Geometria afinných zobrazení euklidovských priestorov

(pracovná verzia)

Pavel Chalmovianský

Prednáška pre učiteľské zamerania na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Bratislava, 22. januára 2010

1. Úvod

Táto prednáška nadväzuje na prednášku o euklidovských priestoroch a zaoberá sa špeciálnymi typmi zobrazení medzi takýmito priestormi. Podáva vybrané vlastnosti a klasifikáciu niektorých typov zobrazení. Úspešné zvládnutie nasledujúceho textu predpokladá základné znalosti z lineárnej algebry a geometrie euklidovského priestoru ako sú:

- lineárne zobrazenia vektorových priestorov
- základná veta o lineárnych zobrazeniach
- matica lineárneho zobrazenia
- skladanie lineárnych zobrazení, súčin matíc
- regulárna lineárna transformácia, inverzná lineárna transformácia
- determinant matice
- skalárny súčin
- (karteziánska) súradnicová sústava v $\mathbb{E}^n$
- lineárne variety v $\mathbb{E}^n$
- parametrické a všeobecné rovnice lineárnej variety
- vzájomné polohy lineárnych variet
- kolmosť, vzdialenosť, súčin lineárnych variet

Všetky nasledujúce objekty označené malými tučnými písmenami $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}\ldots$ budú prvky reálneho euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n = (\mathcal{A}, \mathbb{V}^n, +)$ s ľubovoľnou pevne zvolenou dimenziou $n \in \mathbb{N}$. Malým tučným rezom so šípkou označujeme vektory z príslušného asociovaného vektorového priestoru $\mathbb{V}^n$ (napr. $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$).

Precvičte si svoje znalosti. V prípade problémov si príslušné partie zopakujte.

V poznámkach sa nachádzajú aj pojmy, ktoré presahujú rámec tejto prednášky, preto ich úplné porozumenie treba doplniť štúdiom ďalších pojmov.

Preberanú látku a ešte omnoho viac možno nájsť v ďalších knihách ako [**1**], [**3**], [**2**].

2. Základné pojmy

Definícia 1 (Lineárna kombinácia bodov). *Nech $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{E}^n$ sú body a nech $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, pričom $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ ($\sum_{i=0}^m \alpha_i = 0$). Lineárnou kombináciou bodov $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m$ s koeficientami $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ nazývame výraz*

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbf{p}_i := \mathbf{p} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbf{p}_i := \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \right), \tag{1}$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^n$ je ľubovoľný bod. Výraz predstavuje bod z $\mathbb{E}^n$ (vektor z asociovaného vektorového priestoru k $\mathbb{E}^n$).

Veta 1 (Jednoznačnosť lineárnej kombinácie bodov). *Lineárna kombinácia bodov $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m$ je definovaná jednoznačne (t.j. nezávisí od výberu bodu $\mathbf{p}$).*

Dôkaz: Nech $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}^n$. Potom

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbf{p}_i &= \mathbf{p} + \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) = \mathbf{q} + (\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) = \\ &= \mathbf{q} + \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p} + \mathbf{p} - \mathbf{q}) = \mathbf{q} + \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}).\end{aligned}$$

Analogicky možno dokázať nezávislosť lineárnej kombinácie v prípade, že $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0$. □

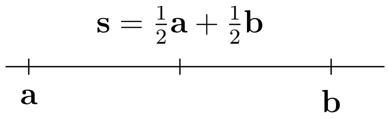
Lineárna kombinácia bodov v euklidovskom priestore je analogickým pojmom ako lineárna kombinácia vektorov vo vektorovom priestore.

Poznámka 1. *Na počítanie s lineárnymi kombináciami bodov sa používa nasledujúce metapravidlo: Ak máme výrok, ktorý je syntakticky správne vytvorený z lineárnych kombinácií bodov a vektorov, a ak po nahradení bodov a vektorov reálnymi číslami získame z neho pravdivý výrok, tak pôvodný výrok je pravdivý. Ujasnite si, či platia bežné pravidlá ako sú komutatívnosť, asociatívnosť a distributívnosť v lineárnych kombináciách bodov.*

Príklad 1. *Nech* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ *sú dva rôzne body. Zistite, ktorý bod predstavuje* $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$.
Riešenie: Podľa definície 1

$$\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Teda ide o stred úsečky $\mathbf{ab}$ (pozri obr. 1). □



Obr. 1. Stred úsečky $\mathbf{ab}$ ako lineárna kombinácia bodov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

Príklad 2. *Nech* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^n$ *sú body a nech platí* $\mathbf{c} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. *Napíšte bod* $\mathbf{a}$ *ako lineárnu kombináciu bodov* $\mathbf{b}$ *a* $\mathbf{c}$.
Riešenie: Keďže $\mathbf{c} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, tak môžme písať $\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})$, teda $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$. Hľadaná lineárna kombinácia je $\mathbf{a} = \frac{3}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$. □

Predchádzajúce príklady, ale aj niektoré ďaľšie cvičenia nám naznačia, že koeficienty lineárnej kombinácie môžme chápať ako „váhy" priradené jednotlivým bodom, pričom celková váha všetkých bodov zúčastnených v lineárnej kombinácii je 1.

Cvičenie 1. *Pozorujte, ako sa správa výsledný bod afinnej kombinácie v závislosti na zmene koeficientov afinnej kombinácie.*

Cvičenie 2. *Ako by ste zostrojili bod* $\mathbf{s} = \frac{m}{m+n}\mathbf{a} + \frac{n}{m+n}\mathbf{b}$, *kde* $m, n \in \mathbb{N}$? *Ako to bude, keď* $m, n \in \mathbb{Z}$?

Cvičenie 3. *Vyjadrite pomocou lineárnej kombinácie bodov* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ *ľubovoľný bod priamky* $\mathbf{ab}$.

Cvičenie 4. *Vyjadrite pomocou lineárnej kombinácie bodov* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^n$ *ľubovoľný bod trojuholníka* $\mathbf{abc}$. *Čo sa deje, keď* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *sú kolineárne?*

Definícia 2 (Deliaci pomer bodov). *Nech* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^n$ *a* $\mathbf{c} \neq \mathbf{b}$. *Deliacim pomerom bodov* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *(v tomto poradí) nazývame reálne číslo* λ *také, že* $(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{c}-\mathbf{b})$. *Budeme ho označovať* $(\mathbf{abc})$.

Príklad 3. *Zistite, aký je deliaci pomer bodov* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s} \in \mathbb{E}^n$, *pričom* $\mathbf{s}$ *je stred úsečky* $\mathbf{ab}$.

Riešenie: Hľadáme deliaci pomer bodov $(\mathbf{as})$. Teda chceme vedieť, číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ v rovnosti $\mathbf{s}-\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{s}-\mathbf{a})$. Pozri obrázok 1. Platí ale $\mathbf{s}-\mathbf{a} = \mathbf{b}-\mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{s}-\mathbf{b} = -1.(\mathbf{s}-\mathbf{a})$. Teda hľadaný deliaci pomer je -1. □

Veta 2 (Deliace pomery troch rôznych kolineárnych bodov). *Nech* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^n$ *sú také, že* $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{c} \neq \mathbf{a}$. *Potom platia nasledujúce rovnosti:*

$$\begin{aligned}(\mathbf{bac}) &= \frac{1}{(\mathbf{abc})}, \quad (\mathbf{acb}) = 1-(\mathbf{abc}), \quad (\mathbf{cab}) = \frac{1}{1-(\mathbf{abc})}\\ (\mathbf{bca}) &= \frac{(\mathbf{abc})-1}{(\mathbf{abc})}, \quad (\mathbf{cba}) = \frac{(\mathbf{abc})}{(\mathbf{abc})-1}.\end{aligned}$$

Dôkaz: Dokážeme, že zámenou prvých dvoch bodov sa hodnota deliaceho pomeru prevráti. Platí totiž

$$(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (\mathbf{abc})(\mathbf{c}-\mathbf{b}) \text{ a zároveň } (\mathbf{c}-\mathbf{b}) = (\mathbf{bac})(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Teda $(\mathbf{bac}) = \frac{1}{(\mathbf{abc})}$. Podobne platí pri zámene posledných dvoch bodov

$$(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + (\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (\mathbf{b}-\mathbf{a}) = (\mathbf{acb})(\mathbf{b}-\mathbf{c}),$$

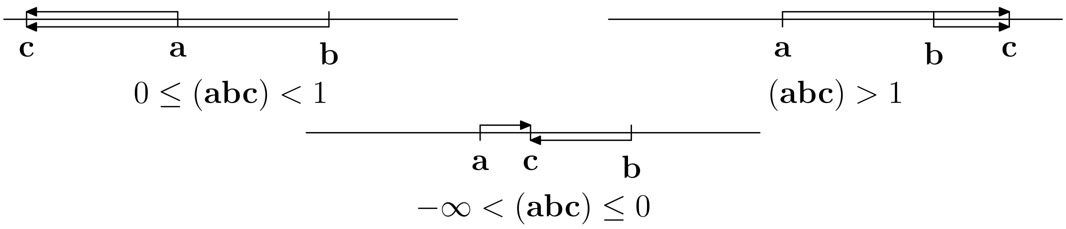
teda

$$(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (1-(\mathbf{acb}))(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

To znamená, že $(\mathbf{abc}) = 1-(\mathbf{acb})$. Ostatné prípady sa ukážu ľahko analogicky, alebo využitím predchádzajúcich vzťahov a faktu, že vyššie uvedené permutácie bodov už generujú všetky zvyšné permutácie bodov v deliacom pomere. □

Deliaci pomer môže nadobudnúť rôzne reálne hodnoty. Pokúsme sa zistiť, ako závisia na polohe bodu $\mathbf{c}$ voči bodom $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Vo všeobecnosti môžu nastať tri prípady

i. Bod $\mathbf{c}$ nie je za bodom $\mathbf{a}$ (pozri obr. 2, vľavo). Vtedy majú vektory $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ rovnaký smer, pričom $\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\| < \|\mathbf{c}-\mathbf{b}\|$. Teda $0 \leq (\mathbf{abc}) < 1$.
ii. Bod $\mathbf{c}$ je pred $\mathbf{b}$ a za bodom $\mathbf{a}$ (pozri obr. 2, dolu). Vtedy majú vektory $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ opačný smer. Teda $(\mathbf{abc}) < 0$.
iii. Bod $\mathbf{c}$ je za $\mathbf{b}$ (pozri obr. 2, vpravo). Vtedy majú vektory $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ rovnaký smer, pričom $\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\| > \|\mathbf{c}-\mathbf{b}\|$. Teda $(\mathbf{abc}) > 1$.



Obr. 2. Hodnoty deliaceho pomeru $(\mathbf{abc})$ v závislosti od vzájomnej polohy bodov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ na priamke $\mathbf{ab}$.

Obr. 3. Štyri (po dvoch rôzne) body na priamke generujú identitu vo vete 3.

Poznámka 2. *Videli sme, že deliaci pomer nadobúda všetky hodnoty okrem* 1. *Platí ale*

$$\lim_{\|\mathbf{a}-\mathbf{c}\| \to \infty} (\mathbf{abc}) = 1,$$

t.j. táto hodnota je limitou $(\mathbf{abc})$, *pokiaľ bod* $\mathbf{c}$ *konverguje k nevlastnému bodu priamky* $\mathbf{ab}$. *V rozšírenom euklidovskom priestore možno definovať aj deliaci pomer* $(\mathbf{abb}) = \infty$ *a* $(\mathbf{abc}^*) = 1$, *kde* $\mathbf{c}^*$ *je nevlastný bod priamky* $\mathbf{ab}$. *Zároveň možno povedať, že deliaci pomer je špeciálnym prípadom dvojpomeru.*

Veta 3 (Štyri body na priamke). *Nech* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{E}^n$ *sú kolineárne body také, že* $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{d}$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$. *Potom* $(\mathbf{abd})(\mathbf{bcd})(\mathbf{cad}) = 1$.
Dôkaz: Počítajme vyžijúc definície príslušných deliacich pomerov

$$(\mathbf{d}-\mathbf{a}) = (\mathbf{abd})(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = (\mathbf{abd})(\mathbf{bcd})(\mathbf{d}-\mathbf{c}) = (\mathbf{abd})(\mathbf{bcd})(\mathbf{cad})(\mathbf{d}-\mathbf{a}).$$

Vzhľadom na to, že $\mathbf{d}-\mathbf{a} \neq \vec{\mathbf{0}}$, musí platiť $(\mathbf{abd})(\mathbf{bcd})(\mathbf{cad}) = 1$. □

Cvičenie 5. *Vypočítajte* $(\mathbf{abc})$, *ak:*
a) $\mathbf{a} = [1,0,1]^\top, \mathbf{b} = [1,3,-2]^\top, \mathbf{c} = [4,9,-2]^\top$
b) $\mathbf{a} = [1,1,1]^\top, \mathbf{b} = [2,0,-1]^\top, \mathbf{c} = \mathbf{ab} \cap \alpha, \alpha \equiv 2x - 3y + 2z = 0$
c) $\mathbf{a} = [1,-1]^\top, \mathbf{b} = \mathbf{a} + 2\vec{\mathbf{u}}, \mathbf{c} = \mathbf{a} - \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} = (1,2)^\top$

Veta 4 (Vzťah deliaceho pomeru a lineárnej kombinácie). *Nech* $\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ *a* $t \neq 1$. *Potom* $(\mathbf{abc}) = \frac{t}{t-1}$. *Naopak, nech* $\lambda = (\mathbf{abc})$. *Potom* $\mathbf{c} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}\right)\mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\mathbf{b}$.
Dôkaz: Z predpokladu máme, že $(1-t)(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = t(\mathbf{b}-\mathbf{c})$, z čoho už priamo plynie prvý výsledok.

Podobne vieme, že $(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{c}-\mathbf{b})$, čo je to isté ako $\frac{1}{\lambda-1}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \frac{\lambda}{\lambda-1}(\mathbf{c}-\mathbf{b})$. Teda $\mathbf{c} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\mathbf{c} + \frac{-1}{\lambda-1}\mathbf{c} = \frac{-1}{\lambda-1}\mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\mathbf{b}$. □

Cvičenie 6. *Nech* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ *a* $t \neq 1$. *Potom* $(\mathbf{abc}) = \frac{t}{t-1}$. *Naopak, nech* $\lambda = (\mathbf{abc})$. *Potom* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda-1}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. *Dokážte!*

Cvičenie 7. *Dokážte, že ak sú body* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *nekolineárne, tak body* $\mathbf{s}_1 = \mathbf{a} + \frac{1}{t}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\mathbf{s}_2 =$ *stred* $(\mathbf{bc})$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{c} + \frac{1-t}{2-t}(\mathbf{a} - \mathbf{c})$ *pre prípustné* $t \in \mathbb{R}$ *ležia na jednej priamke.*

Cvičenie 8. *V priestore* $\mathbb{E}^3$ *sú dané priamky* p, q, *rovina* α *a číslo* $\lambda \neq 0, 1$. *Určte množinu všetkých bodov* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$, *pre ktoré* $(\mathbf{abx}) = \lambda$, $\mathbf{a} \in p$, $B \in q$, *ak:*
a) p, q *sú rôznobežné,*
b) $p \parallel q$,
c) p, q *sú mimobežné a* $\mathbf{ab} \parallel \alpha$.

Cvičenie 9. *Dané sú nekolineárne body* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *a body* $\mathbf{k} \in \mathbf{ab}$, $\mathbf{l} \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{m} \in \mathbf{ca}$, *pričom* $\mathbf{k} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{c}$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{a}$. *Dokážte, že* $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ *sú kolineárne práve vtedy, keď* $(\mathbf{abk})(\mathbf{bcl})(\mathbf{cam}) = 1$. *(Ide o známu Menelaovu*[1] *vetu.)*

Cvičenie 10. *Dané sú nekolineárne body* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *a body* $\mathbf{k} \in \mathbf{ab}$, $\mathbf{l} \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{m} \in \mathbf{ca}$, *pričom* $\mathbf{k} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{c}$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{a}$. *Dokážte, že priamky* $\mathbf{al}$, $\mathbf{bm}$, $\mathbf{ck}$ *sú rovnobežné alebo sa pretínajú v jednom bode (sú konkurenté) práve vtedy, keď* $(\mathbf{abk})(\mathbf{bcl})(\mathbf{cam}) = -1$. *(Ide o známu Cevovu*[2] *vetu.)*

Cvičenie 11. *Dané sú nekomplanárne body* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ *a body* $\mathbf{k} \in \mathbf{ab}$, $\mathbf{l} \in \mathbf{bc}$, $\mathbf{m} \in \mathbf{cd}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{da}$, *pričom* $\mathbf{k} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{c}$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{d}$, $\mathbf{n} \neq \mathbf{a}$. *Dokážte, že* $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ *sú komplanárne práve vtedy, keď* $(\mathbf{abk})(\mathbf{bcl})(\mathbf{cdm})(\mathbf{dan}) = 1$. *(Ide o analógiu Menelaovej vety z* $\mathbb{E}^2$*.)*

Cvičenie 12. *Je daná kocka* $\mathbf{abcda'b'c'd'}$. *Rovina* α *je určená bodom* $\mathbf{a}$, *stredom steny* $\mathbf{a'b'c'd'}$ *a stredom steny* $\mathbf{b'c'cb}$. *Určte* $(\mathbf{b'c'e})$, *kde* $\mathbf{e}$ *je priesečník priamky* $\mathbf{b'c'}$ *a roviny* α.

3. Afinné zobrazenia euklidovských priestorov

Definícia 3 (Afinné zobrazenie). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *je zobrazenie euklidovských priestorov. Zobrazenie* f *nazývame afinným, ak zachováva lineárne kombinácie bodov t.j.*

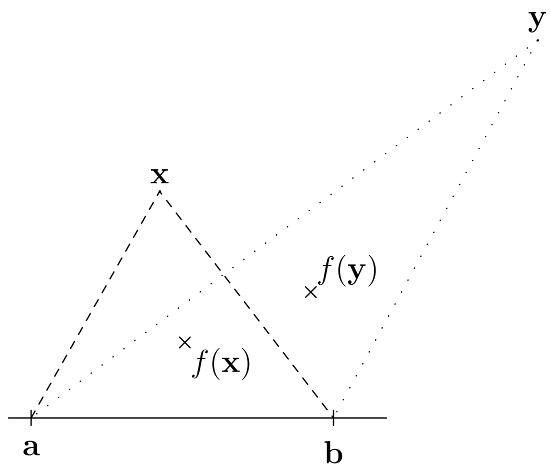
$$f\Big(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{p}_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(\mathbf{p}_i) \tag{2}$$

pre ľubovolné $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k \in \mathbb{E}^n$ *a* $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, *pričom* $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka 3. *V definícii 3 používame len lineárne kombinácie, v ktorých je* $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. *Prečo?*

Príklad 4. *Nech* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^2$ *sú dva ľubovoľné navzájom rôzne body. Nech* $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ *je zobrazenie, ktoré bodu* $\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{x}$. *Zistite, či* f *je afinné zobrazenie. Ako by ste interpretovali toto zobrazenie?*

---
[1] Menelaos bol grécky geometer žijúci zhruba 70-130 AD v Alexandrii
[2] Giovanni Ceva (1647-1734), taliansky matematik.



OBR. 4. Zobrazenie, ktoré trojuholníku s jedným premenným vrcholom priradí jeho ťažisko je afinné zobrazenie. Pre degenerované situácie (t.j. keď body $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ ležia na priamke) nehovoríme o ťažisku trojuholníka.

Riešenie: Podľa definície 3 afinné zobrazenie zachováva lineárne kombinácie bodov. Nech $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i$, pričom $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. Potom

$$f(\mathbf{x}) = f(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i) = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{a} + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{b} + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i = \tag{3}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i (\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{a}_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(\mathbf{a}_i) \tag{4}$$

Teda zobrazenie f je afinné.

Interpretácia zobrazenia je založená na fakte, že ťažisko trojuholníka **abc** sa dá zapísať ako lineárna kombinácia bodov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ s koeficientami $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$. Teda zobrazenie f priradí bodu $\mathbf{x}$ ťažisko trojuholníka **abx** (pokiaľ tieto tri body tvoria trojuholník). □

CVIČENIE 13. *Nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ *je pevne zvolený bod. Zobrazenie* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *priradí každému bodu* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ *stred úsečky* **ax**. *Zistite, či je* f *afinné zobrazenie.*

CVIČENIE 14. *Nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ *je pevne zvolený bod. Zobrazenie* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *priradí každému bodu* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ *bod* $\mathbf{a}$. *Zistite, či je* f *afinné zobrazenie.*

CVIČENIE 15. *Zistite, či posunutie* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}}$ *pre pevne zvolený vektor posunutia* $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^n$ *je afinné zobrazenie.*

CVIČENIE 16. *Zistite, či rovnoľahlosť* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{s} + k(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ *pre pevne zvolený stred rovnoľahlosti* $\mathbf{s} \in \mathbb{E}^n$ *a koeficient rovnoľahlosti* $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ *je afinné zobrazenie.*

VETA 5 (Ekvivalentné definície afinného zobrazenia). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^k \to \mathbb{E}^m$. *Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

i) zobrazenie f je afinné
ii) pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ a body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ platí $f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})) = (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b})$
iii) ak $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{c} \neq \mathbf{a}$ sú kolineárne, tak $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{c})$ alebo $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b}) \neq f(\mathbf{c}) \neq f(\mathbf{a})$, body $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})$ sú kolineárne a $(\mathbf{abc}) = (f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c}))$.

Dôkaz: Dôkaz urobime dokázaním ekvivalencie medzi prvými dvoma a poslednými dvoma výrokmi.

$\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ je triviálne. Ide totiž o špeciálny prípad lineárnej kombinácie bodov.

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Budeme postupovať matematickou indukciou podľa počtu bodov v lineárnej kombinácii. Prípady $n = 0, 1$ sú triviálne.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky lineárne kombinácie bodov s najviac n bodmi. Nech $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i$, pričom $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Aspoň jeden koeficient lineárnej kombinácie je rôzny od 1. Keby totiž všetky boli rovné 1, ich suma by bola $n + 1$, čo je neprípustné pre $n \geq 1$. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $\alpha_0 \neq 1$. Potom možno vyjadriť $\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{a}_0 + (1-\alpha_0)\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_0}\mathbf{a}_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_0}\mathbf{a}_n\right)$. Aplikovaním zobrazenia f dostaneme

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_0 f(\mathbf{a}_0) + (1-\alpha_0) f\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_0}\mathbf{a}_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_0}\mathbf{a}_n\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\mathbf{a}_i), \tag{5}$$

pretože platí $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_0} = 1$ a využijeme indukčný predpoklad.

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ Nech $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^n$ sú kolineárne body, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{c} \neq \mathbf{a}$ a nech napríklad $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$. Položme $\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Potom $f(\mathbf{c}) = (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$. Analogicky by sme dostali rovnosť obrazov aj v prípadoch, keď $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{c})$ alebo $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{c})$. (Urobte si to ako cvičenie!)

Predpokladajme teda, že $f(\mathbf{a})$, $f(\mathbf{b})$ a $f(\mathbf{c})$ sú po dvoch rôzne. Zo vzťahu $f(\mathbf{c}) = (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b})$ je jasné, že ležia na jednej priamke a z vety 4 vyplýva, že $(\mathbf{abc}) = (f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c}))$.

$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Nech $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ a $t \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné. Ak $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, tak tvrdenie platí triviálne. (Urobte si ho ako cvičenie!) Nech teda ďalej $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Musíme rozlíšiť niekoľko prípadov. Nech $\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Potom môže nastať

a) $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ alebo $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ – vtedy buď $f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + 0(f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}))$ alebo $f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + 1(f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}))$. Teda náš vzťah v tomto prípade platí.
b) $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{c} \neq \mathbf{a}$ Podľa predpokladu buď $f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$, a potom $f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{a}) = (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b})$, alebo $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b}) \neq f(\mathbf{c}) \neq f(\mathbf{a})$, sú kolineárne, teda $f(\mathbf{c}) = (1-s)f(\mathbf{a}) + sf(\mathbf{b})$, a $(\mathbf{abc}) = (f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c}))$, čo podľa vety 4 znamená, že

$$\frac{t}{t-1} = (\mathbf{abc}) = (f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c})) = \frac{s}{s-1}.$$

Z tejto rovnosti dostaneme, že $s = t$.

Uvedené prípady vyčerpávajú všetky možnosti. $\square$

Cvičenie 17. *V euklidovskom priesore* $\mathbb{E}^2$ *je daný trojuholník* $\mathbf{bcd}$. *Pre zobrazenie* f *platí:* $f(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$, $f(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$, $f(\mathbf{d}) = \mathbf{b}$. *Všetky ostatné body sú samodružné (t.j. zobrazia sa na seba). Je* f *afinné zobrazenie?*

Cvičenie 18. *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *a* $g\colon \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^k$ *sú afinné zobrazenia. Dokážte, že zložené zobrazenie* $g \circ f$ *je tiež afinné zobrazenie.*

Afinné zobrazenie f determinuje ďalšie zobrazenie medzi vektorovými zložkami príslušných euklidovských vektorových priestorov.

Definícia 4 (Asociované zobrazenie). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *je afinné zobrazenie. Zobrazenie* f^* *nazývame asociovaným zobrazením k afinnému zobrazeniu* f, *ak spĺňa nasledujúce podmienky:*

i) $f^*\colon \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^m$,

ii) pre ľubovoľné $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{E}^n$ *a* $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *také, že* $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$, *platí*

$$f^*\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=0}^k \alpha_i f(\mathbf{a}_i).$$

.

Poznámka 4. *Predchádzajúca definícia vlastne hovorí, že asociované zobrazenie „zachováva" lineárne kombinácie bodov, ktorých výsledkom je vektor.*

Veta 6 (Korektnosť definície asociovaného zobrazenia). *Zobrazenie* f^* *existuje, je jednoznačné a dobre definované, t.j. nech* $\alpha_0\mathbf{a}_0 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \beta_0\mathbf{b}_0 + \cdots + \beta_l\mathbf{b}_l$ *pre nejaké* $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = \beta_0 + \cdots + \beta_l = 0$. *Potom* $f^*(\alpha_0\mathbf{a}_0 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k) = f^*(\beta_0\mathbf{b}_0 + \cdots + \beta_l\mathbf{b}_l)$.

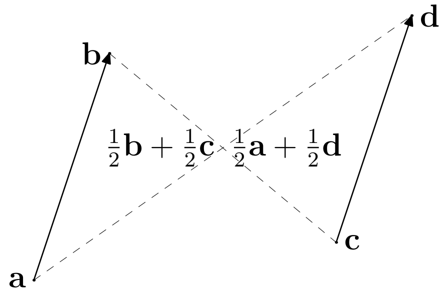
Dôkaz: Existencia a jednoznačnosť asociovaného zobrazenia je daná obrazmi vektorov $\mathbb{V}^n$.

Čo sa týka dobrej definovanosti zápisu v definicii 4, z predpokladu vety vyplýva, že $\alpha_0\mathbf{a}_0 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \beta_0\mathbf{b}_0 + \cdots + \beta_l\mathbf{b}_l = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0$ pre nejaké $\mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$. Teda $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \alpha_0\mathbf{a}_0 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_0 + \beta_0\mathbf{b}_0 + \cdots + \beta_l\mathbf{b}_l$. Keďže zobrazenie f je afinné, a teda zachováva lineárne kombinácie bodov, tak $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}_0) + \alpha_0 f(\mathbf{a}_0) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{a}_k) = f(\mathbf{b}_0) + \beta_0 f(\mathbf{b}_0) + \cdots + \beta_l f(\mathbf{b}_l)$. To už priamo dáva výsledok. □

Cvičenie 19. *Dokážte bez použitia vety 6, že ak* $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, *tak* $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{d}) - f(\mathbf{c})$ *(pozri obr. 5. Odvoďte z tohto výsledku vetu 6!*

Veta 7 (Linearita asociovaného zobrazenia). *Asociované zobrazenie* f^* *k afinnému zobrazeniu* f *je lineárne zobrazenie.*

Dôkaz: Stačí ukázať, že $f^*(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = f^*(\vec{\mathbf{u}}) + f^*(\vec{\mathbf{v}})$ a $f^*(c\vec{\mathbf{v}}) = cf^*(\vec{\mathbf{v}})$ pre ľubovolné $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Nech $\vec{\mathbf{u}} = \alpha_0\mathbf{a}_0 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k$ a $\vec{\mathbf{v}} = \beta_0\mathbf{b}_0 + \cdots + \beta_l\mathbf{b}_l$, pričom $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = \beta_0 + \cdots + \beta_l = 0$ (overte, že to vždy ide!). Potom $f^*(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = f^*(\alpha_0\mathbf{a}_0 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k + \beta_0\mathbf{b}_0 + \cdots + \beta_l\mathbf{b}_l) = \alpha_0 f(\mathbf{a}_0) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{a}_k) + \beta_0 f(\mathbf{b}_0) + \cdots + \beta_l f(\mathbf{b}_l) = f^*(\vec{\mathbf{u}}) + f^*(\vec{\mathbf{v}})$. Analogicky $f^*(c\vec{\mathbf{u}}) = f^*(c\alpha_0\vec{\mathbf{a}}_0 + \cdots + c\alpha_k\vec{\mathbf{a}}_k) = c\alpha_0 f(\vec{\mathbf{a}}_0) + \cdots + c\alpha_k f(\vec{\mathbf{a}}_k) = cf^*(\vec{\mathbf{u}})$. □



Obr. 5. Rôzne umiestnenia toho istého vektora v afinnom priestore.

Dôsledok 1. *Nech f je afinné zobrazenie. Potom $f(\mathbf{a}+\vec{\mathbf{u}}) = f(\mathbf{a})+f^*(\vec{\mathbf{u}})$ pre ľubovoľné $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ a ľubovoľné $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^n$.*

Dôkaz: Nech $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Potom $f(\mathbf{a} + \vec{\mathbf{u}}) = f(\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})) = f(\mathbf{a}) + (f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})) = f(\mathbf{a}) + f^*(\vec{\mathbf{u}})$. □

Cvičenie 20. *Ukážte, že pre ľubovoľné afinné zobrazenie f platí $f(\mathbf{a} + \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k) = f(\mathbf{a}) + f^*(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k)$, pričom $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$.*

Cvičenie 21. *Určte asociované zobrazenie pre rovnoľahlosť.*

Už z definície asociovaného zobrazenia sa dá usúdiť, že vzťah afinného zobrazenia a k nemu asociovaného zobrazenia je pomerne blízky.

Veta 8 (Vzťah afinného a asociovaného zobrazenia). *Nech $\phi\colon \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^m$ je lineárne zobrazenie, $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{E}^m$. Potom existuje práve jedno afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ také, že $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ a $f^* = \phi$.*

Dôkaz: Definujme zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ tak, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \phi(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. Treba ukázať, že f je afinné, spĺňa predpoklady tvrdenia a je jediné také.

Afinnosť: Nech $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$ sú body z $\mathbb{E}^n$ a $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$. Potom

$$\begin{aligned} f\Big(\sum_{i=0}^k \alpha_i\mathbf{a}_i\Big) &= \mathbf{b} + \phi\Big(\sum_{i=0}^k \alpha_i\mathbf{a}_i - \mathbf{a}\Big) = \mathbf{b} + \phi\Big(\sum_{i=0}^k \alpha_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{a})\Big) = \\ &= \mathbf{b} + \sum_{i=0}^k \alpha_i\phi(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}) = \sum_{i=0}^k \alpha_i(\mathbf{b} + \phi(\mathbf{a}_i - \mathbf{a})) = \sum_{i=0}^k \alpha_i f(\mathbf{a}_i). \end{aligned}$$

Teda f je afinné, lebo zachováva lineárne kombinácie bodov.

Predpoklady tvrdenia: $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} + \phi(\mathbf{a} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} + \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{b}$. Podobne $f^*(\mathbf{d} - \mathbf{c}) = f(\mathbf{d}) - f(\mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \phi(\mathbf{d} - \mathbf{a})) - (\mathbf{b} + \phi(\mathbf{c} - \mathbf{a})) = \phi(\mathbf{d} - \mathbf{a}) - \phi(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{d} - \mathbf{c})$.

Jednoznačnosť: Ukážeme ju nepriamo. Nech $g\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ je afinné zobrazenie také, že $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ a $g^* = \phi$. Potom podľa dôsledku 1 platí $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a}) + g^*(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} + \phi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{x})$. Teda $f = g$.

□

Poznámka 5. *Podľa základnej vety o lineárnych zobrazeniach je každé lineárne zobrazenie* $\phi\colon \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^m$ *jednoznačne dané obrazmi prvkov nejakej bázy priestoru* $\mathbb{V}^n$*. Nasledujúci dôsledok využíva tento fakt.*

Dôsledok 2. *Nech* $\langle \mathbf{a}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ *je afinná súradnicová sústava v priestore* $\mathbb{E}^n$*,* $\mathbf{b} \in \mathbb{E}^m$*,* $\vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_n \in \mathbb{V}^m$*. Potom existuje jediné afinné zobrazenie* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *také, že* $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ *a* $f^*(\vec{\mathbf{e}}_i) = \vec{\mathbf{f}}_i$ *pre* $i = 1, \dots, n$*.*

Dôkaz: Nech $\phi\colon \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^m$ je definované tak, že $\phi(\vec{\mathbf{e}}_i) = \vec{\mathbf{f}}_i$ pre $i = 1, \dots, n$. Také zobrazenie je podľa základnej vety o lineárnych zobrazeniach jediné. Teda podľa vety 8 je takto definované afinné zobrazenie jednoznačné. □

Dôsledok 3. *Nech* $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ *je afinná súradnicová sústava v priestore* $\mathbb{E}^n$*,* $\bar{\mathbf{o}} \in \mathbb{E}^m$*,* $\vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_n \in \mathbb{V}^m$*. Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *je také afinné zobrazenie, že* $f(\mathbf{o}) = \bar{\mathbf{o}}$ *a* $f^*(\vec{\mathbf{e}}_i) = \vec{\mathbf{f}}_i$ *pre* $i = 1, \dots, n$*. Potom ak* $\mathbf{x} = \mathbf{o} + x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + \ldots + x_n\vec{\mathbf{e}}_n$*, tak* $f(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{o}} + x_1\vec{\mathbf{f}}_1 + \ldots + x_n\vec{\mathbf{f}}_n$*.*

Dôkaz: Tvrdenie vety dostaneme aplikovaním dôsledku 2 a vety 7. □

Definícia 5 (Lineárne nezávisla množina bodov). *Nech* $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{E}^n$*,* $k \in \mathbb{N}$ *je množina bodov. Hovoríme, že body sú lineárne nezávislé, ak sú lineárne nezávislé vektory* $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0$*.*

Poznámka 6. *Z definície vidno, že v* $\mathbb{E}^n$ *nemôže existovať viac ako* $n+1$ *lineárne nezávislých bodov. Naviac tento počet sa dá dosiahnuť. Premyslite si ako!*

Cvičenie 22. *Nech* $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{E}^n$ *je lineárne nezávislá množina bodov. Dokážte, že ľubovoľný bod priestoru* $\mathbb{E}^n$ *sa dá napísať ako ich lineárna kombinácia. Je tento zápis jednoznačný?*

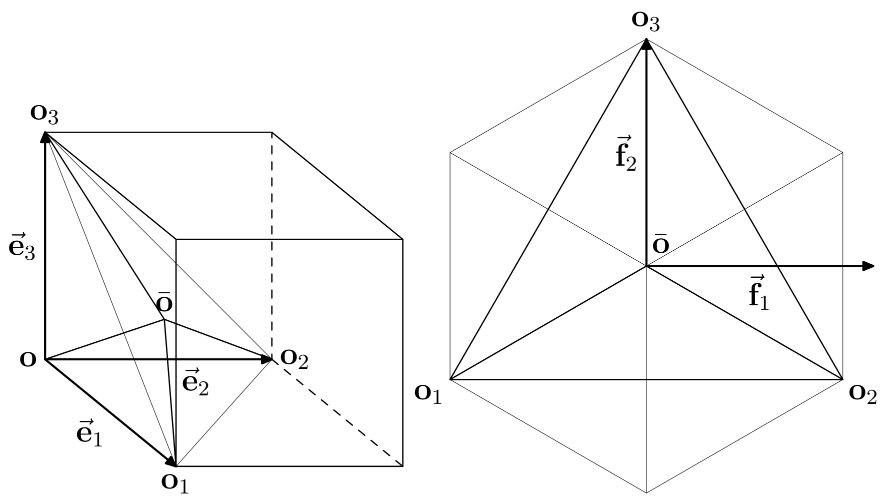
Veta 9 (Jednoznačnosť afinného zobrazenia). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *je afinné zobrazenie. Potom* f *je jednoznačne určené obrazmi* $n+1$ *lineárne nezávislých bodov z* $\mathbb{E}^n$*.*

Dôkaz: Nech $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ je $n+1$ nezávislých bodov v $\mathbb{E}^n$ a nech $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ sú obrazy týchto bodov v zobrazení f. Označme $\vec{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n = \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0$ (tieto sú podľa definície 5 lineárne nezávislé) a nech obrazmi týchto vektorov sú vektory $\vec{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0, \dots, \vec{\mathbf{f}}_n = \mathbf{b}_n - \mathbf{b}_0$ v tomto poradí. Podľa dôsledku 2 je takto jednoznačne definované afinné zobrazenie. Treba len overiť, či takto definované zobrazenia spĺňa podmienku, že $f^*(\vec{\mathbf{e}}_i) = \vec{\mathbf{f}}_i$. (Urobte to ako cvičenie!)

Jednoznačnosť môžme dokázať aj inak, za predpokladu, že máme dokázanú existenciu zobrazenia f. Nech $f, g\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ sú dve afinné zobrazenia také, že pre afinne nezávislú množinu bodov $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ platí $f(\mathbf{a}_i) = g(\mathbf{a}_i)$ pre $i = 0, \dots, n$. Ukážeme, že $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ pre ľubovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$.

Nech $\mathbf{x} = a_0\mathbf{a}_0 + \cdots a_n\mathbf{a}_n$, $\sum_{i=0}^n a_i = 1$. Potom môžme písať

$$f(\mathbf{x}) = f(\sum_{i=0}^n a_i\mathbf{a}_i) = \sum_{i=0}^n a_i f(\mathbf{a}_i) = \sum_{i=0}^n a_i g(\mathbf{a}_i) = g(\sum_{i=0}^n a_i\mathbf{a}_i) = g(\mathbf{x}).$$



OBR. 6. Premietanie do roviny $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2\mathbf{o}_3$. Priemet do roviny $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2\mathbf{o}_3$

Teda $f = g$. $\square$

PRÍKLAD 5. *Určte afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^2$, ktoré reprezentuje kolmé premietanie do roviny α určenej bodmi $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$, $\mathbf{o}_3$ (pozri obr. 6 vľavo), ktoré sú vrcholmi axiálnej kocky (t.j. jej steny sú rovnobežné so súradnicovými rovinami), jej vrchol $\mathbf{o}$ je počiatkom sústavy súradníc a vektory $\mathbf{o}_1 - \mathbf{o}, \mathbf{o}_2 - \mathbf{o}, \mathbf{o}_3 - \mathbf{o}$ určujú bázové vektory karteziánskej súradnicovej sústavy $\mathbb{E}^3$.*

Riešenie: Nech $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3 \rangle$ je ortonormálna súradnicová sústava v $\mathbb{E}^3$. Ďalej nech $\langle \bar{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2 \rangle$ je afinná súradnicová sústava v rovine α, pričom $\bar{\mathbf{o}}$ je päta kolmice z $\mathbf{o}$ do roviny α, $\vec{\mathbf{f}}_2 = \mathbf{o}_3 - \bar{\mathbf{o}}$ a $\vec{\mathbf{f}}_1 \perp \vec{\mathbf{f}}_2$, $\|\vec{\mathbf{f}}_1\| = \|\vec{\mathbf{f}}_2\|$, pričom vektory $\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{o}} - \mathbf{o}$ tvoria kladnú bázu v priestore $\mathbb{V}^3$. Potom zobrazenie f možno určiť nasledovne:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{o} & \mapsto & \bar{\mathbf{o}}, \\
\vec{\mathbf{e}}_1 & \mapsto & -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{f}}_1 - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{f}}_2, \\
\vec{\mathbf{e}}_2 & \mapsto & \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{f}}_1 - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{f}}_2, \\
\vec{\mathbf{e}}_3 & \mapsto & \vec{\mathbf{f}}_2.
\end{array}$$

Ľubovoľný bod $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ sa dá napísať v báze $\mathbf{x} = \mathbf{o} + x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3\vec{\mathbf{e}}_3$. Jeho obraz v afinnom zobrazení f bude

$$\begin{array}{rcl}
f(\mathbf{x}) & = & f(\mathbf{o}) + x_1 f^*(\vec{\mathbf{e}}_1) + x_2 f^*(\vec{\mathbf{e}}_2) + x_3 f^*(\vec{\mathbf{e}}_3) = \\
& = & \bar{\mathbf{o}} + x_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{f}}_1 - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{f}}_2\right) + x_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathbf{f}}_1 - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{f}}_2\right) + x_3\vec{\mathbf{f}}_2 = \\
& = & \bar{\mathbf{o}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)\vec{\mathbf{f}}_1 + \left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)\vec{\mathbf{f}}_2.
\end{array}$$

V maticovom tvare možno predchádzajúce zobrazenie zapísať nasledovne

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

□

VETA 10 (Injektívnosť, surjektívnosť afinného zobrazenia). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *je afinné zobrazenie. Potom platia nasledujúce tvrdenia:*

a) f *je injektívne zobrazenie práve vtedy, keď* f^* *je injektívne zobrazenie*
b) f *je surjektívne zobrazenie práve vtedy, keď* f^* *je surjektívne zobrazenie*
c) f *je bijektívne zobrazenie práve vtedy, keď* f^* *je bijektívne zobrazenie*

Dôkaz: Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď platí:

$$f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ pre ľubovolné } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n.$$

Keďže $f(\mathbf{a}+\vec{\mathbf{0}}) = f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})) \Leftrightarrow f^*(\vec{\mathbf{0}}) = f^*(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. Teda $(f^*(\vec{\mathbf{0}}) = f^*(\mathbf{b}-\mathbf{a})) \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ práve vtedy, keď f^* je injektívne (zobrazí na nulový vektor len nulový vektor).

Analogicky pre surjektívnosť. Nech $\mathbf{o} \in \mathbb{E}^n$. Nech $\mathbf{b}' \in \mathbb{E}^m$. Potom existuje také $\mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$, že $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}'$ práve vtedy, keď $f(\mathbf{o} + \mathbf{b} - \mathbf{o}) = f(\mathbf{o}) + f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{o}) = \mathbf{b}'$, teda práve vtedy, keď $\mathbf{b}' - f(\mathbf{o}) = f^*(\mathbf{b} - \mathbf{o})$. Čo znamená, keďže bod $\mathbf{b}'$ bol ľubovoľný, že f^* je surjektívne (každý vektor priestoru $\mathbb{V}^m$ má svoj vzor).

Bijektívnosť dostaneme kombináciou prípadov a) a b). □

VETA 11 (Zachovávanie lineárnych variet). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *je afinné zobrazenie. Potom platia tvrdenia*

a) ak $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ *je lineárna varieta, tak* $f(\alpha)$ *je lineárna varieta v* $\mathbb{E}^m$ *a* $\dim f(\alpha) \leq \dim \alpha$
b) ak $\alpha \| \beta$ *sú lineárne variety v* $\mathbb{E}^n$*, tak* $f(\alpha) \| f(\beta)$ *v* $\mathbb{E}^m$.

Dôkaz: Nech α je lineárna varieta v $\mathbb{E}^n$. Stačí ukázať, že ak $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in f(\alpha)$, tak aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia je z $f(\alpha)$. Nech $\mathbf{p} = f(\mathbf{a})$ a $\mathbf{q} = f(\mathbf{b})$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \alpha$. Potom pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ platí $(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} = (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b}) = f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \in f(\alpha)$, keďže α je lineárna varieta.

Z geometrie lineárnych variet vieme, že $\alpha = \mathbf{a} + V_\alpha$ pre ľubovoľné $\mathbf{a} \in \alpha$. Teda $f(\alpha) = f(\mathbf{a}) + f^*(V_\alpha)$, čo znamená, že $V_{f(\alpha)} = f^*(V_\alpha)$. Z lineárnej algebry vieme, že $\dim f^*(V_\alpha) \leq \dim V_\alpha$, teda platí, že $\dim f(\alpha) \leq \dim \alpha$.

Nech $\alpha \| \beta$. To je práve vtedy, keď $V_\alpha \subset V_\beta$ alebo $V_\beta \subset V_\alpha$. Potom ale musí platiť, že $f^*(V_\alpha) \subset f^*(V_\beta)$ alebo $f^*(V_\beta) \subset f^*(V_\alpha)$, čo je ekvivalentné s tvrdením $V_{f(\alpha)} \subset V_{f(\beta)}$ alebo $V_{f(\beta)} \subset V_{f(\alpha)}$. A to už nie je nič iné ako $f(\alpha) \| f(\beta)$. □

CVIČENIE 23. *Dokážte, že vzor lineárnej variety v afinnom zobrazení je lineárna varieta.*

CVIČENIE 24. *Nájdite príklad afinného zobrazenia, kde sa dve kolmé variety zobrazia na variety, ktoré nie sú kolmé.*

4. Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia

Zápis afinného zobrazenia v príklade 5 ukazuje, že pri zápise i manipulácii s afinnými zobrazeniami možno využiť matice, pretože každé lineárne zobrazenie sa dá zapísať formou matice. Podľa toho, čo potrebujeme vyjadriť, možno použiť niekoľko druhov zápisov.

Afinné súradnice. Nech je v $\mathbb{E}^n$ daná afinná súradnicová sústava $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ a v $\mathbb{E}^m$ podobne $\langle \bar{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m \rangle$. Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ je dané na repéri $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$, pričom súradnice obrazov

$$\begin{aligned} f(\mathbf{o}) &= [r^1, \dots, r^m]^\top \\ f^*(\vec{\mathbf{e}}_1) &= (a_1^1, \dots, a_1^m)^\top \\ &\;\;\vdots \\ f^*(\vec{\mathbf{e}}_n) &= (a_n^1, \dots, a_n^m)^\top \end{aligned}$$

sú dané na repéri $\langle \bar{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_n \rangle$. Nech $\mathbf{x} = [x^1, \dots, x^n]^\top$ v repéri $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ a jeho obraz $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{E}^m$ je $f(\mathbf{x}) = [y^1, \dots, y^m]^\top$ v repéri $\langle \bar{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m \rangle$. Potom

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{o}) + x^1 f^*(\vec{\mathbf{e}}_1) + \ldots + x^n f^*(\vec{\mathbf{e}}_n),$$

čo možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix} \tag{6}$$

alebo

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r},$$

kde $\mathbf{r}$ sa nazýva vektor posunutia a matica $A = (f^*(\vec{\mathbf{e}}_1), f^*(\vec{\mathbf{e}}_2), \dots, f^*(\vec{\mathbf{e}}_n))$ sa nazýva maticou asociovaného zobrazenia f^*. Tento zápis afinného zobrazenia nazývame analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f vzhľadom k afinnej súradnicovej sústave $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ v $\mathbb{E}^n$ a $\langle \bar{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m \rangle$ v $\mathbb{E}^m$.

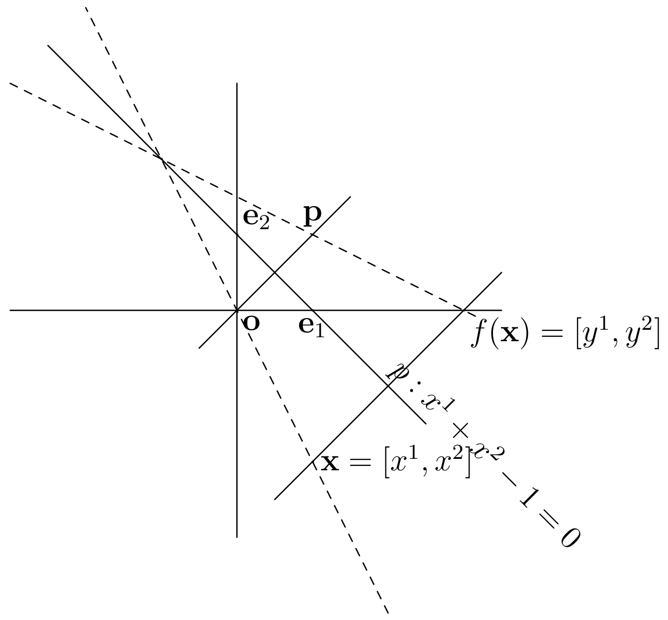
Poznámka 7. *Treba si uvedomiť, že analytické vyjadrenie zobrazenia priestorov nie je dané jednoznačne, ale závisí na výbere afinného repéra v oboch priestoroch – priestore vzorov aj priestore obrazov. Táto nejednoznačnosť je analogická nejednoznačnosti súradníc bodu, ktoré tiež závisia na výbere afinného repéra.*

Afinné zobrazenia sú teda len tie zobrazenia, ktoré majú tvar (6). Z tohto zápisu tiež vidno, že asociované zobrazenie k afinnému zobrazeniu f má v príslušných bázach $\mathbb{V}^n$ (t.j. $\langle \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$) a $\mathbb{V}^m$ (t.j. $\langle \vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m \rangle$) vyjadrenie

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

Príklad 6. *Nájdite maticu afinnej transformácie $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, pričom platí*

$$[0,0]^\top = \mathbf{o} \mapsto \bar{\mathbf{o}} = [1,1]^\top \quad [1,0]^\top = \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 = [0,1]^\top \quad [0,1]^\top = \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 = [1,0]^\top.$$



OBR. 7. Osová súmernosť podľa priamky p.

Riešenie: V afinnej súradnicovej sústave $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2 \rangle$ môžeme písať analytické vyjadrenie

$$\begin{array}{rcrrcr} y^1 & = & & -x^2 & + & 1 \\ y^2 & = & -x^1 & & + & 1 \end{array}.$$

Neskôr uvidíme, že týmito údajmi je daná osová súmernosť podľa priamky p (pozri obr. 7)

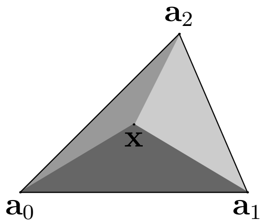
□

Rozšírené afinné súradnice. Pomocou rozšírených afinných súradníc možno zjednotiť zápis súradníc vektora a bodu tak, že už priamo z týchto súradníc budeme vedieť o aký objekt ide. Okrem toho sa sprehľadní zápis zobrzení. Bod $\mathbf{x} = [x^1, \ldots, x^n]^\top \rightsquigarrow [1, x^1, \ldots, x^n]^\top = \tilde{\mathbf{x}}$ a vektor $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)^\top \rightsquigarrow [0, u^1, \ldots, u^n]^\top = \bar{\mathbf{u}}$. Prvú súradnicu môžme čítať podľa jej hodnoty „bod" alebo „vektor". Pre takto zavedené rozšírenie platí obvyklá aritmetika s bodmi a vektormi z euklidovských priestorov, ako aj počítanie s lineárnymi kombináciami. V rozšírených afinných súradniciach možno potom písať analytické vyjadrenie zobrazenia takto

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{r} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix},$$

pričom $\mathbf{y}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{x}$, A má ten istý význam ako pri afinných súradniciach a $\mathbf{0}$ je stĺpec s n nulami.

POZNÁMKA 8. *Možnosť tohto zápisu vyplýva z geometrie projektívnych priestorov a analytického zápisu kolineácií medzi nimi.*



OBR. 8. Barycentrické súradnice bodu $\mathbf{x}$ ako pomer orientovaných obsahov trojuholníkov $\left[\frac{d(\mathbf{x}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)}{d(\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)}, \frac{d(\mathbf{a}_0\mathbf{x}\mathbf{a}_2)}{d(\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)}, \frac{d(\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{x})}{d(\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)}\right]$.

Barycentrické súradnice. Ak máme afinnú súradnicovú sústavu zapísanú vo forme $\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0 \rangle$, tak potom možno ľubovoľný bod písať vo forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 + x^1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + \cdots + x^n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0) = (1 - x^1 - \cdots x^n)\mathbf{a}_0 + x^1\mathbf{a}_1 + \cdots + x^n\mathbf{a}_n,$$

čo je lineárna kombinácia bodov tvoriacich afinnú súradnicovú sústavu. Kedže afinné zobrazenie f zachováva lineárne kombinácie bodov, možno súradnice obrazu bodu $\mathbf{x}$ získať ako

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (1 - x^1 - \cdots - x^n)f(\mathbf{a}_0) + x^1\mathbf{a}_1 + \cdots + x^n f(\mathbf{a}_n) \\ &= \begin{pmatrix} f(\mathbf{a}_0) & \cdots & f(\mathbf{a}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x^1 - \cdots - x^n \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $f(\mathbf{a}_i)$ je stĺpec súradníc (prípadne aj rozšírených) prisluchajúci obrazu bodu $\mathbf{a}_i$ v zobrazení f. V takomto prípade nazývame $(n+1)$-ticu $[x^0, x^1, \dots, x^n]$, kde $x^0 = 1 - x^1 - \cdots - x^n$, barycentrickými súradnicami bodu $\mathbf{x}$ vzhľadom k bodom $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Uvedomme si, že pri tomto zápise dostavame z barycentrických súradníc afinné súradnice a nie opäť barycentrické (tie sú totožné).

POZNÁMKA 9. *Barycentrické súradnice majú nasledujúcu geometrickú interpretáciu. Nech $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoria simplex V v n-rozmernom afinnom priestore. (Simplex je útvar, ktorý dostaneme, keď urobíme konvexný obal bodov $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$. Simplex z troch linearne nezávislých bodov je trojuholník generovaný týmito bodmi. Simplex tvorený 4 lineárne nezávislými bodmi je štvorsten generovaný týmito bodmi.) Zostrojme simplexy $V_i(\mathbf{u})$ dané ako simplexy k bodom $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. Teda v simplexe V nahradíme i-ty vrchol bodom $\mathbf{u}$. Nech $d(V)$, $d(V_i(\mathbf{u}))$ pre $i = 0, \dots, n$ sú n-rozmerné objemy týchto simplexov. Potom platí, že*

$$\left[\frac{d(V_0(\mathbf{u}))}{d(V)}, \dots, \frac{d(V_n(\mathbf{u}))}{d(V)}\right]^\top$$

sú barycentrické súradnice bodu $\mathbf{u}$ vzhľadom k bodom $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ (pozri obr. 8 pre $n = 2$).

DEFINÍCIA 6 (Afinná transformácia). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je afinné zobrazenie. Potom* f *sa nazýva afinná transformácia priestoru* $\mathbb{E}^n$*. Ak* f *je bijektívne zobrazenie, tak* f *nazývame afinitou priestoru* $\mathbb{E}^n$*.*

DEFINÍCIA 7 (Súhlasná a nesúhlasná afinita). *Afinitu s analytickým vyjadrením* $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$ *nazývame súhlasnou afinitou, ak* $\det A > 0$*. V opačnom prípade ju nazývame nesúhlasnou afinitou.*

POZNÁMKA 10. *Kladná hodnota determinantu matice* A *znamená, že transformácia zachováva orientáciu. Tvrdenie platí aj naopak, ak transformácia zachováva orientáciu, tak determinant matice tohoto zobrazenia je kladný.*

V staršej literatúre sa niekedy používa termín priama, nepriama transformácia napr. [?].

Z definície afinnej transformácie a z analytického vyjadrenia afinného zobrazenia vyplýva, že afinné transformácie budú reprezentované štvorcovými maticami.

VETA 12 (Bijektívnosť transformácie). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je dané rovnicami* $\mathbf{y} = A\mathbf{x}+\mathbf{r}$ *v súradnicovej sústave* $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$*. Potom afinná transformácia* f *je bijektívna práve vtedy, keď matica* A *je regulárna.*

CVIČENIE 25. *Sformulujte a ukážte predchádzajúcu vetu v rozšírených súradniciach.*
Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že asociované zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď je matica A regulárna a použiť vetu 10 $\square$

DÔSLEDOK 4 (Afinnosť inverznej transformácie). *Inverzné zobrazenie k afinite je opäť afinitou.*
Dôkaz: Zrejme platí
$$(f \circ f^{-1}) \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i.$$
Podobne platí aj
$$f \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{-1}(\mathbf{x}_i) \right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i.$$
Keďže pravé strany sú rovnaké, platí to aj o ľavých stranách. Po zobrazení tejto rovnosti zobrazením f^{-1} dostávame tvrdenie vety.

Alternatívny dôkaz používajúci súradnice dodávame len kvôli výpočtom príkladov. Ak v niektorom repéri je analytické vyjadrenie afinity $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$, tak v tom istom repéri je inverzné zobrazenie dané ako $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x} - A^{-1}\mathbf{r}$. Treba však poznamenať, že ešte sa žiada v tomto prípade ukázať nezávislosť tohoto výsledku na voľbe sústavy súradníc. $\square$

VETA 13 (O existencii grupy afinít $\mathrm{GA}(\mathbb{E}^n)$). *Množina všetkých afinít priestoru* $\mathbb{E}^n$ *spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu.*

Dôkaz: Ak zložíme dve afinity, dostaneme opäť afinitu. Táto skutočnosť je evidentná. Inverzným zobrazením k afinite je opäť afinita podľa predchádzajúcej vety. Naviac identické zobrazenie je tiež afinitou a tvorí jednotkový prvok v množine všetkých afinít $\mathbb{E}^n$. Z týchto faktov vyplýva, že všetky afinity priestoru $\mathbb{E}^n$ spolu s operáciou skladania tvoria grupu. Označujeme ju zvyčajne $\mathrm{GA}(\mathbb{E}^n)$. □

Neskôr si ukážeme niektoré podgrupy grupy $\mathrm{GA}(\mathbb{E}^n)$. Medzi najvýznamnejšie patria zhodnostné transformácie, ktoré sa naučíme aj klasifikovať.

CVIČENIE 26. *Vo vhodnej súradnicovej sústave napíšte analytické vyjadrenie zobrazenia f, ktoré vrcholom trojuholníka* **abc** *priradí stredy protiľahlých strán. V tej istej súradnicovej sústave napíšte analytické vyjadrenie zobrazenia h, ktoré zobrazuje body* **a**, **b**, **c** *do bodov* **a**, **b**, **t**, *kde* **t** *je ťažisko trojuholníka* **abc**. *Určte analitické vyjadrenia zobrazení $h \circ f$, $f \circ h$, f^{-1} a h^{-1}.*

CVIČENIE 27. *V euklidovskej rovine $\mathbb{E}^2$ je daný trojuholník* **abc**. *Afinné zobrazenie f zobrazuje* **a** *do* **b**, **b** *do* **c** *a* **c** *do* **a**. *Určte k nemu asociované zobrazenie g. Vyjadrite f, g vo vhodne zvolenej afinnej súradnicovej sústave.*

CVIČENIE 28. *Afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ zobrazuje body $[2,1]^\top$, $[3,0]^\top$, $[1,4]^\top$ do bodov $[1,6]^\top$, $[1,9]^\top$, $[3,1]^\top$ v tomto poradí. Kam sa zobrazí bod $[5,7]^\top$? Ktorý bod sa zobrazí sám na seba?*

CVIČENIE 29. *Určte afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ zobrazujúce body $[0,0]^\top$, $[1,0]^\top$, $[0,1]^\top$ do bodov $[0,0]^\top$, $[1,0]^\top$, $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]^\top$ v tomto poradí. Pokúste sa ho geometricky interpretovať.*

CVIČENIE 30. *Určte afinné zobrazenie , ktoré zobrazuje body $[1,0]^\top \to [2,3]^\top$, $[0,2]^\top \to [-1,4]^\top$, $[-3,0]^\top \to [-2,-1]^\top$.*

CVIČENIE 31. *Dané je afinné zobrazenie $f\colon \{x' = 2x + 3y + 5, y' = 4x - 3y - 2\}$. Určte*
a) do akých bodov sa zobrazia body $[0,0]^\top$, $[5,2]^\top$, $[-1,4]^\top$;
b) čo je obrazom osí v rovine;
c) ako sa zobrazia priamky $2x + 3y + 5 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$;
d) čo je obrazom priamky $2x - 6y - 7 = 0$.

CVIČENIE 32. *Dané je afinné zobrazenie $f\colon \{x' = 3x + y - 6, y' = x + y + 1\}$. Ktoré body sa zobrazia do bodov $[9,8]^\top$ a $[-6,1]^\top$?*

CVIČENIE 33. *Afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ je vo vhodnej súradnicovej sústave dané predpisom $f \equiv \{x_1' = x_1 - x_2 + 1, x_2' = x_1 + x_2, x_3' = x_2 + 2\}$. Určte obraz začiatku v $\mathbb{E}^2$, vzor začiatku v $\mathbb{E}^3$ a zistite, či je zobrazenie injektívne a surjektívne.*

CVIČENIE 34. *Zistite, či je zobrazenie $f \equiv \{x_1' = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 1, x_2' = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3, x_3' = x_2 - x_3 + 4\}$ injektívne.*

CVIČENIE 35. *V euklidovskej rovine je daný* **abc** *s ťažiskom* **t**. *Afinné zobrazenie zobrazuje bod* **c** *do bodu* **t**, *body* **a**, **b** *sa zobrazujú na seba. Napíšte rovnice tohto zobrazenia v dvoch vhodne zvolených súradnicových sústavách.*

CVIČENIE 36. *Nájdite všetky body* $\mathbf{x} = [x, y, z]^\top$*, ktoré sa zobrazia do* $M = [4, 3]^\top$ *v zobrazení* $f \equiv \{x' = 2x - z + 1, y' = x + y\}$*.*

CVIČENIE 37. *Nájdite afinné zobrazenie, ktoré*

a) zobrazuje bod $[6, -2]^\top$ *na bod* $[1, 1]^\top$ *a vektory* $(2, 1)^\top$, $(-1, 2)^\top$ *do vektorov* $(4, 2)^\top$ *a* $(-3, 6)^\top$.

b) zobrazuje každý z bodov $[0, 0, 0]^\top$, $[1, 0, 0]^\top$, $[0, 1, 0]^\top$ *na seba a* $[0, 0, 1]^\top$ *na* $[1, 1, 1]^\top$.

CVIČENIE 38. *Vrcholy štvorstena* **abcd** *sú v bodoch* $\mathbf{a} = [0, 0, 0]^\top$, $\mathbf{b} = [1, 0, 0]^\top$, $\mathbf{c} = [0, 1, 0]^\top$, $\mathbf{d} = [0, 0, 1]^\top$*. Nájdite afinné zobrazenie, ktoré ponechá bod* **a** *na mieste a stredy hrán* **ab**, **ac**, **ad** *zobrazuje do stredov protiľahlých hrán.*

CVIČENIE 39. *Akú podmienku musia spĺňať koeficienty* l_1, l_2 *v rovniciach afinity* f*, aby stredy úsečiek v tejto afinite zodpovedajúcich si bodov ležali na priamke* $p \equiv ax + by + c = 0$, $f \equiv \{x' = x + l_1(ax + by + c), y' = y + l_2(ax + by + c)\}$.

CVIČENIE 40. *Určte afinné zobrazenie, pre ktoré sú body priamky* $a \equiv 2x + y + 1 = 0$ *samodružné a bod* $[0, 0]^\top$ *sa zobrazí do* $[-1, -2]^\top$.

CVIČENIE 41. *Určte obraz priamok* p, p‘ *v afinnom zobrazení* f*, ktoré je dané predpisom* $f\colon \{x' = 2x + y - 1, y' = y - z + 1, z' = x - y + 2z\}$, $p\colon \{x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = t\}$, $p'\colon \{x + z - 1 = 0, 2x - y - 3 = 0\}$.

CVIČENIE 42. *Nech* $f, g\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ *sú dané predpismi* $f \equiv \{x' = 2x + y - 5, y' = 3x - y + 7\}$ *a* $g \equiv \{x' = x - y + 4, y' = -x + 2y + 5\}$*. Nájdite* $f \circ g$ *a* $g \circ f$*!*

CVIČENIE 43. *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *a* $g\colon \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^k$ *sú afinné zobrazenia s analytickými vyjadreniami* $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$ *a* $\mathbf{y} = B\mathbf{x} + \mathbf{s}$*, pričom repér je v oboch prípadoch v priestore* $\mathbb{E}^m$ *rovnaký. Aké je analytické vyjadrenie zobrazenia* $g \circ f$*? Čo sa stane, keď sú repéry v priestoroch* $\mathbb{E}^m$ *v zobrazení* f *a* g *rôzne?*

CVIČENIE 44. *Určte inverzné zobrazenie k zobrazeniu* $x' = 2x + 3y - 7, y' = 3x + 5y - 9$.

CVIČENIE 45. *Dané je afinné zobrazenie* $x' = 3x + 4y - 12, y' = 4x - 3y + 6$*. Na priamke* $p : 7x - 2y - 24 = 0$ *nájdite bod, ktorého obraz leží na tej istej priamke.*

5. Samodružné prvky afinnej transformácie

Samodružné prvky (body a variety) hrajú signifikantnú rolu pri klasifikácii afinných transformácii. Na základe ich „množstva” a „kvality” vieme určiť, ako sa príslušné zobrazenie správa a vieme nájsť kanonický tvar tohto zobrazenia vo vhodnej báze.

DEFINÍCIA 8 (Samodružný bod). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je afinná transformácia. Ak* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *pre nejaké* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$*, tak hovoríme, že bod* $\mathbf{x}$ *je samodružným (alebo pevným) bodom zobrazenia* f*.*

VETA 14 (Samodružné body afinnej transformácie). *Nech* f *je afinná transformácia a má aspoň jeden samodružný bod. Potom množina všetkých samodružných bodov afinnej transformácie* f *tvorí lineárnu varietu v priestore* $\mathbb{E}^n$*.*

Dôkaz: Lineárna varieta v $\mathbb{E}^n$ je množina bodov, do ktorej s každými dvoma rôznymi bodmi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ patria aj body z priamky určenej bodmi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Ukážeme, že toto platí pre množinu samodružných bodov zobrazenia f.

Množina samodružných bodov obsahujúca práve jeden samodružný bod je lineárnou varietou v $\mathbb{E}^n$. V ďalšom budeme uvažovať, že množina všetkých samodružných bodov transformácie f obsahuje aspoň dva prvky.

Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ sú dva rôzne samodružné body. Nech $\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ je nejaký bod z priamky $\mathbf{ab}$. Potom môžme písať

$$f(\mathbf{x}) = f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{x},$$

a teda aj bod $\mathbf{x}$ je samodružným bodom afinnej transformácie f. Z toho už výsledok priamo vyplýva.

$\square$

Samodružné body afinnej transformácie sa dajú hľadať riešením lineárnych rovníc. Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia, ktorá má v repéri $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ analytické vyjadrenie $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$. Potom súradnice samodružných bodov v tomto repéri možno získať riešením systému rovníc

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

alebo

$$(A - I)\mathbf{x} = -\mathbf{r},$$

čo možno písať

$$\begin{aligned} (a_1^1 - 1)x^1 + \cdots + a_1^n x_n &= -r^1 \\ &\vdots \\ a_n^1 x^1 + \cdots + (a_n^n - 1)x_n &= -r^n, \end{aligned}$$

kde matica $A - I$ je maticou tejto sústavy. Z toho (a z Frobeniovej vety) ihneď vidno, že množina samodružných bodov je buď prázdna alebo lineárna varieta dimenzie $n - h(A - I)$.

Definícia 9 (Centrálno-afinná transformácia). *Transformácia, ktorá má aspoň jeden samodružný bod sa nazýva centrálno-afinná transformácia.*

Poznámka 11. *Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že v centrálno-afinnej transformácii je počiatok afinnej súradnicovej sústavy samodružný. Prečo?*

Definícia 10 (Posunutie). *Transformácia, ktorej matica analytického vyjadrenia je jednotková sa nazýva posunutie.*

Veta 15. *Každá afinná transformácia sa dá napísať ako súčin centrálno-afinnej transformácie a posunutia.*

Dôkaz: Vyplýva priamo z definícií a analytického vyjadrenia oboch typov afinných transformácií.

$\square$

Okrem samodružných bodov sú pre afinnú transformáciu význačné aj niektoré ďalšie samodružné nebodovo samodružné podvariety. Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia a p je taká priamka v $\mathbb{E}^n$, že $f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ pre každý bod $\mathbf{p} \in p$. Nech q je priamka, pričom $q \| p$. Potom platí $f(q) \| f(p)$, $f(p) \| p$, a teda $f(q) \| q$. To platí práve vtedy, keď smerový vektor $\vec{\mathbf{u}}$ priamky q je nenulovým násobkom smerového vektora $f^*(\vec{\mathbf{u}})$ priamky $f(q)$. Teda keď platí $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = c\vec{\mathbf{u}}$. Znamená to, že k určeniu niektorých geometrických vlastností afinného zobrazenia f môžeme dospieť počítaním vlastných vektorov asociovaného lineárneho zobrazenia f^*.

Definícia 11 (Samodružný smer). *Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia. Ak $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = c\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^n$, $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $c \in \mathbb{R}$ tak hovoríme, že smer reprezentovaný vektorom $\vec{\mathbf{u}}$ (jednorozmerný podpriestor priestoru $\mathbb{V}^n$ generovaný vektorom $\vec{\mathbf{u}}$) je samodružným smerom zobrazenia f. Číslo c nazývame vlastným číslom zobrazenia f prislúchajúcim k samodružnému smeru $\vec{\mathbf{u}}$.*

Poznámka 12. *Všimnite si, že samodružný smer môže byť reprezentovaný ľubovoľným nenulovým vektorom, pričom dva nenulové vektory reprezentujú rovnaký smer, ak sú lineárne závislé.*

Definícia 12 (Samodružná varieta). *Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia a $\mathcal{V} \subset \mathbb{E}^n$ je lineárna varieta. Ak $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$, tak hovoríme, že lineárna varieta $\mathcal{V}$ je* samodružná (invariantná)*. Ak naviac rovnosť $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ platí pre každý bod $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, tak hovoríme, že lineárna varieta $\mathcal{V}$ je* bodovo samodružná.

Samodružné smery možno počítať riešením systémov lineárnych rovníc. Získať tieto systémy však už nemusí byť také ľahké. Nech f je reprezentované ako $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$. Potom f^* je reprezentované ako $\vec{\mathbf{y}} = A\vec{\mathbf{x}}$. Samodružné (alebo vlastné) vektory zobrazenia f^* reprezentujú samodružné smery zobrazenia f. Spĺňajú nasledujúci systém rovníc

$$c\vec{\mathbf{x}} = A\vec{\mathbf{x}} \tag{7}$$

alebo

$$(A - cI)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}. \tag{8}$$

Ide o homogénny systém lineárnych rovníc a ten má netriviálne riešenie práve vtedy, keď

$$\det(A - cI) = 0. \tag{9}$$

Rovnicu (9) nazývame *charakteristická rovnica lineárneho zobrazenia* f^*. Ide o polynomickú rovnicu s neznámou c, pričom maximálny stupeň polynómu je určený dimenziou n. Jej koreňmi sú všetky možné vlastné hodnoty (čísla) prislúchajúce k zobrazeniu f^*. Nech sú to čísla $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ (môžu byť aj rovnaké – vtedy hovoríme o viacnásobnosti koreňa). Vo všeobecnosti je nemožné určiť tieto korene „vzorcom" pre $n \geq 5$. Vie sa to len pre špeciálne typy polynómov. Potom ku vlastnej hodnote c_i počítame prislúchajúci (asociovaný) vlastný vektor ako netriviálny koreň systému homogénnych rovníc

$$(A - c_i I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}. \tag{10}$$

Treba si uvedomiť, že môžeme dostať viac ako jednorozmerné riešenie takéhoto systému.

Ukážeme si to na príklade.

Príklad 7. *Nech $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ je zobrazenie z príkladu 6. Nájdite samodružné (pevné) body tejto transformácie. Nájdite jeho samodružné smery.*

Riešenie: V príklade 6 sme videli, že zobrazenie f má analytické vyjadrenie

$$\begin{array}{rcrrcl} y^1 & = & & -x^2 & + & 1 \\ y^2 & = & -x^1 & & + & 1 \end{array}.$$

Samodružné body nájdeme riešením lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrrcl} x^1 & = & & -x^2 & + & 1 \\ x^2 & = & -x^1 & & + & 1 \end{array}.$$

Ľahko vidno, že riešením je priamka $p : x^1 + x^2 - 1 = 0$ (pozri obr. 7).

Teraz počítajme samodružné smery. Keďže

$$(A - cI) \;=\; \begin{pmatrix} -c & -1 \\ -1 & -c \end{pmatrix},$$

je

$$\det(A - cI) \;=\; c^2 - 1 = 0.$$

Z toho ihneď vidno, že $c_1 = 1$ a $c_2 = -1$. Pre každú z týchto vlastných hodnôt riešime systém lineárnych rovníc pre zodpovedajúce vlastné vektory.

$\boxed{c_1 = 1}$

$$\vec{\mathbf{0}} = (A - c_1 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Teda netriviálnym riešením je vektor $(-1, 1)^\top$, čo znamená, že tento smer je samodružný.

$\boxed{c_2 = -1}$

$$\vec{\mathbf{0}} = (A - c_2 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

V tomto prípade je netriviálnym riešením vektor $(1, 1)^\top$, čo znamená, že aj tento smer je samodružný.

Ďalej môžme spočítať vektor

$$f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = (-x^1 - x^2 + 1, -x^1 - x^2 + 1)^\top = (-x^1 - x^2 + 1)(1, 1)^\top.$$

Vidíme, že ide o samodružný smer. Prečo? $\square$

Cvičenie 46. *Premyslite si vzťah medzi pojmami ‚invariantná varieta' a ‚bodovo invariantná varieta'.*

Cvičenie 47. *Určite samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia:*

a) $f \equiv \{x' = 2x - y + 1, y' = x + 2y + 3\}$
b) $f \equiv \{x' = 2x - 5y, y' = 2x + 3y\}$
c) $f \equiv \{x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\}$
d) $f \equiv \{x' = 3x - y, y' = x + y\}$
e) $f \equiv \{x' = 3x - y + 6, y' = 3y + 4\}$
f) $f \equiv \{x' = 3x + 4y - 8, y' = x + 3y - 4\}$

g) $f \equiv \{x' = 4x + 5y - 11, y' = 2x + 4y - 7\}$
h) $f \equiv \{x' = 5x + y, y' = 4x + 8y\}$
i) $f \equiv \{x' = 2x - 2y - 2z + 1, y' = 2x + 3y - 3z, z' = y - z + 4\}$
j) $f \equiv \{x' = 4x - y - 2z, y' = 2x + y - 2z, z' = \mathbf{x} - y + z\}$
k) $f \equiv \{x_1' = x_1 - x_2 + 2x_3 - 7, x_2' = x_2 + x_3 - 5, x_3' = x_1 - 2x_2 + x_3 + 6\}$

CVIČENIE 48. *Nech p je samodružná priamka zobrazenia f. Potom pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in p$ platí $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = k\mathbf{u}$, kde $k \in R$ a $\mathbf{u}$ je niektorý samodružný smer zobrazenia f.*

CVIČENIE 49. *Nech $a_1x^1 + \cdots + a_nx^n + a_0 = 0$ je rovnica nadroviny v $\mathbb{E}^n$, ktorá je samodružná v afinnej transformácii f s analytickým vyjadrením $\mathbf{y} = B\mathbf{x} + \mathbf{r}$. Dokážte, že koeficienty tejto nadroviny spĺňajú rovnice*

$$\begin{aligned} a_1b_{11} + a_2b_{21} + \cdots + a_nb_{n1} &= \lambda a_1 \\ &\cdots \\ a_1b_{1n} + a_2b_{2n} + \cdots + a_nb_{nn} &= \lambda a_n \\ a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_nr_n + a_0 &= \lambda a_0, \end{aligned}$$

pre vhodný parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

CVIČENIE 50. *Určte samodružné body a priamky (a roviny, ak ide o transformáciu $\mathbb{E}^3$) zobrazenia:*

a) $f \equiv \{x' = -x + 4y - 2, y' = 2x - 3y + 3\}$
b) $f \equiv \{x' = 3x + y - 1, y' = 2x + 2y - 1\}$
c) $f \equiv \{x' = 7x - y - 1, y' = 4x + 2y + 4\}$
d) $f \equiv \{x' = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}, y' = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5}\}$
e) $f \equiv \{x' = x + 4y + z + 1, y' = 2x + 2y + z, z' = -8x - 2z - 1\}$
f) $f \equiv \{x' = 2x + y + 1, y' = 2y + z, z' = 2z + 3\}$
g) $f \equiv \{x' = 3x - 4y + 6, y' = 4x + 3y - 8, z' = -2z + 9\}$
h) $f \equiv \{x' = 2x + y - 2z + 2, y' = -y + z, z' = 2y + 2\}$
i) $f \equiv \{x' = 2y, y' = 2x, z' = z + 1\}$
j) $f \equiv \{x' = x + y, y' = y + z, z' = z + 1\}$
k) $f \equiv \{x' = 2x - 2, y' = -6x - y + 14, z' = 19x + 6y + z - 44\}$
l) $f \equiv \{x' = x - y, y' = x + y, z' = z + 2\}$
m) $f \equiv \{x' = x + z + 1, y' = 2x + 2y + z - 1, z' = -2z\}$
n) $f \equiv \{x' = x + 2y + z - 3, y' = -y + 4, z' = x + 4y + z - 2\}$
o) $f \equiv \{x' = 2x + y - z + 1, y' = -x + z - 1, z' = 2x + 2y + z + 2\}$
p) $f \equiv \{x' = 6x - 2y - 3z, y' = -2x + 3y - 6z + 6, z' = -3x - 6y - 2z + 1\}$
q) $f \equiv \{x' = -2x - 2y + 2z + 1, y' = 2x + 3y - 3z, z' = y - z + 4\}$
r) $f \equiv \{x' = 2x + 4y - 2z + 2, y' = 2x + 5y - 2z + 2, z' = -2x - 4y + 3z - 2\}$
s) $f \equiv \{x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z' = z\}$

CVIČENIE 51. *Určte afinné zobrazenie, ktoré má dve priamky $a \equiv x - y = 0$ a $b \equiv 2x - y + 3 = 0$ invariantné a body $\mathbf{a} = [1,1]^\top \to \mathbf{a}' = [3,3]^\top, \mathbf{b} = [0,3]^\top \to \mathbf{b}' = [2,7]^\top$.*

CVIČENIE 52. *Určte afinné zobrazenie, v ktorom sa priamky* $a \equiv x + y + 1 = 0$ *a* $b \equiv x - y + 2 = 0$ *zobrazia do seba a bod* $[1,1]^\top \to [2,1]^\top$.

CVIČENIE 53. *Dané je afinné zobrazenie* $x' = 10x + 11y, y' = 10x + 9y$. *Nájdite vektor, ktorý sa zobrazí do vektora k nemu kolmého.*

CVIČENIE 54. *Dané je afinné zobrazenie* $x' = 2x+y-2, y' = x-y-1$ *a bod* $\mathbf{m} = [1,1]^\top$. *Nájdite priamku prechádzajúcu bodom* $\mathbf{m}$, *ktorá sa zobrazí do priamky prechádzajúcej bodom* $\mathbf{m}$.

CVIČENIE 55. *Dané je afinné zobrazenie* $x' = 7x + y, y' = -5x + 5y$. *Nájdite také dva navzájom kolmé vektory, ktoré sa daným zobrazením zobrazia do navzájom kolmých vektorov.*

CVIČENIE 56. *V rovine* $\mathbb{E}^2$ *je daný trojuholník* $\mathbf{abc}$ *a afinná transformácia tejto roviny, ktorá zobrazuje body* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *do bodov* $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$. *Určte samodružné smery a samodružné body tohto zobrazenia.*

CVIČENIE 57. *Bodom* $\mathbf{p} = [-3,5]^\top$ *veďte priamku, ktorej úsečka vyťatá priamkami* $2x + 3y - 15 = 0$ *a* $4x - 5y - 12 = 0$ *má stred v bode* $\mathbf{p}$.

CVIČENIE 58. *Nájdite afinné zobrazenie, pre ktoré je os* o_x *bodovo samodružná a bod* $[2,6]^\top$ *sa zobrazí na bod* $[-1,4]^\top$. *Aké bude riešenie, ak budeme požadovať, aby os* o_x *bola len samodružná?*

CVIČENIE 59. *Určte afinné zobrazenie, pre ktoré*

a) sú priamky $x + y + 1 = 0$ *a* $x - y + 2 = 0$ *invariantné a bod* $[1,1]^\top$ *sa zobrazí do bodu* $[2,2]^\top$.

b) je každý bod priamky $x + 2y - 1 = 0$ *samodružný a bod* $[1,2]^\top$ *sa zobrazí do bodu* $[2,2]^\top$.

c) sú súradnicové osi invariantnými priamkami a body $[2,0]^\top$, $[0,4]^\top$ *sa zobrazia do bodov* $[-6,0]^\top$, $[0,8]^\top$.

CVIČENIE 60. *Ak má transformácia priestoru* $\mathbb{E}^2$ *dve rôznobežné samodružné priamky, tak ich priesečník je samodružným bodom tejto transformácie. Dokážte!*

CVIČENIE 61. *Vrcholy štvorstena* $\mathbf{abcd}$ *sú v bodoch* $\mathbf{a} = [0,0,0]^\top$, $\mathbf{b} = [1,0,0]^\top$, $\mathbf{c} = [0,1,0]^\top$, $\mathbf{d} = [0,0,1]^\top$. *Nájdite afinné zobrazenie, ktoré zobrazí body* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *a* $\mathbf{d}$ *do bodov* $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ *a* $\mathbf{a}$ *v tomto poradí. Nájdite invariantné priamky a roviny tohto zobrazenia.*

CVIČENIE 62. *Nájdite afinné zobrazenie, pre ktoré je bod* $[\sqrt{2},0,0]^\top$ *samodružný, vektory* $(1,1,0)^\top$, $(1,-1,0)^\top$ *sú vlastnými vektormi s vlastným číslom 2 a vektor* $(0,1,2)^\top$ *sa zobrazí na opačný vektor. Zistite samodružné smery a samodružné body tohto zobrazenia.*

CVIČENIE 63. *Ktoré afinné transformácie euklidovskej roviny majú 3 rôzne samodružné body?*

CVIČENIE 64. *Zovšeobecnite výsledok predchádzajúceho cvičenia!*

CVIČENIE 65. *Ukážte, že všetky smery v* $\mathbb{E}^2$ *sú samodružnými smermi posunutia v* $\mathbb{E}^2$.

CVIČENIE 66. *Ukážte, že všetky smery v* $\mathbb{E}^2$ *sú samodružnými smermi rovnoľahlosti v* $\mathbb{E}^2$.

CVIČENIE 67. *Nájdite takú afinnú transformáciu roviny, ktorá*

a) zobrazí priamku $5x - 6y - 7 = 0$ *na priamku* $2x + y - 4 = 0$, *priamku* $3x - 4y = 0$ *na priamku* $x - y + 1 = 0$ *a bod* $\mathbf{a} = [6, 4]^\top$ *do bodu* $\mathbf{a}' = [2, 1]^\top$.
b) má invariantné priamky $a \equiv x - y = 0$ *a* $b \equiv 2x - y + 3 = 0$, *bod* $\mathbf{a} = [1, 1]^\top$ *sa zobrazí do bodu* $\mathbf{a}' = [3, 3]^\top$ *a bod* $\mathbf{b} = [0, 3]^\top$ *do bodu* $\mathbf{b}' = [2, 7]^\top$.
c) má invariantné priamky $a \equiv x + y - 1 = 0$ *a* $b \equiv x - y + 2 = 0$, *bod* $\mathbf{a} = [1, 1]^\top$ *sa zobrazí do bodu* $\mathbf{a}' = [2, 1]^\top$.

CVIČENIE 68. *Ak* $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_k$ *sú samodružné body afinnej transformácie* f, *potom* $\langle \mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ *je bodovo samodružná varieta v zobrazení* f.

CVIČENIE 69. *Dokážte tvrdenie: Ak má afinná transformácia* f *priestoru* $\mathbb{E}^n$ *samodružný bod* $\mathbf{p}$ *a vektor* $\vec{\mathbf{p}}$ *je samodružným smerom tejto transformácie, tak priamka* $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\vec{\mathbf{p}}$ *je samodružnou priamkou transformácie* f. *Kedy je táto priamka bodovo samodružná?*

CVIČENIE 70. *Nech* $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_k$ *sú samodružné body afinnej transformácie* f *a* $\vec{\mathbf{u}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_l$ *sú samodružné smery zobrazenia* f. *Potom* $\langle \mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_k, \vec{\mathbf{u}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_l \rangle$ *je samodružnou varietou zobrazenia* f.

6. Niektoré podgrupy grupy $\mathrm{GA}(\mathbb{E}^n)$

Definícia 13 (Dilatácia). *Nech f je afinita priestoru $\mathbb{E}^n$. Nazveme ju dilatáciou, ak každý smer v $\mathbb{E}^n$ je samodružným smerom zobrazenia f.*

Pre dilatácie platí, že pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^n$ existuje také $c \in \mathbb{R}$, že $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = c\vec{\mathbf{u}}$.

Veta 16 (Existencia koeficientu dilatácie). *Nech $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je dilatácia. Potom existuje také $0 \neq c \in \mathbb{R}$, že pre ľubovoľný vektor $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^n$ platí $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = c\vec{\mathbf{u}}$.*

Dôkaz: Veta vraví, že koeficient c je konštantný pre všetky vektory, pretože ak platí $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = c_{\vec{\mathbf{u}}}\vec{\mathbf{u}}$, $f^*(\vec{\mathbf{v}}) = c_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}}$, $f^*(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = c(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}})$ pre lineárne nezávislé vektory $\vec{\mathbf{u}}$ a $\vec{\mathbf{v}}$, potom

$$c_{\vec{\mathbf{u}}}\vec{\mathbf{u}} + c_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}} = f^*(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = c(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = c\vec{\mathbf{u}} + c\vec{\mathbf{v}},$$

čo môže byť pravda len v prípade, že $c = 0$ alebo $c = c_{\vec{\mathbf{u}}} = c_{\vec{\mathbf{v}}}$. Prvý prípad však nemôže nastať, pretože f je afinita. (Rozmyslite si podrobne prečo!)

Ak sú vektory $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ lineárne závislé, tak povedzme $\vec{\mathbf{u}} = d\vec{\mathbf{v}}$. Potom však $c_{\vec{\mathbf{u}}}\vec{\mathbf{u}} = f^*(\vec{\mathbf{u}}) = df^*(\vec{\mathbf{v}}) = dc_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}} = c_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}}$. Rovnosť platí, ak buď vektor $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ alebo $c_{\vec{\mathbf{u}}} = c_{\vec{\mathbf{v}}}$. Prvý prípad opäť nemôže nastať, lebo smer definuje vždy len nenulový vektor.

Číslo c je nenulové, pretože f je bijektívne. □

Definícia 14 (Koeficient dilatácie). *Nech $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je dilatácia. Číslo $c \in \mathbb{R}$ také, že $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = c\vec{\mathbf{u}}$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^n, \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ nazývame koeficientom dilatácie f.*

Veta 17 (Klasifikácia dilatácií). *Nech $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je dilatácia a $c \in \mathbb{R}$ je jej koeficient. Potom*

i) ak $c = 1$, tak f je posunutie priestoru $\mathbb{E}^n$;
ii) ak $c \neq 1$, tak f má samodružný bod $\mathbf{s} \in \mathbb{E}^n$ a ide o rovnoľahlosť s koeficientom c a stredom $\mathbf{s}$.

Dôkaz: $\boxed{\text{Prípad } c = 1.}$ Podľa predpokladov $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Teda $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = f(\mathbf{y}) - \mathbf{y}$ pre ľubovoľne zvolené $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$. To ale znamená, že sa jedná o posunutie o vektor $\vec{\mathbf{u}} = f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Teda $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}}$.

$\boxed{\text{Prípad } c \neq 1.}$ V tomto prípade ukážeme, že existuje samodružný bod. Platí $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = c(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, čo možno prepísať do tvaru a následne upraviť

$$\begin{aligned} \frac{c}{c-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{c-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \\ \frac{c}{c-1}\mathbf{x} - \frac{1}{c-1}f(\mathbf{x}) &= \frac{c}{c-1}\mathbf{y} - \frac{1}{c-1}f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Položme $\mathbf{s} = \frac{c}{c-1}\mathbf{x} - \frac{1}{c-1}f(\mathbf{x})$. Potom však musí platiť $f(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$. (Presvedčte sa o tom výpočtom!) Teda bod $\mathbf{s}$ je samodružný. O zobrazení f potom môžme písať

$$f(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{s}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = c(\mathbf{x} - \mathbf{s}),$$

teda

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{s} + c(\mathbf{x} - \mathbf{s}).$$

To ale znamená, že f je rovnoľahlosť so stredom $\mathbf{s}$ a koeficientom c. □

Celkovo z dôkazu predchádzajúcej vety možno vyťažiť omnoho viac, ako tvrdí predchádzajúca veta. Dá sa vidieť celá štruktúra množiny dilatácií.

VETA 18 (Grupa dilatácií). *Množina všetkých dilatácií priestoru* $\mathbb{E}^n$ *spolu s operáciou skladania zobrazení tvoria grupu. Označujeme ju* $\mathrm{Dil}(\mathbb{E}^n)$.

Dôkaz: Treba overiť, či sú splnené axiómy grupy. Ak f, g sú dve dilatácie s koeficientami c, d, tak $g \circ f$ je určite dilatácia s koeficientom cd. Identitu môžme považovať za dilatáciu s koeficientom 1. Ešte treba ukázať, že ku každej dilatácii existuje inverzná dilatácia. Pre posunutie o vektor $\vec{\mathbf{u}}$ je inverznou dilatáciou posunutie o vektor $-\vec{\mathbf{u}}$. Pre dilatáciu s koeficientom $c \neq 1$ (a stredom $\mathbf{s}$) to bude rovnoľahlosť so stredom $\mathbf{s}$ a koeficientom $\frac{1}{c}$. □

DÔSLEDOK 5 (Skladanie dilatácií). *V* $\mathrm{Dil}(\mathbb{E}^n)$ *platia tvrdenia*

i) zložením dvoch posunutí dostaneme posunutie,
ii) zložením posunutia a rovnoľahlosti dostaneme rovnoľahlosť,
iii) zložením dvoch rovnoľahlostí dostaneme buď posunutie alebo rovnoľahlosť.

Dôkaz: Tvrdenia sú zrejmé zo štruktúry grupy $\mathrm{Dil}(\mathbb{E}^n)$. V prípade ii), ak $\vec{\mathbf{u}}$ je vektor posunutia, $\mathbf{s}$ je stred rovnoľahlosti a c je koeficient rovnoľahlosti, tak zložením dostaneme rovnoľahlosť so stredom $\mathbf{s} + \frac{c}{1-c}\vec{\mathbf{u}}$ a koeficientom c.

Ak v prípade iii) vstupujú do hry rovnoľahlosť so stredom $\mathbf{s}$ a koeficientom c a rovnoľahlosť so stredom $\mathbf{t}$ a koeficientom d, tak v závislosti od súčinu cd dostávame buď posunutie o vektor $(d-1)(\mathbf{s}-\mathbf{t})$, ak $cd = 1$ alebo rovnoľahlosť so stredom $\frac{(c-1)d}{cd-1}\mathbf{s} + \frac{d-1}{cd-1}\mathbf{t}$ a koeficientom cd, ak $cd \neq 1$. Dokážte si to podrobne. □

DEFINÍCIA 15 (Grupa posunutí). *Množina všetkých posunutí* $\mathbb{E}^n$ *spolu s operáciou skladania tvorí grupu, ktorú označujeme* $\mathrm{T}(\mathbb{E}^n)$.

VETA 19 (Analytické vyjadrenie dilatácie). *Analytické vyjadrenie dilatácie.* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *s koeficientom* c *v repéri* $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ *je*

$$\mathbf{y} = cI\mathbf{x} + \mathbf{r}.$$

Dôkaz: Keďže platí podľa definície dilatácie platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{o}) &= [r^1, \dots, r^n]^\top \\ f^*(\vec{\mathbf{e}}_1) &= c\vec{\mathbf{e}}_1 = (c, \dots, 0)^\top \\ &\vdots \\ f^*(\vec{\mathbf{e}}_n) &= c\vec{\mathbf{e}}_n = (0, \dots, c)^\top, \end{aligned}$$

výsledok je zrejmý. □

CVIČENIE 71. *Overte podrobne výpočty v dôkaze dôsledku 5. Je skladanie dilatácií komutatívna grupa?*

CVIČENIE 72. *Napíšte rovnice posunutia, ak bod* $\mathbf{a} = [1,1]^\top \mapsto [2,0]^\top$ *a koeficient* $k = -2$.

CVIČENIE 73. *Napíšte rovnice rovnoľahlosti, ak poznáte stred* $\mathbf{o} = [0,0,0]^\top$ *a koeficient* $k = -2$.

CVIČENIE 74. *Určte rovnice rovnoľahlosti* f *a súradnice jej stredu, ak* $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ *a* k *je jej koeficient*
1) $\mathbf{a} = [1,1]^\top$, $\mathbf{b} = [3,2]^\top$, $k = -2$
2) $\mathbf{a} = [2,0,1]^\top$, $\mathbf{b} = [0,1,3]^\top$, $k = -2$.

CVIČENIE 75. *Nájdite rovnice súčinu dilatácií, ak je známy stred a koeficient (uvažujte oba prípady súčinu):*
1) $\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}_2 = [2,2]^\top, k_1 = 2, k_2 = 3$
2) $\mathbf{o}_1[0,0]^\top, \mathbf{o}_2[1,0]^\top, k_1 = 2, k_2 = \frac{1}{2}$
3) $\mathbf{o}[1,1], k = 2$, *posunutie o vektor* $(1,3)^\top$.

CVIČENIE 76. *Zistite, či existuje rovnoľahlosť, ktorá zobrazuje body* $\mathbf{a} = [1,3]^\top$, $\mathbf{b} = [3,2]^\top$ *do bodov* $\mathbf{a}' = [1,5]^\top$, $\mathbf{b}' = [\frac{13}{3}, \frac{10}{3}]^\top$. *Ak áno, nájdite stred a koeficient tejto rovnoľahlosti.*

CVIČENIE 77. *Bodom* $\mathbf{p} = [-3,-5]^\top$ *veďte priamku, ktorej úsečka medzi priamkami* $a \equiv 2x + 3y - 15 = 0$ *a* $b \equiv 4x - 5y - 12 = 0$ *má v bode* $\mathbf{p}$ *svoj stred.*

CVIČENIE 78. *Napíšte rovnice afinného zobrazenia a zistite o aké zobrazenie ide, pričom bod* $\mathbf{a} = [2,2,-1]^\top$ *je samodružný a asociované zobrazenie zobrazuje vektory* $(1,1,1)^\top \mapsto (2,2,2)^\top$, $(0,0,-1) \mapsto (0,0,-2)$ *a* $(1,3,5) \mapsto (2,6,10)^\top$.

DEFINÍCIA 16 (Základná afinita). *Nech* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je afinita rôzna od identity. Ak má zobraznie* f *aspoň jednu nadrovinu bodovo samodružnú, tak ho nazývame základnou afinitou priestoru* $\mathbb{E}^n$.

CVIČENIE 79. *Ukážte, že afinita* $\mathbb{E}^n$, *ktorá má práve jednu bodovo samodružnú nadrovinu je základnou.*

POZNÁMKA 13. *Základné afinity sú stavebné kamene všetkých afinných transformácií. V grupe* $\mathrm{GA}(\mathbb{E}^n)$ *tvoria generátory, ako uvidíme z nasledujúcich viet. Najskôr si povieme niekoľko faktov o ľubovoľnej základnej afinite.*

VETA 20 (Vyjadrenie základnej afinity). *Nech* $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ *je nadrovina a* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ *sú body nepatriace nadrovine* α. *Potom existuje jediná základná afinita* f *taká, že* α *je bodovo invariantná a* $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. *Naviac, ak* $g(\mathbf{x}) = 0$ *je všeobecná rovnica nadroviny* α, *tak*

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{a})}(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \tag{11}$$

Dôkaz: Nech $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sú lineárne nezávislé body v α. Potom $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ je lineárne nezávislá množina v $\mathbb{E}^n$. Položme $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, $f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_1, \ldots, f(\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_n$. Takto definované zobrazenie je podľa vety 9 vyjadrené jednoznačne a nadrovina α je bodovo invariantná, teda ide o základnú afinitu. Naviac $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Teda platí prvá časť vety.

Definujme zobrazenie $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{a})}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Platí

$$\begin{aligned} h(\mathbf{a}) &= \mathbf{a} + \frac{g(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} = f(\mathbf{a}) \\ h(\mathbf{a}_i) &= \mathbf{a}_i + \frac{g(\mathbf{a}_i)}{g(\mathbf{a})}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a}_i = f(\mathbf{a}_i) \quad \text{pre } i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

pretože $g(\mathbf{a}_i) = 0$ pre $i = 1, \dots, n$. Teda $f = h$. □

Dôsledok 6. *Nech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$. Potom sú vektory $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ a $f(\mathbf{y}) - \mathbf{y}$ lineárne závislé.*
Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že tieto vektory sú násobkom vektora $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. □

Definícia 17 (Smer základnej afinity). *Nech f je základná afinita, potom jednorozmerný vektorový podpriestor $\mathbb{V}^n$ generovaný vektormi $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ sa nazýva smerom základnej afinity f.*

Veta 21 (O existencii koeficientu základnej afinity). *Nech f je základná afinita priestoru $\mathbb{E}^n$ so samodružnou nadrovinou $\alpha \subset \mathbb{E}^n$. Nech $\alpha\colon g(\mathbf{x}) = 0$.*

a) Ak smer tejto afinity $\vec{\mathbf{s}}_f \notin V_\alpha$, označme $\mathbf{x}^*$ bod prieniku nadroviny α a priamky $\mathbf{x}f(\mathbf{x})$ pre ľubovolné $\mathbf{x} \notin \alpha$. Potom deliaci pomer bodov $(f(\mathbf{x})\mathbf{x}\mathbf{x}^*) = \frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})}$ je konštantný.

b) Ak smer afinity $\vec{\mathbf{s}}_f \in V_\alpha$, tak $\frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})} = 1$ pre ľubovolné $\mathbf{x} \notin \alpha$.

Dôkaz: Najprv prípad a). Nech priamka $\mathbf{x}f(\mathbf{x})$ má parametrické vyjadrenie $\mathbf{y} = (1 - t)f(\mathbf{x}) + t\mathbf{x}$, $t \in \mathbb{R}$. Potom bod $\mathbf{x}^* = (1 - t^*)f(\mathbf{x}) + t^*\mathbf{x}$ pre nejaké $t^* \in \mathbb{R}$ a $g(\mathbf{x}^*) = 0$, teda (vzhľadom na afinnosť g) možno písať, že

$$g(\mathbf{x}^*) = (1 - t^*)g(f(\mathbf{x})) + t^*g(\mathbf{x}),$$

čo podľa vety 4 znamená, že

$$(f(\mathbf{x})\mathbf{x}\mathbf{x}^*) = \frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})}.$$

Analogicky, môžeme použiť g na (11) a dostávame

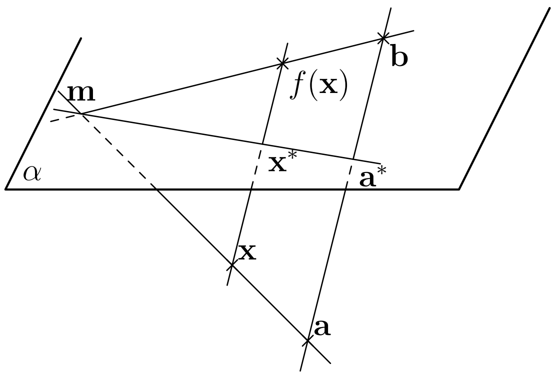
$$g(f(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x}) + \frac{g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{a})}(g(f(\mathbf{a})) - g(\mathbf{a}))$$

pre pevne zvolené $\mathbf{a} \notin \alpha$, čo po úprave dá pre $\mathbf{x} \notin \alpha$

$$\frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})} = \frac{g(f(\mathbf{a}))}{g(\mathbf{a})}.$$

Teraz ešte prípad b). Ak $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \in V_\alpha$, tak $g(f(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x}) = 0$, a teda $\frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})} = 1$ pre $\mathbf{x} \notin \alpha$. □

Definícia 18 (Koeficient základnej afinity). *Nech f je základná afinita priestoru $\mathbb{E}^n$ so samodružnou nadrovinou $\alpha : g(\mathbf{x}) = 0$. Číslo $\frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})}$ pre $\mathbf{x} \notin \alpha$ nazývame koeficientom základnej afinity f. Označujeme ho k_f.*



OBR. 9. Geometrický význam základnej afinity s koeficientom $k_f \neq 1$. Deliaci pomer bodov $(f(\mathbf{x})\mathbf{x}\mathbf{x}^*)$ je rovnaký pre $\mathbf{x} \notin \alpha$.

DÔSLEDOK 7 (Vyjadrenie základnej afinity pomocou jej smeru a koeficientu). *Nech f je základná afinita priestoru $\mathbb{E}^n$ s bodovo samodružnou nadrovinou $\alpha : g(\mathbf{x}) = 0$, s koeficientom $k_f \neq 1$ a smerom $\vec{\mathbf{s}}_f$. Potom*

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (k_f - 1)\frac{g(\mathbf{x})}{g^*(\vec{\mathbf{s}}_f)}\vec{\mathbf{s}}_f. \tag{12}$$

Dôkaz: Podľa vety 20 potrebujeme poznať obraz nejakého bodu mimo nadroviny α. Nech $\mathbf{a} \notin \alpha$ a $f(\mathbf{a}) - \mathbf{a} = \ell\vec{\mathbf{s}}_f$ pre vhodné $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$.

Zrejme platí $\frac{f(\mathbf{x})-\mathbf{x}}{g(\mathbf{x})} = \frac{f(\mathbf{a})-\mathbf{a}}{g(\mathbf{a})} = k_f - 1$ pre ľubovoľný bod $\mathbf{x} \notin \alpha$, keďže $k_f = \frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})}$. Teda

$$\frac{1}{g(\mathbf{a})} = (k_f - 1)\frac{1}{g^*(\ell\vec{\mathbf{s}}_f)}.$$

Takže dosadením do vyjadrenia (11)

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (k_f - 1)\frac{g(\mathbf{x})}{\ell g^*(\vec{\mathbf{s}}_f)}\ell\vec{\mathbf{s}}_f.$$

a úpravou získame výsledok. □

CVIČENIE 80. *Napíšte rovnice základnej afinity, ak sú dané*

a) os $o \equiv y = 0$ a bod $[0,1]^\top \mapsto [3,5]^\top$,
b) os $o \equiv 2x + y - 1 = 0$ a bod $[1,0]^\top \mapsto [2,1]^\top$.

CVIČENIE 81. *Určte rovice základnej afinity v E^3, ak rovina samodružných bodov*

a) $\rho \equiv x + 2y - z + 1 = 0$ a bod $\mathbf{a} = [0,0,0]^\top \to f(\mathbf{a}) = [0,0,2]^\top$
b) $\rho \equiv x + 2y - z + 1 = 0$ a bod $\mathbf{a}' = [1,0,1]^\top \to f(\mathbf{a}') = [0,2,2]^\top$

CVIČENIE 82. *Zistite, či zobrazenie f je základná afinita. Ak áno, určte jej smer a koeficient:*

a) $f \equiv \{x' = 3x - 2y + 2, y' = x + 1\}$

b) $f \equiv \{x' = -y + 1, y' = x + 2y - 1\}$
c) $f \equiv \{x' = 2x + y - 1, y' = -2x - y + 2\}$

CVIČENIE 83. *Do čoho sa zobrazí priamka* $p \equiv \{x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 1 - t\}$ *v súmernosti podľa roviny, v ktorej sa* $\mathbf{a} = [0, 0, 0]^\top \to f(\mathbf{a}) = [2, 2, 8]^\top$

CVIČENIE 84. *Nájdite osovú afinitu s osou* $2x+y-2 = 0$*, koeficientom* $k = 3$ *a smerom* $\vec{\mathbf{s}} = (2, 1)^\top$.

CVIČENIE 85. *Nájdite afinné zobrazenie, ktoré je súčinom osovej afinity* a_1 *s osou* $x + y - 2 = 0$*, koeficientom* $k_1 = \frac{1}{2}$ *a smerom* $\vec{\mathbf{s}}_1 = (1, 1)^\top$ *a osovej afinity* a_2 *s osou* $x - y = 0$*, koeficientom* $k_2 = 2$ *a smerom* $\vec{\mathbf{s}}_2 = (1, -1)^\top$.

CVIČENIE 86. *Nájdite afinitu* $\mathbb{E}^3$*, ktorej rovnica samodružných bodov má rovnicu* $2x + 2y + z - 2 = 0$*, koeficientom* $k = \frac{1}{2}$ *a smerom* $\vec{\mathbf{s}} = (2, -2, 1)^\top$.

CVIČENIE 87. *Určte osovú afinitu, ktorá*
a) má os $x + 2y - z + 1 = 0$ *a bod* $[0, 0, 0]^\top$ *sa zobrazí do bodu* $[0, 0, 2]^\top$,
b) má os $x + y - z = 0$ *a bod* $[1, 0, 2]^\top$ *sa zobrazí do bodu* $[2, 0, 1]^\top$.

CVIČENIE 88. *Určte samodružné priamky základnej afinity s bodovo samodružnou nadrovinou* $\alpha\colon g(\mathbf{x}) = 0$*, smerom* $\vec{\mathbf{s}}_f$ *a koeficientom* k_f.

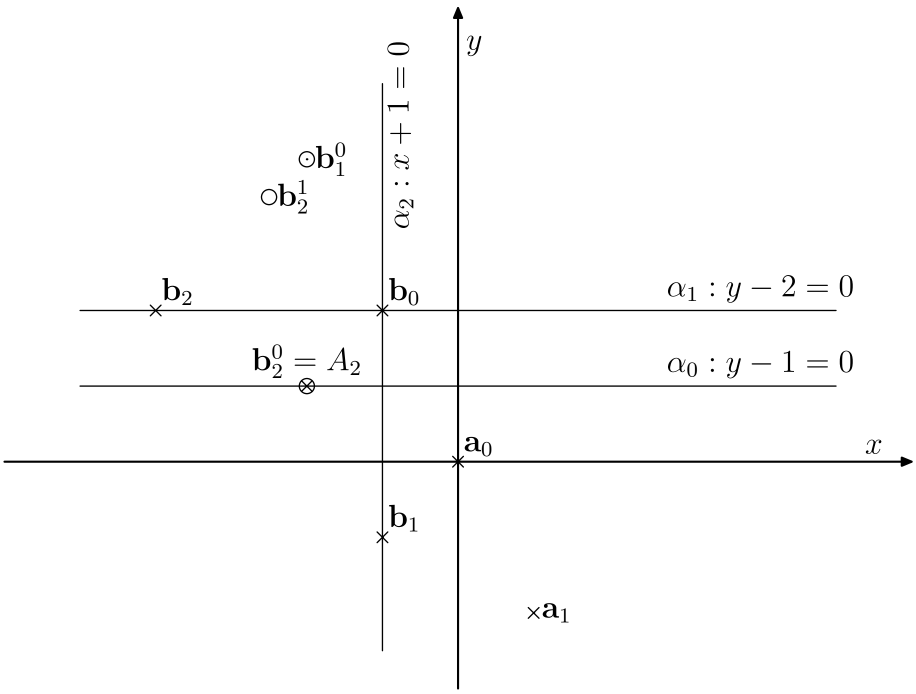
VETA 22 (O rozklade afinnej transformácie). *Nech* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je afinná transformácia. Potom* f *možno napísať ako súčin nanajvýš* $n + 1$ *základných afinít.*
Dôkaz: Nech $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ sú afinne nezávislé body priestoru $\mathbb{E}^n$ a nech $\mathbf{b}_i = f(\mathbf{a}_i)$ pre $i = 0, \dots, n$. Body $\mathbf{b}_i \quad i = 0, \dots, n$ sú tiež afinne nezávislé. Zostrojíme postupnosť základných afinít $f_0, \dots, f_n$, ktorých zložením dostaneme zobrazenie f.

Ak $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ pre všetky $i = 0, \dots, n$, tak f je identita a netreba ju rozkladať. V opačnom prípade, nech $\alpha_0 \in \mathbb{E}^n$ je nadrovina neobsahujúca žiaden z bodov $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$. (Ako takú nadrovinu zostrojíme?) Zostrojme nadrovinovú afinitu f_0 so samodružnou nadrovinou α_0 a takú, že $f_0(\mathbf{a}_0) = \mathbf{b}_0$. Označme $\mathbf{b}_i^0 = f_0(\mathbf{a}_i)$ pre $i = 1, \dots, n$.

Ak $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$ pre $i = 1, \dots, n$, tak ďalej už rozkladať nepotrebujeme. Inak zostrojme afinitu f_1. Nech α_1 je nadrovina obsahujúca bod $\mathbf{b}_0$ a neobsahujúca žiaden z bodov $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_1^0$. Existencia takejto roviny vyplýva z faktu, že body $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1^0, \dots, \mathbf{b}_n^0$ sú lineárne nezávislé. (Ako takú nadrovinu zostrojíme?) Samodružnou nadrovinou afinity f_1 bude nadrovina α_1 a $f(\mathbf{b}_1^0) = \mathbf{b}_1$. Označme body $\mathbf{b}_i^1 = f_1(\mathbf{b}_i^0)$ pre $i = 2, \dots, n$.

Teraz budeme pokračovať matematickou indukciou. Predpokladajme, že máme zostrojené základné afinity $f_0, \dots, f_{j-1}$, kde $0 < j \le n$. Ak platí $\mathbf{b}_i^{j-1} = \mathbf{b}_i$ pre $i = j, \dots, n$, netreba ďalej rozkladať. Inak zostrojme afinitu f_j. Samodružnou nadrovinou afinity f_j bude taká nadrovina α_j, ktorá bude obsahovať body $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}$ a nebude obsahovať žiaden z bodov $\mathbf{b}_j^{j-1}$ a $\mathbf{b}_j$. Taká nadrovina určite existuje, pretože body $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j^{j-1}, \dots, \mathbf{b}_n^{j-1}$ sú lineárne nezávislé (podrobne si premyslite, ako by ste ju zostrojili). Táto základná afinita je dourčená podmienkou $f_j(\mathbf{b}_j^{j-1}) = \mathbf{b}_j$. Označme ešte $\mathbf{b}_i^j = f_j(\mathbf{b}_i^{j-1})$ pre $i = j + 1, \dots, n$.

Takto zostrojíme $n + 1$ základných afinít. Tvrdíme, že $f(\mathbf{x}) = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_0(\mathbf{x})$. Stačí ukázať, že sa tieto dve zobrazenia zhodujú na množine $n+1$ afinne nezávislých bodov v $\mathbb{E}^n$. Vyberme si $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$.



OBR. 10. Rozklad afinnej transformácie na osové afinity.

Z konštrukcie vyplýva, že $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i = f_i \circ f_{i-1} \circ \ldots \circ f_0(\mathbf{a}_i) = f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_0(\mathbf{a}_i)$ pre $i = 0, \ldots, n$. $\square$

POZNÁMKA 14. *Predchádzajúca veta nám hovorí, že grupa* $\mathrm{GA}(\mathbb{E}^n)$ *je generovaná všetkými možnými základnými afinitami tohoto priestoru. Rozklad danej afinity ale nie je jednoznačný! Prečo?*

PRÍKLAD 8. *Rozložte afinnú transformáciu* $f \equiv \{x' = 2x + y - 1, y' = x + 2y + 2\}$ *priestoru* $\mathbb{E}^2$ *na základné afinity.*

Riešenie: Dôkaz vo vete 22 je konštrukčný, budeme postupovať podľa neho. Zvoľme si afinne nezávislú množinu bodov $\mathbf{a}_0 = [0,0]^\top$, $\mathbf{a}_1 = [1,-2]^\top$, $\mathbf{a}_2 = [-2,1]^\top$. Potom $\mathbf{b}_0 = f(\mathbf{a}_0) = [-1,2]^\top$, $\mathbf{b}_1 = f(\mathbf{a}_1) = [-1,-1]^\top$, $\mathbf{b}_2 = f(\mathbf{a}_2) = [-4,2]^\top$. Teraz budeme konštruovať tri osové afinity. Postup je ilustrovaný na obr. 10.

Zobrazenie f_0 bude osová afinita s osou $\alpha_0 : y - 1 = 0$. Je to priamka neobsahujúca ani bod $\mathbf{a}_0$ ani bod $\mathbf{b}_0$. Príslušná osová afinita sa dá analyticky vyjadriť ako

$$f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{y-1}{-1}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},$$

teda $f_0(\mathbf{a}_0) = \mathbf{b}_0$, $f_0(\mathbf{a}_1) = [-2,4]^\top =: \mathbf{b}_1^0$ a $f_0(\mathbf{a}_2) = [-2,1]^\top =: \mathbf{b}_2^0$.

Zobrazenie f_1 bude osová afinita s osou $\alpha_1 : y - 2 = 0$. Je to priamka obsahujúca bod $\mathbf{b}_0$ a neobsahujúca ani bod $\mathbf{b}_1^0$ ani bod $\mathbf{b}_1$. Príslušná osová afinita sa dá analyticky vyjadriť ako

$$f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{y-2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

teda $f_1(\mathbf{b}_0) = \mathbf{b}_0$, $f_1(\mathbf{b}_1^0) = \mathbf{b}_1$ a $f_1(\mathbf{b}_2^0) = [-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]^\top =: \mathbf{b}_2^1$.

Zobrazenie f_2 je posledná potrebná osová afinita s osou $\alpha_2 : x+1 = 0$. Je to priamka prechádzajúca bodmi $\mathbf{b}_0$ a $\mathbf{b}_1$ a neobsahujúca ani bod $\mathbf{b}_1^2$ ani bod $\mathbf{b}_2$. Príslušná osová afinita sa dá analyticky vyjadriť po úprave ako

$$f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (x+1)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

teda $f_2(\mathbf{b}_0) = \mathbf{b}_0$, $f_2(\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1$ a $f_2(\mathbf{b}_1^2) = \mathbf{b}_2$.

Overte si zložením týchto troch zobrazení, že sme počítali správne. □

Definícia 19 (Ekviafinná transformácia). *Afinná transformácia priestoru* $\mathbb{E}^n$ *sa nazýva ekviafinná, ak jej analytické vyjadrenie v nejakej karteziánskej sústave súradníc je* $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$ *a* $\det A = 1$.

Poznámka 15. *Ekviafinné zobrazenia zachovávajú mieru (objem) zobrazovanej množiny.*

Veta 23 (Štruktúra ekviafinných transformácií). *Všetky akviafinné transformácie spolu s operáciou skladania tvoria grupu.*

Dôkaz: Pokúste sa dokázať si to ako cvičenie. □

Definícia 20 (Grupa ekviafinných transformácií). *Grupu všetkých ekviafinných transformácií označujeme* SA($\mathbb{E}^n$). *Nazýva sa obyčajne špeciálna afinná grupa alebo unimodulárna grupa priestoru* $\mathbb{E}^n$.

Cvičenie 89. *Daná je afinita* f. *Rozložte ju na súčin základných afinít!*

a) $f \equiv \{x' = 2x - y + 1, y' = x + y + 3\}$
b) $f \equiv \{x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 + 1, x_2' = 2x_1 - x_2 + 3, x_3' = x_2 + x_3 - 2\}$
c) $f \equiv \{x_1' = x_1 + x_2, x_2' = x_1 + x_2 + x_3, x_3' = x_2 + x_3 + 2\}$

Cvičenie 90. *Rozložte na základné afinity afinitu, ktorá zobrazuje* $\mathbf{a} = [0,0]^\top \to f(\mathbf{a}) = [1,1]^\top$, $\mathbf{b} = [1,0]^\top \to f(\mathbf{b}) = [1,-1]^\top$, $C = [0,1]^\top \to f(C) = [-1,-2]^\top$.

Cvičenie 91. *Dané sú tri priamky* a, b, c. *Určte štvorec* **abcd** *tak, aby* $\mathbf{a} \in a$, $\mathbf{c} \in c$, $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in b$, *pričom* $a \equiv 2x + y + 1 = 0$, $b \equiv 2x + y - 3 = 0$ *a* $c \equiv x - y = 0$.

Cvičenie 92. *Dané sú tri priamky* a, b, c. *Určte priamku* p *tak, aby* $p \perp a$, $p \cap b = \mathbf{b}$, $p \cap c = \mathbf{c}$ *a stred úsečky* **bc** *je bod z* a, *pričom* $a \equiv x - y = 0$, $b \equiv y - 2 = 0$ *a* $c \equiv 2x - 3y + 6 = 0$.

Cvičenie 93. *Nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$. *Nech* $\mathrm{GA}_{\mathbf{a}}(\mathbb{E}^n)$ *je množina všetkých afinných transformácií priestoru* $\mathbb{E}^n$, *v ktorých je bod* $\mathbf{a}$ *samodružný. Dokážte, že* $\mathrm{GA}_{\mathbf{a}}(\mathbb{E}^n)$ *je grupa vzhľadom na operáciu skladania zobrazení. Nazývame ju stabilizátor bodu* $\mathbf{a}$.

CVIČENIE 94. *Nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$. *Dokážte, že* $\mathrm{GA}(\mathbb{E}^n)/\mathrm{GA}_{\mathbf{a}}(\mathbb{E}^n) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, *kde* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *je grupa všetkých lineárnych transformácií priestoru* $\mathbb{R}^n$.

CVIČENIE 95. *Sformulujte a dokážte analogické tvrdenie ako je dôsledok 7 pre základné afinity s koeficientom 1.*

7. Zhodnostné zobrazenia

V tejto časti sa budeme zaoberať zobrazeniami, ktoré zachovávajú vzdialenosti. Vzhľadom na to potrebujeme mať vo vektorovom priestore asociovanom so skúmaným afinným priestorom skalárny súčin, od ktorého máme odvodenú (indukovanú) normu. Takýto bodový priestor sa nazýva euklidovský. Všetky zobrazenia, o ktorých sme hovorili dosiaľ takýto pojem nevyžadujú a je možné ich uvažovať len v afinnom priestore.

DEFINÍCIA 21 (Zhodnostné zobrazenie). *Zobrazenie* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *sa nazýva* zhodnostné (izometrické)*, ak pre ľubovoľné body* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ *platí* $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$*, kde* $\|.\|$ *označuje normu indukovanú skalárnym súčinom* $\langle ., . \rangle$ *v euklidovskom priestore* $\mathbb{E}^n$*. Ak* f *je naviac transformácia, tak sa nazýva* zhodnostnou transformáciou*. Ak* f *je aj afinitou, tak* f *nazývame* zhodnostnou afinitou*.*

POZNÁMKA 16. *Z definície ihneď vidno niekoľko vlastností zhodnostných zobrazení. Keďže* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$*, musí aj* $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$*. Teda zhodnostné zobrazenie je prosté, čo znamená,* $n \leq m$*.*

VETA 24 (Afinnosť zhodnostného zobrazenia). *Každé zhodnostné zobrazenie* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *je afinné.*
Dôkaz: Dokážeme, že zhodnostné zobrazenie spĺňa iii) z vety 5. Nech $\mathbf{c} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, pričom $\mathbf{c} \neq \mathbf{b}$. Potom platí $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| = \|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{c})\|$ a $\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\| = \|f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{b})\|$. Keďže body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sú kolineárne, tak platí $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\mathbf{abc})(\mathbf{c} - \mathbf{b})$ a niektorá z rovností (pozri obr. 2)

$$\begin{cases} \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| + \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|, & \text{ak } (\mathbf{abc}) < 0, \\ \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|, & \text{ak } 0 < (\mathbf{abc}) < 1, \\ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|, & \text{ak } 1 < (\mathbf{abc}). \end{cases}$$

Nech platí napríklad prvá z nich (ostatné prípady sa dokážu analogicky). Keďže f zachováva vzdialenosti, možno písať

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{c})\| + \|f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{a})\| = \|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|,$$

čo podľa trojuholníkovej nerovnosti znamená, že body $f(\mathbf{a})$, $f(\mathbf{b})$, $f(\mathbf{c})$ sú kolineárne, $f(\mathbf{c}) \neq f(\mathbf{b})$, teda možno počítať deliaci pomer $(f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c})) < 0$. Keďže $f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{a}) = (f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c}))(f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{b}))$, tak $\|f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{a})\| = |(f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c}))| \|(f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{b}))\|$. Podobne $\|(\mathbf{c} - \mathbf{a})\| = |(\mathbf{abc})| \|(\mathbf{c} - \mathbf{b})\|$. Teda $|(\mathbf{abc})| = |(f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c}))|$, čo pri obmedzeniach na hodnotu deliaceho pomeru (oba sú záporné) znamená ich rovnosť. Teda $(\mathbf{abc}) = (f(\mathbf{a})f(\mathbf{b})f(\mathbf{c}))$.
□

PRÍKLAD 9. *Nech* $f \equiv \{x_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1, x_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1\}$*. Zistite, či* f *je zhodnostné zobrazenie.*

Riešenie: Nech $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ a $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$. Potom podľa definície platí

$$
\begin{aligned}
\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 &= (x_1' - y_1')^2 + (x_2' - y_2')^2 = \\
&= (x_1 - y_1)^2(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2} + (x_2 - y_2)^2(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + \\
&+ (x_1 - y_1)^2(-\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)(-\tfrac{\sqrt{2}}{2})\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \\
&+ (x_2 - y_2)^2(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = \\
&= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}
$$

Teda f je zhodné zobrazenie, keďže hodnoty $\|.\|$ sú nezáporné. $\square$

VETA 25 (Zachovávanie skalárneho súčinu). *Zobrazenie $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ je zhodnostné práve vtedy, keď f^* zachováva skalárny súčin (t.j. $\langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{v}})\rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle$ pre ľubovoľné vektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}^n$)*

Dôkaz: Nech f je zhodnostné zobrazenie. Potom podľa definície zhodnostného zobrazenia platí pre ľubovolný vektor $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, že $\langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{u}})\rangle = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}\rangle$. Naviac platí, že

$$
\langle \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}\rangle + 2\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle + \langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle, \tag{13}
$$

teda

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle &= \frac{1}{2}(\langle \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\rangle - \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}\rangle - \langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle) = \\
&= \frac{1}{2}(\langle f^*(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}), f^*(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}})\rangle - \langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{u}})\rangle - \langle f^*(\vec{\mathbf{v}}), f^*(\vec{\mathbf{v}})\rangle) = \\
&= \langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{v}})\rangle.
\end{aligned}
$$

Podmienka zachovávania skalárneho súčinu je aj postačujúcou podmienkou, aby zobrazenie f bolo zhodnostné. Dôkaz je analogický. $\square$

POZNÁMKA 17. *Zachovávanie skalárneho súčinu má geometrický význam. Keďže uhly aj všetky metrické vlastnosti sú odvodené od skalárneho súčinu, možno tvrdiť, že zhodnostné zobrazenia všetky tieto aspekty geometrického objektu zachovávajú. Hovoríme, že zobrazenie je ekviformné a izometrické.*

DÔSLEDOK 8. *Obrazom karteziánskej sústavy súradníc v zhodnostnej transformácii $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je karteziánska sústava súradníc.*

Dôkaz: Nech $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\rangle$ je karteziánska sústava súradníc v $\mathbb{E}^n$. Potom jej obrazom je súradnicová sústava $\langle f(\mathbf{o}), f^*(\vec{\mathbf{e}}_1), \ldots, f^*(\vec{\mathbf{e}}_n)\rangle$. Kedže platí $\delta_{i,j} = \langle \vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j\rangle = \langle f^*(\vec{\mathbf{e}}_i), f^*(\vec{\mathbf{e}}_j)\rangle$, tak aj výsledná súradnicová sústava je karteziánska. $\square$

Predchádzajúci dôsledok sa dá zovšeobecniť.

VETA 26. *Nech $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\rangle$ je repér v $\mathbb{E}^n$ a nech $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^m$, $\vec{\mathbf{f}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{f}}_n \in \mathbb{V}_m$, pričom $\|\vec{\mathbf{e}}_i + \vec{\mathbf{e}}_j\| = \|\vec{\mathbf{f}}_i + \vec{\mathbf{f}}_j\|$ pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Potom existuje jediné zhodné zobrazenie $f \colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, také že $f(\mathbf{o}) = \mathbf{p}$ a $f^*(\vec{\mathbf{e}}_i) = \vec{\mathbf{f}}_i$ pre $i = 1, \ldots, n$.*

Dôkaz: Podľa dôsledku 2 existuje jediné afinné zobrazenie s vlastnosťami požadovanými tvrdením vety. Zostáva nám ukázať, že je zhodné.

Z predpokladov sa ľahko pomocou (13) dokáže platnosť rovností

$$\langle \vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j \rangle = \langle \vec{\mathbf{f}}_i, \vec{\mathbf{f}}_j \rangle = \langle f^*(\vec{\mathbf{e}}_i), f^*(\vec{\mathbf{e}}_j) \rangle$$

pre $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Nech $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}^n$ a nech $\vec{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{\mathbf{e}}_i$, $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n d_i \vec{\mathbf{e}}_i$. Potom možno písať

$$\begin{aligned}\langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{v}}) \rangle &= \langle \sum_{i=1}^n c_i f^*(\vec{\mathbf{e}}_i), \sum_{i=1}^n d_i f^*(\vec{\mathbf{e}}_i) \rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i d_j \langle f^*(\vec{\mathbf{e}}_i), f^*(\vec{\mathbf{e}}_j) \rangle = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i d_j \langle \vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j \rangle = \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle,\end{aligned}$$

špeciálne, ak $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}$, dostávame, že zobrazenie f je zhodné. □

Cvičenie 96. *Dokážte, že pre ľubovoľný rovnobežník* **abcd** *platí rovnosť.*

$$2\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{d} - \mathbf{b}\|^2.$$

Cvičenie 97. *Majme lineárne nezávislú množinu bodov* $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{E}^n$ *a* $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{E}^m$. *Ak* $\|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\| = \|\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j\|$ *pre ľubovoľné* $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, *tak afinné zobrazenie* $\mathbf{a}_i \mapsto \mathbf{b}_i$ *pre* $i = 0, \ldots, n$ *je zhodné. Dokážte!*

Definícia 22 (Ortogonálna transformácia euklidovského vektorového priestoru). *Lineárne zobrazenie* $g\colon \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$ *sa nazýva* ortogonálnou transformáciou vektorového priestoru $\mathbb{V}^n$, *ak jeho matica* A *v ortonormálnej báze priestoru* $\mathbb{V}^n$ *spĺňa rovnosť* $A^\top A = I$.

Veta 27 (Existencia grupy ortogonálnych transformácií). *Množina všetkých ortogonálnych transformácií vektorového priestoru* $\mathbb{V}^n$ *spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu.*

Dôkaz: Nech $\vec{\mathbf{y}} = A\vec{\mathbf{x}}$ je analytické vyjadrenie ortogonálneho zobrazenia v ľubovoľnej pevne zvolenej ortonormálnej báze priestoru $\mathbb{V}^n$. Ortogonálne zobrazenie priestoru $\mathbb{V}^n$ je charakterizované rovnosťou

$$A^\top A = I. \tag{14}$$

Zrejme identické zobrazenie je ortogonálne. Zloženie dvoch ortogonálnych zobrazení s maticami A a B v tej istej ortonormálnej báze má maticu BA, pre ktoru platí

$$(BA)^\top BA = A^\top (B^\top B) A = A^\top I A = I,$$

teda je ortogonálne. Naviac zrejme pre ľubovolné ortogonálne zobrazenie $A^{-1} = A^\top$ a platí

$$(A^{-1})^\top A^{-1} = A^{\top\top} A^\top = AA^\top = (A^\top A)^\top = I.$$

Takže množina všetkých ortogonálnych transformácií je grupa. □

Definícia 23 (Ortogonálna grupa). *Grupu všetkých ortogonálnych transformácií vektorového priestoru* $\mathbb{V}^n$ *označujeme* $O(\mathbb{V}^n)$*, špeciálne pre reálny vektorový priestor používane* $O(n)$*. Nazývame ju aj* ortogonálnou grupou.

Veta 28 (Charakterizácia zhodnostných transformácií). *Nech* $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je transformácia. Potom sú ekvivalentné podmienky:*
a) f *je zhodnostné*
b) $f^* \in O(n)$
c) $A^T A = I$*, kde* A *je matica zobrazenia* f^* *v ľubovolnej karteziánskej sústave súradníc.*

Dôkaz: Nech $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Najskôr ukážeme ekvivalenciu a) a c). Zobrazenie f je zhodnostné práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ platí $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Môžeme teda písať $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|A\mathbf{x} + \mathbf{b} - (A\mathbf{y} + \mathbf{b})\| = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|$ a následne, ak využijeme fakt, že štandardná norma v $\mathbb{E}^n$ je odvodená zo skalárneho súčinu $\langle ., . \rangle$ v $\mathbb{E}^n$

$$\langle (\mathbf{x}-\mathbf{y}), (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rangle = \langle f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y}) \rangle = \langle A(\mathbf{x}-\mathbf{y}), A(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rangle = \langle (\mathbf{x}-\mathbf{y}), A^\top A(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rangle,$$

a to platí pre ľubovoľné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ práve vtedy, keď $A^\top A = I$.

Ekvivalencia tvrdení b) a c) je známa z lineárnej algebry. □

Dôsledok 9 (Analytické vyjadrenie zhodnostného zobrazenia). *Nech je zobrazenie* $f \colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *zhodnostné. Zvoľme v* $\mathbb{E}^n$ *karteziánsku súradnicovú sústavu* $\langle \mathbf{o}, \vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n \rangle$ *a v* $\mathbb{E}^m$ *tiež karteziánsku súradnicovú sústavu* $\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_m \rangle$*. Nech* $f(\mathbf{o}) = [r^1, \dots, r^n]^T$*,* $f^*(\vec{\mathbf{e}}_i) = (a_i^1, \dots, a_i^m)^T$ *pre* $i = 1, \dots, n$*. Ak* $\mathbf{x} = [x^1, \dots, x^n]^T$ *a* $f(\mathbf{x}) = [y^1, \dots, y^m]^T$*, tak*

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix}.$$

Naviac platí, že

$$A^\top A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Dôkaz: Tvrdenie vyplýva priamo z analytického tvaru afinného zobrazenia a z vety 28.
□

Dôsledok 10 (Reálne vlastné hodnoty zhodnostného zobrazenia). *Asociované zobrazenie zhodnostnej afinity* f *môže nadobudnúť reálne vlastné hodnoty* ± 1.

Dôkaz: Ak $\vec{\mathbf{u}}$ je vlastný vektor, tak $\|f^*(\vec{\mathbf{u}})\| = \|\vec{\mathbf{u}}\|$, teda môže platiť iba $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{u}}$ alebo $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = -\vec{\mathbf{u}}$. (Premyslite si, prečo nemôže mať zhodnostná afinita nulový vlastný vektor!)
□

Poznámka 18. *Zhodnostné zobrazenie môže mať aj komplexné vlastné hodnoty. Platí ale, že ich veľkosť je 1.*

VETA 29 (Štruktúra zhodnostných afinít). *Množina všetkých zhodnostných transformácií priestoru $\mathbb{E}^n$ spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu.*

Dôkaz: Nech $f, g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ sú zhodnostné zobrazenia. Je jasné, že aj zložené zobrazenie je zhodnostné, lebo

$$\|f \circ g(\mathbf{x}) - f \circ g(\mathbf{y})\| = \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Identické zobrazenie priestoru $\mathbb{E}^n$ je zhodnostné zobrazenie, teda v množine všetkých zhodnostných afinít existuje jednotkový prvok. Naviac inverzné zobrazenie k zobrazeniu f je afinné zobrazenie, stačí ukázať, že je zhodnostné. Ale

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|f^{-1} \circ f(\mathbf{x}) - f^{-1} \circ f(\mathbf{y})\| = \|f^{-1}(f(\mathbf{x})) - f^{-1}(f(\mathbf{y}))\|,$$

a kedže f je bijektívne, $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$ nadobúda všetky hodnoty. □

DEFINÍCIA 24 (Grupa zhodnostných transformácií). *Grupu všetkých zhodnostných transformácií (izometrií) priestoru $\mathbb{E}^n$ označujeme* $\mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$.

DÔSLEDOK 11 (Hodnota determinantu matice zhodnostnej transformácie). *Nech $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je zhodnostná transformácia s analytickým vyjadrením $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$. Potom* $\det A = \pm 1$.

Dôkaz: Zrejme

$$1 = \det I = \det(A^\top A) = \det A^\top \det A = (\det A)^2,$$

teda $\det A = \pm 1$. □

DEFINÍCIA 25 (Orientácia priestoru). *Nech $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ sú dve bázy n-rozmerného vektorového priestoru a P je matica prechodu medzi týmito bázami. Hovoríme, že bázy sú* súhlasne orientované, *ak* $\det P > 0$, *inak hovoríme, že sú* nesúhlasne orientované. *Množina všetkých báz sa tak prirodzene rozdelí na dve triedy.* Orientáciou priestoru *nazývame výber jednej z týchto tried, ktorú nazývame* kladnou orientáciou priestoru, *zostávajúcu nazývame* zápornou orientáciou priestoru. Orientovaný vektorový priestor *je taký vektorový priestor, v ktorom máme vybratú kladnú orientáciu.* Orientovaný afinný priestor *je afinný priestor s orientovaným smerom.*

DEFINÍCIA 26 (Súhlasné a nesúhlasné zhodnostné transformácie). *Zhodnostnú transformáciu, ktorej matica A v nejakej kladnej ortonormálnej báze orientovaného euklidovského priestoru má* $\det A = 1$, *nazývame súhlasnou zhodnostnou transformáciou. V niektorej literatúre sa možno stretnúť aj s pojmom* priama zhodnostná transformácia *a* nepriama zhodnostná transformácia.

POZNÁMKA 19. *Všetky bázy smeru n-rozmerného euklidovského priestoru môžeme zatriediť do dvoch skupín. Výberom jednej z nich orientujeme priestor a potom vzhľadom na takúto vybratú skupinu báz, hovoríme o zobrazeniach, ktoré sú s nimi súhlasné alebo nesúhlasné, t.j. ktoré zobrazujú kladne orientované bázy na kladne orientované bázy alebo záporne orientované bázy.*

V ďalšom budeme predpokladať, že máme daný orientovaný euklidovský priestor.

Veta 30 (Grupa súhlasných izometrií). *Množina všetkých súhlasných zhodnostných transformácií priestoru* $\mathbb{E}^n$ *spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu. Ide o podgrupu grupy* $\mathrm{Is}(\mathbb{E}^n)$.

Dôkaz: Treba ukázať, že zložením dvoch súhlasných zhodnostných transformácií dostaneme súhlasnú zhodnostnú transformáciu a že inverzné zobrazenie ku súhlasnej zhodnostnej transformácii je opäť súhlasná zhodnostná transformácia. Obe možno dokázať z analytického vyjadrenia zloženej transformácie. Ak $f, g\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ sú zhodnostné transformácie a $\mathbf{y} = A\mathbf{x}+\mathbf{r}$, $\mathbf{y} = B\mathbf{x}+\mathbf{s}$ sú analytické vyjadrenia príslušných zobrazení v nejakej kladnej karteziánskej súradnicovej sústave, tak $\det A = \det B = 1$. Keďže zobrazenie $f \circ g$ má maticu AB a $\det AB = \det A \det B = 1$, tak ide opäť o súhlasnú zhodnostnú. Analogicky to dokážeme pre inverzné zobrazenie, ak použijeme fakt, že $A^\top$ je matica inverznej transformácie ku transformácii f a že identické zobrazenie je súhlasná zhodnostná transformácia.

□

Definícia 27 (Grupa súhlasných zhodnostných transformácií). *Grupu všetkých súhlasných zhodnostných transformácií priestoru* $\mathbb{E}^n$ *označujeme* $\mathrm{Is}^+(\mathbb{E}^n)$.

Cvičenie 98. *Nájdite (ne)súhlasné zhodnostné zobrazenie, ktoré zobrazuje*
a) $[1,0]^\top \mapsto [0,0]^\top$ *a* $[0,0]^\top \mapsto [0,1]^\top$
b) $[1,0]^\top \mapsto [1,1]^\top$ *a* $[5,2]^\top \mapsto [-1,5]^\top$

Cvičenie 99. *Nájdite zhodnostné zobrazenie, ktoré má bod* $[4,0]^\top$ *samodružný a smery* $(1,1)^\top$, $(1,-1)^\top$ *sú tiež samodružné. Koľko je takých zobrazení?*

Cvičenie 100. *Koľko existuje zhodnostných transformácií zobrazujúcich bod* $[0,0]^\top \mapsto [3,4]^\top$ *a bod* $[0,5]^\top$ *do niektorého bodu priamky* $4x - 3y = 0$*?*

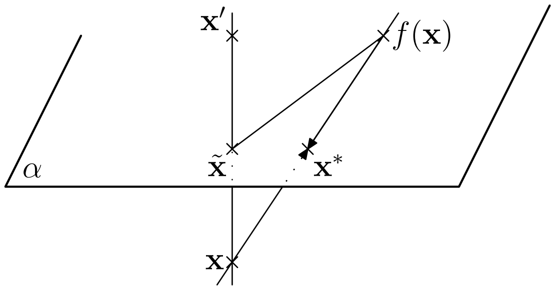
Cvičenie 101. *Nájdite koeficienty* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tak, aby zobrazenie* $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ *tvaru* $f \equiv \{x' = x+1, y' = ax + \frac{1}{2}y - 1, z' = bx + cy + 3\}$ *bolo zhodnosté.*

Podobne ako základné afinity tvoria generujúce prvky grupy všetkých afinít nejakého euklidovského priestoru, existujú generátory aj pre grupu všetkých zhodnostných afinít. Ukážeme si, že ide o podmnožinu základných afinít. Nech α je nadrovina v priestore $\mathbb{E}^n$. Skúsme nájsť všetky zhodnostné zobrazenia medzi základnými afinitami, ktoré majú bodovo samodružnú nadrovinu α.

Veta 31 (Zhodnostné transformácie medzi základnými afinitami). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je základná afinita s bodovo samodružnou nadrovinou* $\alpha\colon g(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{n}}_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = 0$. *Ak* f *je zhodnostné zobrazenie, tak smer* $s_f = \vec{\mathbf{n}}_\alpha$ *a* $k_f = -1$.

Dôkaz: Ak $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \in V_\alpha$, tak $k_f = 1$, a teda $g(f(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x})$. Nech $\tilde{\mathbf{x}}$ je kolmý priemet bodu $\mathbf{x}$ do nadroviny α. Keďže f je zhodnostné, platí $\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\| = \|f(\mathbf{x})-f(\tilde{\mathbf{x}})\| = \|f(\mathbf{x})-\tilde{\mathbf{x}}\|$, čo znamená, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Teda v tomto prípade je f identita, čo je spor.

Ak $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \notin V_\alpha$, tak z definície deliaceho pomeru pre body $(f(\mathbf{x})\mathbf{x}\mathbf{x}^*)$ a dôsledku 10 vidno, že $k_f = (f(\mathbf{x})\mathbf{x}\mathbf{x}^*) = \frac{g(f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})} = -1$. To znamená, že body $\mathbf{x}$ a $f(\mathbf{x})$ ležia v opačných polpriestoroch určených nadrovinou α. Nech $\tilde{\mathbf{x}}$ je kolmý priemet bodu $\mathbf{x}$ do nadroviny α



OBR. 11. Zhodnosť, ktorá je základnou afinitou.

(pozri obr. 11). Teda $\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\| = \|f(\mathbf{x})-\tilde{\mathbf{x}}\|$. Takisto platí, že $\mathbf{x}^* - f(\mathbf{x}) = -(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})$. Ak body $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$ a $\tilde{\mathbf{x}}$ tvoria trojuholník, tak je rovnoramenný zo základňou $\mathbf{x}f(\mathbf{x})$ a príslušnou výškou $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}^*$. Potom ale $|\angle \mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}^*| + |\angle \mathbf{x}\mathbf{x}^*\tilde{\mathbf{x}}| = \pi$, čo nie je v euklidovskom priestore možné. Čiže body $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$ a $\tilde{\mathbf{x}}$ ležia na jednej priamke a naviac $\mathbf{x}^* = \tilde{\mathbf{x}}$. Ihneď vidno, že $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ určuje normálový smer nadroviny α. □

DEFINÍCIA 28 (Súmernosť podľa nadroviny). *Základnú afinitu s bodovo samodružnou nadrovinou α, ktorá je zhodnostným zobrazením nazývame* súmernosťou (zrkadlením) *podľa nadroviny α.*

DÔSLEDOK 12 (Vyjadrenie súmernosti podľa nadroviny). *Súmernosť podľa nadroviny α sa dá vyjadriť ako*

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{g(\mathbf{x})}{\langle \vec{\mathbf{n}}_\alpha \vec{\mathbf{n}}_\alpha \rangle}\vec{\mathbf{n}}_\alpha \tag{15}$$

Dôkaz: Stačí dosadiť do vyjadrenia (12) a uvedomiť si, ako vyzerá zobrazenie g^*. □

VETA 32 (Súmernosť určená dvomi bodmi). *Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Potom existuje jediná súmernosť podľa nadroviny, ktorá zobrazuje $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$. Možno ju vyjadriť v tvare*

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{\langle \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}\rangle}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{16}$$

Dôkaz: Nech f je taká súmernosť podľa nadroviny α. Potom $k_f = -1$, $\vec{\mathbf{s}}_f = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \vec{\mathbf{n}}_\alpha$. Zostáva určiť aspoň jeden bod tejto nadroviny. Vieme ale, že $(f(\mathbf{a})\mathbf{a}\mathbf{a}^*) = (\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{a}^*) = -1$, teda $\mathbf{a}^*$ je stred úsečky $\mathbf{ab}$, čiže patrí nadrovine α. Potom má nadrovina α vyjadrenie $\langle \mathbf{x} - \mathbf{a}^*, \mathbf{b} - \mathbf{a}\rangle = 0$ a dosadením do (15) dostávame výsledok (16). □

POZNÁMKA 20. *Súmernosť podľa nadroviny je špeciálne zobrazenie. ktoré je inverzné samo k sebe. Takéto zobrazenia sa nazývajú involúcie a hrajú dôležitú úlohu nielen v teórii afinných zobrazení.*

CVIČENIE 102. *Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$. Ukážte, že množina všetkých bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od $\mathbf{a}$ aj od $\mathbf{b}$ je rovina súmernosti určená týmito dvoma bodmi.*

Cvičenie 103. *Nájdite zhodnostné zobrazenie, ktoré je osovou súmernosťou s osou*
a) $2x + y - 2 = 0$,
b) $x + y - 5 = 0$.

Cvičenie 104. *Nájdite zhodnostné zobrazenie, ktoré je rovinovou súmernosťou*
a) podľa roviny $x + 2y - z + 4 = 0$
b) podľa roviny $2x - 2y + z = 0$
c) a zobrazuje $[1, 0, 5]^\top \mapsto [0, 5, 1]^\top$
d) a zobrazuje $[1, 0, -2]^\top \mapsto [3, 2, 0]^\top$

Cvičenie 105. *Určte obraz priamky* $p \equiv \{x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 1 - t, t \in \mathbb{R}\}$ *v súmernosti zobrazujúcej bod* $[0, 0, 0]^\top \mapsto [2, 2, 8]^\top$.

Veta 33 (O rozklade zhodnostnej transformácie na nadrovinové súmernosti). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *je zhodná transformácia priestoru* $\mathbb{E}^n$. *Potom existuje nanajvýš* $n+1$ *nadrovinových súmerností* $f_0, \ldots, f_n$ *takých, že* $f(\mathbf{x}) = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_0(\mathbf{x})$ *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$.
Dôkaz: Veta 22 nám hovorí, že každú afinnú transformáciu možno rozložiť na základné afinity. Pri rozklade zhodnostnej transformácie budeme postupovať analogicky, len príslušné nadroviny $\alpha_i, i = 0, \ldots, n$ budeme voliť vhodnejšie. Nech $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$ sa zobrazia na body $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n$ v transformácii f a nech sú to množiny lineárne nezávislých bodov. Zvoľme nadrovinu α_0 tak, aby sa v nadrovinovej súmernosti podľa α_0 zobrazil bod $\mathbf{a}_0$ na $\mathbf{b}_0$. Nech $\mathbf{a}_i \mapsto \mathbf{b}_i^0$ pre $i = 1, \ldots, n$.

Ďalej postupujeme indukčným krokom. Majme zostrojené súmernosti podľa nadroviny $f_0, \ldots, f_{j-1}$ pre $0 < j \leq n$. Zostrojíme f_j. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\mathbf{b}_{j-1}^j \neq \mathbf{b}_j$. (Keby boli rovnaké, môžeme body preindexovať tak, aby sme dostali dva rôzne s indexom j a keby žiadne dva rôzne neexistovali, tak naše zobrazenie už máme rozložené. Premyslite si to podrobne!) Potom nech α_j je nadrovina súmernosti bodov $\mathbf{b}_{j-1}^j$ a $\mathbf{b}_j$. Vzhľadom na zhodnosť zobrazení $f_0, \ldots, f_{j-1}$ je vzdialenosť bodu $\mathbf{b}_i$ k bodom $\mathbf{b}_j^{j-1}$ a $\mathbf{b}_j$ rovnaká pre $i = 0, \ldots, j-1$, to znamená, že body $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{j-1} \in \alpha_j$ (Podrobne si to ukážte!). Takže v zobrazení f_j sú tieto body samodružné. Označme ešte $\mathbf{b}_i^j := f_j(\mathbf{b}_i^{j-1})$ pre $i = j+1, \ldots, n$.

Ak $j > n$, tak sme skončili a stačí už len ukázať, podobne ako v dôkaze vety 22, že zložením týchto súmerností dostaneme zhodnosť f. $\square$

7.1. Zhodnostné transformácie $\mathbb{E}^2$. Teraz sa zameriame na opis grupy zhodnostných transformácií priestoru $\mathbb{E}^2$. V tomto priestore existujú zhodnostné zobrazenia, ktoré nie sú ani nadrovinové súmernosti ani posunutia.

Definícia 29 (Otočenie roviny). *Afinita* $\mathbb{E}^2$, *ktorá má taký samodružný bod* $\mathbf{s}$, *že pre ľubovoľný bod* $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ *platí,* $\phi = \angle \mathbf{x} - \mathbf{s}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}$ *je konštantný a* $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}\|$ *sa nazýva otočením okolo bodu* S *o uhol* ϕ. *Bod* $\mathbf{s}$ *sa nazýva stredom otáčania.*

Cvičenie 106. *Zistite, či existuje zhodnostné zobrazenie* $\mathbb{E}^2$ *do* $\mathbb{E}^3$, *ktoré* $[1, 2]^\top \mapsto [4, 1, 0]^\top$ *a* $[2, -3]^\top \mapsto [6, 8, 0]^\top$.

CVIČENIE 107. *V zhodnostnom zobrazení* $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ *sú body* $[0,0,0]^\top$ *a* $[1,1,1]^\top$ *samodružné a bod* $[1,-1,0]^\top$ *sa zobrazí na bod s prvou súradnicou nulovou. Určte ostatné súradnice tohoto bodu.*

CVIČENIE 108. *Určte* $s \in \mathbb{R}$ *tak, aby existovala zhodnostná transformácia, ktorá zobrazí bod* $[0,0]^\top \mapsto [5,0]^\top$ *a* $[3,4]^\top \mapsto [9,s]^\top$*. Nájdite rovnice takéhoto zobrazenia a určte obraz bodu* $[5,0]^\top$*.*

CVIČENIE 109. *Zistite, či* f *je zhodnostná transformácia*
a) $f \equiv \{x' = x - \frac{1}{2}y + 1, y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 1\}$
b) $f \equiv \{x' = x + 4, y' = y + 3\}$
c) $f \equiv \{x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y + 1, y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + 1, z' = \frac{1}{2}x\}$

CVIČENIE 110. *Dokážte, že všetky súhlasné zhodnostné transformácie priestoru* $\mathbb{E}^1$ *sú posunutia. Ako vyzerajú všetky nepriame zhodnostné transformácie priestoru* $\mathbb{E}^1$*?*

CVIČENIE 111. *Nech je daná v* $\mathbb{E}^n$ *nadrovina* $\alpha : (\mathbf{x}-\mathbf{s}).\vec{\mathbf{n}}_\alpha = 0$*. Dokážte, že zobrazenie* $f(\mathbf{x}) = f_\alpha(\mathbf{x}) + k\vec{\mathbf{n}}_\alpha$*, kde* f_α *je súmernosť podľa nadroviny* α *a* $k \in R$*, je nadrovinová súmernosť. Nájdite nadrovinu súmernosti tohto zobrazenia! Premyslite si, čo to znamená v priestoroch* $\mathbb{E}^2$ *a* $\mathbb{E}^3$*!*

CVIČENIE 112. *Dokážte tvrdenie: Ak* $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ *je súhlasná zhodnostná transformácia, potom má v nejakej karteziánskej súradnicovej sústave vyjadrenie*

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\phi - y\sin\phi + r_1 \\ y' &= x\sin\phi + y\cos\phi + r_2. \end{aligned}$$

Rozhodnite, či matica zobrazenia závisí na výbere tejto karteziánskej sústavy. Ak áno, povedze ako, ak nie, povedzte prečo?

CVIČENIE 113. *Dokážte tvrdenie: Ak* $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ *je nesúhlasná zhodnostná transformácia, potom má v nejakej karteziánskej súradnicovej sústave vyjadrenie*

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\phi + y\sin\phi + r_1 \\ y' &= x\sin\phi - y\cos\phi + r_2. \end{aligned}$$

CVIČENIE 114. *Nájdite zhodné zobrazenie, ktoré zobrazuje body* $[0,0,0]^\top \mapsto [1,0,0]^\top$, $[1,0,0]^\top \mapsto [1,1,0]^\top$, $[1,1,0]^\top \mapsto [1,1,1]^\top$.

CVIČENIE 115. *Nájdite zhodnostné zobrazenie, v ktorom sú body* $[1,0,0]^\top$, $[0,1,0]^\top$ *a* $[0,0,1]$ *samodružné.*

VETA 34 (Klasifikácia zhodnostných transformácií $\mathbb{E}^2$). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ *je zhodnostná transformácia a* $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$ *je jej vyjadrenie v niektorej karteziánskej súradnicovej sústave. Potom* $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ *alebo* $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ *a* f *patrí do niektorej z nasledujúcich kategórií*
a) každý bod v rovine je samodružný – zobrazenie f *je identické*

b) existuje priamka p samodružných bodov – zobrazenie je osovou súmernosťou podľa priamky p
c) existuje práve jeden samodružný bod $\mathbf{s}$ – zobrazenie je otočením okolo $\mathbf{s}$ o uhol ϕ
d) neexistuje žiaden samodružný bod a zobrazenie je súhlasnou transformáciou – zobrazenie je posunutou súmernosťou
e) neexistuje ani jeden samodružný bod a zobrazenie je nesúhlasnou transformáciou – zobrazenie je posunutím

Dôkaz: Z vlastnosti $A^\top A = I$ vyplýva, že $(a_1^1)^2+(a_1^2)^2 = 1$, $(a_2^1)^2+(a_2^2)^2 = 1$, $a_1^1a_1^2+a_2^1a_2^2 = 0$. To znamená, že možno písať

$$a_1^1 = \cos\phi \quad a_1^2 = \sin\phi \quad a_2^1 = -\sin\phi \quad a_2^2 = \cos\phi, \tag{17}$$

pre nejaké $\phi \in [0, 2\pi)$, ak zobrazenie zachováva orientáciu (vtedy je $\det A = 1$) alebo

$$a_1^1 = \cos\phi \quad a_1^2 = \sin\phi \quad a_2^1 = \sin\phi \quad a_2^2 = -\cos\phi, \tag{18}$$

pre nejaké $\phi \in [0, 2\pi)$, ak zobrazenie nezachováva orientáciu (t.j. $\det A = -1$).

Podľa vety 14 buď existuje lineárna varieta samodružných bodov alebo afinita nemá žiaden samodružný bod. Podľa tejto množiny budeme triediť zobrazenia do disjunktných množín.

Ak každý bod roviny je samodružný – teda aj každý smer, potom matica $A - I$ musí mať hodnosť 0, teda $A = I$ a naviac (podľa Frobéniovej vety) vektor $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. V tomto prípade ide teda o identické zobrazenie.

Ak existuje priamka samodružných bodov p, potom zobrazenie f je základnou afinitou. Podľa vety 31 je toto zobrazenie už nutne súmernosťou podľa priamky p, čo znamená, že v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}} \rangle$, kde $\mathbf{p} \in p$, $\vec{\mathbf{p}}$ je smerový vektor priamky p a $\vec{\mathbf{q}}$ je normálový vektor priamky p (oba jednotkovej dĺžky), má zobrazenie f vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Ak existuje práve jeden samodružný bod $\mathbf{s} = [x_0, y_0]^\top$ a zobrazenie je priamou zhodnostnou transformáciou, tak pre ľubovoľný bod $\mathbf{x} = [x, y]^\top$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ a jeho obraz $f(\mathbf{x}) = [x', y']^\top$ platí

$$\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2.$$

Ďalej možno písať pre kladne orientovaný uhol vektorov $\mathbf{x} - \mathbf{s}$ a $f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}$

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{s}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}\|} &= \cos\phi \\ \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{s} \\ f(\mathbf{x}) - \mathbf{s} \end{vmatrix}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}\|} &= \sin\phi, \end{aligned}$$

čo znamená, že uhol vektorov $\mathbf{x} - \mathbf{s}$ a $f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}$ je konštantný pre všetky $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$. Teda zobrazenie f je otočením okolo $\mathbf{s}$ o uhol ϕ.

Ak existuje práve jeden samodružný bod (nech je to začiatok sústavy súradníc) a zobrazenie f je nepriamou zhodnostnou transformáciou, potom $A-I$ je singulárna matica (berúc do úvahy špeciálny tvar (18)), a teda existuje netriviálne riešenie systému $(A-I)\mathbf{x}=\vec{\mathbf{0}}$, čo znamená, že zobrazenie f má samodružný smer s vlastným číslom 1. Ten nám spolu so samodružným bodom dáva celú priamku samodružných bodov, a to je spor s predpokladom.

Ak f nemá samodružný bod a f je priame zobrazenie, potom má matica $A-I$ hodnosť 0 alebo 1 a matica $(A-I,\mathbf{r})$ hodnosť buď 1 alebo 2. Ak $h(A-I)=0$, tak $A=I$, teda zobrazenie f je posunutie v smere $\mathbf{r}$. Ak $h(A-I)=1$, tak $0=\det(A-I)=2(1-\cos\phi)$, čo znamená, že $A-I=\mathbf{0}$ a to je spor.

Ak f nemá samodružný bod a f je nesúhlasnou zhodnostnu transformáciou roviny, tak $h(A-I)=1$ a $h(A-I,\mathbf{r})=2$. Nech $\vec{\mathbf{u}}\in\mathbb{V}_2$ je taký vektor, že zobrazenie $\bar{f}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\vec{\mathbf{u}}$ má bodovo samodružnú priamku p (Rozmyslite si, prečo taký vektor existuje a ako by sme ho pre konkrétne zobrazenie získali!). Potom zobrazenie f je zložením osovej súmernosti a posunutia. Vektor $\vec{\mathbf{u}}=k\vec{\mathbf{n}}+l\vec{\mathbf{s}}$, kde $\vec{\mathbf{n}}$ je normálový vektor samodružnej priamky p a $\vec{\mathbf{s}}$ je vektor k nemu kolmý. Teda $f(\mathbf{x})=\bar{f}(\mathbf{x})+k\vec{\mathbf{n}}+l\vec{\mathbf{s}}=\tilde{f}(\mathbf{x})+\vec{\mathbf{s}}$. Dá sa ľahko ukázať, že zobrazenie $\tilde{f}$ je osová súmernosť, ktorej os je rovnobežná s osou zobrazenia $\bar{f}$. Môžeme teda konštatovať, že zobrazenie f je zložením osovej súmernosti a posunutia v smere jej osi.

□

VETA 35 (Rozklad zhodnostných transformácií $\mathbb{E}^2$ na osové súmernosti). *a) Posunutie o vektor $\vec{\mathbf{u}}$ sa dá rozložiť na dve osové súmernosti s rovnobežnými osami, pričom druhú získame z prvej posunutím o $\frac{1}{2}\|\vec{\mathbf{u}}\|$. Osi týchto dvoch súmerností sú teda kolmé na smer posunutia.*

b) Otočenie sa dá rozložiť na dve osové súmernosti, pričom osi prechádzajú stredom otáčania a zvierajú uhol, ktorý je rovný polovici uhla otočenia.

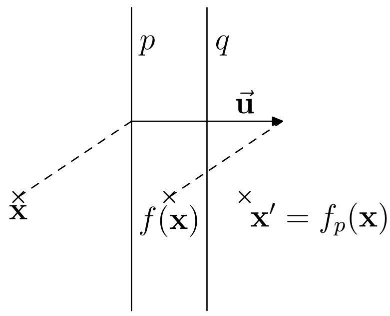
c) Posunutá súmernosť sa dá rozložiť na tri osové súmernosti.

Dôkaz:

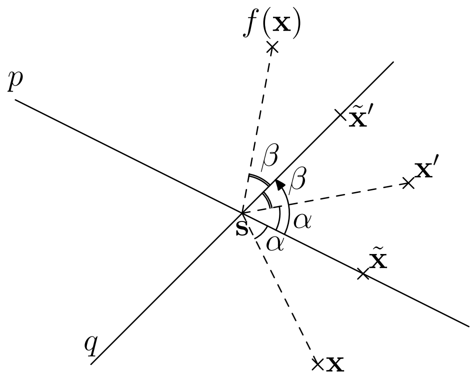
a) Nech $\vec{\mathbf{u}}$ je vektor posunutia. Zostrojme priamku $p\colon \langle\mathbf{x}-\mathbf{s},\vec{\mathbf{u}}\rangle=0$ a priamku $q\colon \langle\mathbf{x}-(\mathbf{s}+\frac{1}{2}\vec{\mathbf{u}}),\vec{\mathbf{u}}\rangle=0$ (pozri obr. 12). Potom zložením týchto dvoch osových súmerností dostávame posunutie o vektor $\vec{\mathbf{u}}$. Označme $f_p(\mathbf{x})=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x}-\mathbf{s},\vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}\rangle}\vec{\mathbf{u}}$ osovú súmernosť s osou p a $f_q(\mathbf{x})=\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x}-(\mathbf{s}+\frac{1}{2}\vec{\mathbf{u}}),\vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}\rangle}\vec{\mathbf{u}}$ osovú súmernosť s osou q a $f=f_q\circ f_p$. Potom

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x}-\mathbf{s},\vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}\rangle}\vec{\mathbf{u}}-2\frac{\langle\mathbf{x}-2\frac{\langle\mathbf{x}-\mathbf{s},\vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}\rangle}\vec{\mathbf{u}}-(\mathbf{s}+\frac{1}{2}\vec{\mathbf{u}}),\vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}\rangle}\vec{\mathbf{u}}= \\ &= \mathbf{x}-4\frac{\langle\mathbf{x}-\mathbf{s},\vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}\rangle}\vec{\mathbf{u}}+4\frac{\langle\mathbf{x}-\mathbf{s},\vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}\rangle}\vec{\mathbf{u}}+2\frac{1}{2}\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{x}+\vec{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

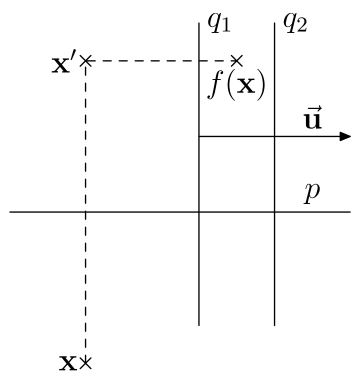
b) Nech p a q sú dve priamky spĺňajúce podmienky tvrdenia (pozri obr. 13) a f_p a f_q sú súmernosti podľa týchto priamok. Nech $\mathbf{x}'=f_p(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathbf{x}}$ je kolmý priemet bodu $\mathbf{x}$ na priamku p, $\tilde{\mathbf{x}}'$ je kolmý priemet $\mathbf{x}'$ na q. Bod $\mathbf{s}=p\cap q$ je samodružný. Zo zhodnosti



Obr. 12. Rozklad posunutia na osové súmernosti.



Obr. 13. Rozklad otáčania na osové súmernosti.

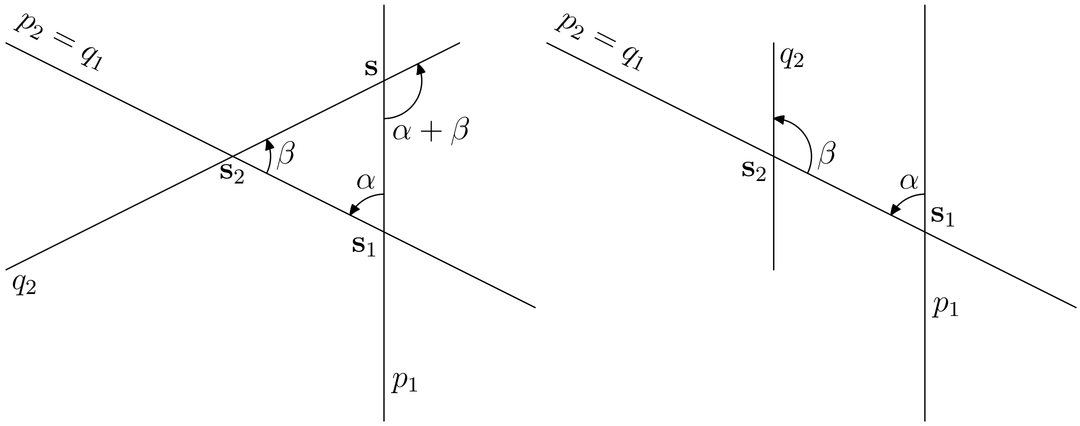


Obr. 14. Rozklad posunutej súmernosti na osové súmernosti.

trojuholníkov $\triangle \mathbf{x}\mathbf{s}\tilde{\mathbf{x}}$ a $\triangle \mathbf{x}'\mathbf{s}\tilde{\mathbf{x}}$ a zo zhodnosti trojuholníkov $\triangle \mathbf{x}'\mathbf{s}\tilde{\mathbf{x}}'$ a $\triangle f_q \circ f_p(\mathbf{x})\mathbf{s}\tilde{\mathbf{x}}'$ možno usúdiť, že $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{s}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$ a súčet orientovaných uhlov $2\alpha + 2\beta = \angle \mathbf{x}\mathbf{s}f(\mathbf{x})$ je konštantný.

c) Posledný prípad vyplýva z prípadu a) a z dôkazu vety 34 (pozri obr. 14).

$\square$



OBR. 15. Zloženie dvoch otočení v rovine s výsledným otočením a s výsledným posunutím.

DÔSLEDOK 13 (Tabuľka skladania zhodnostných stransformácií v $\mathbb{E}^2$). *V grupe zhodnostných transformácií $\mathbb{E}^2$ platí nasledujúca tabuľka skladania*

	id	*S*	*O*	*P*	*PS*
id	*id*	*S*	*O*	*P*	*PS*
S	*S*	*O,P*	*S, PS*	*S,PS*	*O,P*
O	*O*	*S, PS*	*O,P*	*O*	*S, PS*
P	*P*	*S,PS*	*O*	*P*	*S,PS*
PS	*PS*	*O,P*	*S, PS*	*S,PS*	*P,O*

kde S osová súmernosť, P je posunutie, O otočenie, PS je posunutá súmernosť a id sa môžme chápať ako špeciálne otočenie alebo posunutie.

Dôkaz: Dôkaz vychádza z viet 34, 35. Na ukážku si urobíme dôkaz pre kompozíciu dvoch otočení.

Nech f je otočenie roviny okolo bodu S_1 o uhol α a g je otočenie roviny okolo bodu $\mathbf{s}_2$ o uhol β. Zobrazenie f môžme rozložiť na dve osové súmernosti podľa priamok p_1 a p_2 tak, že $\mathbf{s}_2 \in p_2$. Os p_2 zvolíme za prvú os pri rozklade zobrazenia g (pozri obr. 15). Ak existuje $p_1 \cap q_2$, označme ho $\mathbf{s}$. Potom výsledné zobrazenie možno písať

$$g \circ f = g_{q_2} \circ \underbrace{g_{q_1} \circ f_{p_2}}_{id} \circ f_{p_1} = g_{q_2} \circ f_{p_1},$$

teda má samodružný bod $\mathbf{s}$ a dá sa rozložiť na dve osové súmernosti podľa priamok p_1 a q_2. Takže ide o otočenie okolo bodu $\mathbf{s}$ o uhol $\alpha + \beta$.

Podrobne si premyslite ďalšie prípady! □

CVIČENIE 116. *Rovina $\mathbb{E}^2$ sa otočí v zobrazení f okolo počiatku sústavy súradníc o uhol α. Čo bude obrazom priamok $x = p, p \in \mathbb{R}$?*

CVIČENIE 117. *Nájdite uhol, o ktorý treba otočiť rovinu okolo ľubovoľného bodu, aby priamka $2x + 5y - 3 = 0$ mala obraz rovnobežný s osou y.*

Cvičenie 118. *Rovina sa otáča okolo bodu* $[-3,4]^\top$ *o uhol* $\frac{\pi}{2}$. *Do akých priamok sa zobrazia osi súradnicovej sústavy?*

Cvičenie 119. *Rovina sa otáča okolo bodu* $[-1,3]^\top$ *o uhol* $\frac{\pi}{4}$. *Do akých priamok sa zobrazia osi súradnicovej sústavy?*

Cvičenie 120. *Rovina sa otáča okolo bodu* $[2,3]^\top$ *o uhol* α, *pričom* $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ *a* $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. *Čo je obrazom priamky* $x + 2y + 3 = 0$*?*

Cvičenie 121. *Nájdite dva vrcholy rovnostranného trojuholníka, ak viete, že ležia na súradnicových osiach a tretí vrchol je bod* $[1,2]^\top$.

Cvičenie 122. *Napíšte rovnice osovej súmernosti podľa roviny* $x + 2y - z + 4 = 0$.

Cvičenie 123. *Nájdite rovnice osovej súmernosti zobrazujúcej začiatok do bodu* $[1,5]^\top$.

Cvičenie 124. *Nech je daná priamka* $p \equiv 2x - y - 1 = 0$ *a dva rôzne body* $\mathbf{r} = [-1,1]^\top$ *a* $\mathbf{s} = [0,4]^\top$, *ktoré ležia v jednej polrovine vyťatej priamkou* p. *Určte* $\triangle\mathbf{rst}$ *s vrcholom* $\mathbf{t} \in p$ *tak, aby mal čo najmenší obvod.*

Cvičenie 125. *Určte o aké zobrazenie ide a rozložte ho na osové súmernosti*
a) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$
b) $x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6, y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12$
c) $x' = -y + 1, y' = x + 3$
d) $x' = -x + 2, y' = -y + 1$
e) $x' = -x + 1, y' = y + 3$
f) $x' = \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y + 1, y' = -\frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{2}{3}y - 2$
g) $x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3}$

Cvičenie 126. *Napíšte rovnice strán pravidelného šesťuholníka, ak na priamke* $4x + 2y - 1 = 0$ *leží jedna jeho strana a začiatok sústavy súradníc je jeho stredom súmernosti.*

Cvičenie 127. *Daná je priamka* p, *na ktorej leží strana rovnostranného trojuholníka. Nech* $\mathbf{t}$ *je ťažisko tohoto trojuholníka. Určte vrcholy tohto trojuholníka, ak* $p \equiv 2x - y = 0$ *a* $\mathbf{t} = [5,1]^\top$.

Cvičenie 128. *Nájdite vrcholy ostrých uhlov rovnoramenného pravouhlého trojuholníka, ak poznáte tretí vrchol* $\mathbf{c} = [1,2]^\top$ *a priamky* $8x - y - 20 = 0$, $7x + 4y - 41 = 0$, *na ktorých ležia hľadané vrcholy.*

Cvičenie 129. *Nech* f *je otočenie roviny* $\mathbb{E}^2$ *o uhol* ϕ *okolo bodu* $\mathbf{s}$ *a* g *je otočenie o uhol* ψ *okolo bodu* $\mathbf{t}$. *Nech* $g \circ f$ *je posunutie. Určte vektor posunutia zobrazenia* $g \circ f$*! Ako je to so zobrazením* $f \circ g$*?*

7.2. Zhodnostné transformácie $\mathbb{E}^3$.

Veta 36 (Klasifikácia zhodnostných transformácií $\mathbb{E}^3$). *Nech* $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ *je zhodnostná transformácia. Potom* f *patrí do niektorej z nasledujúcich kategórií*
a) každý bod v rovine je samodružný – zobrazenie f *je identické*

b) existuje rovina α samodružných bodov – zobrazenie je rovinovou súmernosťou podľa roviny α
c) existuje priamka p samodružných bodov – zobrazenie je rotáciou priestoru okolo osi p
d) existuje práve jeden samodružný bod – zobrazenie je rotačnou symetriou
e) neexistuje žiaden samodružný bod a zobrazenie je nepriamou zhodnosťou – zobrazenie je posunutou súmernosťou
f) neexistuje ani jeden samodružný bod, zobrazenie je priamou zhodnosťou – zobrazenie je posunutím alebo skrutkovým pohybom

Dôkaz: Nech $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$ je vyjadrenie f v niektorej karteziánskej súradnicovej sústave $\mathbb{E}^3$. Prípady a) a b) sa dokážu podobne ako vo vete 34.

Ak každý bod priestoru $\mathbb{E}^3$ je samodružný, potom matica $A - I$ musí mať hodnosť 0, teda $A = I$ a naviac (podľa Frobéniovej vety) vektor $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. V tomto prípade ide teda o identické zobrazenie.

Ak existuje rovina samodružných bodov α, potom zobrazenie f je základnou afinitou. Podľa vety 31 je toto zobrazenie už nutne súmernosťou podľa roviny α, čo znamená, že v báze $\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2, \vec{\mathbf{q}} \rangle$, kde $\mathbf{p} \in \alpha$, $\vec{\mathbf{p}}_1$, $\vec{\mathbf{p}}_2$ sú ortonormálne bázové smerové vektory roviny α a $\vec{\mathbf{q}}$ je normálový vektor roviny α (jednotkovej dĺžky), má zobrazenie f vyjadrenie

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Ak existuje priamka samodružných bodov, označme $\mathbf{p}$ niektorý z jej bodov a jej normalizovaný smer označme $\vec{\mathbf{p}}$. Doplňme vektory $\vec{\mathbf{q}}_1$ a $\vec{\mathbf{q}}_2$ tak, aby $\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}_1, \vec{\mathbf{q}}_2 \rangle$ tvorili karteziánsku sústavu súradníc. V takejto báze bude mať naše zobrazenie tvar

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

pričom podmatica typu 2×2 v pravom dolnom rohu matice zobrazenia f predstavuje maticu zobrazenia $f|_{\alpha_r}$, kde α_r je rovina kolmá na priamku $y = 0, z = 0$ obsahujúca bod $R_r = [r, 0, 0]^\top$. V každej z týchto rovín má zobrazenie jediný samodružný bod, a to R_r, z vety 34 vyplýva, že ide o rotáciu okolo tohoto bodu. Celkovo možno konštatovať, že v tomto prípade možno zobrazenie zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

kde ϕ je uhol otočenia okolo osi $y = 0, z = 0$.

Ak existuje práve jeden samodružný bod $\mathbf{p}$, potom musí existovať aspoň jeden samodružný smer s vlastným číslom -1 (Keďže $\det(A - cI) = 0$ je polynóm 3. stupňa, musí mať aspoň jeden reálny koreň. Ak by to bola 1, tak samodružný smer prislúchajúci tomuto číslu by spolu s bodom $\mathbf{p}$ dávali bodovo samodružnú priamku). Nech $\vec{\mathbf{p}}$ je normalizovaný vektor prislúchajúci vlastnému číslu -1. Zvoľme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle \mathbf{p}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}_1, \vec{\mathbf{q}}_2 \rangle$.

V tejto sústave má naše zobrazenie tvar

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

pričom pre pravú dolnú podmaticu $\tilde{A}$ typu 2×2 platí $\det(\tilde{A} - I) \neq 0$, keďže analogický vzťah platí pre maticu A. Z toho vyplýva, že zobrazenie f zúžené na rovinu $z = 0$ má jediný samodružný bod, a síce počiatok, teda ide o otočenie a možno ho zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

kde ϕ je uhol otočenia okolo osi $y = 0, z = 0$. Celé zobrazenie potom predstavuje otočenie okolo osi $x = 0, y = 0$ a nasledované súmernosťou podľa roviny $z = 0$ (alebo v opačnom poradí).

V prípade, že zobrazenie nemá samodružný bod, tak možno nájsť taký vektor $\vec{\mathbf{v}}$ (tak, aby $h(A - I, \mathbf{r} - \mathbf{v}) < 3$), že zobrazenie $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \vec{\mathbf{v}}$ bude mať aspoň priamku samodružných bodov. Teda bude buď kategórie a) alebo b) alebo c). Rozmyslite si prečo nemôže byť kategórie d)! Ak je zobrazenie $\bar{f}$ kategórie a), potom zobrazenie f je posunutie, lebo $f(\mathbf{x}) = \bar{f}(\mathbf{x}) + \vec{\mathbf{v}}$. Ak je zobrazenie typu b), potom možno jednoznačne rozložiť vektor $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{w}}$, pričom $\vec{\mathbf{w}}$ sa nachádza v smere príslušnej bodovo samodružnej nadroviny zobrazenia $\bar{f}$ a $\vec{\mathbf{u}}$ je kolmý k smeru tejto nadroviny. Dá sa ukázať, že zobrazenie $\bar{f}(\mathbf{x}) + \vec{\mathbf{u}}$ je opäť rovinová súmernosť (podobne ako vo vete 35), pričom samodružná rovina tohto zobrazenia je rovnobežná so samodružnou rovinou zobrazenia $\bar{f}$. Teda výsledné zobrazenie je zložené z nadrovinovej súmernosti a posunutia vektorom rovnobežným so samodružnou rovinou. Analogicky, ak zobrazenie $\bar{f}$ patrí do kategórie c), tak možno jednoznačne rozložiť vektor $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{w}}$, pričom $\vec{\mathbf{w}}$ sa nachádza v smere príslušnej bodovo samodružnej priamky zobrazenia $\bar{f}$ a $\vec{\mathbf{u}}$ je kolmý k smeru tejto priamky. Potom z vety 34 vyplýva, že $\bar{f} + \vec{\mathbf{u}}$ je otočenie okolo nejakej priamky rovnobežnej so samodružnou priamkou zobrazenia $\bar{f}$, a teda zobrazenie f sa dá napísať ako zloženie rotácie okolo priamky a posunutia v smere tejto priamky. □

VETA 37 (Rozklad zhodnostnej transformácie $\mathbb{E}^3$ na súmernosti podľa roviny). *a) Posunutie o vektor* $\vec{\mathbf{u}}$ *sa dá rozložiť na dve rovinové súmernosti s rovnobežnými rovinami súmernosti, ktoré sú vzdialené* $\frac{1}{2}\|\vec{\mathbf{u}}\|$ *a kolmé na smer posunutia.*

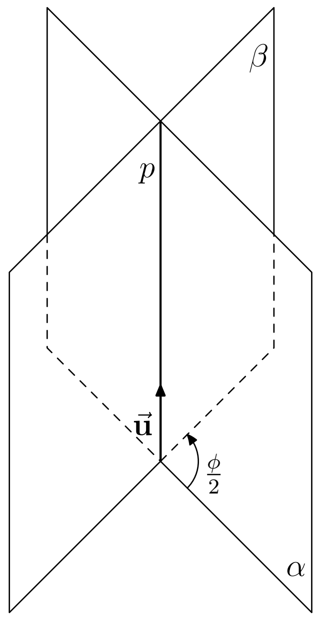
b) Rotácia okolo priamky p o uhol ϕ sa dá rozložiť na dve rovinové súmernosti, pričom roviny súmernosti obsahujú priamku p a zvierajú uhol $\frac{1}{2}\phi$.

c) Rotačná symetria sa dá rozložiť na tri rovinové súmernosti.

d) Posunutá súmernosť sa dá rozložiť na tri rovinové súmernosti.

e) Posunutá rotácia sa dá rozložiť na štyri rovinové súmernosti.

Dôkaz: Dôkaz prípadu a) je analogický ako vo vete 35. Dôkaz tvrdenia b) je jednoduchý, keď si uvedomíme, že rotácia okolo priamky sa dá redukovať na otočenia v rovinách kolmých na os otočenia (pozri obr. 16). Prípadné posunutie alebo rovinovú súmernosť vieme následne



OBR. 16. Rozklad rotácie priestoru okolo priamky p o uhol ϕ.

rozložiť podľa predchádzajúcich tvrdení. $\square$

VETA 38 (Kanonický tvar ortogonálnej lineárnej transformácie). *Nech* $f\colon \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$ *je ortogonálna transformácia. Potom má matica analytického vyjadrenia tohoto zobrazenia v niektorej karteziánskej sústave tvar*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & U_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U_k \end{pmatrix},$$

kde $p, q \in \mathbb{N}_0$ *a*

$$U_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Dôkaz: Urobíme len náčrt dôkazu. Postupuje sa matematickou indukciou a treba ukázať, že ortogonálna transformácia má invariantný podpriestor dimenzie najviac 2. Ak ho budeme mať – nech je to napr. $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}^n$, tak potom $f(\mathbb{W}) = \mathbb{W}$ a $f(\mathbb{W}^\perp) = \mathbb{W}^\perp$. To znamená, že transformácia sa na $\mathbb{V}^n = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$ dá rozložiť na $f = f_{\mathbb{W}} \oplus f_{\mathbb{W}^\perp}$, kde obe zložky sú ortogonálne zobrazenia. Ďalej použijeme indukčný predpoklad an $f_{\mathbb{W}^\perp}$.

Ešte ukážeme, že existuje invariantný podpriestor dimenzie nanajvýš 2. Na to stačí ukázať, že pre $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}^n$ spĺňajúce

$$\|\vec{\mathbf{x}} - f(\vec{\mathbf{x}})\| = \inf\{\|\vec{\mathbf{y}} - f(\vec{\mathbf{y}})\| : \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}^n\},$$

sú $\vec{\mathbf{x}}$, $f(\vec{\mathbf{x}})$, $f^2(\vec{\mathbf{x}})$ lineárne závislé. $\square$

CVIČENIE 130. *Nájdite rovnice zhodnostného zobrazenia, ktoré je zložením rovinovej súmernosti podľa roviny $2x - y - 5z + 15 = 0$ a posunutia o vektor $(4, 3, 1)^\top$. Klasifikujte toto zobrazenie.*

CVIČENIE 131. *Zostavte tabuľku skladania typov zhodnostných transformácií v $Is(\mathbb{E}^3)$.*

CVIČENIE 132. *Nájdite samodružné body zhodnostnej transformácie zloženej zo súmerností podľa rovín $z = 0$ a $x - y + 2z - 1 = 0$.*

CVIČENIE 133. *Napíšte rovnice otáčania v priestore $\mathbb{E}^3$ okolo jednotlivých súradnicových osí.*

CVIČENIE 134. *Nájdite rovnice súmerností podľa priamky prechádzajúcej začiatkom sústavy súradníc so smerovým vektorom $(2, 2, 1)^\top$.*

CVIČENIE 135. *Nájdite rovnice otáčania okolo osi $o \equiv \{x = t, y = t, z = 1 + t\}$ o uhol $\phi = \frac{2}{3}\pi$.*

CVIČENIE 136. *Určte geometrický zmysel zobrazení a rozložte na rovinové súmernosti, ak sa to dá.*

a) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1, y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, z' = -z + 2$
b) $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1, y' = \frac{11}{15}x - \frac{10}{15}y - \frac{2}{15}z - 2, z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z - 1$
c) $x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y - \frac{3}{5}z, y' = \frac{12}{25}x - \frac{9}{25}y + \frac{4}{5}z, z' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$
d) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2, z' = z + 3$
e) $x' = x - 1, y' = -y + 6, z' = z + 2$
f) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - \frac{6}{5}, y' = y + 1, z' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z + \frac{13}{5}$
g) $x' = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z + 7, y' = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + 14, z' = -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 7$
h) $x' = y + 1, y' = x, z' = z$
i) $x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 14, y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z - 2, z' = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}z + 5$
j) $x' = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z - 4, y' = \frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z + 2, z' = +\frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z + 14$
k) $x' = -z + 2, y' = x - 1, z' = -y + 4$
l) $x' = z, y' = -y + 2, z' = -x + 2$
m) $x' = -y + 2, y' = x, z' = -z + 2$
n) $x' = y, y' = -x, z' = -z + 2$
o) $x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 6, y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12, z' = -z$
p) $x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y - \frac{15}{25}z + 3, y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y + \frac{20}{25}z - 4, z' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5$
q) $x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z + 3, y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{20}{25}z - 4, z' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5$
r) $x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{10}{15}z + 7, y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{5}{15}z + 4, z' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + 6$
s) $x' = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z + 14, y' = -\frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z + 2, z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z - 5$

CVIČENIE 137. *Dokážte platnosť nasledujúcej klasifikačnej tabuľky zhodnosti $f\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ pomocou jeho analytického vyjadrenia $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$ v nejakej karteziánskej sústave súradníc:*

$h(A-I)$	$h(A-I,\mathbf{r})$	*typ zhodnosti*
0	*0*	*identita*
0	*1*	*posunutie*
1	*1*	*súmernosť podľa roviny*
1	*2*	*posunutá rovinová súmernosť*
2	*2*	*otočenie okolo priamky*
2	*3*	*skrutkovitý pohyb*
3	*3*	*otočenie okolo priamky a súmernosť*

8. Podobnostné zobrazenia

DEFINÍCIA 30 (Podobnostné zobrazenie). *Zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ sa nazýva podobnostné, ak existuje také reálne číslo $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, že pre ľubovoľné body $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ platí $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, kde $\|.\|$ označuje normu indukovanú skalárnym súčinom v príslušnom euklidovskom priestore. Číslo k nazývame koeficient podobnostného zobrazenia f. Ak f je naviac transformácia, tak sa nazýva podobnostnou transformáciou priestoru $\mathbb{E}^n$. Ak f je naviac afinitou priestoru $\mathbb{E}^n$, tak f sa nazýva podobnostnou afinitou priestoru $\mathbb{E}^n$.*

VETA 39 (Rovnoľahlosť je podobnostnou afinitiou). *Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je rovnoľahlosť s koeficientom k, tak f je podobnostnou afinitou s koeficientom $|k|$.*
Dôkaz: Nech $f(\mathbf{x}) = S + k(\mathbf{x} - S)$, kde $S \in \mathbb{E}^n$ je stred rovnoľahlosti f. Keďže f je dilatácia, tak platí

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|f^*(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|k(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = |k|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

čo znamená, že f je podobnostnou afinitou s koeficientom $|k|$. □

POZNÁMKA 21. *V predchádzajúcej vete sme ukázali, že niektoré afinné zobrazenia sú podobnostné. Ukážeme, že každé podobnostné zobrazenie je aj afinné zobrazenie.*

CVIČENIE 138. *Ukážte, že všetky rovnoľahlosti priestoru $\mathbb{E}^n$ s rovnakým stredom rovnoľahlosti tvoria grupu.*

VETA 40 (Rozklad podobnostného zobrazenia). *Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ je podobnostné zobrazenie s koeficientom k. Potom existujú rovnoľahlosti $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ a $h : \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$ a zhodnostné zobrazenie $z : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ také, že $f = z \circ g = h \circ z$.*
Dôkaz: Nech $g(\mathbf{x}) = \mathbf{s} + k(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ je rovnoľahlosťou s koeficientom k a ľubovoľným bodom $\mathbf{s} \in \mathbb{E}^n$ a nech $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{s}) + k(\mathbf{x} - f(\mathbf{s}))$. Označme $z = h^{-1} \circ f$. Zobrazenie z je zhodnostné, lebo

$$\begin{aligned}\|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})\| &= \|f(\mathbf{s}) + \frac{1}{k}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{s})) - f(\mathbf{s}) - \frac{1}{k}(f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{s}))\| = \\ &= \|\frac{1}{k}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}))\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.\end{aligned}$$

Teda platí $f = h \circ z$. Potom je ale f afinné zobrazenie (lebo je zložením dvoch afinných zobrazení). Môžeme teda písať:

$$z(\mathbf{x}) = h^{-1} \circ f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{s}) + \frac{1}{k}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{s})) = f(\mathbf{s} + \frac{1}{k}(\mathbf{x} - \mathbf{s})) = f \circ g^{-1}(\mathbf{x}).$$

Teda platí $f = h \circ z = z \circ g$. □

DÔSLEDOK 14. *Každé podobnostné zobrazenie je afinné injektívne zobrazenie.*

Dôkaz: Každé podobnostné zobrazenie možno napísať ako kompozíciu dvoch afinných zobrazení – zhodnostného zobrazenia a rovnoľahlosti. Naviac zloženie dvoch afinných zobrazení je afinné zobrazenie a obe zobrazenia sú injektívne. Keďže ide o afinitu, tak z injektívnosti vyplýva aj bijektívnosť. □

DÔSLEDOK 15 (Existencia grupy podobnostných transformácií priestoru $\mathbb{E}^n$). *Všetky podobnostné transformácie priestoru $\mathbb{E}^n$ tvoria grupu. Je generovaná všetkými zhodnostnými transformáciami a rovnoľahlosťami priestoru $\mathbb{E}^n$.*

Dôkaz: Dôkaz využíva fakty, že každá podobnostná transformácia je kompozíciou zhodnostnej transformácie a rovnoľahlosti a že zhodnostné transformácie tvoria grupu a rovnoľahlosti so stredom v pevnom bode tvoria grupu. □

DEFINÍCIA 31 (Grupa podobnostných transformácií $\mathbb{E}^n$). *Grupu všetkých podobnostných transformácií priestoru $\mathbb{E}^n$ označujeme symbolom* $\mathrm{Sim}(\mathbb{E}^n)$. *Grupu všetkých súhlasných podobnostných transformácií označujeme* $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{E}^n)$.

VETA 41 (Vzťah podobnostného zobrazenia a skalárneho súčinu). *Nech $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ je podobnostné zobrazenie, potom $\langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{v}})\rangle = k^2\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}^n$.*

Dôkaz: Budeme postupovať analogicky ako v dôkaze vety 25.

$$\begin{aligned}\langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{v}})\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle f^*(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}), f^*(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})\rangle - \langle f^*(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{u}})\rangle - \langle f^*(\vec{\mathbf{v}}), f^*(\vec{\mathbf{v}})\rangle\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle k(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}), k(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})\rangle - \langle k\vec{\mathbf{u}}, k\vec{\mathbf{u}}\rangle - \langle k\vec{\mathbf{v}}, k\vec{\mathbf{v}}\rangle\right) = k^2\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\rangle.\end{aligned}$$

□

POZNÁMKA 22. *Z predchádzajúcej vlastnosti vyplýva, že zobrazenie zachováva uhly, teda je ekviformné.*

DEFINÍCIA 32 (Vlastné a nevlastné podobnostné transformácie). *Podobnostné zobrazenie s koeficientom $|k| \neq 1$ sa nazýva vlastným podobnostným zobrazením. Ostatné podobnostné zobrazenia sa nazývajú nevlastnými podobnostnými zobrazeniami.*

VETA 42 (Ekvivalentné podmienka pre podobnostnú transformáciu). *Nech zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ je afinné zobrazenie a $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$ je jeho analytické vyjadrenie v nejakej karteziánskej sústave súradníc. Potom sú ekvivalentné tvrdenia*

a) f je podobnostné zobrazenie
b) $A^\top A = k^2 I$
Dôkaz: Stĺpce matice A tvoria obrazy jednotkových vektorov v karteziánskej sústave súradníc. Ak označíme c_{ij} prvky matice $A^\top A$, možno písať

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \langle f^*(\vec{\mathbf{e}}_i), f^*(\vec{\mathbf{e}}_j)\rangle = k^2\langle \vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j\rangle = k^2\delta_{ij},$$

čo znamená, že ak f je podobnostné, tak A spĺňa podmienku b). Naopak, ak matica A spĺňa túto podmienku, tak pre ľubovoľný vektor $\vec{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} b^i\vec{\mathbf{e}}_i$ platí

$$f^*(\vec{\mathbf{u}}) = f^*(\sum_{i=1}^{n} b^i\vec{\mathbf{e}}_i) = \sum_{i=1}^{n} b^i f^*(\vec{\mathbf{e}}_i) = \sum_{i=1}^{n} b^i k\vec{\mathbf{e}}_i = k\vec{\mathbf{u}},$$

teda ak $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, tak $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = |k|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. □

Poznámka 23. *Z predchádzajúcej vety vidno, že zhodnosti sú špeciálne prípady podobností, a to práve tie, ktoré nazývame nevlastné. Tie už vieme v $\mathbb{E}^2$ a $\mathbb{E}^3$ klasifikovať.*

Dôsledok 16 (Vlastné hodnoty podobnosti). *Podobnosť s koeficientom k môže mať reálne vlastné hodnoty k alebo $-k$.*
Dôkaz: Ak $\vec{\mathbf{u}}$ je vlastný vektor, tak $\|f^*(\vec{\mathbf{u}})\| = \|k\vec{\mathbf{u}}\|$, teda môže platiť iba $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = k\vec{\mathbf{u}}$ alebo $f^*(\vec{\mathbf{u}}) = -k\vec{\mathbf{u}}$. (Premyslite si, prečo nemôže mať podobnosť nulový vlastný vektor!) □

Veta 43 (Centrálnosť vlastnej podobnosti). *Každá vlastná podobnosť priestoru $\mathbb{E}^n$ má práve jeden samodružný bod.*
Dôkaz: Nech má naša podobnosť v nejakej karteziánskej sústave súradníc vyjadrenie $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$. Keďže $k \neq \pm 1$ a reálne vlastné hodnoty sú len $\pm k$, tak $\det(A - I) \neq 0$, teda systém rovníc

$$(A - I)\mathbf{x} = -\mathbf{r}$$

má práve jedno riešenie – hľadaný samodružný bod. □

Teraz sa zameriame na určenie všetkých vlastných podobností priestoru $\mathbb{E}^2$. Keďže každé podobné zobrazenie možno napísať ako kompozíciu rovnoľahlosti a zhodného zobrazenia, budeme vychádzať z klasifikácie zhodností priestoru $\mathbb{E}^2$.

Veta 44 (Klasifikácia podobností priestoru $\mathbb{E}^2$). *Priame vlastné podobnosti priestoru $\mathbb{E}^2$ sú zložené z otočenia okolo bodu a následnej rovnoľahlosti so stredom v tomto bode. Nepriame vlastné podobnosti priestoru $\mathbb{E}^2$ sú zložené z osovej súmernosti a rovnoľahlosti so stredom rovnoľahlosti na osi súmernosti.*

Dôkaz: Nech $\mathbf{o}$ je samodružný bod tejto podobnosti a nech je to počiatok sústavy súradníc. Ak podobnosť je priama, potom ju možno písať v tvare

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\phi - y\sin\phi) \\ y' &= k(x\sin\phi + y\cos\phi). \end{aligned}$$

Ak rozložíme našu podobnosť na rovnoľahlosť so stredom v počiatku sústavy súradníc a koeficientom k a zhodnosť reprezentovanú príslušnou maticou, tak z vety 34 vyplýva, že musí ísť buď o otáčanie okolo počiatku sústavy súradníc, alebo posunutie. Posunutie však môžeme vylúčiť, pretože $\mathbf{o}$ je samodružný bod. Teda každá priama podobnosť roviny je otočenie okolo bodu $\mathbf{o}$ o uhol ϕ a následná rovnoľahlosť so stredom v tomto bode a koeficientom k.

Ak podobnosť nie je priama, potom má tvar

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\phi + y\sin\phi) \\ y' &= k(x\sin\phi - y\cos\phi). \end{aligned}$$

Teda zhodnosť v rozklade musí byť osová súmernosť, a keďže bod $\mathbf{o}$ je samodružný, tak os prechádza počiatkom sústavy súradníc. □

CVIČENIE 139. *Nájdite podobné zobrazenie, ktoré je zložením otočenia o* $\frac{\pi}{2}$ *okolo bodu* $[1,1]^\top$ *a rovnoľahlosti so stredom v tom istom bode a koeficientom* 3.

CVIČENIE 140. *Nájdite všetky podobné zobrazenia so samodružným bodom* $[2,1]^\top$*, ktoré zobrazujú bod* $[2,-9]^\top$ *do bodu* $[-2,-2]^\top$.

CVIČENIE 141. *Dokážte, že transformácia roviny* $x' = 2x + 5y - 1, y' = -5x + 2y + 4$ *je podobnosťou. Určte samodružné body a samodružné smery.*

CVIČENIE 142. *Zobrazenie* $h\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ *je dané rovnicami* $x' = 2x+ay, y' = x+by, z' = y$. *Určte koeficienty* $a, b \in \mathbb{R}$ *tak, aby* h *bolo podobné zobrazenie.*

CVIČENIE 143. *Napíšte rovnice podobnosti, ktorá zobrazuje bod* $[1,1]^\top$ *do začiatku a začiatok do bodu* $[0,2]^\top$. *Koľko má úloha riešení?*

CVIČENIE 144. *Nech* $\mathbf{abcd}$ *je štvorec so stredom* $\mathbf{s}$. *Ukážte, že existuje podobnosť, ktorá zobrazuje body* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s}$ *do bodov* $\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c}$ *v tomto poradí. Napíšte rovnice tejto podobnosti vzhľadom na vhodne zvolenú sústavu súradníc.*

CVIČENIE 145. *Rozložte podobnosť* $x' = 2x - y + 5, y' = x + 2y - 1$ *na rovnoľahlosť a zhodnosť.*

CVIČENIE 146. *Určte stred rovnoľahlosti, ktorá je zložená z rovnoľahlosti* $x' = 2x + 1, y' = 2y - 1$ *a posunutia* $x' = x + 3, y' = y$. *Skúste skladanie zobrazení zameniť.*

CVIČENIE 147. *Napíšte rovnice rovnoľahlosti zobrazujúcej bod* $[2,0,3]^\top$ *do bodu* $[1,0,0]^\top$ *a bod* $[0,0,2]^\top$ *do bodu* $[3,a,b]^\top$. *Pre ktoré* $a, b \in \mathbb{R}$ *má úloha riešenie?*

CVIČENIE 148. *Dokážte, že každá afinná transformácia roviny zachovávajúca smernicu všetkých priamok v rovine má v štandardnej karteziánskej sústave súradníc tvar*

$$\begin{aligned} x' &= ax + e \\ y' &= ax + f. \end{aligned}$$

CVIČENIE 149. *Dokážte, že afinná transformácia zobrazujúca trojuholník* **abc** *na trojuholník* $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ *zobrazuje*

a) ťažisko trojuholníka **abc** *na ťažisko trojuholníka* $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$
b) ťažnice trojuholníka **abc** *na ťažnice trojuholníka* $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$
c) stred vpísanej kružnice trojuholníka **abc** *na stred vpísanej kružnice trojuholníka* $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$, *ak zobrazenie je podobné*
d) stred opísanej kružnice trojuholníka **abc** *na stred opísanej kružnice trojuholníka* $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$, *ak zobrazenie je podobné*

CVIČENIE 150. *Klasifikujte priame vlastné podobnosti* $\mathbb{E}^3$. *Klasifikujte nepriame vlastné podobnosti* $\mathbb{E}^3$.

9. Záver

V predchádzajúcich kapitolách sme si ukázali a klasifikovali niektoré afinné zobrazenia afinných priestorov. Klasifikácia samozrejme nebola úplná a vyčerpávajúca. Na obr. 17 si môžete pozrieť ako vyzerá časť štruktúry grupy afinít v $\mathbb{E}^n$. Šípka idúca z obdĺžnika **o** do obdĺžnika **p** znamená, že príslušná grupa zobrazení zapísaná v **o** je podgrupou grupy zobrazení zapísaných v **p**. Samozrejme, že pre konkrétne n je táto štruktúra omnoho bohatšia. V cvičeniach sa o tom môžete presvedčiť.

Ďalším pokračovaním tejto cesty by sme sa dostali ku klasifikácii zhodností v $\mathbb{E}^n$ a neskôr k projektívnym transformáciám a ich grupám.

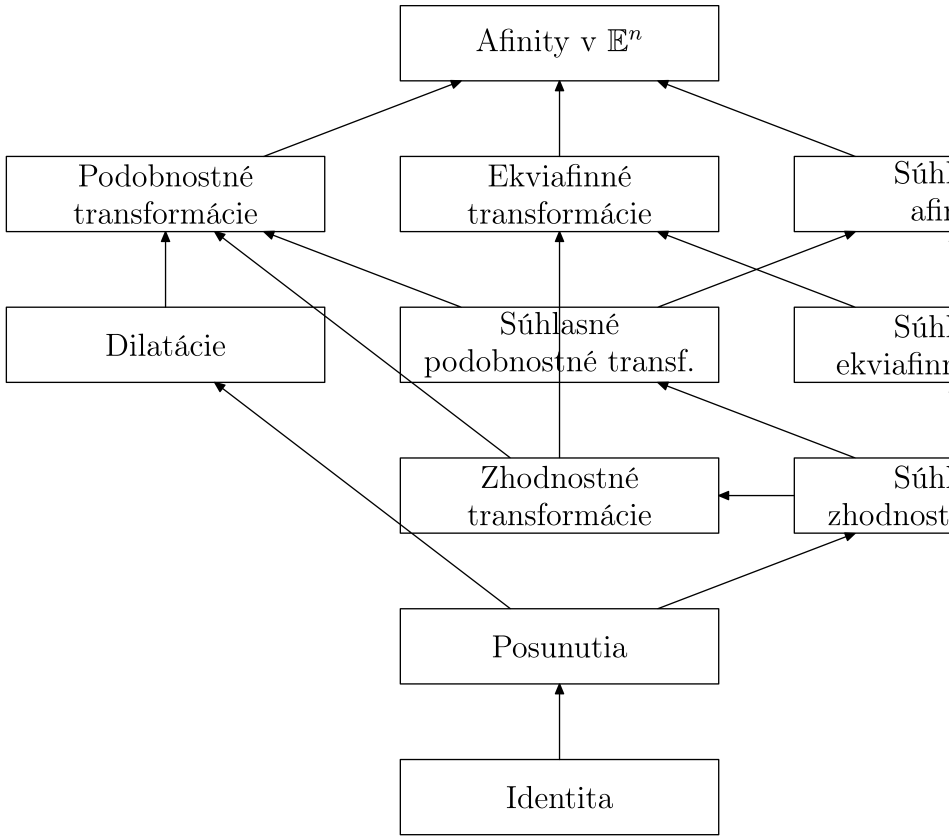
CVIČENIE 151. *Transformácia priestoru* $\mathbb{E}^2$ *sa nazýva eliptická rotácia, ak má tvar*

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\frac{1}{s}\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\frac{1}{s}\cos\alpha \end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\frac{1}{s}\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha - y\frac{1}{s}\cos\alpha \end{aligned}$$

Ukážte, že ak $e = \{[x,y] \in \mathbb{E}^2 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 s^2} = 1\}$ *a* $[x,y]^\top \in e$, *tak aj* $[x',y']^\top \in e$. *Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.*



OBR. 17. Časť štruktúry grupy afinít priestoru $\mathbb{E}^n$.

CVIČENIE 152. *Transformácia priestoru $\mathbb{E}^2$ sa nazýva hyperbolická rotácia, ak má tvar*

$$\begin{aligned} x' &= ax \\ y' &= \frac{1}{a}y \end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned} x' &= by \\ y' &= \frac{1}{b}x \end{aligned}$$

Ukážte, že ak $h = \{[x,y]^\top : xy = p\}$ a $[x,y]^\top \in h$, tak aj $[x',y']^\top \in h$. Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.

CVIČENIE 153. *Transformácia priestoru $\mathbb{E}^2$ sa nazýva parabolická rotácia, ak má tvar*

$$\begin{aligned} x' &= d^2x \\ y' &= dy. \end{aligned}$$

Ukážte, že ak $p \equiv y^2 - 2qx = 0$ a $[x,y]^\top \in p$, tak aj $[x',y']^\top \in p$. Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.

CVIČENIE 154. *Nájdite množinu tých afinných transformácií, ktoré majú*
a) priamku $x + y + 1 = 0$ *bodovo samodružnú*
b) priamku $x + y + 1 = 0$ *samodružnú*
Ktoré spomedzi nich sú zhodné a ktoré podobné?

CVIČENIE 155. *Nájdite všetky afinné zobrazenia, ktoré zobrazia každú kružnicu tvaru* $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = r^2$ *na seba.*

CVIČENIE 156. *Ukážte, že všetky eliptické a hyperbolické rotácie sú ekviafinné.*

CVIČENIE 157. *Ak* f *je nepriama zhodnosť roviny, tak* $f^2 = I$ *alebo* f^2 *je posunutie. Dokážte!*

CVIČENIE 158. *Ak všetky body* $\mathbf{p}$ *na priamke* p *sa izometriou roviny zobrazia do všetkých bodov* $\mathbf{p}'$ *priamky* p*, tak stredy úsečiek* $\mathbf{pp}'$ *sú kolineárne a buď tvoria priamku alebo sú totožné. Dokážte! Pokúste sa zovšeobecniť do* $\mathbb{E}^n$.

CVIČENIE 159. *Dokážte, že posunutá súmernosť (s nenulovým vektorom posunutia v smere roviny súmernosti) má práve jednu samodružnú nadrovinu.*

CVIČENIE 160. *Zloženie troch otočení o uhol* π *je otočenie o uhol* π. *Dokážte!*

CVIČENIE 161. *Zloženie troch osových súmerností je osová súmernosť, ak príslušné tri osi súmernosti sú buď rovnobežné alebo majú spoločný práve jeden bod.*

CVIČENIE 162. *Všetky otočenia roviny s pevným stredom tvoria grupu. Dokážte!*

CVIČENIE 163. *Všetky posunutia generované násobkom pevne vybraného vektora tvoria grupu. Dokážte!*

Literatúra

[1] B. A. Rozenfeld. *Mnogomernye prostranstva.* Nauka, 1966.
[2] Берже, M. *Геометрия, Том второй.* Мир, Москва, 1984.
[3] Берже, M. *Геометрия, Том первый.* Мир, Москва, 1984.