b.



Obr. 18a,b. Stmeľovanie vľavo, ak $a = 1500$, $b = 5000$ pri zmene *e;* vpravo, ak $a = 1500$, $b = -5000$

2. $|a| > |b|$

V tomto prípade sa vymenia osi elipsy, viď obr.19.



Obr.19. Stmeľovanie dvoch priamok, ak $a = -5000$, $b = 1500$

3. zväčšíme parameter *e*

Takto dostaneme čoraz menšiu elipsu, ale body dotyku sa nemenia, viď obr.18a.

Ak G_1 a G_2 sú priamky, označme ich l_1 a l_2 ,a sú rovnobežné, tak stmeľujúca funkcia je tiež priamka a rovnobežná s l_i a leží medzi nimi. Pre túto polohu použijeme inú metódu, ktorou môžeme dosiahnuť aj vyšší stupeň spojitosti. Táto metóda sa dá odvodiť pomocou vety od Warrena (viď [16]).

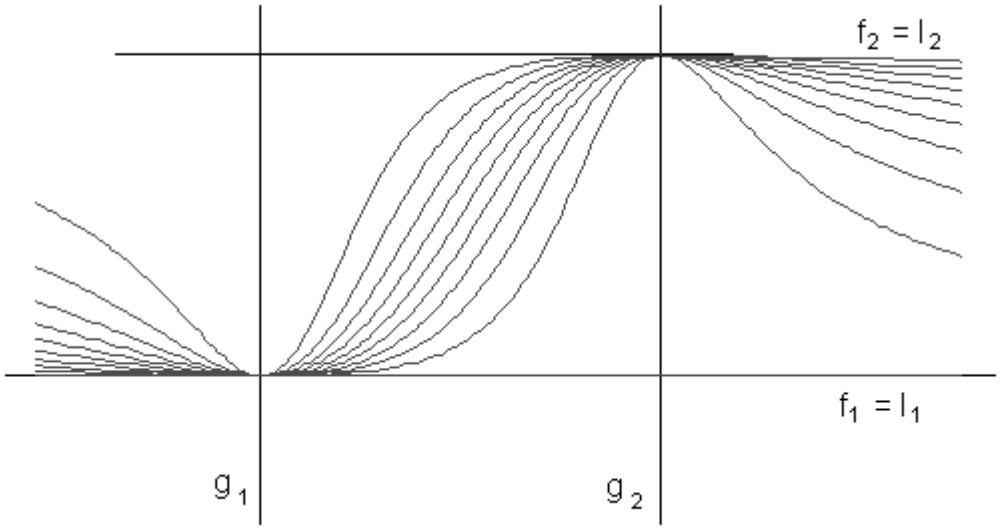
Veta 3. 3. 2 :

Majme $\phi_1 : f_1 = 0$, $\phi_2 : f_2 = 0$, $\psi_1 : g_1 = 0$, $\psi_2 : g_2 = 0$ štyri implicitné plochy s prienikmi $\Gamma_i : f_i = 0, g_i = 0$ pre i = 1, 2. Implicitná plocha

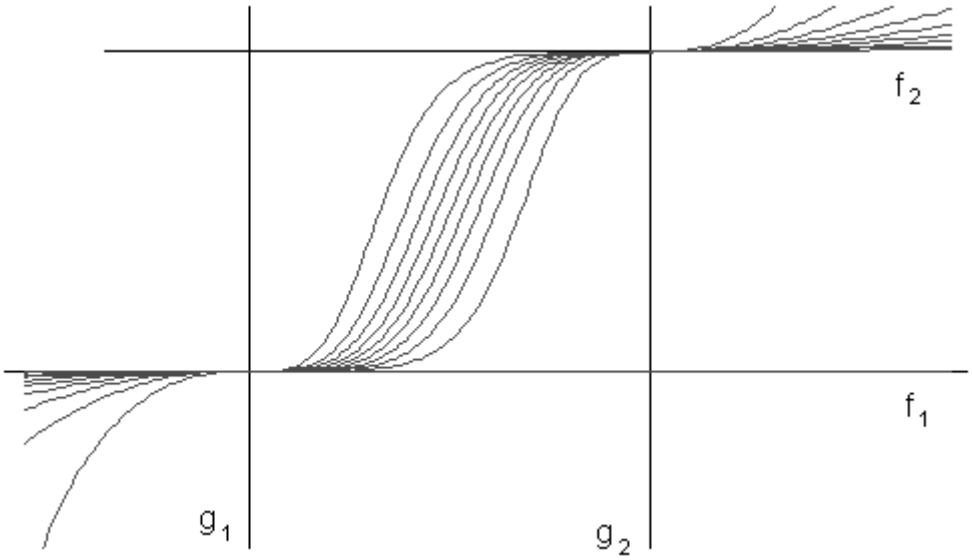
$$F(x) = (1 - \lambda) * f_1 * g_2^{n+1} - \lambda * f_2 * g_1^{n+1} = 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad n \geq 1$$

je G^n spojitá k ϕ_i pozdĺž krivky Γ_i, i = 1, 2.

Pri aplikovaní tejto vety v R^2 Γ_i sú samozrejme body, f_i a g_i sú priamky, t.j. ak f_i sú rovnobežné, tak G^1 spojitosť dostaneme, ak n = 1 a g_i zvolíme tak, aby v bode T_i bola kolmá na f_i (viď obr.20a). G^2 spojitosť rovnobežných kriviek f_i môžeme vidieť na obr.20b.

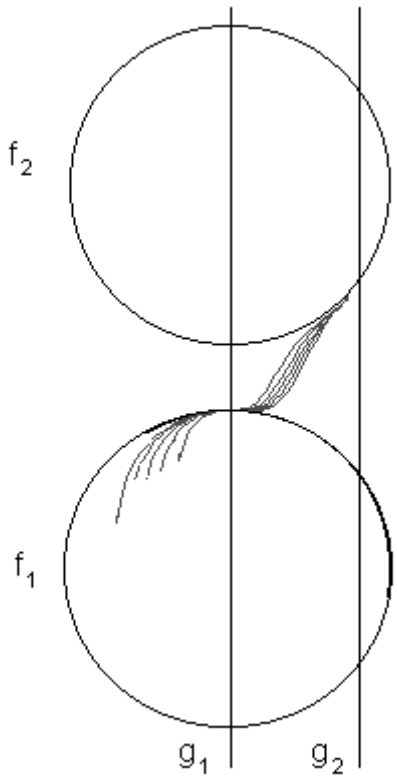


Obr.20a. G^1 spojitosť priamok pri zmene λ



Obr.20b.G^2 spojitosť kriviek pri zmene λ

Na obr.21 máme prípad, keď f_i sú kružnice nad sebou a g_i sú priamky.



Obr. 21. G^2 spojitosť kružnicových oblúkov

Projektívna (projective potencial method) metóda využíva potenciálové plochy dané nasledovne : $H_1 = G_1 - s*W = 0$ a $H_2 = G_2 - t*W = 0$, kde W je nejaký polynóm, ktorý nie je identita. Potom stmeľovanú plochu môžeme dostať substitúciou $s = G_1 / W$ a $t = G_2 / W$ v $f(s, t) = 0$. V prípade, že $f(s, t)$ je zvolená ako kvadratická a G_1 a G_2 sú kvadriky , je za predpokladov :

- krivky prieniku $G_1 \cap G_2$, $T_1 = H_2 \cap G_1$ a $T_2 = H_1 \cap G_2$ nie sú zjednotením algebraických kriviek nižšieho stupňa
- F nie je zjednotenie algebrických plôch nižšieho stupňa
- kvadratické výrazy v G_1 a G_2 nemajú spoločný faktor

platná veta :

Veta 3.3.2 :

Projektívnou metódou dostaneme všetky možné stmeľované plochy stupňa štyri, ktoré spoja dve kvadriky G_1 a G_2 pozdĺž kvadratických okrajových kriviek T_1 a T_2 s GC^1 spojitosťou.

Dôkaz :

Dôkaz urobil Hoffmann, viď [17].

Výsledok 3.3.3 :

Sú dané dve kvadriky G_1 a G_2, sú GC^1 spojité stmeľované plochy stupňa štyri $\Leftrightarrow$ ak okrajové krivky T_1 a T_2 ležia na spoločnej kvadrike Q.

Ak použijeme potenciálovú metódu dostaneme :

$$Q = b*G_1 + a*G_2 - a*b \qquad (3.3.5)$$

ktorá vedie k jednoparametrickej sústave stmeľovaných plôch

$$F = \Psi*G_1*G_2 + Q^2 \quad s \quad \Psi = 2*e - 2 \qquad (3.3.6)$$

kde e je ako vyššie. Rovnica (3.3.4) je oveľa ľahšia na manipuláciu, než automatizáciu (3.3.6).

Stmeľovanie zhodujúce s (3.3.1) pre $\mu = 2$ je podmnožina tých, ktoré sú definované vzorcom (3.3.4) a $e = 0$. Vzorec (3.3.1) vedie k stmeľovaniu vyšších stupňov ako to dostaneme s potenciálovou metódou.

Z vety (3. 3 .2) dostaneme aj podobný vzorec pre afinnú metódu. Pre $H_1 = G_1 / a$ a $H_2 = G_2 / b$ a $r = 1$ rovnica (3.3.2) môžeme prepísať na (3.3.4), substitúciou : $e = a*b*(1 - \lambda) / (2*\lambda)$. Rozsah stmeľovania je kontrolovaný pomocou potenciálových hodnôt a a b . Vo viacerých prípadoch tam nie je jednoduché spojenie s Euklidovskou vzdialenosťou.

3.4 Krivosťou - ohraničené stmeľovanie

Curvature - bounding blends

Najznámejšia metóda tejto skupiny stmeľovania je ***stmeľovanie valiacou sférou*** (rolling - ball blend). Táto metóda nám umožní zvoliť tvar priečneho rezu. Stmeľovanie valiacou sférou má kruhový priečny rez, čo nám umožní počítanie faktora napätia. Obmedzenie formy vedie k určitému obmedzeniu vo formovaní geometrického objektu.

Stmeľovanie valiacou sférou je realizované valením sféry pozdĺž (možnej, fiktívnej) pretínajúcej krivky dvoch plôch tak, že sa dotýka obidvoch. Matematicky to znamená : stmeľovanie je časť kanálovej plochy, ktorá spojí dve plochy G_1 a G_2 pozdĺž okrajových priamok T_1 a T_2 s GC^1 spojitosťou. ***Kanálová plocha*** (canal) je definovaná, ako obálka E sféry s nekonštantným polomerom *r,* ktorej stred sa pohybuje pozdĺž (priestorovej) krivky S. Túto krivku nazývame ***krivkou rotácie*** (spin curve) alebo ***direktrix*** kanálovej plochy. Ak *r* je konštantné, tak direktrix je pretínajúca krivka dvoch posunutých plôch O_1 a O_2, ktoré sú paralelné s G_1 a G_2 so vzdialenosťou *r*. Direktrix možno písať vo forme $S (x) = 0$ pre všetky $x = x_s \in R^3$, pre ktoré

$$O_1 (x_s) = 0 \qquad (3.4.1a)$$

$$O_2 (x_s) = 0. \qquad (3.4.1b)$$

Obálka $E (x) = 0$ valiacej sféry, ktorá definuje ***rúrovú plochu*** (tubular), dostaneme systémom rovníc (3.4.1a) - (3.4.1b) a podľa [18] ešte ďalších dvoch

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 - r^2 = 0, \qquad (3.4.1c)$$

$$(x - x_s) * \mathbf{T} (x_s) = 0. \qquad (3.4.1d)$$

Smerový vektor **T** dotyčnice T je definovaný pomocou normál N_1 a N_2 patriacich ku G_1 a G_2. Z týchto rovníc vidíme, že body obálky x sa zhodujú s bodmi sféry s polomerom *r*, ktoré ležia v rovine kolmej na dotyčnicu T direktrise S v bodoch x_s , t.j. máme ***kruhové*** (circular) stmeľovanie, čo vidíme aj z geometrickej interpretácie ***sférického stmeľovania*** (spherical) definované predtým.

V niektorých jednoduchých prípadoch (ako pre roviny, gule alebo cyklidy) možno zadať explicitnú rovnicu pre posunutú plochu. Vo všeobecnosti, však posunutú plochu O_f zhodujúci sa s jednou implicitnou plochou F zapíšeme pomocou štyroch rovníc, viď [18] :

$$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z - z_F)^2 - r^2 = 0 \qquad (3.4.2a)$$

$$F (x_F) = 0 \qquad (3.4.2b)$$

$$(x - x_F)*F_y (x_F) - (y - y_F)*F_x (x_F) = 0 \qquad (3.4.2c)$$

$$(y - y_F)*F_z (x_F) - (z - z_F)*F_y (x_F) = 0. \qquad (3.4.2d)$$

Rovnice (3.4.2c) - (3.4.2d) vyjadrujú ortogonalitu smerového vektora $x - x_F$ k dvom dotyčnicovým vektorom plochy (F_y, $- F_x$, 0) a (0, F_z, $- F_y$), kde $x_F \in F$ je päta kolmice k posunutej ploche $O_f (x) = 0$ cez posunutý bod x.

Systémy rovníc (3.4.1) a (3.4.2) je dosť ťažké riešiť (časovo náročné) a preto sa niekedy na to používajú tzv. Gröbnerové bázy. Napríklad u konštantného polomerového (CR) stmeľovania je veľmi vysoký polynomický stupeň rúrovej plochy.

Rossignac a Requicha [19] skonštruovali aproximáciu už definovaných priečnych rezov stmeľovania (t.j. kruhový oblúk) , ktoré sú potom spojené s valcovitými, tórusovými a sférickými časťami. Direktrix aproximujme kruhovým oblúkom a priamymi čiarkovými segmentami. Hlavným problémom tejto metódy je implementovanie, a vo všeobecnosti nie je možné dosiahnuť GC^1 spojitosť medzi rovinnými záplatami a pôvodnou plochou. Základom ďalšej metódy je tá istá myšlienka ako predchádzajúca. Táto metóda sa nazýva ***prírodzená kvadrika*** (natural quadrics) (rovina, sféra, valec a kužeľ) a anuloid.

Aproximačná metóda Rockwooda a Owena (viď [13]) sa zakladá na lokálnej aproximácii uhla Θ (je to uhol $\psi = \Pi - \Theta$ prieniku medzi dvoma plochami), čo dostaneme skalárnym súčinom normálových vektorov N_1 a N_2 plôch G_1 a G_2. Potom z obr.22 vidíme :

$G_1 = r - (r - F)*\cos ((\Theta/2) - \alpha)$, $\qquad G_2 = r - (r - F)*\cos ((\Theta/2) + \alpha)$,

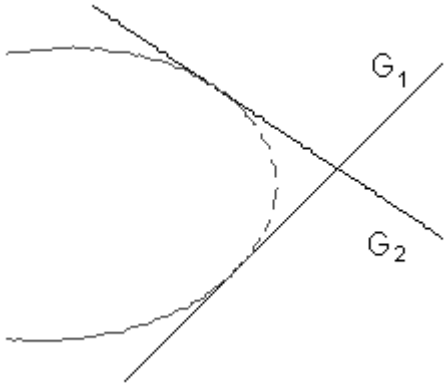
potom

$$F = r - (1 / \sin \Theta)*[(r - G_1)^2 + (r - G_2)^2 - 2*(r - G_1)*(r - G_2)*\cos \Theta]^{1/2} = 0. \qquad (3.4.3)$$

Stmeľovaná plocha je :

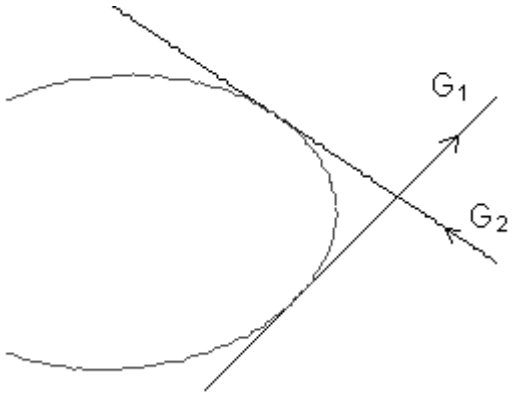
$$G_1^2 + G_2^2 + 2*\cos \Theta*G_1*G_2 + 2*r*(\cos \Theta - 1)*(G_1 + G_2) + r^2*(2 - 2*\cos \Theta - \sin^2 \Theta) = 0$$

Pre $\Psi = \Theta = 90°$ sa to redukuje na supereliptické stmeľovanie (3.3.1), kde $r_1 = r_2 = r$.

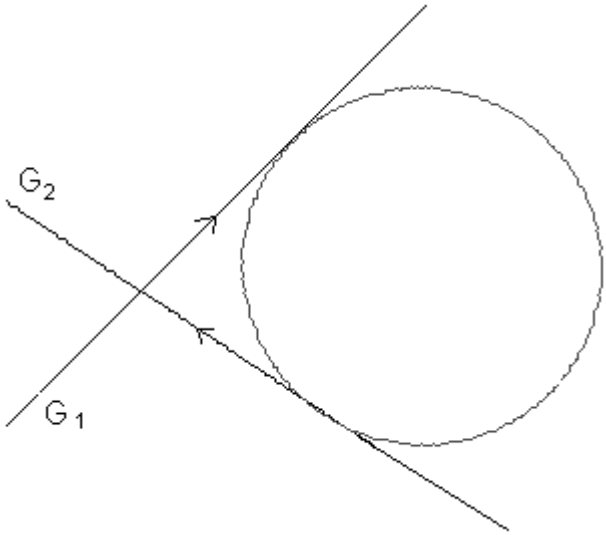


Obr. 22. Stmeľovanie pomocou aproximačnej metódy Rockwooda a Owena

V tejto metóde používame parametre r a uhol $\Theta = \Pi - \Psi$, kde Ψje uhol medzi G_1 a G_2. V programe, ktorí je súčasťou práce G_1 a G_2 sú priamky. Teda máme dve uhly pre Ψ. Podľa toho, ktorý uhol používame dostaneme inú výslednú stmeľujúcu funkciu, viď obr. 23a, keď uhol $\Psi = 79°$ a obr. 23b ak uhol $\Psi = 101°$. Umiestnenie stmeľujúcej funkcie zasa závisí od smeru priamky určenou pomocou poradí bodov určujúcich priamky G_1 a G_2. Ak $r > 0$, tak stmeľujúca funkcia leží v polrovinách označených znamienkom „ + “ (viď obr. 23a), ak $r < 0$ tak stmeľujúca funkcia leží v opačnej polrovine (viď obr. 24b).



Obr. 23a. Stmeľovanie pre $r = 8000$ a $\Psi = 79°$



Obr. 23b. Stmeľovanie pre r = - 8000 a $\Psi = 101°$

Táto metóda funguje len v prípade, ak prienik priamok G_1 a G_2 je v bode (0, 0), v ostatných prípadoch stmeľujúca funkcia je posunutá a/alebo zväčšená či zmenšená.

Ak polomer gule , čo generuje stmeľovanie valiacou sférou, je možné zmeniť, hovoríme o ***stmeľovanie valiacou sférou s nekonštantným polomerom*** ((VR) variable radius rolling - ball blend). Matematické opísanie tejto metódy je veľmi komplikované. (U stmeľovania sférou s nekonštantným polomerom musíme pracovať s časťami kanálových plôch).Problémom je zobraziť direktrix a špecifikovať vhodnú polomerovú funkciu. Kým direktrix u konštantnej polomerovej stmeľovaní je len prienik dvoch posunutých plôch, u nekonštantnej polomerovej metóde to neplatí.

Špeciálne nekonštantné polomerové stmeľovanie môžeme konštruovať, ako časti cyklíd. Ako môžeme vidieť v knihe Forsytha [20] Dupinova cyklidu (vysvetlená v kapitole 1.4) (v štandartnej pozícii a orientácii) môžeme písať ako jednu z dvoch ekvivalentných rovníc :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 = 4*(a*x - e*\mu)^2 + 4*b^2*y^2 \qquad (3.4.4a)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 = 4*(e*x - a*\mu)^2 - 4*b^2*z^2 . \qquad (3.4.4b)$$

Je to plocha štvrtého stupňa. Ak použijeme kruhovú cyklidu, plocha vypadá ako kruh neuniformovej hrúbky. Parametre *a, b* a *e* sú dané ako rozdiely vrcholov a ohnísk z elipsy a hyperboly, ktoré ležia vo vzájomne ortogonálnej ploche. Elipsa a hyperbola sú orientované ako vrcholy, z ktorých jeden je ohnisko, a druhý je voľne zvoliteľný. Pre ich určenie použijeme rovnice:

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1,\ z = 0, \qquad x^2 / e^2 - z^2 / b^2 = 1,\ y = 0, \qquad e^2 = a^2 - b^2,$$

Parameter μ udáva vzťahy medzi polomerom a umiestnením stredu gule s nekonštantným polomerom, ktorá sa pohybuje pozdĺž elipsy. Cyklidu môžeme konštruovať ako povrch gule, ktorej stred sa pohybuje pozdĺž elipsy, ktorej polomer sa mení medzi R_{min} a R_{max}. To znamená, že sme špeciálne zvolili kanálovú plochu. Polomerovú funkciu môžeme napísať aj podrobnejšie, použitím ***Maxwellovej lúčovej*** (thread) ***konštrukcie*** [21]. Lúč dĺžky $L = a + \mu$ je pripojené k jednému z dvoch ohnísk elipsy, lebo roztiahnutý lúč sa pohybuje pozdĺž elipsy. Polomer gule je potom definovaný dĺžkou časti šnúry, ktorá voľne visí. Z tohto už priamo vidíme, že pre dve vrcholy A a B elipsy definované koncami hlavnej a vedľajšej osi :

$R(A) = R_{min} = L - (a + e)$ a $R(B) = R_{max} = L\ (a - e) = \mu + e.$

Môžeme ešte poznamenať, že cyklidy sú (a len tieto) také plochy, ktoré sú štvrtého stupňa a ktorej krivky hlavnej krivostí sú kružnice.

Túto vetu odvodil Nutbourne [22].

Veta 3.4.1 :

Uhol ϕ medzi normálou plochy a normálou krivky hlavnej krivosti plochy je konštantný pozdĺž rovinnej krivky hlavnej krivosti.

Potom všetky krivky hlavnej krivosti cyklíd sú kružnicové (circular) a rovinné. Toto vedie k jednoduchej explicitnej konštrukcii GC^1 spojitého nekonštantného polomerového stmeľovania medzi cyklidou G_1 a napríklad rovinou alebo guľou G_2. Najprv zvolíme okrajovú priamku T_1 na G_1, ako krivku hlavnej krivosti, napr. kruh. Potom počítame uhol ϕ pre tento kruh. Potom pre nejakú cyklidovú stmeľovanú plochu, ktorá spojí G_1 s GC^1 spojitosťou pozdĺž T_1, musíme mať $\phi = \pi - \phi_1$ (normály kriviek pozdĺž T_1 sú rovnaké, ale normály plôch majú rôzne znamienka). Nekonštantné polomerové stmeľovanie je potom definované, ako časť cyklidy, ktorá spojí G_2 pozdĺž kružnicovej okrajovej čiary T_2 plochy G_2 , s GC^1 spojitosťou. Ak je tam nejaká symetria, potom počítanie cyklidy je relatívne jednoduché.

Príklad 3. 4. 1 :

Chceme konštruovať nekonštantné polomerové stmeľovanie medzi valcom G_1 s polomerom R_1 a rovinou G_2, ktorá je naklonená s uhlom α k osi rotácie valca. Okrajová krivka T_1 je kruh, ktorý leží v horizontálnej rovine vo vzdialenosti h od bodu prieniku osi valca s rovinou G_2. Okrajová krivka T_2 je kruh ležiaci v rovine G_2 s polomerom R_2. Potom môžeme písať :

$$R_{min} = (h - R_1 * \cot g\ \alpha) * tang\ (\alpha/2),$$

$$R_{max} = (h + R_1 * \cot g\, \alpha) * \cot g\, (\alpha/2),$$

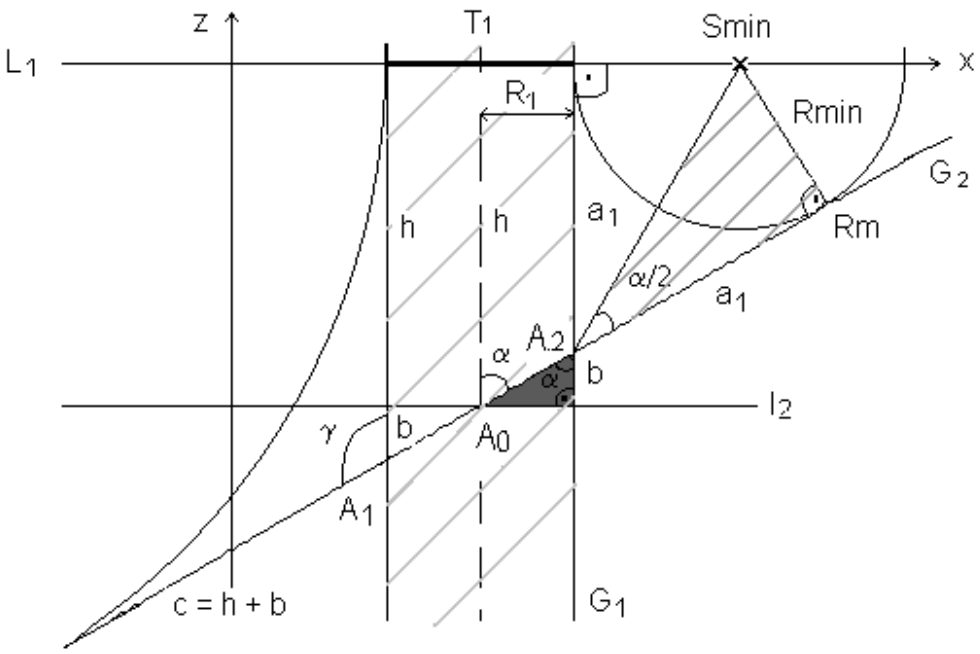
$$R_2 = h + R_1 * \operatorname{cosec} \alpha,$$

kde $\operatorname{cosec} \alpha = 1 / \sin \alpha$. Pozri obr. 24.

Ak (x, y) - ová rovina je horizontálne symetrická rovina cyklidy, potom

$$a - \mu = R_1, \qquad \mu + e = R_{max}, \qquad \mu - e = R_{min},$$

z čoho môžeme vypočítať cyklický parametre *a, e* a μ.



Obr. 24. Stmeľovanie valca G_1 a roviny G_2 pomocou valiacej sféry

Ako dostaneme v tomto prípade R_{min}, R_{max} a R_1 ? Podľa obr. 24 ako R_1 označíme polomer valca G_1, ktorý je vlastne polomerom okrajovej krivky T_1. Označme L_1 rovinu, v ktorej leží okrajová krivka T_1, nech je to rovina (x, y). V tejto rovine bude ležať aj direktrix, t. j. stred valiacej sféry. Tento stred pri najmenšom polomere R_{min} sféry označme S_{min}, pri najväčšom polomere R_{max} ako S_{max}. Direktrix je tu elipsa, jej hlavná os je *a,* ohnisko B_0 a vedľajšiu os *b* v rovine (x, y) vypočítame zo vzťahu $b^2 = a^2 - e^2$, kde *e* je vzdialenosť B_0 od (0, 0, 0).

Poznáme aj *h*, t.j. vzdialenosť od bodu prieniku osi valca od roviny G_2. Označme prienik valca s rovinou v rovine (x, z) A_0, A_1 a A_2 ako na obr.24. Cez bod A_0 veďme priamku, ktorá je

rovnobežná v rovine (x, z) s L_1, označme ju l_2. Chceme dostať GC^1 spojitosť, z čoho vyplýva, že R_{min} musí byť kolmé na G_2 v bode R_m, a na L_1. Označme a_1 a b úsečky ako na obr. 24 pri predpoklade, že $h = a_1 + b$, na druhej strane označme $c = h + b$. Potom úsečka A_2R_m je tiež a_1. Ak spojíme body A_2S_{min}, tak dostaneme pravouhlý trojuholník $A_2R_mS_{min}$.(na obr. oranžovo zašrafovaný). Uhol pri A_2 je $\alpha/2$, lebo S_{min} leží na osi uhla $\angle a_1A_2a_1$, lebo je to od G_2 v rovnakej vzdialenosti ako od G_1, t. j. R_{min}. Na výpočet potrebujeme ešte určiť b. Z prieniku G_1, G_2 a l_2 dostaneme dva pravouhlé trojuholníky, ktorých strany sú : R_1, b a tretiu označme d.(na obraze je to červený trojuholník). Uhol pri A_2 je α. Potom :

$b = \text{cotg } \alpha * R_1$, z trojuholníku $A_2R_mS_{min}$

$R_{min} = \text{tg } \alpha/2 * a$,

$a = h - b$, z čoho vyplýva, že

$R_{min} = (h - \text{cotg } \alpha * R_1) * \text{tg } \alpha/2$.

Takto postupujeme aj pri určení R_{max}. Tu pri A_1 je uhol $\gamma/2 = (180° - \alpha) / 2$. Potom :

$R_{max} = \text{tg } \gamma/2 * c$, kde platí vzťah, že

$\text{tg } \gamma/2 = \text{cotg } \alpha/2$. Vieme, že $c = h + b$, $b = \text{cotg } \alpha * R_1$, $\gamma = 180° - \alpha$. Potom platí, že

$R_{max} = (h + \text{cotg } \alpha * R_1) * \text{cotg } \alpha/2$.

Okrajová krivka T_2 leží v rovine G_2 a je to kružnica s polomerom R_2. Z obrázku nám vyplýva, že $2*R_2 = a + c + 2*d$, kde $d = R_1 / \sin \alpha$ z trojuholníku, ktorého strany sú R_1, b a d. Potom platí, že $2*R_2 = h - b + h + b + (2*R_1) / \sin \alpha \Rightarrow R_2 = h + R_1 / \sin \alpha$.

Okrem toho potrebujeme ešte vhodné zovšeobecnenie direktrix konštantného polomerového stmeľovania. Body na direktrix sú v rovnakej vzdialenosti od obidvoch plôch, lebo polomerová funkcia S nie je dlhšia ako prienik dvoch rovnobežných plôch s konštantnou vzdialenosťou r.

Pegnasov prístup [23] je na základe interaktívne zadanej počiatočnej direktrix S^0. Potom jedna iterácia umožní urobiť sled direktrix S^i, ktoré majú veľa bodov, ktoré uspokoja vlastnosť rovnakej vzdialenosti. Tu jedna z daných plôch slúži ako referenčná (reference) plocha . Ortogonálna projekcia S až na G_1 a až na G_2 vedie k okrajovým priamkam T_1 a T_2. Rossignac [23] uskutoční projekciu minimalizovaním $|| S - G_i ||$ použitím Newton - Raphsonovho algoritmu.

Chandru [24] nám uviedol jednu explicitnú konštrukciu pre direktrix pre nekonštatné polomerové stmeľovanie pomocou Voronoivých plôch, tiež nazývané aj ako ***kostrový*** (skeletal)

alebo ***stredná os*** (medial axis) plochy. Voronoivé plochy V_{12} spojené s dvoma danými plochami G_1 a G_2 sú definované nasledovne :

$$V_{12} = \{ x \in R^3 : d^{\perp} (x,G_1) = d^{\perp} (x,G_2) \}$$

všetkými bodmi, ktoré sú v rovnakej vzdialenosti od obidvoch plôch G_1 a G_2, kde $d^{\perp} (x,G_i)$ je (najkratšia, napr. kolmá) Euklidovská vzdialenosť od x k ploche G_i. Táto konštrukcia je prirodzeným zovšeobecnením Voronoiových diagramov. Voronoiova plocha V_{12} spojená s dvoma plochami G_1 a G_2 je definovaná pomocou nasledujúcich ôsmych rovníc a neznámymi x, x_1, x_2 a r, kde x_i je bod na ploche G_i zhodujúci sa s $x \in V_{12}$:

$$G_1 (x_1) = 0 \qquad (3.4.5a)$$

$$G_2 (x_2) = 0 \qquad (3.4.5b)$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - r^2 = 0 \qquad (3.4.5c)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 - r^2 = 0 \qquad (3.4.5d)$$

$$\nabla K_1 * \mathbf{t}_1 = 0 \qquad (3.4.5e)$$

$$\nabla K_1 * \mathbf{T}_1 = 0 \qquad (3.4.5f)$$

$$\nabla K_2 * \mathbf{t}_2 = 0 \qquad (3.4.5g)$$

$$\nabla K_2 * \mathbf{T}_2 = 0. \qquad (3.4.5h)$$

Tu ∇K_i udáva gradient gule K_i definovanej v (3.4.5c) a (3.4.5d), a $\mathbf{t}_i$ a $\mathbf{T}_i$ sú dva lineárne nezávislé dotyčnicové vektory k ploche G_i pre i = 1,2. Zbavením x_1, x_2 a r z (3.4.5) dostaneme rovnicu pre Voronoiovu plochu $V_{12} (x) = 0$ v implicitnom tvare.

Hneď z definície Voronoiovej plochy vyplýva, že všetky krivky ležiace na V_{12} môžu slúžiť ako direktrix pre nekonštantné polomerové stmeľovanie plôch G_1 a G_2. Direktrix môžeme počítať ako prienik $S := V_{12} \cap R$ pomocou zvolenej referenčnej plochy R. Potom T_1 a T_2 dostaneme pomocou ortogonálnej projekcie až na G_1 a G_2.

Môžeme poznamenať, že explicitná metóda počítania rovníc pre Voronoiové a kanálové plochy môžeme použiť len v niektorých (ale dôležitých) prípadoch, ako keď sú G_1 a G_2 roviny, valce, gule a kužele. To požaduje aproximačná konštrukcia. Ak pozrieme predchádzajúcu poznámku o cyklidách, potom vidíme, že môžeme konštruovať aproximáciu z častí cyklíd. Na základe tohto Chandru [24] našiel aproximáciu pre konštantné polomerové stmeľovanie. Zapísal to v troch krokoch :

- použijeme predchádzajúcu metódu pre počítanie direktrix pre nekonštantné polomerové stmeľovanie
- aproximujme direktrix s GC^1 spojitou krivkou, ktorá sa skladá z eliptických oblúkov, použitím metódy trsu kužeľosečiek
- pre všetky eliptické oblúky konštruujme rovnaký cyklidový segment, z čoho direktrix je eliptický oblúk, a potom tieto segmenty hladko spojíme.

3.5 Valiace elipsoidové stmeľovanie

V afinnej metóde použitú na príklad (3. 4. 1) sme nemohli presne určiť rozsah stmeľovania, len pomocou parametra *h*, t.j. vzdialenosti osa valca G_1 od roviny G_2.

Pomocou ďalších dvoch bodov , označme ich T_{12} a T_{22}, to môžeme určiť presnejšie, pričom môžeme zachovať predchádzajúcu konštrukciu (na základe cyklíd), ktorá nám pomôže pri určovaní direktrix, pričom môžeme zachovať aj GC^1 spojitosť.

Majme situáciu ako v príklade (3. 4. 1) pri predpoklade, že $\alpha = 90°$. Majme valec G_1 a rovinu G_2, ktoré sú na sebe kolmé. Zvoľme *h* t.j. vzdialenosť bodov T_{11} a T_{21} od roviny G_2. Potom zvoľme v rovine (x, z) na G_2 body T_{22} a T_{12}. Keďže sme T_{12} a T_{22} zvolili ľubovolne, nedostaneme valiace sféry, ale elipsoidy, ktoré s rovinou (x, y) majú kruhový prienik. Ak sme ich zvolili tak ako na obr.25, a označili sme vzdialenosť A_2T_{12} ako a_1, resp A_1T_{22} ako a_2, tak elipsoidy majú rovnice tvaru :

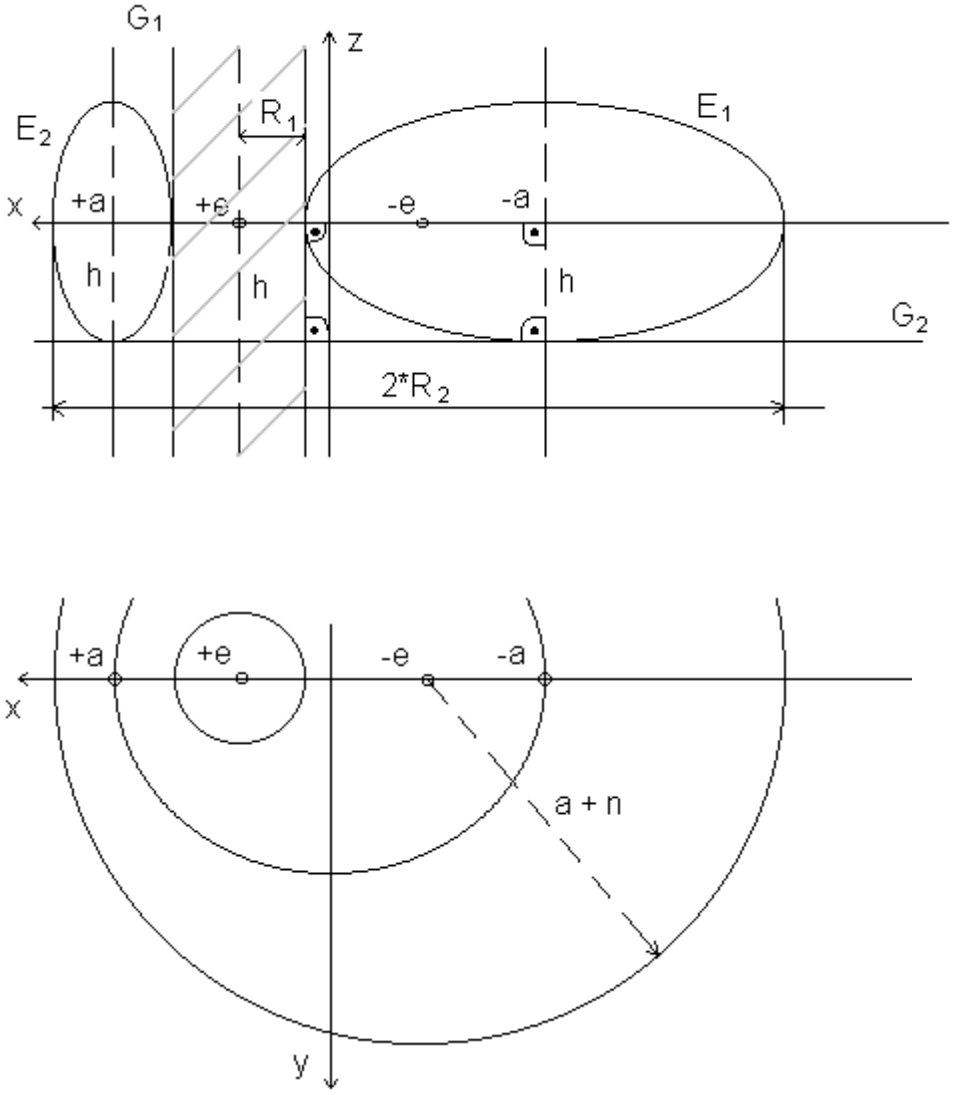
$$E_1 : \frac{(x - xs)^2 + y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1 \qquad E_2 : \frac{(x - xs)^2 + y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

kde $a_1 > h \Rightarrow$ je to tzv. ***sploštený elipsoid*** a pri E_2 $a_2 < h$ ***pretiahnutý elipsoid***.

Potom direktrix je elipsa, čo podľa obr. 25 má hlavnú os *a*, ohnisko v B_0, *e* je vzdialenosť od bodu (0, 0, 0) k ohnisku. Z tohto už vieme vypočítať vedľajšiu os elipsy *b*. Takto dostaneme ***valiaci elipsoid***, ktorého stred sa pohybuje pozdĺž elipsy a osi sa menia od a_1 k a_2 a tretia os *h* sa nemení.

Ak $\alpha \neq 90°$ tak direktix neleží v rovine (x, y), alebo tretia os *h* by nebola konštantná. Os musí byť konštantná, lebo pri nekonštantnej osi by sme museli vždy počítať tretiu os. Druhá možnosť je , že by sme nedostali GC^1 spojitosť. Pri tejto konštrukcií sme si dali za predpoklad, že

T_{11} a S_1 sú z jednej roviny (konkrétne z roviny (x, y)), z čoho nám vyplýva , že úsečka $T_{11}S_1$ je buď hlavná , alebo vedľajšia os elipsy v rovine (x, z). Aby tam bolo GC^1 spojitosť medzi valcom a rovinou, tak a_1 musí byť kolmá na $T_{11}A_2$ (lebo ide o os elipsoidy), ale a_1 musí byť kolmá aj na S_1T_{12}, lebo osi elipsy sú na sebe kolmé. Úsečka S_1T_{12} musí byť tiež kolmá na A_2T_{12}, aby tam bolo GC^1. Keď uhly spočítame, tak dostaneme, že uhol α už môže byť len 90°.



Obr.25. Stmeľovanie pomocou elipsoidov

5. Implementácia výsledkov

Pre znázornenie a overenie jednotlivých metód bol vytvorený jednoduchý program. V ňom boli vytvorené obrázky, ktoré môžeme nájsť v diplomovej práce. Program je vytvorený v prostredí Microsoft Visual C++ pod MS Windows 98, ktoré umožňuje využitie výhod objektovo orientovaného programovania a dopredu vytvoreného vhodného užívateľského prostredia programu. Slúži pre stmeľovanie 2D objektov. Skladá sa zo štyroch častí, ktoré sú ďalej rozdelené podľa stmeľovaných funkcií. Tieto časti sú podrobnejšie popísané v nasledujúcich kapitolách.

Ako doplnok je urobená 3D animácia metódy valiacej elipsoidy, ktorá je odvodená v kapitole 3.5. Túto metódu som odvodila od stmeľovania valiacou sférou. Táto animácia bola vytvorená v prostredí Microsoft Visual C++ pod MS Windows 98 pomocou grafickej knižnice OpenGL. Je to program na stmeľovanie valca (v programe má modrú farbu) a roviny (tmavo - ružová). Animácia zobrazuje valiacu elipsoidu, ktorej veľkosť sa zmení podľa polohy. Ako výsledok sú potom zobrazené len tie časti elipsoidov, ktoré tvoria stmeľovanie (označená červenou farbou). V diplomovej práci výsledok tohto programu môžeme vidieť na začiatku, ozn. textom : „ Stmeľovanie (ozn. červenou farbou) medzi valcom (modrý) a rovinou (tmavoružová) použitím metódy valiacej elipsoidy“.

5.1 Implementácia metódy trsu kužeľosečky

Pomocou tejto časti programu môžeme vidieť výsledky, ktoré sme dostali, ak sme použili metódu trsu kužeľosečiek, ktorá je objemovo - ohraničené stmeľovacou metódou. Program nám umožní voľbu medzi viacerými funkciami, ktoré chceme stmeľovať, presnejšie:

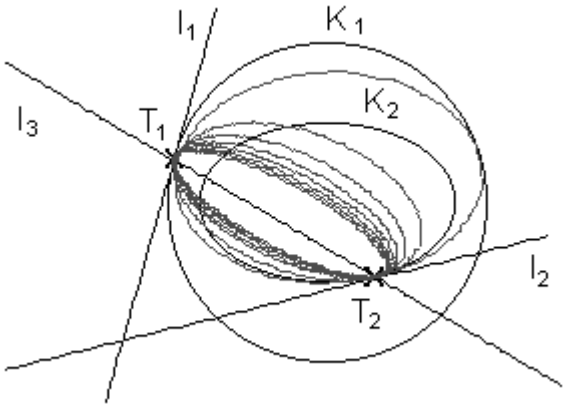
- kruh - elipsa,
- elipsa - elipsa,
- kruh - priamka,
- priamka - priamka.

Pri zadaní kruhu môžeme určiť jeho polomer, pri elipse hlavnú a vedľajšiu os, priamku zadáme pomocou dvoch bodov. Program je robený tak, že výsledná stmeľovaná funkcia je GC^1 spojitá a je časťou elipsy. Prípady, v ktorých by sme dostali inú kužeľosečku, sú vysvetlené v kapitole 3. 2. Je

tam aj riešenie pre takéto prípady. Môžeme zadať funkcie, ktoré majú prienik, ale aj také, ktoré nemajú (viď obr. 4, resp. obr. 26.).

Program nám umožní voľbu okrajových bodov T_1 a T_2, pre parameter $\mu = 2$. Na dosiahnutie GC^1 spojitosti sme museli oporné priamky (vysvetlené v kapitole 3.1., označené ako l_1 a l_2 vo vzorci (3. 2. 2)) zvoliť, ako dotyčnice v okrajových bodoch T_1 a T_2. Pre jednotlivé prípady to znamená : pri voľbe kruh - elipsa l_1 je dotyčnica ku kruhu v bode T_1 a l_2 je dotyčnica k elipse v bode T_2, pri voľbe priamka - priamka l_1 a l_2 sú už priamo zadané priamky. Program vykreslí tieto priamky, potom l_3 je priamka, ktorá prechádza cez body T_1 a T_2. Výsledná stmeľovaná funkcia je vyznačená aj farebne, a to červenou farbou. Program je urobený tak, že jedným aplikovaním nám znázorňuje stmeľovanú funkciu, pre viac hodnôt λ, aby sme mohli sledovať zmenu λ. Už sú vopred zadané najlepšie intervaly pre λ. Pre jednotlivé prípady sú to :

- kruh - elipsa $\lambda \in \langle 0; 0.001 \rangle$,
- elipsa - elipsa $\lambda \in \langle 0; 0.000\ 001 \rangle$,
- kruh - priamka $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$,
- priamka - priamka $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$.



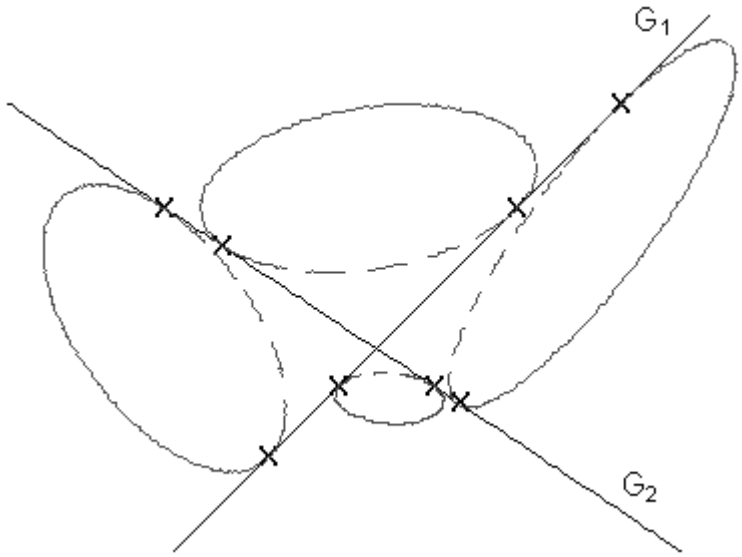
Obr.26. Stmeľovanie elipsy a kružnice, ak nemajú prienik

5.2 Implementácia Hoffmannovho stmeľovania

Pomocou tejto časti programu môžeme vidieť výsledky, ktoré sme dostali použitím metódy z typu pásmovo - ohraničeného stmeľovania (opísaného v kapitole 3.3).

Základné funkcie, ktoré chceme stmeľovať (ozn. v kapitole 3.3 ako G_1 a G_2 podľa vzorca (3.3.4)), sú tu priamky, ktoré môžeme zadať pomocou dvoch bodov. Pri tejto metóde ešte potrebujeme parametre *a, b* a *e*, ktoré určia rozsah, resp. tvar stmeľovania. V programe voľba parametrom je urobené špeciálne, a to pomocou voľby dvoch bodov , označené v programe ako T_1 a T_2. Potom parametre *a, b* dostaneme ako vzdialenosť týchto bodov od bodu prieniku priamok G_1 a G_2. Pre parameter *e* je urobený cyklus, ktorý beží od - *a*b* až do *a*b*, lebo v tomto prípade dostaneme ako výslednú stmeľujúcu funkciu elipsu. Takto ako výsledok dostaneme viac stmeľovacích funkcií, ktoré sú vyznačené červenou farbou.

Výhoda tohto riešenia je, že presne môžeme určiť pás v ktorom bude stmeľovanie ležať, nie len „tipovať “ priamym zadaním parametrov *a* a *b*.



Obr. 27. Stmeľovanie pre rôzne voľby parametrov *a, b*, pomocou bodov (ozn. krížikmi)

5.3 Implementácia supereliptického stmeľovania Rockwooda a Owena

Pomocou tejto časti programu môžeme vidieť výsledky, ktoré sme dostali pri použití supereliptického stmeľovania Rockwooda a Owena, ktorá je ďalšia metóda z typu pásmovo - ohraničeného stmeľovania.

Podľa označenia použitého v kapitole 3.3 G_1 a G_2 na základe vzorca (3.3.1) sú v programe priamky, ktoré môžeme zadať pomocou dvoch bodov. Pri tejto metóde potrebujeme parametre r_1, r_2 a μ. Parametre r_1 a r_2, ktoré slúžia na určenie rozsahu stmeľovania, nám umožní program zadať v rozmedzí od 1 až k 10 000. Pre väčšie hodnoty je výsledná stmeľovaná funkcia väčšia. Takto môžeme vidieť lepšie výsledok. V programe parameter $\mu = 2$, ale v kapitole je uvedená aj situácia, keď $\mu = 1$ (viď obr. 13a). Ak G_1 a G_2 nemajú prienik, t. j. sú rovnobežné, tak stmeľovaná funkcia je dvojica priamok rovnobežné s G_1 a G_2.

5.4 Implementácia CR stmeľovania Rockwooda a Owena

Pomocou tejto časti programu môžeme vidieť výsledky, ktoré sme dostali pri použití aproximačnej metódy Rockwooda a Owena. Táto metóda je krivosťou - ohraničené stmeľovanie.

Lokálne aproximuje uhol Θ, ktorý sa rovná $\Theta = \Pi - \Psi$, kde Ψ je uhol medzi funkciami, ktoré budeme stmeľovať (ak použijeme označenia, ktoré sme použili v kapitole 3.4, tak ich označme ako G_1 a G_2). V programe G_1 a G_2 sú priamky, ktoré môžeme zadať pomocou dvoch bodov. Pri tejto metóde ešte potrebujeme parameter r (podľa vzorca (3. 4. 3)), ktorý nám určí rozsah stmeľovania. Túto hodnotu môžeme ľubovolne voliť od 1 - 10 000. Pre väčšie hodnoty r je výsledná stmeľujúca funkcia väčšia. Ak priamky sú rovnobežné, t. j. nemajú prienik a platí, že $\Theta = 180°$, tak výsledkom sú imaginárne priamky.

5. Záver

V uvedenej práci sme sa zaoberali problematikou stmeľovania. Pokúsili sme sa jednotlivé metódy z literatúry analyzovať a pomocou výsledkov odvodiť nejakú „lepšiu“ metódu, v ktorej už sú odstránené niektoré nevýhody.

Pre ľahšie porovnanie jednotlivých metód v programe sú aplikované metódy na tie isté funkcie, konkrétne na priamky. Pomocou programu potom môžeme odvodiť nasledujúce výsledky :

1. Metóda trsu kužeľosečiek nám priamo umožní voľbu hranice stmeľovania. Je to dosiahnuté pomocou okrajových bodov. Táto možnosť je veľkou výhodou pre užívateľa.

V ostatných prípadoch takéto priame zadanie nie je možné. V týchto metódach určenie hranice stmeľovania je pomocou parametrov. Hodnoty týchto parametrov pre užívateľa sú niekedy ťažké odhadnúť a potom zadať, lebo v programe sú až v rozmedzí 1 - 10 000. Preto v diplomovej práci som sa zaoberala aj s výsledkami zmien jednotlivých parametrov u rôznych metódach. Metódu Hoffmanna (ktorá je v kapitole 3.3 na strane 26) som prerobila na špeciálny prípad, kvôli ľahšej voľbe parametrov *a, b* a *e* (táto konštrukcia je vysvetlená na strane 27 pomocou obr. 17).

2. Pre všetky typy stmeľovania som zaviedla pomôcky, použitím ktorých môžeme určiť polohu a „možnosti“ stmeľovania. Sú to znamienka „+“ a „-“, ktoré sú pripojené k okrajovým krivkám. Táto konštrukcia je uvedená pri každého typu stmeľovania. Sú tam samozrejme aj riešenia pre jednotlivé situácie.

3. V metódach stmeľovania sa vždy pokúsime dosiahnuť čo najvyšší stupeň spojitosti stmeľovania. Pri metódach v tejto práci je vo všeobecnosti GC^1 stmeľovanie. Aplikovaním vety 3. 3. 2 na Hoffmannovho stmeľovania som odvodila aj vyššiu spojitosť v R^2. Výsledky sú ilustrované aj obrázkami (viď obr.20a, obr. 20b, obr. 21).

Potom pomocou týchto výsledkov som odvodila metódu stmeľovania valiacim elipsoidom. Kvôli ľahšiemu porozumeniu som metódu vysvetlila na konkrétnom príklade a to na stmeľovaní valca a roviny. Výhodou tejto metódy je, že môžeme priamo voliť okrajové body. Pre túto metódu je aj urobená animácia v OpenGL, ktorá nám zobrazuje valenie elipsoidy, ktorá vždy zmení svoju veľkosť.

Samozrejme existuje ešte mnoho problémov, ktoré treba vyriešiť, napr. dosiahnuť vyššiu spojitosť stmeľovania pri všetkých metódach, odvodiť takú metódu, ktorú by sme mohli aplikovať na hocijaké funkcie v R^2 a R^3 bez výsledných zložitých matematických a programovacích operácii aj pri vyšších spojitostiach a ktorá by bola prispôsobená aj neskúsenému užívateľovi (myslím si tým zadanie hranice stmeľovania a parametrov).

Dúfam, že ctenému čitateľovi táto práca pomohla pri orientovaní v oblasti stmeľovania. Myslím si, že diplomová práca môže byť podkladom pre ďalšie štúdium tejto problematiky.

Literatúra

[1] Gregory, J. A.: Geometric Continuity. Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design. Academic Press, Boston (1989).

[2] Hahn, J. M.: Geometric Continuous Patch Complexes. Computer Aided Geometric Design 6 (1989) 55 - 68.

[3] Budinský, B.; Charvát, J.: Matematika II. Vydavatelství ČVUT (1996).

[4] Allen, S.; Dutta, D.: Cyclides in Pure Blending I. Computer Aided Geometric Design 14 (1997) 51 - 75.

[5] Hoschek, J.; Lasser, D.: Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. A K Peters (1993).

[6] Ricci, A.: A Constructive Geometry for Computer Graphics. The Computer Journal 16 (1973) 157 - 160.

[7] Blinn, J. F.: A Generalisation of Algebraic Surface Drowning. ACM Transactions on Graphics 1 (1982) 235 - 256.

[8] Woodwark, J. R.: Blends in Geometric Modelling. in Martin, R. R. (ed.): The Mathematics of Surfaces II. Oxford University Press (1987) 255 - 297.

[9] Li, J.; Hoschek, J.; Hartmann, E.: G^1 Functional Splines for Interpolation and Approximation of Curves, Surfaces and Solids. Computer Aided Geometric Design 7 (1990) 209 - 220.

[10] Hoschek, J.; Hartmann, E.: G^{n-1} Functional Splines for Modelling. in Hagen, H.; Roller, D. (ed.) : Geometric Modelling. Methods and Applications. Springer (1991) 185 - 211.

[11] Boček, L.: Analytická geometrie kuželoseček. SPN, Praha (1976).

[12] Hartmann, E.: On the Convexity of Functional Splines. Computer Aided Geometric Design 9 (1992).

[13] Rockwood, A. P.: Introducing Sculptured Surfaces into a Geometric Modeller. in Pickett, M. S.; Boyse, J. W. (ed.): Solid Modelling by Computers. From Theory to Applications. Plenum Press (1984) 237 - 258.

[14] Rockwood, A. P.; Owen, J.: Blending Surfaces in Solid Modelling. in Farin, G. (ed.): Geometric Modelling: Algorithms and New Trends. SIAM (1987) 367 - 384.

[15] Hoffmann, H. M.; Hopcroft, J.: Automatic Surface Generation in Computer Aided Design. The Visual Computer 1 (1985) 92 - 100.

[16] Hartmann, E.: Numerical Implicitization for Intersection and G^n - continuous Blending of Surfaces. Computer Aided Geometric Design 15 (1998) 377 - 397.

[17] Hoffmann, Ch. M.; Hopcroft, J.: Quadratic Blending Surfaces. Computer - Aided Design 18 (1986) 301 - 306.

[18] Hoffmann, Ch. M.: Algebraic and Numerical Techniques for Offsets and Blends. in Dahmen, W.; Gasca, M.; Micchelli, C. A. (ed.): Computation of Curves and Surfaces. Kluwer Acadamic Publishers (1990) 499 - 528.

[19] Rossignac, J. R.; Requicha, A. A. G.: Constant - radius Blending in Solid Modelling. Computers in Mechanical Engineering, July (1984) 65 - 73.

[20] Forsyth, A. R.: Lectures on Differential Geometry of Curves and Surfaces. Cambridge University Press 1912.

[21] Maxwell, J. C.: On the Cyclide. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics IX (1968) 111 - 126.

[22] Nutbourne, A. W.; Martin, R. R.: Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design. Vol. 1: Foundations. Ellis Horwood 1988.

[23] Pegna, J.: Variable Sweep Geometric Modelling. Thesis Stanford 1987.

[24] Chandru, V.; Dutta, D.: Variable Radius Blending Using Dupin Cyclides. in Wosny, M. J.; Turner, J. U.; Preiss, K. (ed.): Geometric Modelling for Product Engineering. North - Holland (1990) 39 - 57.

MATEMATICKO - FYZIKÁLNA FAKULTA

UNIVERZITY KOMENSKÉHO

v Bratislave

D I P L O M O V Á P R Á C A

2000 **Monika Pereczová**

Matematicko - fyzikálna fakulta
Univerzity Komenského
v Bratislave

Katedra geometrie

M e t ó d y s t m e ľ o v a n i a

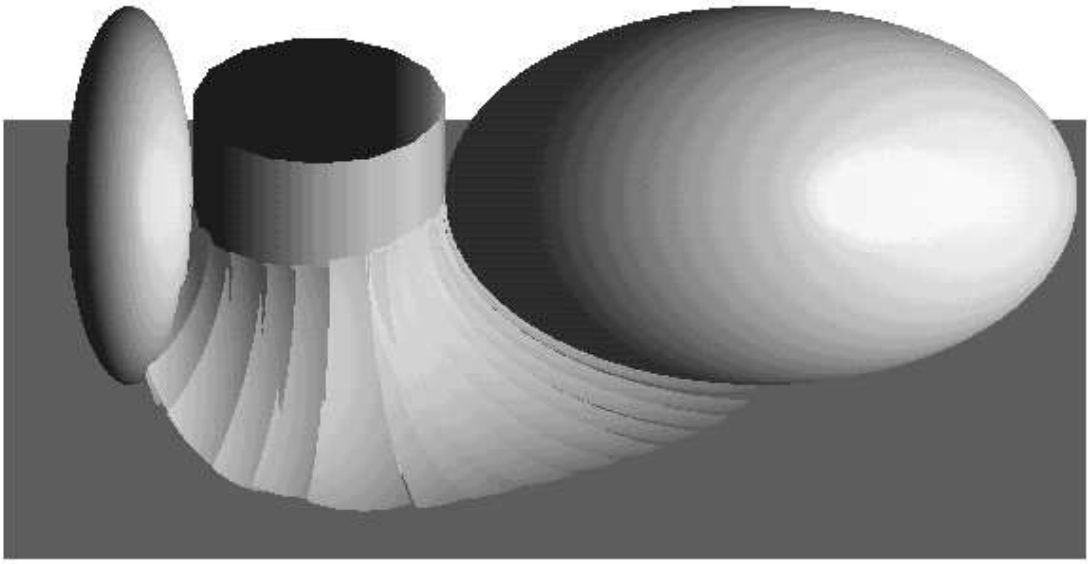
Diplomová práca

Diplomant : Monika Pereczová

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Pavel Chalmovianský

Ďakujem svojmu školiteľovi RNDr. P. Chalmovianskému za poskytnutie cenných rád a pomoci pri výbere vhodnej literatúry.

Vyhlasujem na svoju česť, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, len za pomoci uvedenej literatúry.



Stmeľovanie (ozn. červenou farbou) medzi valcom (modrý) a rovinou (tmavoružová)

použitím metódy valiacej elipsoidy