



**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO  
v Bratislave**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

**Bratislava 2001**

**Matej Rehák**

**Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského v Bratislave**

**Teória a modelovanie  
šablónovaných objektov**

**Diplomová práca**

**Autor:**  
Matej Reháč

**Konzultant:**  
RNDr. Pavel Chalmovianský

Čestne vyhlasujem, že predkladanú prácu som vypracoval samostatne len s použitím literatúry, ktorá je uvedená v zozname.

V Bratislave, dňa 30. júla 2001

.....  
Matej Reháč

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Reprezentácie a modelovanie telies v 3D</b>	<b>6</b>
2.1	Bodová reprezentácia . . . . .	6
2.2	Hranová reprezentácia . . . . .	7
2.3	Mnohouholníková (po častiach lineárna) reprezentácia . . . . .	8
2.3.1	Jednoduchá mnohouholníková reprezentácia . . . . .	9
2.3.2	Štruktúrovaná mnohouholníková reprezentácia . . . . .	9
2.4	NURBS krivky a plochy . . . . .	11
2.5	Implicitné plochy . . . . .	15
2.6	Konštruktívna geometria telies – CSG . . . . .	16
2.7	Objemová reprezentácia . . . . .	17
2.7.1	Voxely . . . . .	17
2.7.2	Oktálne stromy . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Šablónované objekty</b>	<b>19</b>
3.1	Základné pojmy a definície . . . . .	20
3.1.1	Zovšeobecnené valce . . . . .	20
3.2	Parametrický prístup . . . . .	23
3.2.1	Použitie Fourierovej transformácie . . . . .	26
3.3	Implicitný prístup . . . . .	33
3.3.1	Implicitne definované plochy (Iso-surfaces) . . . . .	33
3.3.2	Rotačné stavebné prvky . . . . .	34
3.3.3	Translačné stavebné prvky . . . . .	38
3.3.4	Skruty . . . . .	39
3.3.5	Interpolácia rezov . . . . .	40
3.3.6	Nesymetrické rezy . . . . .	41
3.3.7	Šablónované stavebné prvky . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Literatúra a internetové odkazy</b>	<b>43</b>

# 1 Úvod

Vytváranie a editovanie trojrozmerných objektov je nepochybne atraktívna oblasť počítačového dizajnu. Existuje veľa spôsobov, ktorými sa dá reálne teleso či trojrozmerná predstava človeka pretaviť do elektronickej reprezentácie v počítači. V praxi sa čoraz viac uplatňujú intuitívne metódy modelovania 3D objektov, t.j. návrhár má k dispozícii podobné elektronické nástroje, aké mávajú konštruktéri (sochári, hrnčiari, tesári, ...) fyzických diel resp. dielcov. K modelovaniu sa vďaka tomu môže dostať aj laik.

V práci uvedieme najbežnejšie metódy reprezentácie a modelovania trojrozmerných objektov, potom sa budeme venovať jednému spôsobu modelovania – šablónovaniu, pričom uvedieme a rozoberieme metódy parametrického aj implicitného prístupu.

## Cieľ práce

Cieľom tejto práce je poskytnúť čitateľovi prehľad o problematike dnešného modelovania objektov v trojrozmernom priestore, pričom sa predpokladajú určité teoretické základy v tejto oblasti. Definície niektorých pojmov budú uvedené v nasledujúcom odseku, avšak väčšina uvedených termínov bude bez takýchto definícií, bude uvedený len anglický ekvivalent a často aj stručný popis.

Hlavný dôraz je kladený na modelovanie šablónovaných objektov, za zaujímavý výsledok by som označil parametrickú definíciu 3.3 šablónovaného povrchu, ktorá sa dá bez väčších úprav použiť pri vytváraní jednoduchého 3-D modelovacieho softvéru.

## Základné pojmy a definície

### Definícia 1.1 (Definičný obor a obor hodnôt).

Nech  $f : A \rightarrow B$  je ľubovoľné zobrazenie. Potom

- množinu  $A$  budeme nazývať *definičným oborom* zobrazenia  $f$  a označovať  $D_f$  a
- množinu  $B$  budeme nazývať *oborom hodnôt* zobrazenia  $f$  a označovať  $H_f$ .

### Definície vektorového a euklidovského priestoru - podľa [Katr95]:

### Definícia 1.2 (Grupa).

*Abelovská grupa* je usporiadaná dvojica  $(G, \circ)$ , kde  $G$  je neprázdna množina a  $\circ$  je binárna operácia na  $G$ , pričom platí:

1.  $(\forall a, b, c \in G) \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$  (asociatívnosť)
2.  $(\forall a, b \in G) \quad a \circ b = b \circ a$  (komutatívnosť)
3.  $(\exists e \in G)(\forall a \in G) \quad a \circ e = a = e \circ a$  ( $e$  sa nazýva *neutrálny prvok* grupy)
4.  $(\forall a \in G)(\exists b \in G) \quad a \circ b = e = b \circ a$  ( $b =: a^{-1}$  sa nazýva *inverzný prvok* k  $a$ )

**Definícia 1.3 (Pole).**

*Pole* je usporiadaná trojica  $(F, +, \cdot)$ , kde  $(F, +)$  je abelovská grupa s neutrálnym prvkom 0 a  $(F - \{0\}, \cdot)$  je abelovská grupa, pričom platí:

$$(\forall a, b, c \in F) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

**Definícia 1.4 (Vektorový priestor).**

Nech  $(F, +, \cdot)$  je pole. Nech  $V$  je množina, na ktorej je definovaná binárna operácia  $\oplus$  a nech  $\forall c \in F$  a  $\forall \mathbf{u} \in V$  je priradený prvok  $c \odot \mathbf{u} \in V$ , pričom:

1.  $(V, \oplus)$  je abelovská grupa
- pre  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  a  $\forall c, c' \in F$ :
2.  $c \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = c \odot \mathbf{u} \oplus c \odot \mathbf{v}$
  3.  $(c + c') \odot \mathbf{u} = c \odot \mathbf{u} \oplus c' \odot \mathbf{u}$
  4.  $(c \cdot c') \odot \mathbf{u} = c \odot (c' \odot \mathbf{u})$
  5.  $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Potom  $V$  nazývame *vektorovým priestorom nad poľom*  $(F, +, \cdot)$ . Prvky množiny  $V$  nazývame vektory, prvky z  $F$  nazývame skaláry. Vektorový priestor  $V$  nad poľom  $F$  budeme označovať  $V(F)$ .

**Definícia 1.5 (Euklidovský priestor).**

Vektorový priestor  $E$  nad poľom  $\mathbb{R}$  sa nazýva *euklidovským vektorovým priestorom*, ak existuje zobrazenie  $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , pre ktoré platí:

- pre  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ :
1.  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  2.  $g(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  3.  $g(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
  4.  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \implies g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$

Zobrazenie  $g$  sa nazýva *skalárnym súčinom*. Euklidovský vektorový priestor  $E$  so skalárnym súčinom  $g$  označujeme  $(E, g)$ . Niekedy sa vynecháva znak  $g$  – namiesto  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  píšeme  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .

**Definícia 1.6 (Matica).**

Nech  $F$  je pole. Obdĺžniková tabuľka prvkov poľa  $F$ , pozostávajúca z  $m$  riadkov (vodorovné zoskupenia prvkov) a  $n$  stĺpcov (zvislé zoskupenia prvkov) sa nazýva *matica* typu  $m \times n$  nad poľom  $F$ .

**Ďalšie definície****Definícia 1.7 (Dĺžka vektora, uhol vektorov).**

V euklidovskom priestore  $(E, g)$  definujeme dĺžku vektora  $\mathbf{u} \in E$  (označujeme  $\|\mathbf{u}\|$ ) takto:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

Potom  $\cos \theta$  ( $\theta = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ) definujeme takto:

$$\cos \theta := \begin{cases} 0 & \text{ak } (\mathbf{u} = \mathbf{0}) \vee (\mathbf{v} = \mathbf{0}) \\ \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} & \text{inak} \end{cases}$$

**Definícia 1.8 (Bežný skalárny súčin a bežný euklidovský priestor).**

Zobrazenie

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1)$$

sa nazýva *bežný skalárny súčin*<sup>[1]</sup> a označuje sa  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  (namiesto  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ). Euklidovský priestor  $(\mathbb{R}^n, g)$  budeme nazývať *bežný euklidovský priestor* a označovať  $E^n$ .

**Definícia 1.9 (Bázové vektory  $E^n$ ).**

Ak v euklidovskom priestore  $E^n$  pre vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  platí

1.  $\|\mathbf{x}\| = 1$ ,
2.  $(\exists i)(1 \leq i \leq n) \quad x_i = 1$ ,

potom vektor  $\mathbf{x}$  nazývame  *$i$ -tým vektorom (prvkom) štandardnej ortonormálnej bázy  $E^n$*  a označujeme ho  $\mathbf{e}_i$ .

**Definícia 1.10 (Vektorový súčin).**

Nech  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^3$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ . Vektorovým súčinom vektorov  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  nazývame vektor  $\mathbf{w} =: \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , pre ktorý platí

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

kde  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sú vektory štandardnej ortonormálnej bázy  $E^3$ .

**Definícia 1.11 (Frenetov repér).**

Ak  $\mathbf{C}$  je krivka v  $E^3$ ,  $\mathbf{C} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , potom *Frenetovým repérom* alebo *Frenetovým trojhranom (Frenet frame)* krivky  $\mathbf{C}$  v bode  $u$  je trojica vektorov  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , kde

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{C}}(u)}{\|\dot{\mathbf{C}}(u)\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{C}}(u) \times \ddot{\mathbf{C}}(u)}{\|\dot{\mathbf{C}}(u) \times \ddot{\mathbf{C}}(u)\|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b}, \quad (3)$$

vektory  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  budeme označovať ako *vektor dotyčnice, normály, binormály* krivky  $\mathbf{C}$  v bode  $u$ .<sup>[2]</sup>

**Definícia 1.12 (Lineárna interpolácia).**

Nech  $a, b \in \mathbb{R}$ . Funkcia

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 - x)a + xb \quad (4)$$

sa nazýva *lineárnou interpoláciou*  $a$  a  $b$ . Čísla  $a, b$  sa nazývajú *interpolanty*. Analogicky možno lineárnu interpoláciu definovať v euklidovskom priestore.

<sup>1</sup>Pozornému čitateľovi zaiste neušiel fakt, že „bežný skalárny súčin“ je len označenie; dôkaz, či spĺňa podmienky skalárneho súčinu pre  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ , prenechávame na čitateľa.

<sup>2</sup>Dôkaz toho, že vektory  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  spĺňajú podmienky svojich označení nebude uvedený z priestorových dôvodov

**Definícia 1.13 (Priestor matíc).**

Nech  $F$  je pole a  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n > 0$ . Množinu

$$F^{m \times n} := \{M \mid M \text{ je matica typu } m \times n \text{ nad } F\}$$

nazývame *priestor matíc typu  $m \times n$  nad  $F$* .

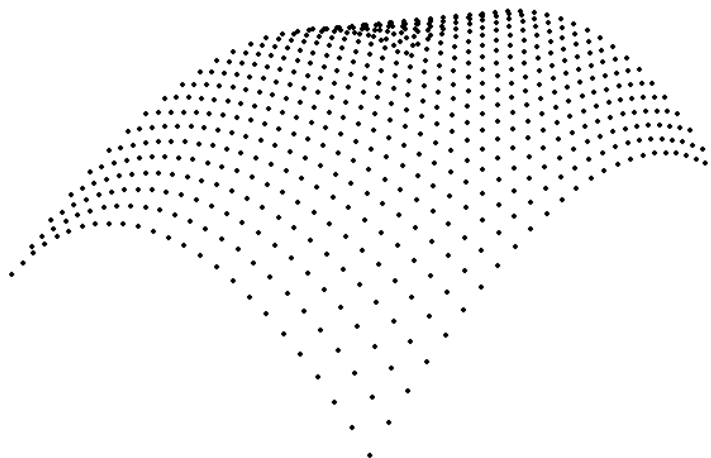
## 2 Reprerentácie a modelovanie telies v 3D

### 2.1 Bodová reprerentácia

Jednoduchšie ako bodovou reprerentáciou sa trojrozmerný objekt ani nedá reprerentovať – zapamätáme si len vrcholy na jeho povrchu s dostatočne malým krokováním (stačí 1-rozmerné pole). Čiže objekt bude reprerentovaný bodmi, ktoré keby sme potiahli „vhodnou“ interpolačnou plochou, dostali by sme pôvodný objekt. Dá sa použiť ako náhľad (*preview*) na menej zložité objekty alebo scény, alebo keď požadujeme vysoký počet snímkov za sekundu (*framerate, FPS*).

**Implementácia:** Do jednorozmerného poľa (trojíc) ukladáme súradnice vrcholov objektu. Do ďalšej premennej si uložíme ich počet.

Objekty v tejto reprerentácii sa vykresľujú extrémne rýchlo (vykreslí sa pole bodiek), reprerentácia je však náročná na predstavivosť a bez možnosti natáčania objektu je takmer nemožné zistiť jeho kontúry a orientácie jeho plôch, ktoré sú už v hranovej reprerentácii (vid' odsek 2.2) často zjavné. Priestorové usporiadanie bodov sa dá zvýrazniť jasovým alebo farebným rozlíšením bodov podľa vzdialenosti od kamery (pozorovateľa) – napr. čím sú body ďalej, tým sú tmavšie. Na obr. 1 je znázornená Bèzierova tenzorovo-súčinová plocha pomocou bodovej reprerentácie – spojením viacerých takýchto plôch (alebo podobných, často NURBS plôch<sup>[3]</sup>) môže byť reprerentovaný plášť telesa.



**Obr. 1:** Príklad plochy v bodovej reprerentácii.

Bodová reprerentácia je dosť vzdialená od verného zobrazovania 3D objektov, preto je vhodná len na ilustráciu zložitejších výpočtov.

---

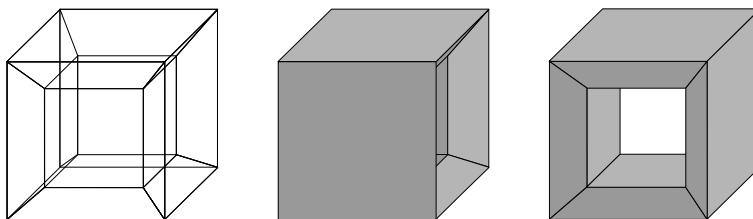
<sup>3</sup>vid' odsek 2.4

## 2.2 Hranová reprezentácia

Je to jedna z najjednoduchších metód reprezentácie trojrozmerného objektu – ukladajú sa len vrcholy telesa a hrany medzi nimi. Takto vytvorený model sa označuje aj ako *drôtový model* (*wire-frame*). Väčšinou sa používa ako náhľad 3D scény alebo 3D objektu, pretože spomedzi ostatných modelov jeho zobrazovanie aj modifikácia sú výpočtovo najlacnejšie (s výnimkou bodovej reprezentácie).

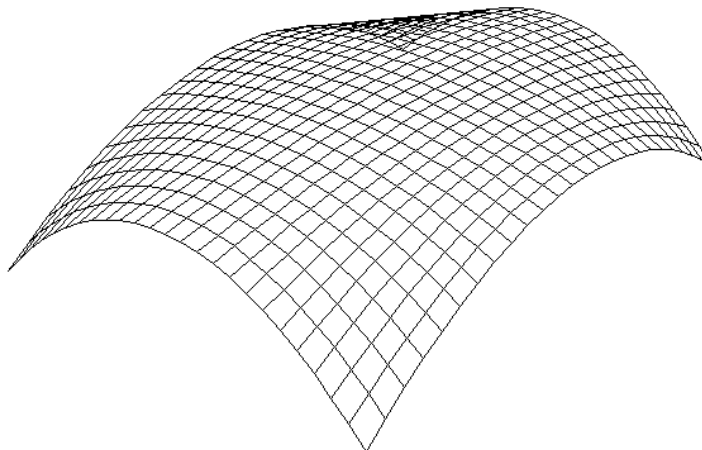
**Implementácia:** Vytvorí sa dva zoznamy – zoznam vrcholov a zoznam hrán. V zozname vrcholov sú uložené ich súradnice, v zozname hrán každá položka obsahuje dva ukazovatele do zoznamu vrcholov.

Kvôli svojim nedostatkom sa nedá použiť na jednoznačné zobrazovanie 3D objektov. Jeho hlavnou nevýhodou je, že pri pohľade z jedného miesta je ťažké určiť, ktoré hrany sú vpredu a ktoré vzadu (napr. obyčajná kocka v kabinetnom premietaní). Toto sa dá čiastočne odstrániť jasovým alebo farebným rozlíšením hrán podľa vzdialenosti od kamery (pozorovateľa). Ďalšou nevýhodou je nejednoznačnosť stien a „dier“ určených hranami, ako vidno na obr. 2.



Obr. 2: Nejednoznačnosť hranovej reprezentácie.

Na obr. 3 je znázornená plocha z obr. 1 pomocou hranovej reprezentácie.



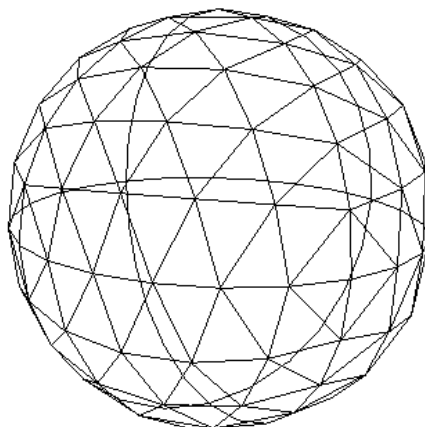
Obr. 3: Príklad objektu (plochy) v hranovej reprezentácii.

## 2.3 Mnohouholníková (po častiach lineárna) reprezentácia

Mnohouholníková (po častiach lineárna) reprezentácia je dnes základom pre reprezentáciu a zobrazovanie 3D scén. Je založená na sieti z trojuholníkov (*triangle mesh*), prípadne zo štvor- a mnohouholníkov, ktoré sú podporované rôznymi štandardami na zobrazovanie priestorových dát (OpenGL, Direct 3D, PHIGS, GKS 3D). Väčšinou sa používajú trojuholníky, pretože pri viac-uholníkoch je nutné pri zobrazovaní zisťovať ich konvexnosť, čo trojuholníky nevyžadujú. Ďalej pri viac-uholníkoch vzniká problém planárnosti – treba zistiť, či všetky jeho body sú v jednej rovine – čo je pre trojuholníky samozrejmosťou.

Veľkou výhodou mnohouholníkovej reprezentácie je to, že jej zobrazovanie je podporované hardvérovým vybavením počítačov. Väčšina operácií s objektami v tejto reprezentácii vedie nakoniec k lineárnej interpolácii, ktorá je technicky veľmi ľahko realizovateľná. Preto je mnohouholníková reprezentácia vhodná pre aplikácie vyžadujúce vysokú rýchlosť zobrazovania scén – ako sú virtuálna realita, počítačové hry, spolupráca cez internet (*collaborative work*), náhľady na zložité 3D scény a iné. Keďže výpočet priesečníku polpriamky a trojuholníka je pomerne rýchly, ďalšie veľké uplatnenie je pri metóde sledovania lúča (*ray-tracing*), kde sa celá scéna prevádza na trojuholníkovú sieť, a potom sa počítajú priesečníky lúčov s trojuholníkmi namiesto s pôvodnými (zložitými) objektami.

Z hľadiska modelovania objektov je ale mnohouholníková reprezentácia dosť nevýhodná, preto modelovacie programy používajú na modelovanie inú reprezentáciu, najčastejšie sú to NURBS krivky a plochy (viď časť 2.4), pričom trojuholníkovú sieť generujú (väčšinou) ako vstup pre zobrazovanie náhľadu a *renderovanie* (vypočítanie obrázku) celej scény. Bežným príkladom tohto je modelovanie objektov napr. v 3D Studiu – viď obr. 4. Iným príkladom takéhoto prístupu sú 3D modely vo virtuálnej realite. Niekedy sa generuje viac výstupných sietí líšiacich sa zložitou a teda aj veľkosťou detailov (*level of detail*). Ďalšími nevýhodami sú obtiažne mapovanie textúr a *geometrický alias* (skreslenie) spôsobený obmedzenou presnosťou reprezentácie reálnych čísel v počítači.



**Obr. 4:** Guľa v mnohouholníkovej (trojuholníkovej) reprezentácii (model v 3D Studiu).

Môžeme rozlišovať medzi jednoduchou a štruktúrovanou mnohouholníkovou reprezentáciou (viď [Žára98]).

### 2.3.1 Jednoduchá mnohouholníková reprezentácia

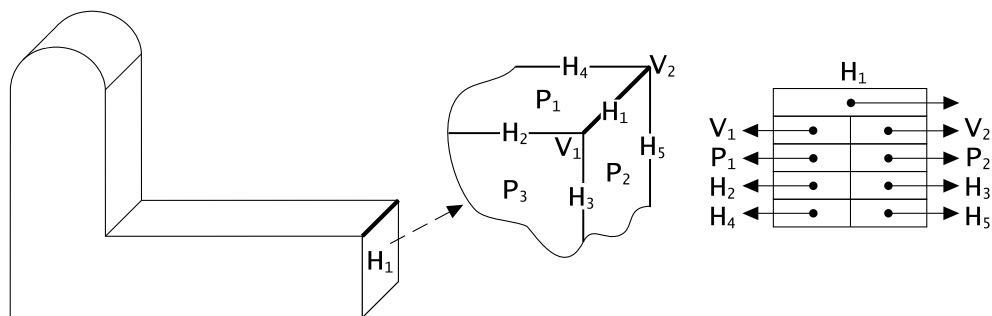
**Implementácia:** Rozšírime dátové štruktúry z implementácie hranovej reprezentácie o plochy – zoznam vrcholov doplníme ďalšou štruktúrou na popis plôch. V praxi nastávajú tieto prípady:

1. Plochy sú usporiadané tak, že tvoria pravidelnú sieť (*mesh*). Túto sieť reprezentujeme dvojrozmerným poľom ukazovateľov do zoznamu vrcholov.
2. Všetky plochy majú rovnaký počet vrcholov, najčastejšie 3 alebo 4. Dátovou štruktúrou bude zoznam, ktorého každý člen bude tvorený trojicou alebo štvoricou ukazovateľov na vrcholy.
3. Plochy majú rôzne usporiadanie a veľkosť. Zoznam plôch bude mať rôzne dlhé položky, každá bude obsahovať rôzny počet ukazovateľov na vrcholy.

Oproti hranovej reprezentácii je jednoduchá mnohouholníková reprezentácia jednoznačná a je vhodná na priame vykreslenie plôch aj hrán. Stále však neobsahuje dostatok topologických informácií – chýbajú v nej napríklad údaje o type hrán a nedá sa ľahko zistiť, či je teleso varietou (viď [Žára98]).

### 2.3.2 Štruktúrovaná mnohouholníková reprezentácia

Najznámejšiu komplexnou dátovou štruktúrou pre hraničnú reprezentáciu navrhol Baumgart [Baum75]. Tvoria ju 3 zoznamy v hierarchickom usporiadaní. Na najnižšej úrovni je zoznam vrcholov, na strednej úrovni zoznam hrán a na najvyššej úrovni zoznam plôch. Zoznamy môžu byť cyklicky zreťazené. Najviac informácií obsahujú prvky zoznamu hrán. Dátový záznam pre hranu obsahuje ukazovatele na všetky geometrické elementy (plochy, hrany, vrcholy), s ktorými susedí. Tento dátový záznam je znázornený na obr. 5. Dostal názov *okřídlená hrana* (*winged edge*), lebo grafické znázornenie s ním susedných hrán pripomína krídla.



Obr. 5: Dátový záznam okřídlená hrana (*winged edge*).

**Implementácia:** Na obr. 5 je schéma záznamu pre okrídlenú hranu. Okrem odkazov na oba koncové vrcholy ( $V_1, V_2$ ) v ňom sú aj ukazovatele na susedné plochy ( $P_1, P_2$ ). Navyše obsahuje informácie o ďalších štyroch hranách. V ľavej časti schémy sú hrany susediace s ľavou plochou ( $H_2, H_4$ ), v pravej časti hrany susediace s pravou plochou ( $H_3, H_5$ ). Ich poradie je zhodné s poradím koncových bodov hrany. Horný ukazovateľ reprezentuje spojnicu na ľubovoľnú nasledujúcu hranu v zretiazenom zozname okrídlených hrán.

Zoznamy vrcholov a plôch sú oveľa jednoduchšie. Záznam každej plochy obsahuje ukazovateľ na ľubovoľnú z jej hrán, prípadne na hranu patriacu k vnútornej hranici (otvoru). Môže obsahovať aj normálový vektor, farbu alebo inú materiálovú charakteristiku. Zo záznamu pre okrídlenú hranu možno odvodiť veľa topologických údajov. Napr. ľahko sa dá nájsť:

- plochy susediace s danou plochou
- plochy susediace s danou hranou
- plochy dotýkajúce sa v danom vrchole
- vrcholy a hrany danej steny

(viď [Žára98]).

## 2.4 NURBS krivky a plochy

NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) krivky a plochy sú triedou parametrických kriviek a plôch. NURBS sa používajú z výpočtových dôvodov (ľahko sú spracovávané počítačom, sú stabilné voči chybám v pohyblivej rádovej čiarky a majú nízke pamäťové nároky) a kvôli schopnosti reprezentovať ľubovoľný druh krivky resp. plochy. Sú zovšeobecnením neracionálnych B-splajnov, ktoré sú založené na neracionálnych Bèzierových krivkách, ktorými sa budeme zaoberať ako prvými.

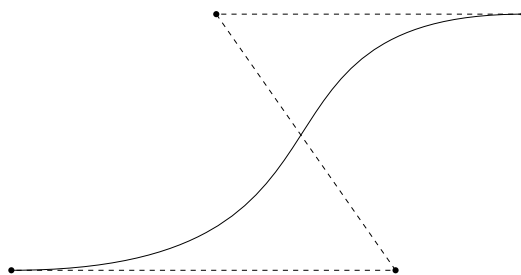
Bèzierova krivka stupňa  $n$  je definovaná ako

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) P_i, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (5)$$

Geometrické koeficienty  $P_i$  sa nazývajú *riadiace vrcholy*. Bázickými funkciami  $B_i^n$  sú klasické Bernsteinove polynómy  $n$ -tého stupňa

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (6)$$

Pre interaktívne navrhovanie tvarov vyjadrujú riadiace vrcholy Bèzierovej krivky veľa grafickej informácie, ako vidno na obr. 6. Bèzierovými krivkami sa nedajú reprezentovať všetky



Obr. 6: Bèzierova krivka stupňa 3.

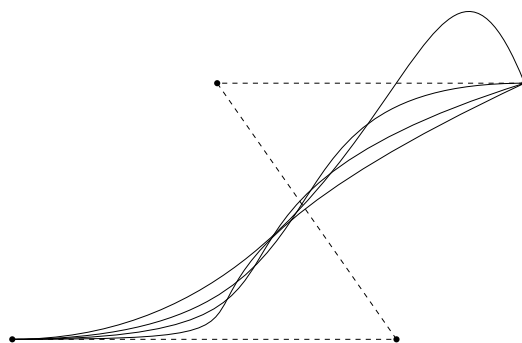
kuželosečky. Kuželosečka (ako napr. kružnica) sa dá reprezentovať použitím racionálnej funkcie, ktorá je definovaná ako pomer dvoch polynómov ako

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)}, \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)}, \quad z(u) = \frac{Z(u)}{W(u)}. \quad (7)$$

Vychádzajúc z tejto poznámky, racionálna Bèzierova krivka je definovaná ako

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(u) w_i}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (8)$$

kde  $P_i$  a  $B_i^n$  sú definované ako v rovnosti (5) a  $w_i$  sú skaláre nazývané *váhami*. Pri menení váh riadiaci vrchol viac priťahuje alebo odpudzuje krivku. Najlepšie je to vysvetliť na príklade. Na obr. 7 sú nakreslené štyri Bèzierove krivky. Jediný rozdiel medzi nimi je váha riadiaceho vrcholu

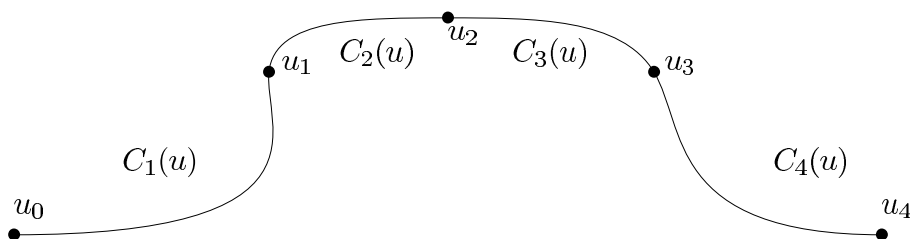


**Obr. 7:** Účinky menenia váhy tretieho riadiaceho vrcholu pre  $w = 0, 5, 1, 2$  a  $10$ .

$P_3$ . Váha o hodnote  $0, 5$  spôsobí, že krivka pôjde mimo konvexného obalu riadiacich vrcholov. S váhou rovnou  $1$  je krivka ekvivalentná krivke znázornenej na obr. 6. Váha o hodnote  $2$  odtláča krivku preč od tretieho riadiaceho vrcholu a váha  $10$  ju odtláča ešte ďalej.

Krivka pozostávajúca iba z jedného segmentu racionálnej Bèzierovej krivky je často neposatačujúca. Problémy s jediným segmentom sa pohybujú od potreby krivky vyššieho stupňa, ktorá by sa presne zhodovala s komplexným tvarom (ktorý sa nedá efektívne spracovať a je numericky nestabilný) až po interaktívne navrhovanie, pre ktoré tento segment predstavuje obmedzenia týkajúce sa lokálneho riadenia tvaru. Na prekonanie týchto problémov sa používa čiastková racionálna krivka.

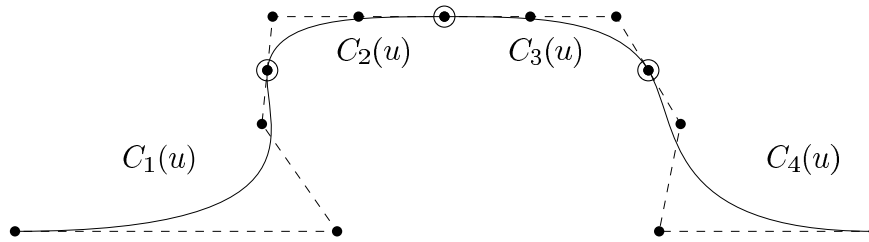
Čiastková Bèzierova krivka alebo tiež *B-splajn(ová krivka)* je tvorená z viacerých kriviek spojených v určitých bodoch (tzv. *spojoch*) s nejakým stupňom spojitosti medzi nimi. Takáto krivka je znázornená na obr. 8.



**Obr. 8:** Čiastková racionálna Bèzierova krivka.

Krivka  $C(u)$  je definovaná na  $u \in [0, 1]$  a je zložená zo segmentov  $C_i(u)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Segmenty sú spojené v spojoch  $u_0 = 0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 = 1$  s určitým stupňom spojitosti. Krivka sa nazýva  $C^k$ -spojitá v spoji  $u_i$  ak  $C_i^{(j)}(u_i) = C_{i+1}^{(j)}(u_i)$  pre všetky  $0 \leq j \leq k$ , kde  $C_i^{(j)}$  predstavuje  $j$ -tu deriváciu  $C_i$ .

Na obr. 9 sú znázornené rôzne riadiace vrcholy vytvárajúce B-splajn. Zakrúžkované sú tie riadiace vrcholy, ktoré sú použité pre dva Bèzierove segmenty. Malo by byť zrejmé, že ukladanie týchto bodov do pamäti viac ako raz je neefektívne. Ak má byť krivka  $C^1$ -spojitá, tak niektoré z bodov vnútri Bèzierovho segmentu sú závislé na polohe bodov susedných segmentov, aby bola splnená podmienka spojitosti. Preto ukladanie takýchto bodov do pamäti nie je nutné. Rovnica B-splajnu by preto mala byť pamäťovo efektívna a takisto by mala dovoliť lokálne riadenie



Obr. 9: Bèzierove segmenty vytvárajúce krivku.

krivky; t.j. bázičné funkcie by nemali byť definované na celom intervale  $[u_0, u_m]$ , ale by mali byť zúžené na obmedzený počet podintervalov. Teda B-splajn je definovaný ako

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p P_i, \quad a \leq u \leq b, \quad (9)$$

kde  $P_i$  sú riadiace vrcholy a  $N_i^p$  sú B-splajnové bázičné funkcie stupňa  $p$ . Existujú rôzne metódy definovania B-splajnových bázičných funkcií: delené diferencie mocninových funkcií, blossoming a rekurentný vzorec. Používa sa rekurentná definícia, keďže je vhodná na počítačovú implementáciu. B-splajn má spoje, ktoré sú označované ako *uzly* (vid' obr. 8). Postupnosť týchto uzlov sa označuje ako *uzlový vektor* – je definovaný ako  $U = u_0, \dots, u_m$ , čo je neklesajúca postupnosť reálnych čísel, t.j.  $u_i \leq u_{i+1}$  pre  $i = 0, \dots, m$ . B-splajnová bázičná funkcia stupňa  $p$  je definovaná rekurentným vzorcom ako

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{ak } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (10)$$

$$N_i^p(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u)$$

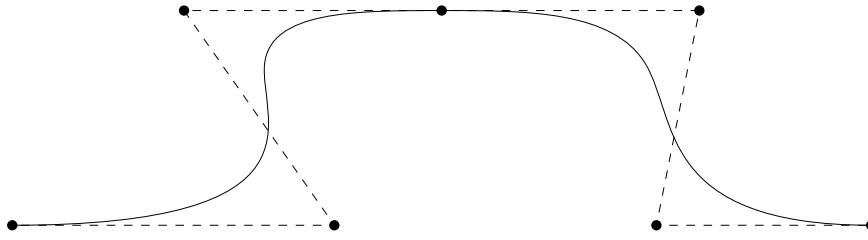
Táto rovnosť môže viesť k podielu  $\frac{0}{0}$ ; tento podiel sa tu definuje ako nula. Uzlový vektor B-splajnovej krivky je uzlový vektor tvaru

$$U = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-(p+1)}, \underbrace{\{b, \dots, b\}}_{p+1} \quad (11)$$

B-splajnová krivka z obr. 8 je ukázaná na obr. 10 so svojím riadiacim polygónom. Riadiaci polygón je polygón vytvorený spojením riadiacich vrcholov  $P_i$ . Ako bolo spomenuté vyššie, iba racionálne funkcie môžu reprezentovať kužeľosečky, preto bola B-splajnová krivka zovšeobecnená kvôli získaniu racionálnej reprezentácie. Toto zovšeobecnenie sa nazýva neuniformný racionálny B-splajn (NURBS) – je definovaný ako

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) w_i}, \quad a \leq u \leq b, \quad (12)$$

kde  $P_i$  sú riadiace vrcholy,  $w_i$  sú váhy a  $N_i^p$  sú B-splajnové bázičné funkcie definované na neperiodickom a neuniformnom uzlovom vektore definovanom v rovnosti (11). Racionálne krivky so



**Obr. 10:** B-splajnová krivka so svojím riadiacim polygónom.

súradnicovými funkciami v tvare vyjadrenom v rovnosti (7) sa efektívne spracovávajú a majú elegantnú geometrickú reprezentáciu. Použitím homogénnych súradníc sa dá racionálna  $n$ -rozmerná krivka reprezentovať ako  $(n + 1)$ -rozmerná polynomiálna krivka. Homogénne riadiace vrcholy sa zapisujú ako  $P_i^w = (w_i x_i : w_i y_i : w_i z_i : w_i)$  v štvorrozmernom priestore, pričom  $w_i \neq 0$ . Na získanie  $P_i$ , vydělíme všetky súradnice štvrtou súradnicou  $w_i$ . Táto operácia zodpovedá stredovému premietaniu so stredom v  $(0, 0, 0)$  do nadroviny  $x_1 x_2 \dots x_n$ . Pomocou týchto súradníc sa dá NURBS krivka zapísať ako

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) P_i^w. \quad (13)$$

NURBS sú taktiež používané na reprezentáciu plôch. NURBS plocha v homogénnych súradniciach je definovaná ako

$$S^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) P_{i,j}^w, \quad (14)$$

kde  $P_{i,j}^w$  tvorí dvojsmernú riadiacu sieť a  $N_i^p(u)$ ,  $N_j^q(v)$  sú neracionálne B-splajnové bázické funkcie definované na uzlových vektoroch

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-(p+1)}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (15)$$

$$V = \left\{ \underbrace{c, \dots, c}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-(q+1)}, \underbrace{d, \dots, d}_{q+1} \right\}$$

kde  $r = n + p + 1$ ,  $s = m + q + 1$  a intervaly  $[a, b]$  a  $[c, d]$  sú zvyčajne vždy  $[0, 1]$  (vid' [Lavo99]).

## 2.5 Implicitné plochy

Prvá dôležitejšia zmienka o implicitných objektoch pochádza z roku 1982 od J. Blinna, ktorý navrhol chápať izoplochy vzniknuté pri modelovaní elektrického potenciálu elementárnych častíc ako objekty ([Blin82]). Postupne bola táto technika rozširovaná a tieto objekty dostávali rôzne názvy (*Blobby objects* [Blin82], *Soft objects* [Wywi86], *Meta balls*) podľa toho, aké spájacie funkcie boli použité. J. Bloomenthal upozornil ([Bloo88]), že všetky tieto objekty patria do rovnakej kategórie a môžu byť preto označené spoločným názvom – *implicitné plochy* (*implicit surfaces*).

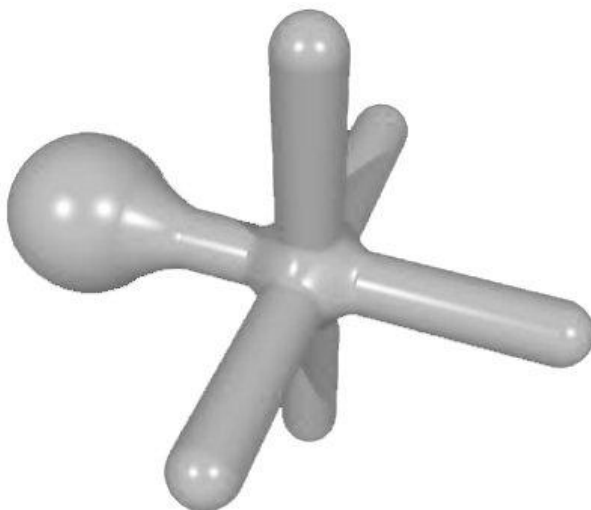
Implicitná plocha je množina bodov  $(x, y, z)$  v 3-rozmernom priestore, pre ktoré platí

$$F(x, y, z) = T, \quad (16)$$

kde  $T$  je zvolená prahovacia hodnota (*threshold value*) a  $F$  je implicitná funkcia plochy. V tomto prístupe sa využíva skupina základných prvkov (každý z nich určuje svoju implicitnú funkciu), ktoré spolu tvoria *kostru* (*skeleton*) objektu, ktorá je spojená do jednej implicitnej funkcie tzv. *spájacími funkciami* (*blending functions*). Teda uvedenú implicitnú funkciu  $F$  možno vyjadriť ako

$$F(x, y, z) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(d_i(x, y, z)), \quad (17)$$

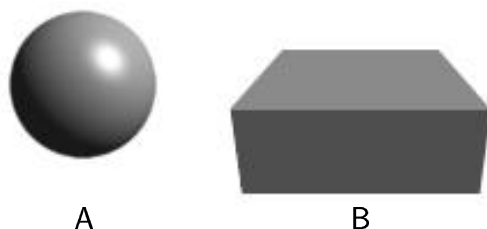
kde  $n$  je počet prvkov kostry,  $c_i$  je reálne číslo určujúce vplyv  $i$ -teho prvku v bode  $(x, y, z)$  na celkovú hodnotu  $F$ ,  $F_i$  je spájacia funkcia pre  $i$ -ty prvok a  $d_i$  je funkcia vzdialenosti bodu  $(x, y, z)$  od  $i$ -teho prvku. Príklad implicitnej plochy zloženej zo štyroch prvkov (tri úsečky a bod) je na obr. 11 (viď [Žára98]).



**Obr. 11:** Implicitná plocha vzniknutá z troch úsečiek a jedného bodu.

## 2.6 Konštruktívna geometria telies – CSG

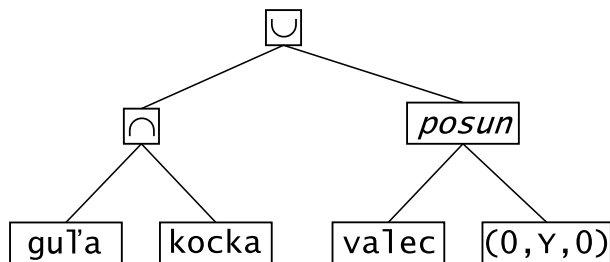
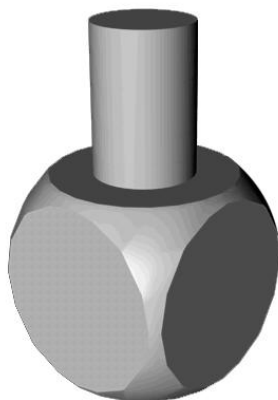
Podobne ako konštruktér modeluje zložitejšie telesá pomocou jednoduchších, funguje konštruktívna geometria telies – skráteno CSG (*Constructive Solid Geometry*) – teleso je vytvárané z jednoduchých geometrických objektov – základných telies (*CSG primitives*) pomocou množinových operácií ( $\cup$ ,  $\cap$ ,  $-$ ) alebo priestorových transformácií (posun, otočenie). Množinové operácie sa aplikujú aj na takto vytvorené objekty, čím vzniká pre vytvárané teleso konštrukčný strom (binárny), tzv. CSG-strom (*CSG-tree*), ktorého listy sú základné telesá (guľa, kváder, valec, kužeľ, polpriestor, torus (anuloid), . . . (viď obr. 12)) a vnútornými vrcholmi sú spomínané množinové operácie a priestorové transformácie (príklad na obr. 13). Príklad CSG stromu je na obr. 14.



Obr. 12: Príklad základných telies CSG (*CSG primitives*) – guľa (A), kváder (B).



Obr. 13: Množinové operácie nad CSG telesami z obr. 12 – zjednotenie ( $A \cup B$ ), prienik ( $A \cap B$ ), rozdiel ( $B - A$ ) (zľava).



Obr. 14: Zložitejší objekt (vľavo) a jeho CSG strom (vpravo).

## 2.7 Objemová reprezentácia

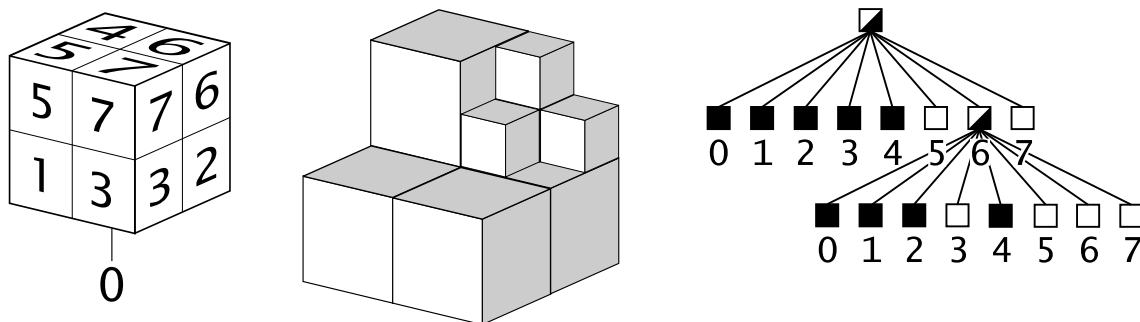
Ďalší používaný spôsobom reprezentácie trojrozmerných telies je založený na popise priestoru, ktorý teleso fyzicky zaberá (predpokladáme, že telesá sú vnútri neprázdne, teda plochy sa takto reprezentovať nedajú). Existuje viacero prístupov popisu zabraného objemu – rozdelením objektu na atomické časti, ktoré sú triviálne popísateľné, alebo rozdelenie daného priestoru na dosť malé, väčšinou pravidelné útvary (kocky, kvádre, štvorsteny), do ktorých potom transformujeme vstupný objekt.

### 2.7.1 Voxely

Jednoduchým spôsobom popisu priestorových dát je použitie „priestorového“ rastra (analógia k rovinnému rastru), ktorého prvky (kocôčky alebo kvádričky) označujeme ako *voxely* (*volume element*) – podobne ako prvky rovinného rastra označujeme *pixely* (*picture element*). Každý voxel môže byť v jednom z dvoch stavov – prázdny alebo plný. Zo zvyšovaním jemnosti priestorového rastra sa kubicky zvyšuje počet voxelov a teda pamäťová náročnosť na reprezentáciu danej scény. Preto je táto metóda dosť neefektívna a pre veľké scény alebo jemné rastre nepoužiteľná. Nasledujúca metóda odstraňuje tento závažný nedostatok.

### 2.7.2 Oktálne stromy

Ak teleso obsahuje väčšie homogénne časti resp. nie je príliš členité, je výhodnejšie ho reprezentovať tzv. *oktálnym stromom*. Príklad telesa a jeho reprezentácie – oktálneho stromu je na obr. 15 (plný štvorček = plná kocka, prázdny štvorček = prázdna kocka, polovičný štvorček = čiastočne zaplnená kocka).



Obr. 15: Schéma delenia priestoru, teleso a jemu prislúchajúci oktálny strom.

V podstate ide o rekurzívne delenie počiatočného priestoru (kvádra) na osem rovnakých segmentov (oktantov), ktoré sú potom spracovávané rekurzívne – nastáva jedna z troch možností zaplnenia oktantu:

1. prázdny - *void* (*V*), *empty* (*E*) vynechaný z ďalšieho spracovania
2. plný - *full* (*F*) vynechaný z ďalšieho spracovania
3. zmiešaný - *mixed* (*M*), *partial* (*P*) ďalej rekurzívne delený a spracovaný

Rekurzívne delenie pokračuje dovedy, kým každý výsledný oktant nie je homogénny vzhľadom na nejaké kritérium). Strom z obr. 15 sa dá zapísať tak, že rekurziu (teda zmiešané vrcholy) vyjadríme zátvorkami:

FFFFFV(FFFVFFVV)V .

Veľkosť (objem) oktantov sa v každej úrovni rekurzie 8-krát znižuje, takže po relatívne malej hĺbke oktálneho stromu získame veľmi jemné delenie priestoru (viď [Žára98]).

## 3 Šablónované objekty

### Šablónovanie

V šablónových reprezentáciách je želaný tvar popísaný šablónovaním 2-rozmernej funkcie v 3-rozmernom priestore. Šablónovacia dráha (*sweeping path*) je označovaná ako *chrbtica* (*spine*), prípadne *trajektória* (*trajectory*); šablónovaná funkcia sa označuje ako *rez* (*cross section*), prípadne *obrys* (*contour*); a geometrické vzťahy rezu a chrbtice sa označujú ako *šablónovacie pravidlo* (*sweeping rule*). Najrozšírenejšia reprezentácia v tejto triede je *zovšeobecnený valec* (*generalized cylinder*) [Bin71]. Najjednoduchší zovšeobecnený valec je kruh šablónovaný (posúvaný) po priamke, kde sa rovina kruhu a priamka pretínajú pod uhlom  $90^\circ$ , vytvárajúc klasický valec. Ak je polomer kruhu lineárnou funkciou svojej polohy na danej priamke (presnejšie funkciou dĺžky úseku priamky (úsečky) medzi počiatočnou a aktuálnou polohou kruhu), potom týmto šablónovaním vznikne kužeľ (odtiaľ pochádza meno *zovšeobecnený kužeľ* (*generalized cone*)). Na zahrnutie väčšej triedy tvarov boli definované rôzne typy zovšeobecnených valcov. *Priamkové homogénne všeobecné valce* (*straight homogeneous generalized cylinders*) [Pon89] majú ako chrbticu priamku; avšak rez a šablónovacie pravidlo sú ľubovoľné. Ďalšia forma zovšeobecnených valcov sa označuje ako *krivkové rotačné telesá* (*curved solids of revolution*), kde chrbtica, rez, škálovanie rezu a šablónovacie pravidlo sú všetky nekonštanté. Možnou nevýhodou zovšeobecnených valcov je ich nejednoznačnosť. Pri reprezentovaní získaných dát môže byť počiatočný rez definovaný veľa spôsobmi, čo má za následok rôzne reprezentácie pre tie isté dáta. Tento nedostatok bol prekonaný niektorými metódami už v minulosti (vid' napr. [Bhan87]) – vid' [Arma93].

## 3.1 Základné pojmy a definície

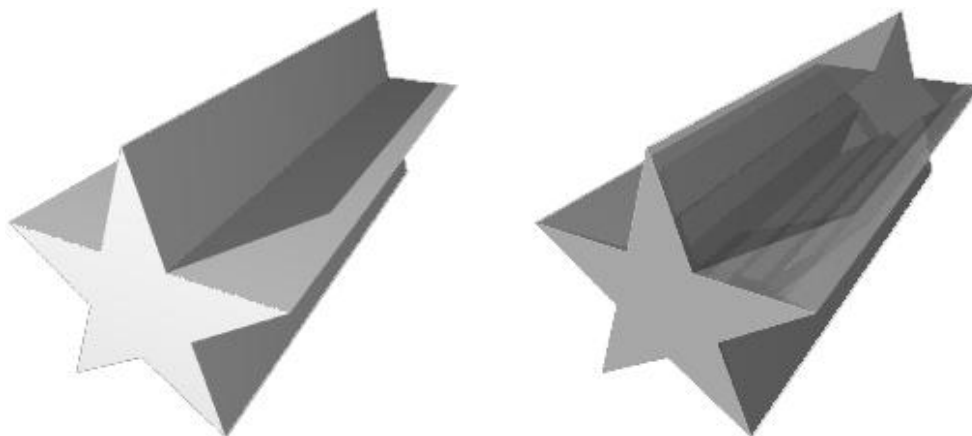
„Šablónovaný objekt“ (*sweep object*) je dosť všeobecný a nejednoznačný pojem. V praxi sa skôr vyskytujú pojmy „šablónovaná plocha“ (*swept surface*), „šablónovaný objem“ (*swept volume*) a „zovšeobecnený valec“ (*generalized cylinder*).

### 3.1.1 Zovšeobecnené valce

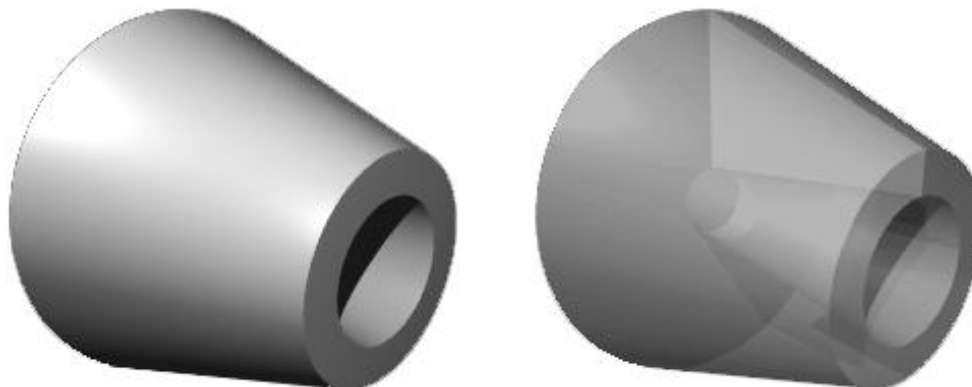
Zovšeobecnené valce sú triedou šablónovaných objektov definované 2-rozmerným obrysom a 3-rozmernou trajektóriu. Obrys definuje rez objektu a trajektória definuje jeho dráhu. Sú štyri základné typy šablónovaných objektov ([Bron90], s.77) :

- translačné: obrys ľubovoľný, trajektória = priamka
- rotačné: obrys ľubovoľný, trajektória = kružnicový oblúk
- kružnicové: obrys = kružnica, trajektória ľubovoľná
- zovšeobecnený valec: obrys aj trajektória sú ľubovoľné

Na obr. 16 a 17 je príklad translačného resp. rotačného šablónovaného objektu.



Obr. 16: Príklad translačného šablónovaného objektu a jeho konštrukcia (hviezda predstavuje rez).



Obr. 17: Príklad rotačného šablónovaného objektu a jeho konštrukcia (lichobežník predstavuje rez).

Pozornosť bude teraz venovaná poslednému typu šablónovaných objektov, zovšeobecným valcom. Táto trieda môže byť ďalej rozdelená na profilované a neprofilované zovšeobecné valce.

### Profilované a neprofilované zovšeobecné valce

Termín „profilovaný“ označuje tvar obrysu počas šablónovania po trajektórii. Neprofilované zovšeobecné valce zachovávajú tvar obrysu konštantný počas šablónovania. To znamená, že všetky zmeny v tvare sú určené samotnou trajektóriou.

Pri profilovaných zovšeobecných valcoch je obrys škálovaný ako je šablónovaný po trajektórii. Dve profilové krivky,  $s_x$  a  $s_y$ , určujú škálovacie násobky v dvoch na seba kolmých smeroch ležiacich v rovine obrysu [Bron90]. Ten istý parameter je použitý pre trajektóriu aj pre profilové krivky, takže v každom bode na trajektórii sú definované dva škálovacie násobky (viď [Burf98]).

Podľa normy ISO 10303-42 z roku 2000, definícia 4.4.62: „Šablónovaný povrch je taký, ktorý je konštruovaný šablónovaním krivky po inej krivke.“

Teraz uvedieme jednoduchú definíciu zo sveta implicitných objektov (viď [Bloo97]) :

#### Definícia 3.1.

Keď vzdialenosť  $d$  od krivky definujeme pre trojrozmerné body, výsledná implicitná plocha je *zovšeobecný valec* (*generalized cylinder*). Pre kostru pozostávajúcu z  $n$  úsečiek, implicitná definícia pre zovšeobecný valec s polomerom  $r$  je:

$$f(\mathbf{p}) = \left( \min_i^n (d(\mathbf{p}, \text{úsečka}_i)^2) \right) / r^2 - 1 = 0 \quad (18)$$

Pre vizualizáciu tejto definície: Výsledná implicitná plocha je tvorená valcami s polomerom  $r$  okolo jednotlivých úsečiek, pričom každý spoj bude z vonkajšej strany guľovitý – akoby v ňom bola umiestnená guľa s polomerom  $r$ .

Ako protiklad k implicitnej definícii uvedieme popis parametrickej konštrukcie : Zovšeobecné valce môžeme považovať za rozšírenie klasických valcov. Presnejšie, kolmý valec s kruhovou podstavou môžeme definovať ako teleso vyznačené kruhom, ktorý sa pohybuje po úsečke  $L$  kolmej na disk. Nahradíme tento kruh rovinným útvarom ľubovoľného tvaru, a taktiež nepožadujeme, aby úsečka  $L$  bola stále kolmá na tento rovinný útvar. Teraz ak sa rovinný útvar pohybuje po  $L$ , stále paralelne k sebe, tak vyznačí teleso nazývané *zovšeobecný valec*. Vzorec pre objem takéhoto telesa je potom

$$V = (\text{výška}_{\text{zovšeobecného valca}}) \cdot (\text{plocha}_{\text{rovinného útvaru}}), \quad (19)$$

kde (*výška\_{zovšeobecného valca}*) teraz znamená vertikálnu vzdialenosť medzi vrchom a spodkom zovšeobecného valca (viď [Nezn00]).

Teraz načrtneme abstraktnejšiu a formálnejšiu definíciu šablónovaného objemu:

Ak  $Q$  je trajektória v  $\mathbb{R}^d$ , ktorá obsahuje rotácie,  $Q$  môže byť parametrizovaná cez  $t$  ako

$$Q \equiv H(t), \quad (20)$$

kde  $H(t)$  je  $(d + 1)$ -rozmerná homogénna matica určujúca pozíciu a orientáciu v  $\mathbb{R}^d$ . Takéto matice majú tvar

$$\begin{pmatrix} & R & T \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

kde  $R$  je  $d$ -rozmerná ortonormálna matica rotácie a  $T$  je  $d \times 1$  vektor posunutia.

To nám dáva novú pozíciu a orientáciu v každom čase  $t$ . Definujme  $M_H$  ako nejakú množinu  $M \subset \mathbb{R}^d$  transformovanú homogénnou maticou  $H$ , t.j.:

$$M_H = \{Hm : m \in M\} \quad (22)$$

Definujme šablónovanie množinou  $M \subset \mathbb{R}^d$  po ľubovoľnej trajektórii  $Q$  (označujeme  $S(M, Q)$ ) ako:

$$S(M, Q) = \bigcup_{H \in Q} M_H \quad (23)$$

Intuitívne, ťaháme  $M$  po trajektórii  $Q$ , pričom  $M$  skrúcame a otáčame (vid' [Abra95]).

## 3.2 Parametrický prístup

Definícia šablónovaného objektu závisí na troch faktoroch:

1. špecifikácia generátora – objektu, ktorý bude šablónovaný;
2. špecifikácia trajektórie – šablónovacej cesty;
3. špecifikácia orientácie generátora počas postupu po trajektórii.

### Definícia 3.2.

Nech  $I_1, I_2, I_3, J$  sú ľubovoľné intervaly na  $\mathbb{R}$ . Ak je daný generátor  $\mathbf{g}(u, v, w)$ ,  $D_g = I_1 \times I_2 \times I_3$ ,  $H_g \subseteq \mathbb{R}^3$ , krivka trajektórie  $\mathbf{c}(t)$ ,  $D_c = J$ ,  $H_c \subseteq \mathbb{R}^3$ , a transformácia súradnicového repéru (coordinate frame)  $\mathbf{R}(t)$ ,  $D_R = D_c$ ,  $H_R \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , potom šablónovaný objekt (swept object)  $\mathbf{S}$  je definovaný ako množina bodov, kde

$$\mathbf{S}(u, v, w, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{g}(u, v, w)\mathbf{R}(t) \quad (24)$$

pre nejaké  $t \in D_c$ ,  $(u, v, w) \in D_g$ .

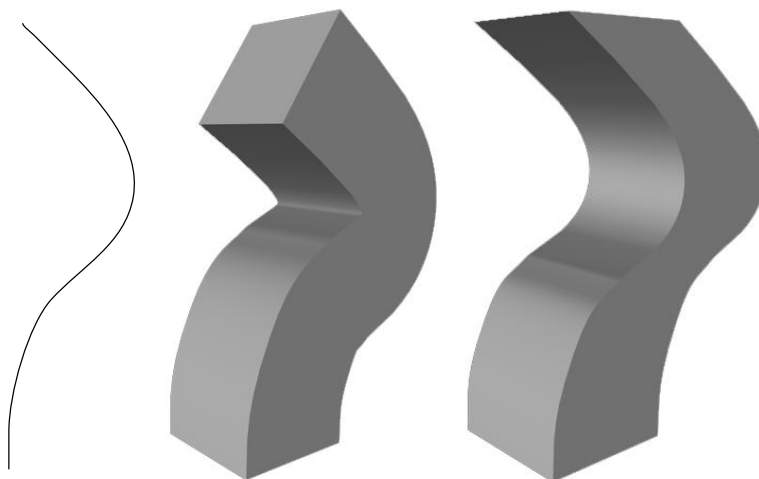
Šablónované objekty definované touto definíciou sú skutočne dosť všeobecné. Dovoľujú ľubovoľnému parametrickému telesu šablónovať po parametrickej krivke, využívajúc ľubovoľné transformácie súradnicového repéru na definovanie orientácie/prehýbania telesa v nejakom bode krivky. To napríklad dovoľuje, aby bol generátor škálovaný, rotovaný alebo prehýbaný (vektory súradnicového rámu nemusia byť navzájom kolmé) pri postupe po krivke (viď [Conk00]).

Takéto šablónované objekty (šablónované objemy) sa používajú väčšinou pri počítačových simuláciách v mechanike a výpočtoch dráhy pre (obrábacie) roboty.

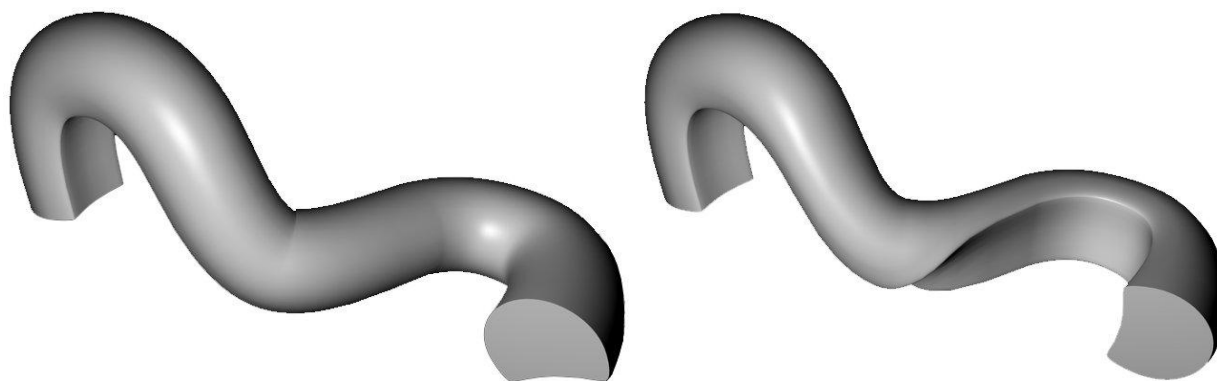
Dôležité pre výsledný tvar šablónovaného objektu je zmena normály rezu – pri pohybe po chrbtici rez buď kopíruje normálou dotyčnicu chrbtice, alebo ju má počas celého pohybu konštantnú (viď obr. 18). Rozdiel ľahko vidno – kým prvý prístup simuluje ohýbanie tyče s daným profilom podľa krivky chrbtice, pri druhom prístupe rez „vykrajuje“ do priestoru výsledný objekt, pričom sleduje chrbticu a je stále paralelne k východzej pozícii.

Pri pohybe rezu po chrbtici (trajektórii) má rez buď konštantnú orientáciu vzhľadom na normálu rezu, alebo sa orientácia rezu mení podľa normály (vektora krivosti) chrbtice (viď obr. 19). Menenie tejto orientácie rezu má význam pri modelovaní napr. objektu obtáčajúceho iné objekty, okolo ktorých sa krúti krivka chrbtice. V CAD-systémoch je väčšinou implementovaná len konštantná orientácia rezu vzhľadom na normálu rezu, prípadne sa dá zmeniť zadenovaním druhej chrbtice (kolaje (2-rail)), ktorej relatívna pozícia od prvej chrbtice určuje orientáciu rezu, prípadne jeho škálovanie.

Keďže definícia 3.2 je pre modelovanie výpočtovo dosť náročná (kvôli komplexnosti generátora), nasledujúca (def. 3.3), podobná definícia, je pre modelovanie vhodnejšia – budeme uvažovať prípad, keď generátorom je 2-rozmerná krivka (rez)  $\mathbf{C}$  (a teda v 3-rozmernom priestore definujeme jej tretiu súradnicu ako 0) a krivka trajektórie je 3-rozmerná krivka  $\mathbf{T}$ . Na druhej strane umožníme definovať  $n$  kriviek rezu ( $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n$ ) a ich interpolovanie ( $f_1, \dots, f_n$ ). Výsledná krivka rezu  $\mathbf{C}(u, v) = \sum_{i=1}^n f_i(u)\mathbf{C}_i(v)$  bude  $\forall u, u \in D_T$  umiestnená do bodu  $\mathbf{T}(u)$  a natočená tak, aby sa jej natočený súradnicový repér ( $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ ) prekrýval s Frenetovým repérom



**Obr. 18:** Šablónovanie: Chrbtica, šablónovanie štvorca s normálou dotyčnice chrbtice a s konštantnou normálou (zľava).



**Obr. 19:** Šablónovanie: šablónovanie zrezaného kruhu s konštantným natočením vzhľadom na normálu rezu a s natočením v.n.n.r. podľa normály (vektora krivosti) chrbtice (zľava). Vpravo vzniká dojem obtáčania hadice okolo valcov – ľavý v smere osi  $y$ , pravý v smere osi  $z$ .

$\mathbf{T}$  v  $u$  (viď definíciu 1.11) nasledovne:  $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{n}(u)$ ,  $\mathbf{e}_2^* = \mathbf{b}(u)$ ,  $\mathbf{e}_3^* = \mathbf{t}(u)$ , čo zabezpečíme rozložením bodu interpolovaného rezu  $\mathbf{C}$  na súradnice, ktorými potom postupne vynásobíme zložky Frenetovho repéru krivky  $\mathbf{T}$  v bode  $\mathbf{T}(u)$ . (Umiestnenie rezu do bodu  $\mathbf{T}(u)$  realizujeme posunom  $\mathbf{C}(u, v) + \mathbf{T}(u)$ .) Ďalej dovoľíme odchýlenie referenčného bodu  $\mathbf{C}(u, \min D_C)$  rezu od krivky  $\mathbf{T}$  pridaním vektora posunu (*shift*)  $\mathbf{s}(u)$  – tým sa bude dať meniť excentricita rezu počas šablónovania. Ponecháme pritom transformáciu  $\mathbf{R}$  súradnicového repéru.

### Definícia 3.3.

Nech  $I, J$  sú ľubovoľné intervaly na  $\mathbb{R}$ ,  $0 < n \in \mathbb{N}$  a  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sú vektory štandardnej ortonormálnej bázy  $E^3$  [4]. Ak je v  $E^3$  dané:

- krivka trajektórie (chrbtice)  $\mathbf{T} : I \rightarrow E^3$ , (teda  $D_T = I$ )

---

<sup>4</sup>viď definíciu 1.9

- krivky rezu  $\mathbf{C}_i : J \rightarrow E^2 \times \{0\}, i = 1, \dots, n,$
- ich interpolačná funkcia  $\mathbf{C}(u, v) = \sum_{i=1}^n f_i(u) \mathbf{C}_i(v), f_1, \dots, f_n : D_T \rightarrow [0, 1],$   
 $(\forall u \in D_T) \sum_{i=1}^n f_i(u) = 1,$
- váhovacie funkcie  $w_1, w_2 : D_T \rightarrow [0, 1],$
- transformácia  $\mathbf{R} : D_T \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  Frenetovho repéru
- a odchýlenie  $\mathbf{s} : D_T \rightarrow E^2 \times \{0\}$  rezu od trajektórie,

potom šablónovaný povrch (*swept surface*) alebo zovšeobecnený valec (*generalized cylinder*)  $\mathbf{S}$  je definovaný ako množina bodov, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) = & \mathbf{T}(u) + ((\tilde{\mathbf{C}}(u, v) \cdot \mathbf{e}_1)[(1 - w_1)\mathbf{n}(u) + w_1\mathbf{e}_1] + \\ & + (\tilde{\mathbf{C}}(u, v) \cdot \mathbf{e}_2)[(1 - w_2)\mathbf{b}(u) + w_2\mathbf{e}_2]) \times \mathbf{R}(u), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}(u, v) = \sum_{i=1}^n f_i(u) \mathbf{C}_i(v) + \mathbf{s}(u), \quad (26)$$

pre každé  $u \in D_T, v \in D_{C_1}.$

Ak  $\mathbf{T}(u)$  je regulárna krivka (t.j. prvá derivácia  $\dot{\mathbf{T}}(u)$  nie je nulový vektor), je aspoň  $C^2$ -spojitá a vektory  $\dot{\mathbf{T}}(u), \ddot{\mathbf{T}}(u)$  sú lineárne nezávislé, môžeme zvoliť  $\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)$  podľa Frenetovho repéru, čiže

$$\mathbf{t}(u) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(u)}{\|\dot{\mathbf{T}}(u)\|}, \quad \mathbf{b}(u) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(u) \times \ddot{\mathbf{T}}(u)}{\|\dot{\mathbf{T}}(u) \times \ddot{\mathbf{T}}(u)\|}, \quad \mathbf{n}(u) = \mathbf{t}(u) \times \mathbf{b}(u), \quad (27)$$

(viď [Jbook] pre porovnanie).

Definícia 3.3 je vhodná na parametrické modelovanie zovšeobecnených valcov. Užívateľ zadá 2-rozmerné krivky rezu  $\mathbf{C}_i$ , 3-rozmernú krivku trajektórie  $\mathbf{T}$ , prípadne ešte transformáciu  $\mathbf{R}$  Frenetovho repéru počas šablónovania, váhovacie funkcie  $w_1, w_2$  a odchýlenie  $\mathbf{s}$ , čím definuje rôzne deformácie rezu – otáčanie v ľubovoľnom smere, škálovanie, deformovanie, zmenu excentricity a predovšetkým ľubovoľné interpolovanie medzi zadanými rezmi. Váhovacie funkcie  $w_1, w_2$  umožňujú plynulý prechod od úplného kopírovania dotyčnice a normály chrbtice po úplnú konštantnosť (viď obr. 18 a 19).

## Problémy s Frenetovými repériami

**Nulová krivosť** Problémy vzniknú v bodoch, kde krivosť  $K_{\mathbf{T}}(u)$  (*curvature*) chrbtice je nulová, t.j. kde  $\ddot{\mathbf{T}}(u)$  je násobkom  $\dot{\mathbf{T}}(u)$ . Príklady zahŕňajú inflexné body a body na priamkovom úseku chrbtice, kde  $\ddot{\mathbf{T}}(u) = 0$ . Takéto body sa zriedka vyskytujú na priestorových krivkách, ale sú bežnejšie na planárnych krivkách, ktoré sa často používajú v praxi. Na priamkovom úseku sa vektor  $\dot{\mathbf{T}}(u)$  zvykne definovať ako interpolácia  $\dot{\mathbf{T}}(u_1)$  a  $\dot{\mathbf{T}}(u_2)$ , kde  $u_1, u_2$  sú krajné body priamkového úseku.

**Prudké zmeny vektorov Frenetovho repéru** Ak je skoková nespojitosť v  $\ddot{\mathbf{T}}(u)$ , smery  $\mathbf{b}(u)$  a  $\mathbf{n}(u)$  sa v bode  $\mathbf{T}(u)$  prudko menia ([Bron90], s. 80). To sa môže stať v bodoch s nulovou krivosťou (vyššie spomenuté). Upozornenie: Ak je krivka reprezentovaná parametrickými splajnovými segmentami, k takýmto skokom dochádza ak segmenty nie sú na spojoch aspoň  $C^2$ -spojité (viď [Burf98]).

### 3.2.1 Použitie Fourierovej transformácie

#### Popis zovšeobecnenených valcov

Vo všeobecnejšej špecifikácii zovšeobecnenených valcov trajektória a rezy môžu byť definované ľubovoľnými krivkami. Ak reprezentujeme krivku trajektórie trojrozmernou parametrickou funkciou  $\mathbf{a}(u) = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$  a rez rovinnou krivkou  $\mathbf{c}(v) = (c_x(v), c_y(v))$ , potom rovnica povrchu zovšeobecneného valca  $\Gamma(u, v)$  formovaného šablónovaním  $\mathbf{c}(v)$  po  $\mathbf{a}(u)$  môže byť reprezentovaná ako

$$\Gamma(u, v) = \mathbf{a}(u) + \mathbf{c}(v) \cdot \mathbf{e}(u), \quad (28)$$

pre  $u_i \leq u \leq u_f$ ,  $v_i \leq v \leq v_f$ , kde  $\mathbf{e}(u) = (e_x(u), e_y(u))$  je lokálna súradnicová sústava, ktorá definuje orientáciu rovinnnej krivky  $\mathbf{c}(v)$  v trojrozmernom priestore. Orientácia vektorov sa bežne definuje referenčnou súradnicovou sústavou určenou Frenetovým repérom. Pre každý bod kostry definuje táto referenčná sústava tri ortogonálne vektory ktoré sú závislé na lokálnom tvare trajektórie. Rezy sú potom umiestnené do trojrozmerného priestoru namapovaním ich dvojrozmernej definície do jednej z rovín Frenetovho repéru (t.j. zväčša do normálovej roviny). Frenetov repér nie je definovaný pre body, v ktorých je krivosť nulová, preto je definícia repéru prispôbená nahradením normálového vektora repéru ľubovoľne zvoleným vektorom kolmým na trajektóriu<sup>[5]</sup>. V rozšírenej definícii zovšeobecnených valcov sa krivky rezu menia pozdĺž trajektórie. V tom prípade sú rezy predefinované a závisia od parametrov  $u$  a  $v$  ako  $\mathbf{c}(u, v) = (c_x(u, v), c_y(u, v))$ . Teda, z rovnosti (28) dostávame

$$\Gamma(u, v) = \mathbf{a}(u) + \mathbf{c}(u, v) \cdot \mathbf{e}(u). \quad (29)$$

<sup>5</sup>Na priamkovom úseku sa tento vektor zvykne definovať ako interpolácia normálových vektorov v krajných bodoch priamkového úseku, ak je tam krivosť nenulová

Dajú sa získať rôzne triedy zovšeobecnených valcov založených na špecifických definíciách funkcií  $\mathbf{a}(u)$  a  $\mathbf{c}(u, v)$ . Zahrnutím koncepcie interpolácie obrysov môžeme definovať špeciálny tvar rovnosti (29). Podľa neho je zmena tvaru po trajektórii určená dvomi rezmi  $\mathbf{c}_1(v)$  a  $\mathbf{c}_2(v)$  a interpolačným pravidlom. Teda krivka  $\mathbf{c}(u, v)$  v rovnosti (29) je definovaná funkciou ktorej počiatočná a koncová hodnota je daná

$$\mathbf{c}(u_i, v) = \mathbf{c}_1(v), \quad \mathbf{c}(u_f, v) = \mathbf{c}_2(v). \quad (30)$$

Pravidlo určujúce prechod je zadané funkciou prelínania  $S(u) \in [0, 1]$ . Teda,

$$\mathbf{c}(u, v) = S(u)\mathbf{c}_1(v) + (1 - S(u))\mathbf{c}_2(v). \quad (31)$$

Napríklad lineárna interpolačná schéma môže byť určená funkciou  $S(u) = (u - u_f)/(u_i - u_f)$ . Podľa interpolačnej schémy v rovnosti (31) je zovšeobecnený valec definovaný ako

$$\Gamma(u, v) = \mathbf{a}(u) + (S(u)\mathbf{c}_1(v) + (1 - S(u))\mathbf{c}_2(v)) \cdot \mathbf{e}(u). \quad (32)$$

Táto rovnosť poskytuje popis interpolácie krivky šablónovacími technikami a predpokladá, že obrysy  $\mathbf{c}_1(v)$  a  $\mathbf{c}_2(v)$  sú kompatibilné. V nasledujúcom odseku budeme uvažovať definíciu kompatibilných obrysov uniformnou parametrizáciou získanou Fourierovým rozšírením kriviek (viď [Agu99]).

### Parametrizácia kriviek rezu

V tomto odseku budeme uvažovať verziu rovnosti (32) pre kompatibilné obrysy, použijúc uniformnú parametrizáciu popísanú Fourierovým rozšírením. V tomto prístupe sú prechody medzi obrysami modulované frekvenčnými zložkami, ktoré určujú vlastnosti rozličných úrovní detailov kriviek. Ak uvažujeme rozšírenie kriviek  $\mathbf{c}_1(v)$  a  $\mathbf{c}_2(v)$  využitím Fourierových radov, rovnosť (32) sa dá prepísať ako

$$\Gamma(u, v) = \mathbf{a}(u) + \mathbf{F}^{-1}(S_1(u)\mathbf{F}(\mathbf{c}_1(v)) + S_2(u)\mathbf{F}(\mathbf{c}_2(v))) \cdot \mathbf{e}(u) \quad (33)$$

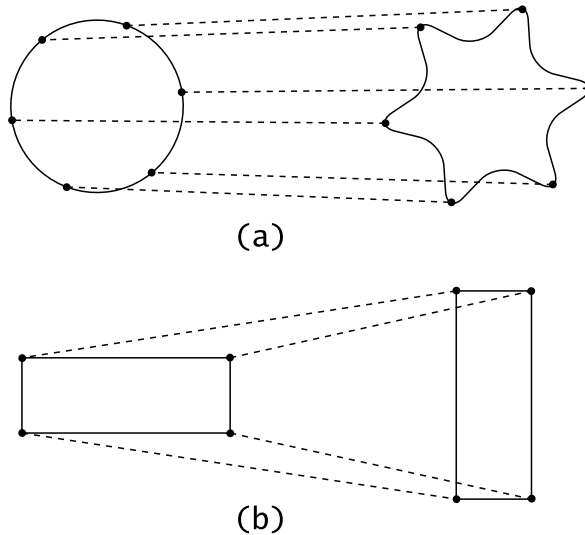
kde  $\mathbf{F}$  resp.  $\mathbf{F}^{-1}$  označujú Fourierovu transformáciu resp. inverznú Fourierovu transformáciu. Funkcie  $S_1(u)$  a  $S_2(u)$  modulujú frekvencie tvarov v transformácii, udávajú koľko z informačnej frekvencie z počiatočného (*initial*) a z koncového (*final*) rezu je zahrnuté v nejakom medzistupňovom reze. V tejto definícii sú dané počiatočné a koncové podmienky  $S_1(u_i) = 1$ ,  $S_2(u_i) = 0$ ,  $S_1(u_f) = 0$  a  $S_2(u_f) = 1$ . Tieto podmienky možno definovať lineárnym vzťahom medzi funkciami (t.j.  $S_2(u) = 1 - S_1(u)$ ), ale sú možné aj iné funkcie, ktoré kombinujú frekvenčné zložky oboch tvarov. Fourierovo rozšírenie  $\mathbf{c}_1(v)$  sa dá získať tak, že si predstavíme túto krivku vloženú do komplexnej roviny. Jej Fourierovo rozšírenie sa dá potom diskkrétne definovať eliptickými koeficientami

$$\begin{aligned} a_{1_{x_k}} &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m x_i \cos(kv), & b_{1_{x_k}} &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y_i \cos(kv), \\ a_{1_{y_k}} &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m x_i \sin(kv), & b_{1_{y_k}} &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y_i \sin(kv), \end{aligned} \quad (34)$$

kde  $(x_i, y_i)$  sú reálne a imaginárne zložky  $m$  bodov na krivke  $\mathbf{c}_1(v)$ . V tomto rozšírení krivku dostaneme ako sumu reálnej a komplexnej funkcie. Na definovanie rozšírenia v Euklidovskej rovine uvažujeme krivky  $\mathbf{c}_1(v)$  a  $\mathbf{c}_2(v)$  zložené z dvoch ortonormálnych zložiek. Konkrétne,  $\mathbf{c}_1(v) = (c_{1_x}(v), c_{1_y}(v))$  a  $\mathbf{c}_2(v) = (c_{2_x}(v), c_{2_y}(v))$ . Ak stotožníme zložky každej krivky s reálnou a imaginárnou osou komplexnej roviny, získame Fourierovo rozšírenie kriviek. Teda

$$\begin{aligned} c_{1_x} &= \sum_{i=1}^n (a_{1_{x_k}} \cos(kv) + b_{1_{x_k}} \sin(kv)), & c_{1_y} &= \sum_{i=1}^n (a_{1_{y_k}} \cos(kv) + b_{1_{y_k}} \sin(kv)), \\ c_{2_x} &= \sum_{i=1}^n (a_{2_{x_k}} \cos(kv) + b_{2_{x_k}} \sin(kv)), & c_{2_y} &= \sum_{i=1}^n (a_{2_{y_k}} \cos(kv) + b_{2_{y_k}} \sin(kv)), \end{aligned} \quad (35)$$

kde  $n$  označuje počet koeficientov použitých na aproximovanie krivky a koeficienty  $a_{2_{x_k}}$ ,  $a_{2_{y_k}}$ ,  $b_{2_{x_k}}$ ,  $b_{2_{y_k}}$  sú vypočítané analogicky k rovnosti (34). V tejto reprezentácii sme potlačili člen Fourierovho radu s nulovou frekvenciou, keďže pozícia krivky je určená  $\mathbf{a}(u)$  bez ďalších posunutí.



**Obr. 20:** Príklady zodpovedajúcich si bodov definovaných na dvoch dvojrozmerných obrysoch – (a) použitím parametrizácie oblúčovej miery; (b) určením význačných bodov.

Na dosiahnutie uniformnej parametrizácie dvoch kriviek rezu, ktoré určujú zovšeobecnený valec je nutné dať rovnaké hodnoty parametra  $v$  zodpovedajúcim bodom na krivkách  $\mathbf{c}_1(v)$  a  $\mathbf{c}_2(v)$ . Eventuálne môže byť uniformná parametrizácia definovaná použitím oblúčovej miery, kde hodnota parametra  $v$  priradená každému bodu obrysu predstavuje vzdialenosť od počiatočného bodu po obryse, normalizovanú  $2\pi$ . Keďže krivky sú vykresľované v digitálnych obrázkoch, vzdialenosť môže byť určená vypočítaním reťazcového kódu (*chain code*) obrysu. Obrázok 20a ukazuje príklad zodpovedajúcich si bodov definovaných pre dva dvojrozmerné obrysy použitím parametrizácie oblúčovej miery. Môžeme zahrnúť ďalšie parametrizácie na definovanie zodpovedajúcich bodov. Napríklad význačné body môžu byť skompatibilnené, ak im priradíme tú istú

hodnotu parametra  $v$ . Obrázok 20b ukazuje príklad, kde rohy určené v každom obryse sú použité na definovanie rozdelenia parametra  $v$ , a teda časti kriviek medzi význačnými bodmi môžu byť uniformne rozdelené normalizovanou parametrizáciou oblúkovej miery. Dôsledkom parametrizácie tvaru je, že rohové body sú zosúladené. Zložitejšie zhodovania medzi bodmi sa dajú získať inými technikami analýzy tvarov, akými sú zhoda krivosti alebo zovšeobecnené symetrie (*generalized symmetries*) (viď [Agu99]).

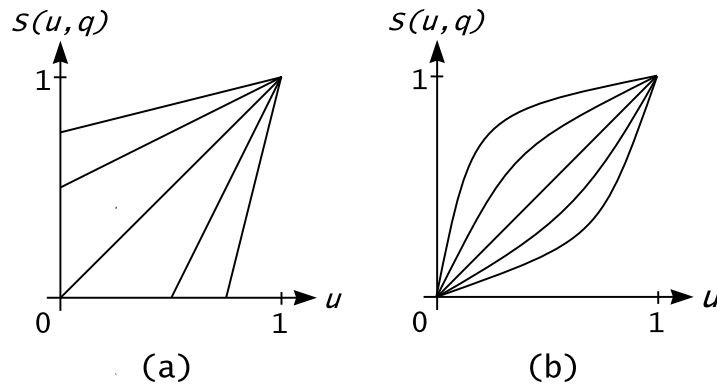
Zahrnutím Fourierovho rozšírenia (popísaného v rovnostiach (34) a (35)) do definície zovšeobecnených valcov popísanej v rovnosti (33), bude tvar medzistupňových rezov určený kombinovanou formou koeficientov  $a_{1x_k}, b_{1x_k}, a_{1y_k}, b_{1y_k}$  a  $a_{2x_k}, b_{2x_k}, a_{2y_k}, b_{2y_k}$ . Teda

$$\begin{aligned} \Gamma(u, v) = \mathbf{a}(u) + \sum_{k=1}^m ( [S_1(u) \quad S_2(u)] \begin{bmatrix} a_{1x_k} & b_{1x_k} \\ a_{2x_k} & b_{2x_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(kv) \\ \sin(kv) \end{bmatrix} \mathbf{e}_x(u) + \\ + [S_1(u) \quad S_2(u)] \begin{bmatrix} a_{1y_k} & b_{1y_k} \\ a_{2y_k} & b_{2y_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(kv) \\ \sin(kv) \end{bmatrix} \mathbf{e}_y(u) ). \end{aligned} \quad (36)$$

V tomto vyjadrení funkcie  $S_1(u)$  a  $S_2(u)$  menia frekvenčné zložky uniformne (t.j. všetky frekvencie sú kombinované v rovnakom pomere). Na zavedenie Fourierovho morfovania musia byť funkcie  $S_1(u)$  a  $S_2(u)$  závislé na frekvenčnej zložke  $k$ . Hoci toto rozšírenie poskytne všeobecnú schému na deformovanie alebo morfovanie rezov pozdĺž trajektórie, môže byť nepraktické, pretože obsahuje veľa parametrov špecifikujúcich interpolačnú funkciu pre každú frekvenciu. Vhodnejšie je uvažovať, že všetky frekvencie podliehajú zmene parametrickej funkcie prelínania. Podľa toho je konkrétna zmena pre každú frekvenciu definovaná priradením hodnoty jednému parametru. Napríklad, jednoduchá funkcia prelínania je daná lineárnou interpoláciou v tvare

$$S(u, q) = \frac{u - q}{1 - q} \quad (37)$$

Interpolácia definovaná touto lineárnou funkciou je ukázaná na obr. 21a.



**Obr. 21:** Príklady funkcií prelínania: (a) lineárna interpolácia pre hodnoty  $q = -3, -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  zľava, (b) interpolácia racionálnym polynómom pre hodnoty  $q = 5, 2, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  zľava.

K obr. 21: Parameter  $q$  zabezpečuje ovládanie „miery zmeny“ (*rate-of-change*) frekvenčnej zložky. Interpolácia na obr. 21b zodpovedá racionálnemu polynómu

$$S(u, q) = \frac{(1 + q)u}{1 + qu}, \quad (38)$$

ktorý umožňuje interpoláciu s hladkou zmenou vo frekvenčnej zložke. Napríklad, keď  $q = 0.75$ , lineárna zmena v rovnosti (37) spôsobí nulovú frekvenčnú zložku pre tri štvrtiny krivky a celá transformácia sa uskutoční na poslednej štvrtine krivky. Tá istá hodnota  $q$  v rovnosti (38) má podobný efekt, ale hodnoty  $S(u, q)$  predstavujú hladkú transformáciu. Špecifikácia transformácie založená na týchto funkciách je definovaná zvolením hodnoty  $q$  pre každú frekvenčnú zložku  $k$ . Nasledovne môže byť funkcia prelínania v rovnostiach (37) a (38) predefinovaná ako

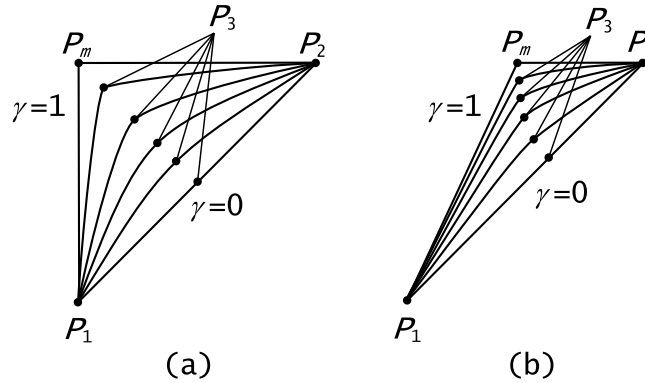
$$S(u, q(k)) = \frac{u - q(k)}{1 - q(k)}, \quad \text{a} \quad S(u, q(k)) = \frac{(1 + q(k))u}{1 + q(k)u}. \quad (39)$$

Týmto spôsobom je zmena alebo morfovanie pozdĺž krivky trajektórie úplne určené definovaním diskretnej funkcie  $q(k)$ . Každá hodnota tejto funkcie má intuitívny význam vzhľadom na rýchlosť zmeny rôznych úrovní detailu (*levels of detail*) tvaru. Ich hodnoty závisia na spôsobe, akým sa rez mení po trajektórii pre jednotlivé objekty. Všeobecne je vhodné interpolovať nízkymi frekvenciami skôr ako vysokými frekvenciami. Týmto spôsobom sú najprv určené hrubé črty a potom sú pridávané jemné detaily. Výsledkom je dosiahnutie hladkých prechodov medzi rezmi. Vysoké hodnoty funkcie  $k$  určujú vysoké frekvencie, ktoré umožňujú jemný detail, kým nízke hodnoty funkcie  $k$  určujú hrubý tvar obrysov. Takže hodnota funkcie  $q(k)$  určuje rýchlosť zmeny rôznych úrovní detailu po obryse (viď [Agua99]).

### Definícia krivky trajektórie

Na zobrazenie zovšeobecneného valca je nutné vygenerovať množinu rezov a potom skonštruovať plochu medzi nimi. Rezy môžu byť definované určením množiny bodov na krivke trajektórie  $\mathbf{a}(u)$  buď iteratívnym vyčísl'ovaním, alebo procesom podrozdelenia (*subdivision*). V iteratívnom postupe sú body na krivke generované inkrementálne rozmiestnenými hodnotami parametra  $u$ . Keďže krivka trajektórie je definovaná v trojrozmernom priestore, konštantné prírastky nezabezpečia, že projekcia krivky trajektórie v obrazovej rovine bude mať regulárne rozdelenie. Efektívnejší spôsob určovania bodov na krivke iteratívnym vyčísl'ovaním je pomocou diferencí. Techniky podrozdeľovania zodpovedajú v podstate efektívnej implementácii adaptívneho vyčísl'ovacieho postupu. Tieto techniky boli vo veľkom používané na zobrazovanie niekoľkých grafických modelov ako sú splajny, parametrické plochy, polynomiálne plochy a vyhladzovanie mnohostenov. Efektívne implementácie podrozdeľovacích techník závisia na presnosti a rýchlosti generovania bodov podrozdelenia. Generovacia technika predložená v tomto odseku používa prístup podrozdelenia na určenie bodov na krivke trajektórie, ako aj bodov na krivkách rezov. Krivky trajektórie sú určované rekurzívnym postupom, ktorý zabezpečuje rýchly výpočet polohy rezu s adekvátnym ovládaním hladkosti ohybu, a predsa vyžaduje len malý počet parametrov. Postup na získavanie bodov rezových kriviek rekurzívne podrozdelí krivku z rovnosti (36) podľa parametra  $v$ . Body na dvoch susedných krivkách rezov vytvárajú malé plôšky (štvoruholníky),

ktoré môžu byť použité ako mnohouholníková reprezentácia. Navyiac, plôšky môžu byť robené o veľkosti jedného pixelu na zobrazovanie exaktného povrchu zovšeobecneného valca. Konštrukcia



**Obr. 22:** Príklady definície dvojrozmernej krivky trajektórie. (a) Bod ohybu  $P_m$  definovaný v strede. (b) Bod ohybu  $P_m$  definovaný vyššie.

krivky trajektórie je znázornená na obr. 22. Tento obrázok ukazuje dva príklady určenia krivky trajektórie v dvojrozmernom priestore. Body  $P_1$  a  $P_2$  je počiatočným resp. koncovým bodom krivky a bod  $P_m$  určuje polohu bodu ohybu s parametrom  $\gamma$  definujúcim krivosť. Rekurzívnym postupom je určený nový bod ( $P_3$ ) medzi dvoma bodmi na krivke ( $P_1$  a  $P_2$ ) použitím lineárneho vzťahu. Teda

$$P_3 = \gamma P_m + \frac{P_1 + P_2}{2}(1 - \gamma). \quad (40)$$

Nové body medzi  $P_1$  a  $P_3$ , resp. medzi  $P_3$  a  $P_2$  sú vypočítané tým istým postupom. Pre tieto segmenty sú určené nové body ohybu ako

$$P_{m_1} = \frac{P_1 + P_m}{2}, \quad P_{m_2} = \frac{P_2 + P_m}{2}, \quad (41)$$

Tá istá procedúra je aplikovaná v následných podrozdeleniach. Obr. 22a ukazuje, ako závisí hranatosť alebo hladkosť krivky na hodnotách parametra  $\gamma$ . Obr. 22b ukazuje, ako bod ohybu určuje pozíciu maximálnej krivosti. Rozšírenie na krivky v trojrozmernom priestore je priamochiare. Krivka generovaná týmto rekurzívnym postupom je obmedzená na jeden ohyb. Počiatočný obrys  $c_1(v)$  a koncový obrys  $c_2(v)$  sú definované v počiatočnom a v koncovom bode krivky trajektórie. Toto implikuje, že krivka trajektórie nemôže mať žiaden priesečník a že definícia nedovoľuje použitie viacerých obrysů. Napriek tomu je možné získať komplexné zovšeobecnené valce s trajektóriou obsahujúcou niekoľko kriviek a prienikov, a to definovaním viacerých kriviek trajektórie v postupnosti tak, že koncový bod jednej krivky trajektórie je zároveň počiatočným bodom nasledujúcej. Použitie viacerých častí taktiež umožňuje zahrnutie viacnásobných obrysů, lebo obrys v bode spájajúcom po sebe idúce krivky trajektórie, môže byť určený ľubovoľne. Hoci predchádzajúca rekurzívna definícia kriviek trajektórie môže byť použitá na výpočet ako dotyčnicových tak aj normálových vektorov (teda na určenie lokálnej súradnicovej sústavy danej Frenetovým repérom), je možná všeobecnejšia špecifikácia zovšeobecneného valca – zahrnutím

orientácie rezov v interpolačnej sústave. Takže môžeme špecifikovať orientáciu obrysu pre počiatkový a koncový bod krivky trajektórie a potom určiť orientáciu medzistupňového rezu ako interpolačnú funkciu. V tejto špecifikácii, ak je smer po sebe idúcich obrysov v bodoch spojov rovnaký (bez ohľadu na ich hodnoty), potom čiastková interpolácia trajektórie môže mať spojitú prvú deriváciu. Toto sa podobá Hermitovskej interpolačnej schéme, ale špecifikácia častí dovoľuje definovanie nespojitostí v bodoch ohybu. Keď je orientácia krivky trajektórie považovaná za nezávislú od Frenetovho repéru, potom je nutné špecifikovať inú interpolačnú funkciu, ktorá definuje zmeny orientácie od počiatkového po koncový obrys. Navrhujeme definovať orientáciu medzistupňových obrysov ako lineárnu interpoláciu dotykového a normálového vektora v počiatkovom a koncovom bode krivky trajektórie. Avšak aj iné interpolácie môžu byť zahrnuté na zvýšenie popisnej sily. Táto definícia poskytuje viac kontroly nad orientáciou plochy ako použitie Frenetovho repéru. Bežná implementácia pozostáva z určenia implicitných hodnôt počiatkového a koncového rezu podľa krivosti krivky trajektórie. Tieto hodnoty potom môžu byť menené užívateľom na získanie celej palety zovšeobecnených valcov. (vid' [Aqua99]).

## 3.3 Implicitný prístup

### 3.3.1 Implicitne definované plochy (Iso-surfaces)

#### Definícia

Myšlienka používania izoplôch pre geometrické modelovanie bola pôvodne navrhnutá Blinnom v roku 1982 [Blin82]. V tomto modeli, implicitný 3D objekt je definovaný množinou stavebných prvkov (*primitives*)  $P_i$ , z ktorých každý je považovaný za zdroj poľa potenciálu  $F_i(x, y, z)$ . V danom bode  $M(x, y, z)$  euklidovského priestoru sa skombinujú polia generované všetkými stavebnými prvkami, čím vzniká globálna funkcia poľa  $F(x, y, z)$ :

$$F(x, y, z) = \sum_{i=1}^n F_i(x, y, z) \quad (42)$$

3-rozmerný povrch  $\mathcal{S}$  môže byť generovaný vypočítaním bodov, pre ktoré sa  $F(x, y, z)$  rovná danej prahovej hodnote  $T$ :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = T\} \quad (43)$$

O funkcii poľa  $F_i(x, y, z)$  sa dá uvažovať ako o celku, radšej však použijeme peknú alternatívu – definovaním  $F_i$  ako funkcie zloženej z dvoch funkcií,  $F_i(x, y, z) = f_i \circ d_i(x, y, z)$ , kde

- $d_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  je funkcia vzdialenosti,
- $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia potenciálu.

Funkcia  $d_i(x, y, z)$  charakterizuje vzdialenosť medzi bodom  $M(x, y, z)$  a stavebným prvkom  $P_i$ , zatiaľ čo funkcia  $f_i(d)$  charakterizuje spájacie vlastnosti  $P_i$  (viď [Blan95]). Rozdelenie funkcie poľa na tieto dva komponenty poskytuje spôsob zatriedenia už existujúcich modelov, ktoré môžu byť porovnané buď v spôsobe, akým počítajú funkciu vzdialenosti alebo funkciu potenciálu – (viď [Cres96]).

#### Funkcia potenciálu

Veľa formulácií funkcie  $f_i(d)$  bolo predložených v predchádzajúcich prácach (viď [Blan95] pre prehľad). V tejto implementácii je použitý jednoduchý variant funkcie navrhnutej v [Nish85]:

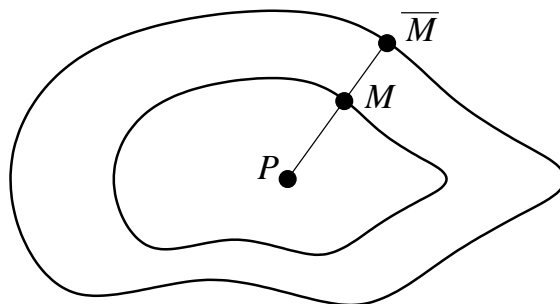
$$\forall d \in \mathbb{R}^+ \quad f(d^2) = \begin{cases} \left( \frac{2(1-d^2)}{p(4-p)} \right)^2 & \text{ak } d^2 < 1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (44)$$

V tejto formulácii je parameter  $p \in [0, 1]$  stupňom voľnosti (*degree of freedom*) umožňujúci užívateľovi ovládať spájanie: čím vyššia hodnota, tým jemnejší spoj. Je potrebné podotknúť navyše dve veci o rovnosti (44). Po prvé, všimnime si, že hodnota  $2/p(4-p)$  môže byť predvypočítaná

pre každý stavebný prvok. Výpočet vyžaduje iba 4 operácie v pohyblivej rádovej čiarku (1 test, 1 odčítanie a 2 násobenia). Po druhé, kvôli svojej asymetrii nad a pod prahovou hodnotou  $T = 1$ , funkcia  $F(d)$  môže byť použitá, len keď všetky stavebné prvky majú kladné potenciály. Keď sú požadované záporné stavebné prvky, mala by byť použitá symetrická funkcia (niektoré príklady sú predložené v [Wywi89], [Blan95]) – (viď [Cres96]).

### Funkcia vzdialenosti

Táto implementácia je založená na myšlienke *anizotropných funkcií vzdialenosti*, ktorá bola predložená v [Blan95] a ktorá tu bude rozšírená. Základná myšlienka je definovať každý stavebný prvok ako jediný bod zdroja asociovaný s anizotropným poľom (t.j. pole závisiace na smere od stavebného prvku). Preto jeden stavebný prvok generuje množinu koncentrických hviezdicovitých izoplôch závisiacich na hodnote prahu. Jeden z týchto povrchov sa nazýva *hraničná plocha* (*front surface*) a reprezentuje maximálny rozsah poľa (t.j. pole mimo tohto limitu nie je). Teda, daný bod  $M$  je charakterizovaný pomerom vzdialeností (*distance ratio*)  $d = \|PM\| / \|P\bar{M}\|$ , kde  $\bar{M}$  je prienik hraničnej plochy a priamky spájajúcej  $P$  s  $M$  (viď obr. 23). Výsledná hodnota poľa v bode  $M$  sa získa vypočítaním funkcie potenciálu  $f(d)$  pre pomer vzdialeností  $d$ . Táto myšlienka pomeru vzdialeností bola predložená vo [Wywi89] pre špecifickú triedu hraničných plôch (menovite superkvadriky), ale môže byť použitá pre ľubovoľné hviezdicovité objekty. V nasledujúcich odsekoch bude navrhnutých niekoľko efektívnych postupov na generovanie hraničných plôch pre rozličné útvary (viď [Cres96]).



Obr. 23: Bod zdroja  $P$  s anizotropnou funkciou poľa.

### 3.3.2 Rotačné stavebné prvky

#### Definície

Prvou možnosťou generovania hraničnej plochy anizotropnou funkciou vzdialenosti je definovať to, čo nazývame rotačné stavebné prvky (*rotational primitives*) (tento pojem je prebratý z klasifikácie šablónovaných objektov predloženej v [Bron89]). V tom modeli je každý stavebný prvok určený bodom  $P$  a vektorom  $v$ . Každý bod  $M(x, y, z)$  euklidovského priestoru môžeme dať do

vztáhu so stavebným prvkom  $(P, \mathbf{v})$  vypočítaním jeho polárnych „súradníc“<sup>[6]</sup>:

$$t = \|PM\| \quad \text{a} \quad \theta = \arccos\left(\frac{PM \cdot \mathbf{v}}{\|PM\| \|\mathbf{v}\|}\right), \quad (45)$$

ale tento proces vyžaduje drahý výpočet (druhá odmocnina, arccos). Ponúka sa alternatívne riešenie, nazývané pseudopolárne „súradnice“<sup>[7]</sup>, kde sa bude počítať len:

$$t^2 = \|PM\|^2 \quad \text{a} \quad u = \text{sign}(PM \cdot \mathbf{v}) \frac{(PM \cdot \mathbf{v})^2}{\|PM\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}. \quad (46)$$

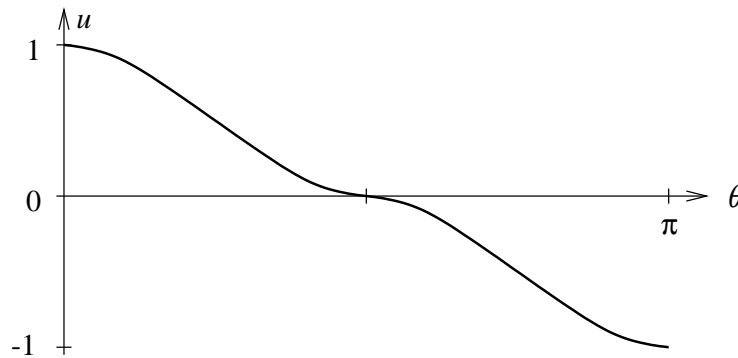
Pseudopolárny „uhol“  $u$  je v skutočnosti znamienkovaná druhá mocnina kosínu polárneho uhla  $\theta$  a je takmer lineárne závislá od polárneho uhla  $\theta$  ako je ukázané na obr. 24. Teraz na vytvorenie rotačného stavebného prvku jednoducho definujeme funkciu profilu (*profile function*) použitím týchto pseudopolárnych súradníc:

$$\forall u \in [-1, 1] \quad r^2 = \rho(u) \quad (47)$$

Je zrejmé, že takto definovaný 2D profil je symetrický nad a pod osou otáčania. Pre každý bod  $M(t^2, u)$  môže byť vypočítaný zodpovedajúci bod  $\overline{M}(r^2, u)$  na krivke rezu (viď obr. 23) rovnosťou (47). Nakoniec, pomer vzdialeností

$$d^2 = \frac{t^2}{r^2} \quad (48)$$

medzi týmito dvomi bodmi je použitý vo funkcii potenciálu  $f(d^2)$  (rovnosť (44)) na získanie hodnoty poľa v  $M$ . Všimnime si, že funkcia profilu sa vyskytuje vždy v menovateli, teda je zvyčajne efektívnejšie zdefinovať funkciu  $\rho(u)$ , ktorá priamo počíta  $1/r^2$  ako počítať  $r^2$  (viď [Cres96]).



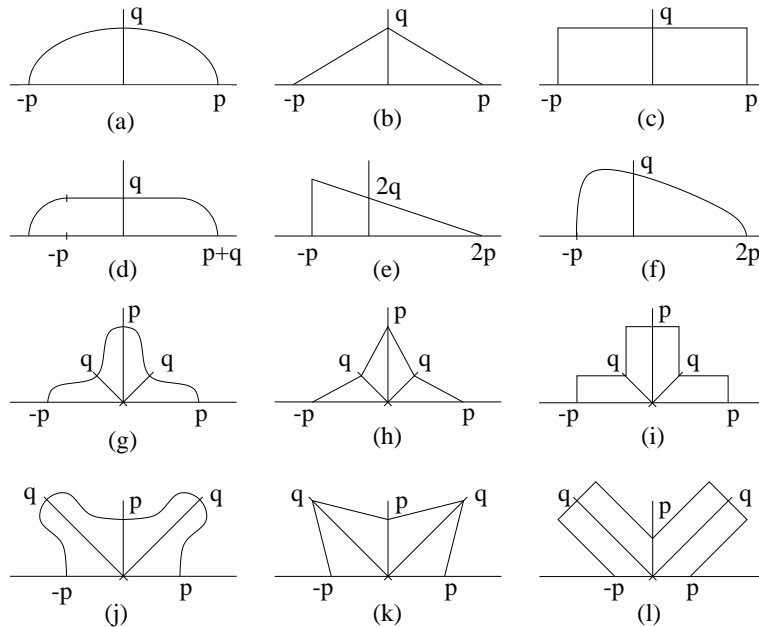
**Obr. 24:** Vztah medzi pseudopolárnym a polárnym uhlom.

<sup>6</sup>Sú to skôr pseudosúradnice, lebo podľa nasledujúcej rovnosti budú mať všetky body na kružnici v rovine kolmej na  $\mathbf{v}$  so stredom na priamke  $P\mathbf{v}$  rovnaké „súradnice“

<sup>7</sup>pozri poznámku 6

### Analytické profily

Najzreteľnejším riešením ako definovať funkciu profilu  $\rho(u)$  je použitím špecifickej analytickej funkcie. Myšlienka v pozadí je ponúknuť knižnicu základných tvarov, ktoré sú priamo použiteľné. Okrem toho, ak obsahujú vo svojich formuláciách nejaké stupne voľnosti, pre užívateľa je možné ovládať výsledné tvary. Napríklad obr. 25 ukazuje niekoľko príkladov profilov. Každá funkcia ponúka dva tvarovacie parametre  $p$  a  $q$ , ktoré majú intuitívne a predpokladateľné účinky na daný profil. Tu sú niektoré zodpovedajúce formulácie pre obr. 25:

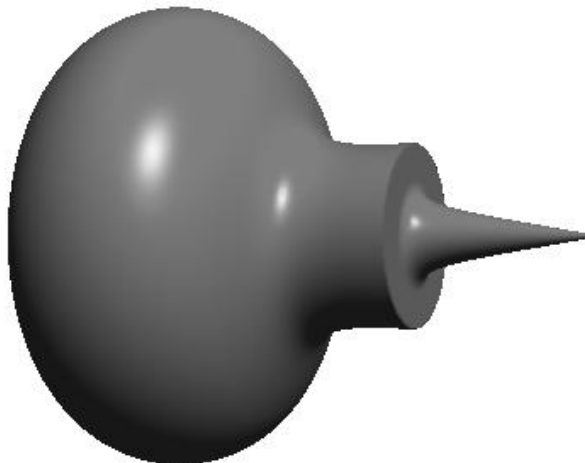


Obr. 25: Príklady analytických profilových funkcií.

- Profil (a) :  $\frac{1}{r^2} = \frac{|u|}{p^2} + \frac{1-|u|}{q^2}$
- Profil (c) :  $\frac{1}{r^2} = \begin{cases} \frac{1-|u|}{q^2}, & \text{ak } |u| < \frac{p^2}{p^2+q^2} \\ \frac{|u|}{p^2}, & \text{inak} \end{cases}$
- Profil (g) :  $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{p^2} + \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right) 4|u|(1 - |u|)$
- Profil (k) :  $\frac{1}{r} = \begin{cases} \frac{1}{p}\sqrt{|u|} + \left(\frac{\sqrt{2}}{q} - \frac{1}{p}\right)\sqrt{1-|u|}, & \text{ak } u < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{p}\sqrt{1-|u|} + \left(\frac{\sqrt{2}}{q} - \frac{1}{p}\right)\sqrt{|u|}, & \text{inak} \end{cases}$

Efektivita je nepochybne hlavným prínosom tohto prístupu analytickými funkciami: stojí to zvyčajne menej ako tucet operácií v pohyblivej rádovej čiarky na vypočítanie funkcie poľa generovaného takýmto stavebným prvkom v danom bode  $M$ . Okrem toho obmedzená množina stavebných prvkov nie je tak obmedzujúca v implicitnom svete vďaka vlastnosti spájania.

Pre ilustráciu, na obr. 26 je objekt zložený z troch analytických stavebných prvkov (v poradí zľava z eliptického, obdĺžnikového a trojuholníkového profilu). Nakoniec poznamenajme, že je možné skombinovať viacero funkcií dohromady (priemerovaním, kompozíciou, interpoláciou) – teda paleta možných tvarov môže byť značne rozšírená (napr. profil (f) bol získaný lineárnou kombináciou kružnice a trojuholníka) – (viď [Cres96]).



Obr. 26: Jednoduchý objekt definovaný tromi rotačnými stavebnými prvkami.

### „Free-form“ profily<sup>[8]</sup>

Aj keď analytické profily poskytujú veľkú paletu tvarov, hodnotným rozšírením by bolo dovoliť užívateľovi skonštruovať profil metódou free-form. Samozrejme, tento „free-form“ profil musí takisto spĺňať hlavné obmedzenie anizotropného modelu vzdialeností a tým je, že profil musí mať hviezdnicovitý tvar podľa bodu zdroja. Jedným zo spôsobov ako zabezpečiť túto vlastnosť je vyjadriť profil v tvare funkcie:  $r^2 = \rho(u)$ .

Sú navrhnuté dva rozdielne prístupy na vytvorenie free-form profilov. V oboch prístupoch užívateľ navrhne svoj tvar vytvorením množiny riadiacich bodov  $P_k(x_k, y_k)$ , ktoré sú potom konvertované do pseudopolárnych súradníc  $(r_k^2, u_k)$ . Počnúc riadiacimi bodmi, celý profil môže byť vygenerovaný interpolačným procesom založeným na čiastkových polynómoch (t.j. definovaním funkcie  $r^2 = \rho(u)$  ako  $\forall k = 0 \dots n, \rho(u_k) = r_k^2$ ). V prvom prístupe je použitá po častiach lineárna interpolácia na vytvorenie „ostrých“  $C^0$ -spojitých tvarov (viď obr. 27a), zatiaľ čo druhý prístup používa po častiach kubickú Hermitovskú interpoláciu, ktorá umožňuje „hladké“  $C^1$ -spojité tvary (viď obr. 27b).

Presnejšie, segment  $\rho_k(u)$  profilu medzi riadiacimi bodmi  $P_k$  a  $P_{k+1}$  je určený:

- **lineárnou interpoláciou:**

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{t}}{x} + \frac{\sqrt{1-t}}{y}, \quad \text{kde } t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k},$$

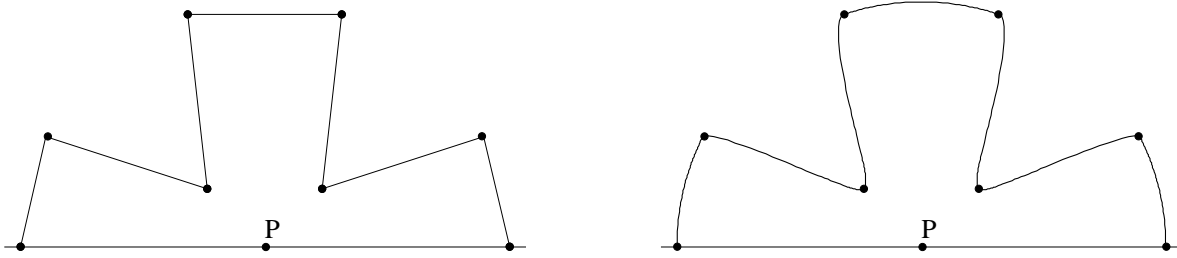
<sup>8</sup>„free-form“ deformácie spočívajú v modifikovaní priestoru okolo modelu – využívajú 3-rozmernú sieť s riadiacimi vrcholmi, napr. Bezierovo alebo NURBS teleso.

$$x = x_k - y_k \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} \quad \text{a} \quad y = y_k - x_k \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

• **Hermitovskou interpoláciou:**

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_k^2} + p t + \left( \frac{3}{r_{k+1}^2} - \frac{3}{r_k^2} - 2p - q \right) t^2 + \left( p + q - \frac{2}{r_{k+1}^2} - \frac{2}{r_k^2} \right) t^3,$$

$$\text{kde } t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k}, \quad p = \frac{m_k}{u_{k+1} - u_k} \quad \text{a} \quad q = \frac{m_{k+1}}{u_{k+1} - u_k},$$



**Obr. 27:** (a) Ostrá (lineárna) interpolácia (b) hladká (kubická) interpolácia.

pričom  $m_k \in \mathbb{R}$  je dodatočná hodnota poskytnutá užívateľom pre každý bod  $P_k$ , ktorá ovláda smer dotyčnice krivky v  $P_k$  (treba si uvedomiť, že smer je skalár a nie vektor;  $m_k$  je ako polárna súradnica  $u$ ). Napríklad, keď  $m_k = 0$ , dotyčnica v  $P_k$  je kolmá na radiálny smer  $PP_k$  (viď [Cres96]).

### 3.3.3 Translačné stavebné prvky

#### Definícia

Druhou možnosťou generovania hraničnej plochy s anizotropnou funkciou vzdialenosti je definovať to, čo nazývame translačné stavebné prvky (*translational primitives*) (znovu meno je prevzaté z klasifikácie šablónovaných objektov predloženej v [Bron89]). V tomto modeli, každý stavebný prvok je určené bodom  $P$  a tromi vektormi  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  určujúcimi lokálny repér (*local frame*) s počiatkom v  $P$ . Preto každý bod  $M(x, y, z)$  euklidovského priestoru je vo vzťahu k stavebnému prvku  $(P, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  svojimi lokálnymi súradnicami  $(a, b, c)$ :

$$a = \frac{PM \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \quad b = \frac{PM \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \quad c = \frac{PM \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|^2}$$

Pseudopolárne súradnice možno ľahko rozšíriť na pseudosférické vypočítaním:

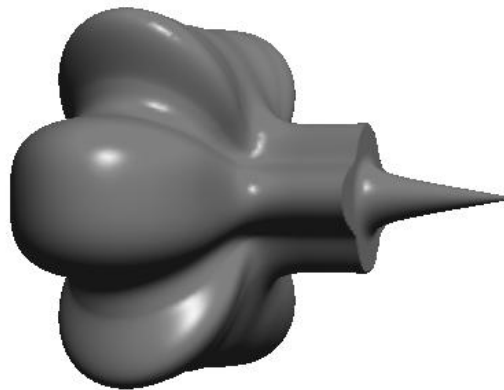
$$t^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad u = \text{sign}(c) \frac{c^2}{t^2} \quad v = \text{sign}(a) \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad (49)$$

kde  $u$  (resp.  $v$ ) predstavuje znamienkovanú mocninu kosínu uhla  $\theta$  (resp.  $\varphi$ ). Na vytvorenie translačného stavebného prvku definujeme dve rôzne funkcie s týmito pseudosférickými súradnicami – funkciu profilu  $\rho(u)$  a funkciu rezu (*cross-section function*)  $\sigma(v)$ :

$$\forall u \in [-1, 1] \quad r^2 = \rho(u) \quad \text{a} \quad \forall v \in [-1, 1] \quad s^2 = \sigma(v) \quad (50)$$

Aby to bolo v súlade s translačným modelom existujúcim v parametrických plochách [Bron89], obe funkcie musia byť zlúčené na získanie nasledujúceho výsledku: rez je posúvaný po priamke (napr. osi  $c$ ) a súčasne škálovaný funkciou profilu. V našom prípade všetko čo potrebujeme je vypočítať pomer vzdialeností  $d$ , ktorý charakterizuje pozíciu daného bodu  $M(t^2, u, v)$  vzhľadom na stavebný prvok  $(P, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ . Vyjadrenie tohto pomeru vzdialeností nie je triviálne, ako bolo v prípade rotačných stavebných prvkov, ale jeho odvodenie vyžaduje iba jednoduchú trigonometriu:

$$d^2 = \frac{\frac{a^2+b^2}{s^2} + c^2}{r^2} \quad (51)$$

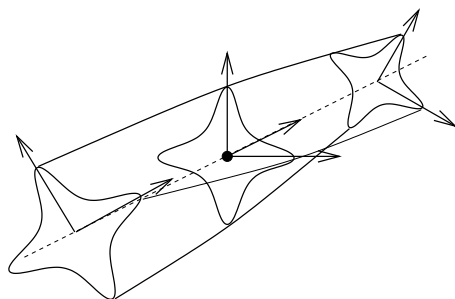


**Obr. 28:** Jednoduchý objekt určený tromi translačnými stavebnými prvkami.

Ten istý proces, ktorý bol popísaný v odseku 3.3.2 na určenie funkcií profilu (analytických alebo free-form), môže byť zjavne použitý na vytvorenie rozličných funkcií rezu. Porovnanie rovností (47) a (51) ukazuje, že translačné základné telesá zahŕňajú iba o kúsok viac v porovnaní s rotačnými stavebnými prvkami, hoci výsledné tvary môžu byť oveľa zložitejšie. Napríklad, obr. 28 predstavuje objekt veľmi podobný objektu na obr. 26, pre ktorý ale boli použité iné analytické rezy (viď [Cres96]).

### 3.3.4 Skrutky

Klasickým rozšírením používaným v parametrickom translačnom modeli je pridanie efektu skrúcania, a to rotovaním rezov počas posúvania po trajektórii (viď obr. 29). To isté rozšírenie sa dá použiť pri našom implicitnom translačnom stavebnom prvku, a to otáčaním vektorov  $\mathbf{a}$



Obr. 29: (a) Skrúcanie rezu,



(b) skrútený translačný stavebný prvok.

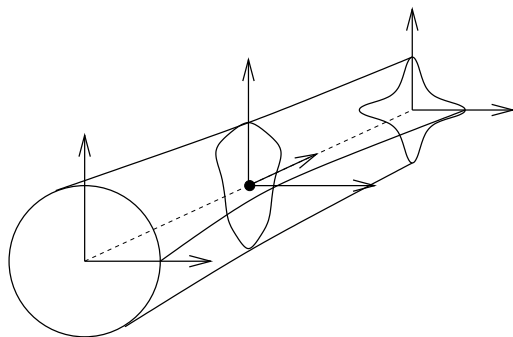
a  $\mathbf{b}$  podľa hodnoty  $u$ . Na získanie správneho výsledku musia byť  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  otočené pred počítaním pomeru vzdialeností  $d^2$ , ale po vypočítaní pseudosférických súradníc  $u$  a  $v$ . Inými slovami:

$$d^2 = \frac{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}{s^2} + c^2, \quad (52)$$

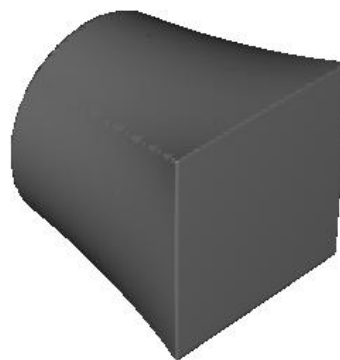
kde  $\tilde{a}$  a  $\tilde{b}$  sú lokálne súradnice po otočení. Podobne ako v parametrickom modeli je uhol otočenia určený definovaním funkcie skrutu  $\tau(u)$  alebo  $\tau(c)$  (viď [Cres96]).

### 3.3.5 Interpolácia rezov

Ďalším klasickým rozšírením parametrického translačného modelu je umožnenie viacerých rezov, ktoré sa budú navzájom prelínať (pomocou nejakej interpolačnej funkcie) počas posúvania po trajektórii (viď obr. 30a). Toto rozšírenie sa dá ľahko previesť do implicitného modelu – napríklad použitím lineárnej interpolácie medzi dvomi po sebe idúcimi rezmi (viď 30b), ale dajú sa použiť aj iné druhy spájania (viď [Cres96]).



Obr. 30: (a) Interpolovanie rezov,



(b) interpolovaný translačný stavebný prvok.

### 3.3.6 Nesymetrické rezy

Keďže naše rezy sú definované ako funkcia parametra  $v$ , ich výsledný tvar bude nutne symetrický podľa vektora  $\mathbf{a}$ , lebo používame kosínus sférického uhla  $\varphi$ . Toto obmedzenie sa dá ľahko odstrániť tým, že dovoľíme užívateľovi definovať dve rôzne funkcie rezu –  $\sigma_+(v)$  (pre kladné hodnoty  $b$ ) a  $\sigma_-(v)$  (pre záporné hodnoty  $b$ ). Tieto dve funkcie môžu byť navrhnuté úplne nezávisle – až na krajné body, kde by mali byť buď  $C^0$ - alebo  $C^1$ -spojité:  $\sigma_-(-1) = \sigma_+(-1)$ ,  $\sigma_-(1) = \sigma_+(1)$ , pre  $C^1$ -spojitosť aj  $\dot{\sigma}_-(-1) = \dot{\sigma}_+(-1)$ ,  $\dot{\sigma}_-(1) = \dot{\sigma}_+(1)$  (viď [Cres96]).

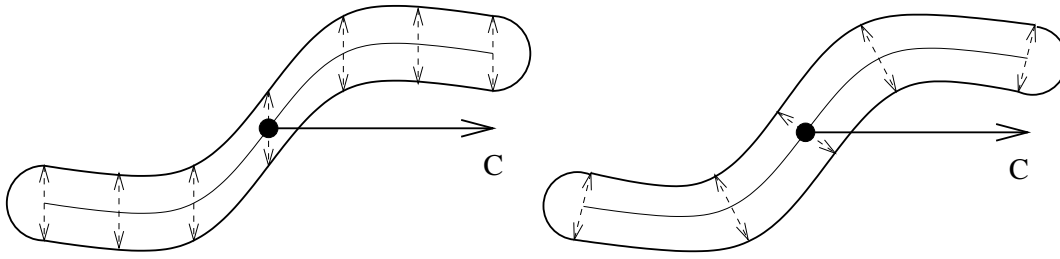
### 3.3.7 Šablónované stavebné prvky

Ak pôjdeme o krok ďalej v klasifikácii šablónovaných objektov predloženej v [Bron89], prideme k finálnemu modelu, známemu ako zovšeobecnený šablónovaný objekt (*generalized sweep object*) alebo zovšeobecnený valec. Takýto objekt je určený rezom, ktorý sa pohybuje po 3-rozmernej trajektórii zatiaľ čo je škálovaný krivkou profilu a rotovaný funkciou skrutu (*twisting function*). Veľa objektov môže byť vymodelovaných kombináciou šablónovaných objektov, preto ekvivalentná implicitná formulácia by bola hodnotným doplnkom. Poznamenajme takisto, že taký model môže byť považovaný za súčasné rozšírenie modelu translačného anizotropného stavebného prvku na jednej strane a modelu vrstevnicovej plochy alebo konvulučnej plochy na strane druhej.

V našom prípade, definovanie všeobecného šablónovaného stavebného prvku znamená, že bod stredu  $P$  sa teraz môže pohybovať po 3-rozmernej krivke  $P(t)$ . Čiže pred počítaním rovnosti (48) alebo (51) pre daný bod  $M$  treba nájsť najbližší bod  $\bar{P}$  trajektórie, typicky ten istý problém ako pre vrstevnicové plochy. Je možné využiť niekoľko stratégií:

- Aproximovať trajektóriu  $P(t)$  množinou úsečiek. Toto riešenie je veľmi jednoduché a môže byť napojené na interpoláciu rezov popísanú v predchádzajúcom odseku. Nanešťastie nemôže presne aproximovať hladké trajektórie, iba ak za cenu dramatického zvýšenia počtu segmentov.
- Pokladať orientáciu repéru  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  za nemennú počas pohybu stredového bodu po trajektórii. Teda pre bod  $M(x, y, z)$  jednoducho vypočítať jeho lokálnu súradnicu  $c$ , použiť ju na nájdenie nového stredového bodu  $\bar{P} = P(c)$  a nakoniec vypočítať lokálne súradnice  $a$  a  $b$  podľa  $\bar{P}$ . Toto riešenie je naozaj nenáročné, ale môže dávať neintuitívne deformácie, pretože generuje skôr efekt vykrajovania alebo strihania (*shearing effect*) ako skutočný efekt ohýbania (*bending effect*) (viď obr. 31a).
- Použiť tvar trajektórie na vypočítanie nového repéru  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  v každom bode  $P$  podľa lokálnych vlastností krivky. Toto je zrejme najintuitívnejšie riešenie, ale aj najdrahšie (viď obr. 31b).

Najzaujímavejšie je posledné riešenie, v ktorom je daný lokálny repér Frenetovým repérom (presnejšie rozšíreným Frenetovým repérom – na ošetrenie prípadov, keď je prvá derivácia



**Obr. 31:** (a) Efekt „strihania“ (Shearing effect)      (b) Efekt ohýbania (Bending effect).

nulová):

$$\mathbf{c} = \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|} \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t)}{\|\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t)\|} \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad (53)$$

Výpočet najbližšieho bodu  $\bar{P} = P(\bar{t})$  prebieha podľa princípu predloženom v [Blo90]. Ak vyjadríme euklidovskú vzdialenosť  $D(t) = \|MP(t)\|^2$ , vieme, že  $\bar{t}$  je riešením rovnice  $D'(t) = 0$ . V prípade kubických polynomiálnych kriviek tento proces znamená nájsť korene polynómu piateho stupňa [Blo90]. Samozrejme v prípade viacerých koreňov je zvolený ten s najmenšou vzdialenosťou (viď [Cres96]).

## 4 Literatúra a internetové odkazy

- [Abra95] ABRAMS, S. — ALLEN, P. K. 1995. *Swept Volumes and Their Use in Viewpoint Computation in Robot Work-Cells*. K dispozícii na <http://citeseer.nj.nec.com/abrams95swept.html>, abrams-isatp95.pdf
- [Agua99] AGUADO, A.S. — MONTIEL, E. — ZALUSKA, E. 1999. Modeling Generalized Cylinders via Fourier Morphing. *ACM Transactions on Graphics*, 18(4):293-315, október 1999.
- [Arma93] ARMAN, F. — AGGARWAL, J. K. 1993. Model-Based Object Recognition in Dense-Range Images – A Review. *ACM Computing Surveys*, 25(1), marec 1993.
- [Baum75] BAUMGART, B. G. 1975. A Polyhedron Representation for Computer Vision. *AFIPS Conf. Proc.*, 44, máj 1975.
- [Bhan87] BHANU, B. — HO, C. C. 1987. CAD-based 3D object representation for robot vision. *Computer*, (august) 1987, s. 19-35.
- [Binf71] BINFORD, T. O. 1971. Visual perception by computer. *IEEE Conference on Systems and Control* (Miami, december). IEEE, New York, 1971.
- [Blan95] BLANC, C. — SCHLICK, C. 1995. Extended Field Functions for Soft Objects. *Proc. of Implicit Surfaces'95*, s. 21-32, 1995.
- [Blin82] BLINN, J. 1982. A Generalization of Algebraic Surface Drawing. *ACM Transaction on Graphics*, 1:232, 1982.
- [Bloo88] BLOOMENTHAL, J. 1988. Polygonization of Implicit Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 4(5):341-355, 1988. K dispozícii na <http://www.unchainedgeometry.com/jbloom/papers/imp-surfaces.pdf>
- [Bloo90] BLOOMENTHAL, J. — WYVILL, B. 1990. Interactive Techniques for Implicit Modeling. *Proc. of SIGGRAPH'90*, 24(2):109-116, 1990.
- [Bloo97] BLOOMENTHAL, J. — MASON, G. 1997. *Bulge Elimination in Implicit Surface Blends*. február 1997. 14 s. K dispozícii na <http://www.unchainedgeometry.com/jbloom/papers/bulge-elim.pdf>
- [Bron89] BRONSVOORT, W. F. — VAN NIEUWENHUIZEN, P. — POST, F. 1989. Display of Profiled Sweep Objects. *The Visual Computer*, 5:147-157, 1989.
- [Bron90] BRONSVOORT, W. F. 1990. *Direct Display Algorithms for Solid Modelling*. Delft University Press 1990.
- [Burf98] BURFORD D. 1998? *SME Report*. K dispozícii na <http://people.cs.uct.ac.za/~dburford/project/report/contents.html>

- [Conk00] CONKEY, J. — JOY, K. I. 2000. *Using Isosurface Methods for Visualizing the Envelope of a Swept Trivariate Solid*. K dispozícii na <http://graphics.cs.ucdavis.edu/~jconkey/Conkey-PG00.pdf>
- [Cres96] CRESPIAN, B. — BLANC, C. — SCHLICK, C. 1996. Implicit Sweep Objects. *Proc. Eurographics 196*, 15(3):165-174, august 1996.
- [Grim99] GRIMM, C. M. 1999. *Implicit Generalized Cylinders using Profile Curves*. K dispozícii na <http://www.cs.brown.edu:80/people/cmg/impl99Sweep.pdf>
- [Jbook] X.Y., TEACHER: *Chapter 7 Surface Modeling*. K dispozícii na <http://infoogoaround.com/JBook/Ch7.html>
- [Katr95] KATRIŇÁK, T. ET AL. 1995. *Algebra a teoretická aritmetika 1*. Bratislava, Univerzita Komenského 1995, 334 s. ISBN 80-223-0986-9
- [Lavo99] LAVOIE, P. 1999. *An introduction to NURBS*. január 1999, 6 s. K dispozícii na <http://yukon.genie.uottawa.ca/~lavoie/software/nurbs/nurbsintro.pdf>
- [Nezn00] X.Y., TEACHER: *SEVENTH GRADE INTRODUCTION*. California Mathematics Framework, marec 2000, 4 s. K dispozícii na <http://www.egusd.k12.ca.us/StandBenchmark/stdbench/mth/7th/7intro.pdf>
- [Nish85] NISHIMURA, H. — HIRAI, M. — KAWAI, T. — KAWATA, T. — SHIRAKARA, I. — OMURA, K. 1985. Object Modeling by Distribution Functions. *Electronics Communications*, 68D(4):718-725, 1985.
- [Ponc89] PONCE, J. — CHELBERG, D. — MANN, W. B.: Invariant properties of straight homogeneous generalized cylinders and their contours. *IEEE Trans Patt. Anal. Machine Intell.* 11(9):951-966, september 1989,
- [Ruži95] RUŽICKÝ, E. — FERKO, A.: *Počítačová grafika a spracovanie obrazu*. Bratislava, Sapiaientia 1995, 334 s. ISBN 80-967180-2-9
- [Wywi86] WYWILL, G. — MCPHEETERS, C. — WYWILL, B.: Data Structures for Soft Objects. *The Visual Computer*, 2(4):227-234, 1986.
- [Wywi89] WYWILL, B. — WYWILL, G.: Field Functions for Implicit Surfaces. *The Visual Computer*, 5:75-82, 1989.
- [Žára98] ŽÁRA, J. — BENEŠ, B. — FELKEL, P.: *Moderní počítačová grafika*. Praha, Computer Press 1998, 464 s. ISBN 80-7226-049-9