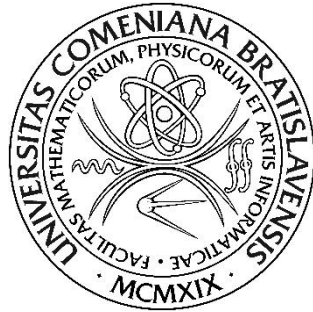


Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



GEOMETRIA FRAKTÁLOV
(pre vedúcich matematických krúžkov)

Andrej FERKO, Martin SAMUELČÍK, Veronika ŠPRLÁKOVÁ

Bratislava 2015

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK

GEOMETRIA FRAKTÁLOV
(pre vedúcich matematických krúžkov)

Andrej FERKO, Martin SAMUELČÍK, Veronika ŠPRLÁKOVÁ

Bratislava 2015

Názov: **GEOMETRIA FRAKTÁLOV (pre vedúcich matematických krúžkov)**

Autor: doc. RNDr. Andrej FERKO, PhD., RNDr. Martin SAMUELČÍK, PhD., Bc. Veronika ŠPRLÁKOVÁ

Recenzenti: prof. RNDr. Michal GREGUŠ, PhD., FM UK Bratislava,

RNDr. Katarína MÉSZÁROŠOVÁ, PhD., STU Bratislava

Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK Bratislava

Vydané s finančnou podporou grantu

KEGA 094UK-4/2013, E-matik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou. Počet strán 195.

(C) Andrej FERKO, Martin SAMUELČÍK, Veronika ŠPRLÁKOVÁ, 2015

ISBN 978-80-8147-049-3

EAN 9788081470493

Obsah

Úvod, 5

1 O riešení neriešiteľného paradoxu pobrežia, 7

2 Viac klasických fraktálov, 15

3 Matematické základy, 23

4 IFS (Iterované systémy funkcií), 33

5 Fraktálna kompresia, 35

6 Juliove a Mandelbrotova množina, 37

7 L – systémy, 39

8 Stochastické fraktály, 43

9 Chaos & čudné atraktory, 45

10 Jazyky matematík, 47

Záver, 53

Literatúra, 55

Anglicko-slovenský slovník, 57

Prezentácie

Časť 1 : Úvod & História, 61

Časť 2 : Viac klasických fraktálov, 77

Časť 3 : Matematické základy, 89

Časť 4 : IFS (Iterované systémy funkcií), 101

Časť 5 : Fraktálna kompresia, 115

Časť 6: Juliove a Mandelbrotova množina, 131

Časť 7 : L – systémy, 147

Časť 8 : Stochastické fraktály, 163

Časť 9 : Chaos & čudné atraktory, 179

Úvod

Otcom fraktálnej geometrie sa po jedinečných vedeckých objavoch stal **Benoît Mandelbrot**, ktorý aj fraktály pomenoval. Pre najširšiu verejnosť uviedli fraktály koncom 80. rokov na výstave so svetovým ohlasom, na Slovensku fraktály predstavili autori vedeckej výstavy Virtuálny svet 2012 ako jednu z modalít virtuálnych svetov, viac na <http://www.sccg.sk/~ferko/VirtualnySvet2012-finalPCRevue.pdf>. Magisterský predmet **Geometria fraktálov** na UK od školského roku 2001/2002 vyučovali Andrej Ferko, Michal Greguš, Elena Šikudová a Martin Samuelčík. Aplikácie fraktálnej geometrie na Slovensku publikovali napríklad Marek Fabrika (rastový simulátor lesa Sibyla pre virtuálnu realitu typu Cave, TU Zvolen), Mária Bohdalová, Michal Greguš (FM UK Bratislava) a Katarína Mészárosová (Fraktály v krajinnej štruktúre, STU Bratislava).

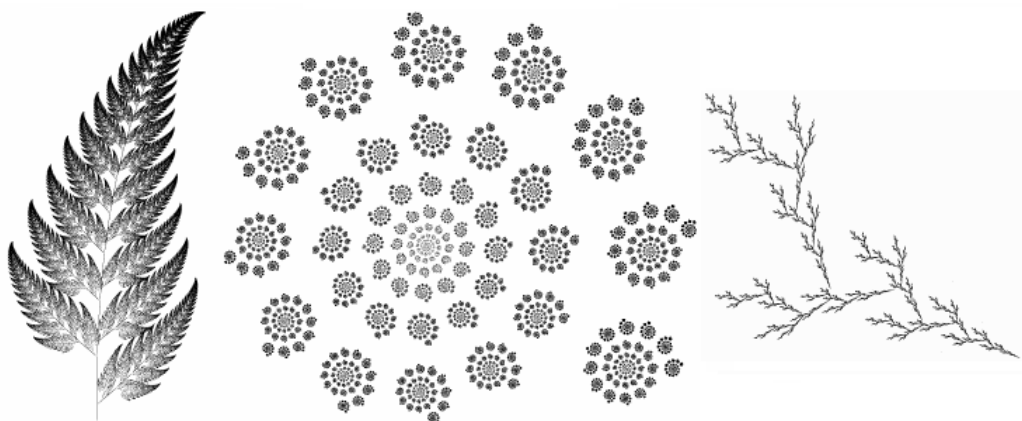
Pretože výklad v slovenčine adresujeme vyučujúcim matematiky na základných a stredných školách, pripájame slovenský preklad prezentácií, ktorých anglické originály pre študujúcich na FMFI UK vytvoril Martin Samuelčík. Značné časti tejto verzie spracovania (kapitoly 2, 3, 4 a 7, slovník a preklady) spadajú do diplomovej práce Veroniky Šprlákovéj a celok patrí do riešenia projektu KEGA **E-matik+** a kontinuálneho vzdelávania učiteľov matematiky. Pri tvorbe terminológie prihliadame k českej učebnici Zelinka a kol. Fraktální geometrie, principy a aplikace. Mandelbrot vo svojej autobiografii **Fraktalista** na s. 277 spomína, že Heinz-Otto Peitgen a jeho kolegovia z Brém už v 80. rokoch 20. storočia zorganizovali v Nemecku aj vo floridskom okrese Broward progresívny učebný program, ktorý využíva fraktály na podporu výučby matematiky na stredných školách. Z ponuky na internete sme v roku 2015 vybrali súbor prezentácií, ktorý vytvorila **Cynthia Lanus** a ktorého niektoré časti sú vhodné dokonca aj pre základné školy. So súhlasom pani autorky sme jej online dielo preložili do slovenčiny. Ostáva na čitateľoch tohto textu a pripojených prezentácií v slovenčine, po akú hĺbku alebo šírku výkladu fraktálnej geometrie ich zavedú aktuálne potreby výučbovej praxe alebo osobný záujem.

Martin Samuelčík a Michal Ferko predstavujú v knihe **Virtuálny svet 2012** fraktály takto [Fer12]: „Francúzsky matematik Benoît Mandelbrot (1924–2010) v roku 1975 zaviedol pojem **fraktál** a opísal takéto štruktúry v knihe **Les objets fractals, forme, hasard et dimension**. Voľne dostupný nástroj ako ChaosPro Vám v reálnom čase vygeneruje fraktály, aj keď mu zadáte svoj vlastný vzorec. ... No ak chcete fraktálnej geometrii aj rozumieť, Vaša cesta vedie na matfyz... do posluchárne prednášok Fraktálna geometria alebo Geometria fraktálov. Vzorec, ktorému nerozumiete, môžete zadať, ale na porozumenie samopodobným objektom s neceločíselnou Hausdorffovou dimenziou bude treba začrieť hlbšie do funkcionálnej analýzy... Fraktál ako limitný

pojmem nevidíme nikdy, no poznáme nekonečný počet jeho iterácií, z ktorých niektoré možno zobrazit...”

Pod grafickým objektom rozumieme podmnožinu priamky, roviny alebo priestoru s atribučnou funkciou, napr. ofarbením. Zásadný rozdiel medzi objektami fraktálnej a Euklidovej geometrie spočíva v tom, že fraktálne objekty sú samopodobné, napr. časť Kochovej krivky sa podobá na celok, čo možno pozorovať aj v prírode na karfirole, oblakoch, stromoch, pľúcach ai.

V širšom zmysle slova súvisia aj iteračné procesy geometrie fraktálov aj chaotické atraktory s tzv. prírodnými algoritmami (natural algorithms). Pierka okolo sovích očí optimalizujú zachytávanie zvuku pri nočnom love a fraktálna konštrukcia antény zlepšuje jej výkon. V prírode iterácií nemusí byť mnoho, kmeň vianočného stromčeka sa rozvetvuje po ihličie hierarchicky len niekoľkokrát... a kmeň samotný ešte nie je stromček a ihličie už nie sú vetvičky. Sčerená hladina jazera, údolie okolo a nad údolím vrchy majú tri rôzne fraktálne dimenzie, tri hodnoty miery drsnosti, tri alternatívy škálovej invariance, a v jednom pohľade vidíme **multifraktál**. Iné **prírodné algoritmy** vytvárajú napr. Chladniho obrazce na hrajúcich husliach či vibrujúcich plechoch posypaných pieskom. V počítačovej grafike fraktály patria k metódam špeciálneho modelovania, tvarovým gramatikám, celulárnym automatom, fyzikálnym simuláciám. Fyzikálnym strojom na výrobu iterácií fraktálov je hypotetický xerox s viacerými šošovkami. Treba nastaviť zmenšenie obrázku a potom kopírovať výstup na vstup toľkokrát, koľko treba. Každý šošovke prislúcha jedna matica s determinantom menším ako jedna a súbor matíc transformuje ľubovoľný vstupný obrázok do výsledného fraktálu. Známy papraďový list, výstup z xeroxu so 4 šošovkami, objavil **Michael Barnsley** [Baroo]. A Google Search ponúka mnoho ďalších samopodobných... skúste zadať „fractals in nature“.



Tento text má prispieť k propagácii očarujúcej matematiky pre dobrých učiteľov a múdre deti.

1 Geometria fraktálov – motivačná prednáška

O riešení neriešiteľného paradoxu pobrežia

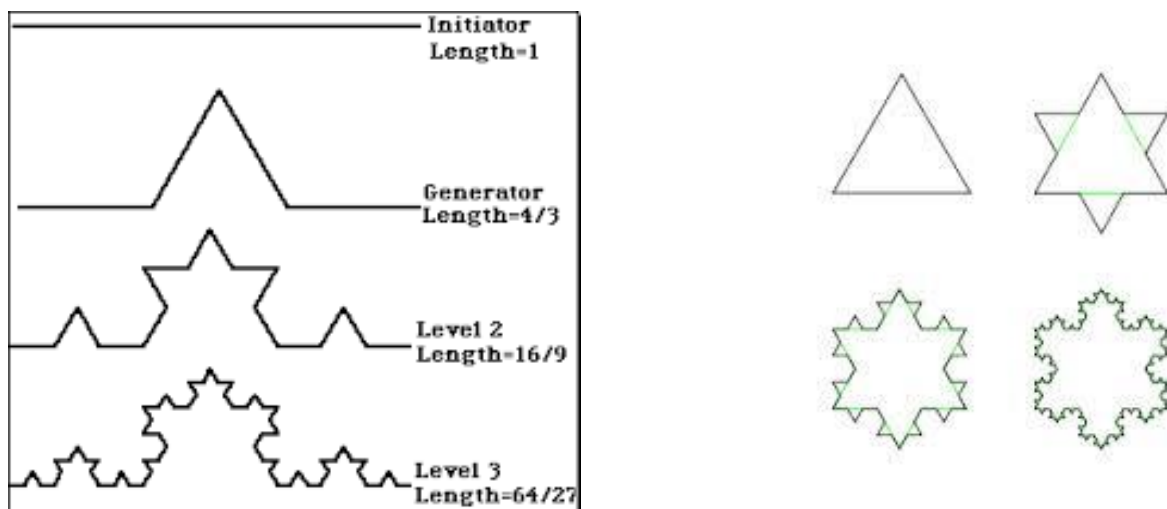
*Nová teória má zmysel, ak rieši problém,
na ktorý doterajšia teória nestačí*
A. A. Samarskij

Problém 1:

Aké dlhé je pobrežie Veľkej Británie? L. F. Richardson (1881-1953) vychádzal z rozporných meraní. Pre dĺžku hranice Španielsko – Portugalsko namerali hodnoty v intervale 987-1214 km, pre Holandsko – Belgicko 380-449 km. Rozpor spôsobili rozdielne veľkosti meradla. Mierka mapy môže byť 1cm:100km, ale aj 1cm:1km. Výpočet dĺžky L oblúka rovinnej krivky $f(x)$ vyžaduje deriváciu (Obr. 2), aká je ale „derivácia obrysu pobrežia“? Modelom hranice či pobrežia v mape sa stáva lomená čiara, v ktorej vrchoch derivácia neexistuje...

Problém modelujeme v Euklidovej rovine s bodmi, úsečkami a ich dĺžkami.

Existuje krivka „zo samých rohov“? Áno, dokázal(a) Helge von Koch v roku 1904. (Správne má byť dokázal. Švédska barónka vo viacerých českých a slovenských textoch vznikla omylom, reťazec Helge reprezentuje švédske mužské meno.) Niels Fabian Helge von Koch zostrojil rovinnú krivku aj spojité aj bez derivácie v každom jej bode. Z úsečky vynechá prostrednú tretinu a nahradí ju dvomi rovnako dlhými stranami trojuholníka. Tento proces potom opakuje na úsečkách štyroch, šesťnástich... V limite vznikne krivka K „zo samých rohov“.



Obr. 1.1: Prvé tri iterácie Kochovej krivky a vložky (Google Search „Koch curve“).

Prvotnú úsečku nazývame **iniciátor** a predpis na jej náhradu **generátor** a postupne (iteratívne) vznikajúce krivky označujeme E_0, E_1, E_2, \dots . Zapíšme tri kroky, počet úsečiek krivky a jej označenie, dĺžky, limitu a algoritmus.

Krok 0	iniciátor	1 úsečka	E_0 dĺžka = 1
Krok 1	generátor	4 úsečky	E_1 dĺžka = $4/3 \approx 1.33$
Krok 2		16 úsečiek	E_2 dĺžka = $16/9 \approx 1.77$
...			

Kochova krivka K sa dá s daným označením formálne zapísať ako limita

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n.$$

Algoritmus Kochova krivka (pseudokód)

$E_0 =$ iniciátor

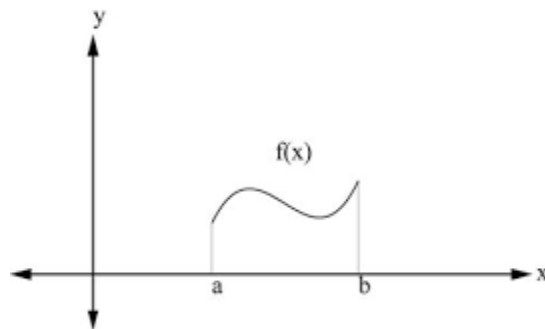
for $n = 1$ to ∞

nahraď každú úsečku v E_{n-1} generátorom (a vykresli E_n)

Algoritmus 1: Kochova krivka. Na vstupe je generátor E_0 , t.j. úsečka danej dĺžky.

Treba poznamenať, že tento jednoznačný a hromadný súbor krokov nie je algoritmom, lebo nie je konečný. Pri skutočnom praktickom výpočte sa ukončí po dostatočnom konečnom počte krokov.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



Obr. 1.2: Dĺžka L oblúka rovinatej krivky $y = f(x)$ na intervale $[a, b]$ pre reálne čísla, $a, b \in \mathbf{R}$ vyžaduje deriváciu (viac obrázkov na Google Search „curve length“).

Kochova krivka K deriváciu ale nemá v žiadnom bode a jej dĺžka na danom intervale je nekonečná, geometrická postupnosť s kvocientom $4/3$ diverguje.

Problém 2:

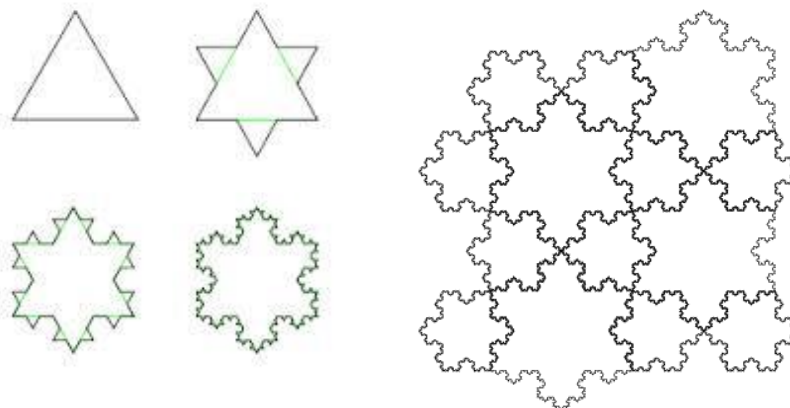
Existuje pobrežie, ktorého modelom je krivka K? alebo Aká je dĺžka K?

Odpoveď je áno, ale iba štatisticky, na presnú formuláciu bude treba zaviesť viacero pojmov (najmä štatistickú samopodobnosť). Jednoduchšie možno zodpovedať na otázku o dĺžke. Spočítame čiastočný súčet pre geometrickú postupnosť s kvocientom $q = 4/3$, s nulovým členom $|E_0| = d$, t.j. reálna dĺžka danej vstupnej úsečky, prvým členom $|E_1| = (4/3)d$, ďalej $|E_2| = (4/3)^2d$, $|E_3| = (4/3)^3d$, ... $|E_k| = (4/3)^k d$.

Súčet prvých n členov pre $|q| \neq 1$ vyjadruje známy vzťah

$$\begin{aligned} S_n &= |E_0| (q^{n-1} - 1) / (q - 1) = \\ &= d \cdot ((4/3)^{n-1} - 1), \\ |K| &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \end{aligned}$$

Ak ako generátor zadáme rovnostranný trojuholník, vzniká v iteračnom procese postupne objekt, ktorý sa ponáša na snehovú vločku a nazýva sa preto Kochova vločka alebo Kochov ostrov. V čase vzniku mnohí matematici nazývali takéto protirečivé objekty matematickými monštrami či príšerami. Kochov ostrov ohraničuje konečnú plochu uzavretou krivkou nekonečnej dĺžky...

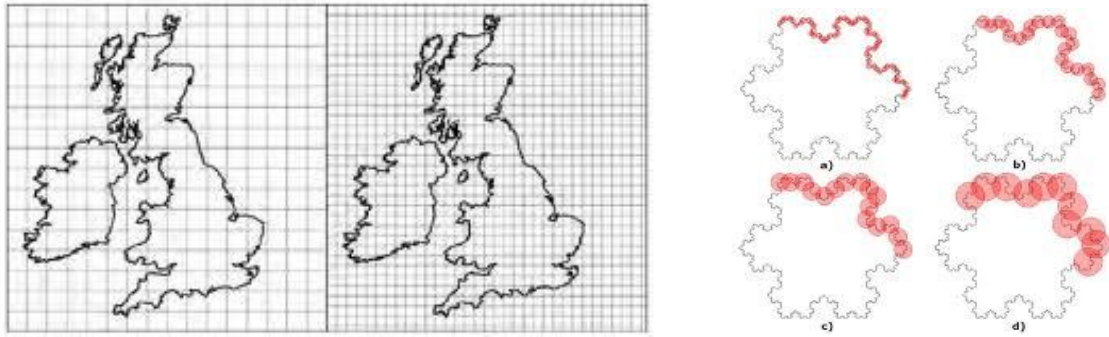


Obr. 1.3: Trojica Kochových kriviek vytvára Kochovu vločku (viac obrázkov na Google Search „Koch curve“). Kochove vločky pokrývajú, resp. vyplňajú rovinu (Wolfram MathWorld).

L. F. Richardson meral dĺžku pobrežia ostrova Korziky, označme ho tiež symbolom K , a empiricky odvodil nasledujúci vzťah :

$$|K| = N(\epsilon) \cdot \epsilon^D,$$

kde $|K|$ označuje celkovú dĺžku meranej čiary, $N(\epsilon)$ je počet úsečiek dĺžky ϵ , potrebných na pokrytie (aproximáciu lomenou čiarou) krivky K . D bola pre Richardsona konštanta, ktorej významu nerozumel, ale ktorej hodnota mu vyšla približne ≈ 1.26 . Dĺžka pobrežia mu jednak rástla so zmenšovaním „meracej“ úsečky dĺžky ϵ („krokom merania“), ale závisela aj od významovo v tom čase záhadného D (až Mandelbrot preukázal súvislosť D s Hausdorffovou dimenziou).



Obr. 1.4: Dĺžku pobrežia Veľkej Británie alebo Kochovej vložky meriame štvorcovými alebo kruhovými „boxami“, pri rôznych krokoch ε napočítame iné počty „boxov“ $N(\varepsilon)$ a z viacerých takýchto meraní možno určiť približnú hodnotu D (viac obrázkov na Google Search „Box counting“).

Skúsme teraz odmerať Richardsonovou metódou dĺžku úsečky $|E_0| = 1$. Áno, ideme kvôli lepšiemu porozumeniu odmerať známu jednotkovú dĺžku úsečky, ktorú budeme zisťovať pomocou kratších úsečiek. Potrebujeme na to $N(\varepsilon) = 3$ úsečky dĺžky $1/3$, 4 úsečky dĺžky $1/4$ atď. Počet $N(\varepsilon)$ je teda prevrátenou hodnotou kroku ε .

$$|E_0| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^D / \varepsilon.$$

Áká má byť hodnota exponentu D ? Pre $D > 1$ výjde $|E_0| = \infty$, pre $D < 1$ bude takto odmerané $|E_0| = 0$. Iba pre $D = 1$ dostaneme správny výsledok $|E_0| = 1$ (ako od začiatku vieme), a preto v tomto prípade D zodpovedá nášmu intuitívnemu poňatiu topologickej dimenzie meraného útvaru — bod nula, priamka 1, rovina 2... Pre Kochovu krivku nám však prekvapujúco výjde

$$D = 1.2618595 \approx \log 4 / \log 3.$$

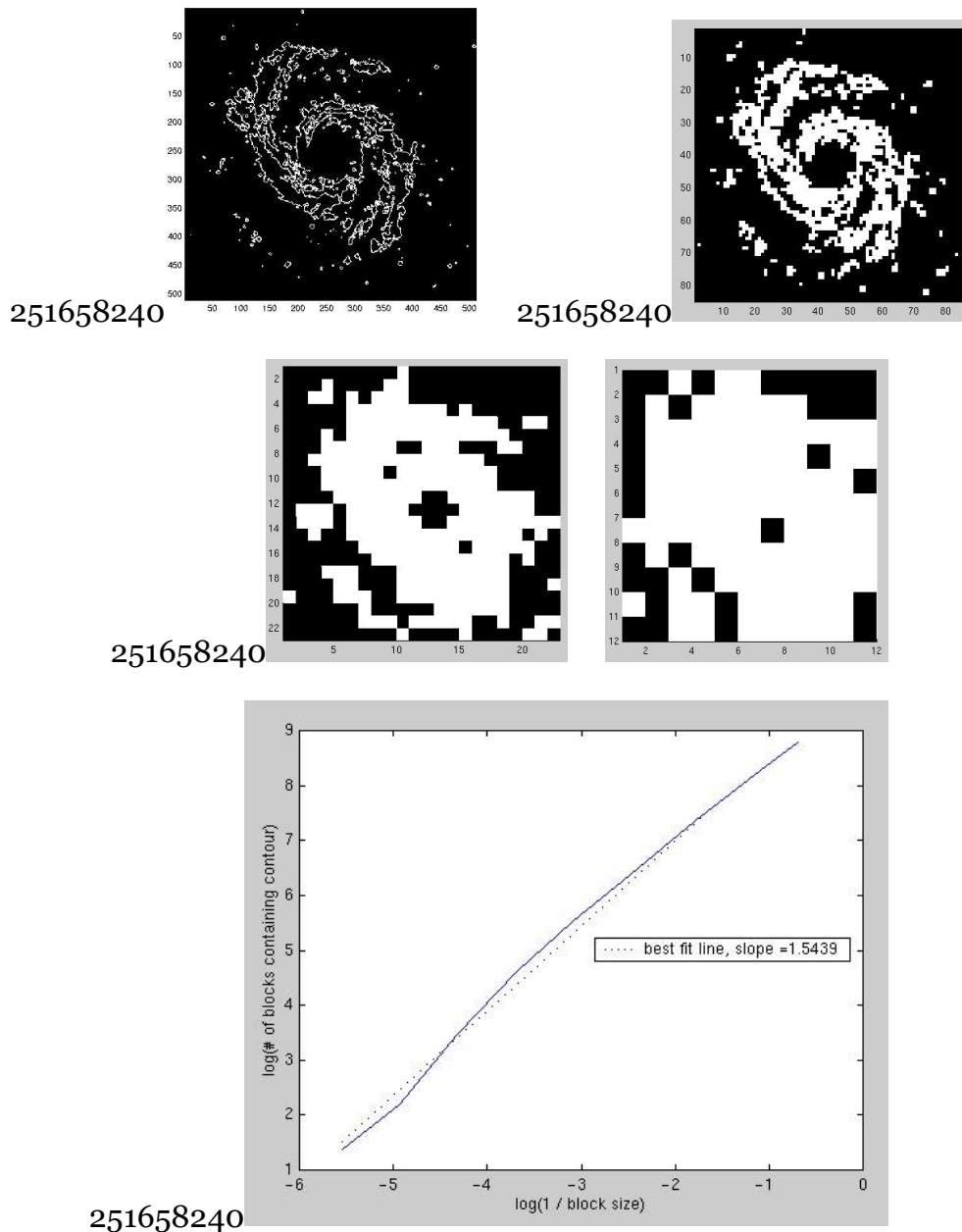
Neceločíselná dimenzia!!! (Môže byť aj záporná? Môže byť aj celočíselná?)

V originálnom objaviteľskom diele ju v 70. rokoch 20. storočia Benoit Mandelbrot nazval Fractional dimension, zlomková dimenzia, z latinčiny – fractus – zlomený, príbuzné pojmy fraktúra (zlomenina), frakcia (odštiepená časť napr. politickej strany), nepríbuzný pojem: frak, mužský večerný slávnostný kabát. Fractus v meteorológii znamená popretrhávané oblaky („franforce“). Kochova krivka patrí medzi lineárne fraktály.

Ako sme hodnotu D zistili? Kochova krivka vzniká 4-násobným opakovaním afinnej transformácie, zloženej z posunutia a škálovania so škálovacím faktorom (zmenšením) $1/3$, pre takýto prípad (lineárny fraktál) platí

$$D = \log 4 / \log(1/(1/3)) = \log 4 / \log 3.$$

Ako sa teda dá zistiť D pre pobrežie Korziky? Richardson použil postup, ktorý sa nazýva **Box counting method** (Obr. 1.4). Podrobný výklad možno nájsť na portáli Yale University <http://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/BoxDim.html>.



Obr. 1.5: Vstupné dáta bodov a kriviek (vľavo hore) pokrývajú boxy (bloky) troch rôznych veľkostí a smernica bodkovane vykreslenej regresnej priamky určí dimenziu množiny približne 1.5439 (ilustračné obrázky z prezentácie Fraktály, časť 1, slajd 20).

Algoritmus Box counting method (pseudokód)

Vstup: krivka na konečnej časti roviny

1. Rozdeliť meranú oblasť do štvorcovej mriežky s krokom s
2. Počet krivku obsahujúcich (pokrývajúcich) štvorcov (box)
3. Viacero meraní s rôznymi veľkosťami štvorcov, obsahujúcich množinu bodov krivky na danej škále s
4. Vytvoriť graf $\log N(s) / \log(1/s)$

Výstup: Smernica aproximujúcej priamky je približne fraktálna dimenzia

Algoritmus 2: Približné meranie dĺžky krivky metódou Box Counting.

Odpoveď na ťažšiu otázku vo formulácii Problému 2 znie: Kochova krivka je „dobrý“ model pobrežia Koziky, lebo má približne rovnakú fraktálnu dimenziu. Objavitel' fraktálnej geometrie Benoit B. Mandelbrot (1924-2010) v anglickom preklade pôvodne francúzskej knihy *Fractals : Form, Chance and Dimension* (1977) ale aj *The Fractal Geometry of Nature* (1982) takéto nepravidelné geometrické útvary nazýva fraktálmi a nový pojem definuje takto:

Fraktál

je množina, ktorej Hausdorffova dimenzia je ostro väčšia než dimenzia topologická.

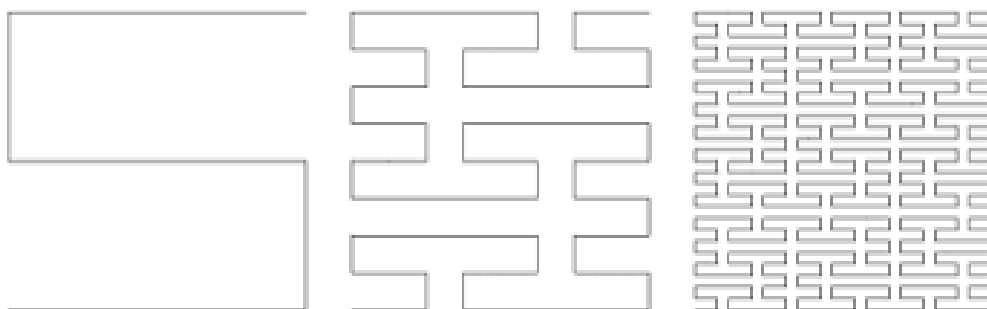
Neceločíselná Hausdorffova dimenzia sa od roku 1975 po francúzsky a potom v celosvetovej vedeckej komunikácii označuje ako fraktálna dimenzia, hoci to nie je celkom presne Hausdorffova – Besicovitchova dimenzia. Hausdorffovou dimenziu zbožňujú teoretici, fraktálnu používajú praktici. Prvá sa počíta komplikovane – napríklad diskusiou o zmysle limity, druhá jednoducho (Algoritmus 2, Box Counting).

S novým pojmom si treba uvedomiť jeho vlastnosti ale aj oblasť platnosti. Dimenzia samopodobnosti, fraktálna dimenzia nezávisí od voľby koeficientu zmenšenia a platí iba pre samopodobné množiny. Jej výhodou je jednoduchá definícia a výpočet. Naopak, Hausdorff-Besicovitchova dimenzia pre ľubovoľné množiny má výpočet zložitý.

Intuitívny význam fraktálnej dimenzie sme už ilustrovali – na príklade Kochovej krivky, K , ktorá z hľadiska dimenzie... je „viac“ ako hladká krivka, ale je „menej“ ako plocha. To vedie na ďalší problém.

Problém 3: Existuje krivka, ktorá má $D = 2$?

Áno. Peanovu krivku, vypĺňajúcu štvorec, v roku 1890 objavil Giuseppe Peano (1858-1932).



Obr. 1.6: Peanova krivka, prvé dve iterácie (Wolfram MathWorld).

Ako vidno, dimenzia samopodobnej Peanovej krivky je celočíselná. Dimenzia samopodobnosti, Katarína Mészárosová ju navrhuje nazývať samopodobnostná, platí pre presne samopodobné objekty. Dôsledne by sme mali hovoriť aj o „box counting dimension“, ak sme ju vypočítali pomocou štvorčekov (a „compass dimension“, ak sme použili metódu Compass).

Geometria fraktálov je rozšírením klasickej – Euklidovej geometrie – Mandelbrotov zvrät: zozbieral „čudné“ matematické objekty a nastal v poznaní prelomový skok – dokumentuje ho aj inde Kuhnova

teória vedeckých revolúcií. Najznámejším zvratom či skokom v poznaní bol Kopernikov obrat (Slnko neobieha okolo Zeme, ale naopak). Klasická geometrická paradigma deklaratívna sa skokom rozšírila na procedurálne iterovanie. Takéto geometrické objekty sa nedarí zapísať analyticky, parametricky ani implicitne, iba pravidlami procesu ich vzniku v limite a zobrazením niektorej z ich konečných aproximácií.

V každej dokonalej kráse je niečo čudesné, podivné, prečudesné... A Mandelbrot ukázal, že to nie sú ojedinelé výskyty, ale že je ich plná príroda i spoločnosť. Samopodobný je šum z rádia, karfiol, oblaky, vývoj finančných trhov, hudobné pasáže, rastliny...

„Fraktálna geometria spôsobí, že uvidíte všetko inak. Je nebezpečné čítať ďalej. Riskujete stratu svojej detskej vízie oblakov, lesov, galaxií, listov, peria, kvetov, skál, vrchov, vodných tokov, kobercov, tehál a mnohého ďalšieho. Vaša interpretácia týchto vecí (javov) už nikdy nebude ako predtým,“ predpovedá Michael Barnsley v knihe **Fractals Everywhere** [Bar00] „... Fraktálna geometria je nový jazyk. Keď ho budete ovládať, budete môcť opísať tvar oblaku tak presne ako architekt opisuje dom. ... V deterministickej geometrii sa štruktúry popisujú prostredníctvom elementárnych transformácií (afinných, škálovaní, rotácií, kongruencií). Fraktálna množina vo všeobecnosti obsahuje nekonečne mnoho bodov, ktorých organizácia je taká komplikovaná, že je nemožné popísať množinu určením priamo, kde ktorý bod v nej leží. Namiesto toho možno množinu definovať podľa „vzťahov medzi časťami (kusmi, pieces)“. Akoby sme opísali slnečnú sústavu uvedením gravitačného zákona a stanovením počiatočných podmienok. Z toho už vyplýva všetko. Ukazuje sa, že vždy je lepšie opisovať (zložité javy) prostredníctvom vzťahov.“

V prílohe možno nájsť alternatívnu prezentáciu motivačnej prednášky **Úvod & História**.

Bibliografická poznámka k úvodnej, motivačnej prednáške o fraktálnej geometrii. Prvú funkciu spojitú a bez derivácie v každom bode objavil Bernard Bolzano (1781–1848). Hausdorffovu dimenziu, nazývanú aj Hausdorff-Besicovitchova dimenzia, zaviedol v roku 1918 Felix Hausdorff (1868-1942). Otázkou „**Aké dlhé je pobrežie Veľkej Británie?**“ napísal Mandelbrot svoj prvý významný článok o fraktálnej geometrii (1967), no názov fraktál v ňom ešte nepoužil. Otázkou, čo by mohla znamenať záporná dimenzia, sa bez odpovede zaoberá vo svojej autobiografii **Fraktalista**, ktorú preložili aj do češtiny. V našom texte sa vyskytli tri **pojmy zatiaľ presne nedefinované** (štatistická samopodobnosť, dimenzia samopodobnosti, Hausdorff-Besicovitchova dimenzia, resp. Hausdorffova dimenzia), ich vybudovanie bude vyžadovať ďalšie úsilie. Kým výklad sa miestami pridŕža nemeckých skrípt, ktoré napísal **Eduard Groeller** z TU Wien, ilustračné obrázky preberáme z voľne dostupných zdrojov na internete, predovšetkým cez Google Search, s uvedením minimálneho vstupu do prehľadávania, napr. “Koch curve“. Hoci tento spôsob preberania nie je štandardný, umožňuje vyučujúcim na základných a stredných školách rýchly prístup k priebežne sa obnovujúcemu obrazovému materiálu v značnej variabilite. Objaviteľské dielo Mandelbrotovo sa číta pomerne ťažko, no úvodné pasáže fraktálnej geometrie sa hodia na oživenie výučby matematiky už na základných školách. Podrobnú učebnicu napísali Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe (1992), autori výstavy fraktálov, ktorá koncom 80. rokov 20. storočia spôsobila svetový ohlas ba až módu fraktálov. Knihu s viac ako 800 stranami nazvali **Chaos and Fractals, New Frontiers of Science**. Na presný matematický výklad pojmov aj s odkazmi do literatúry odporúčame portál Wolfram MathWorld, napr. Obr. 1.3 poskytuje aj Google Search, aj Wolfram MathWorld. Na úrovni obrázkov ale poskytuje služba Google Search aj chybné informácie, napr. popri Peanovej krivke ponúka aj Hilbertovu... Rovinné fraktály možno usporiadať podľa rastúcej Hausdorffovej dimenzie a v ďalšej kapitole si predstavíme vybrané rovinné deterministické lineárne fraktály a neskôr aj fraktály nelineárne i stochastické (nedeterministické).

2 Viac klasických fraktálov

Názov fraktál Mandelbrot vybral z latinského slovníka svojho syna, kde našiel slovo fractus, čo znamená zlomený alebo aj rozbitý [Zelo6]. Príklady matematických štruktúr, ktoré sú fraktálmi: napr. Cantorova množina, Kochova vložka, Peanova krivka a Mandelbrotova množina. Prostredníctvom fraktálov vieme opísať množstvo objektov reálneho sveta ako sú napríklad mraky, turbulencie a obrysy pobrežia, ktoré sa jednoduchými geometrickými útvarmi opísať nedajú. (Odkazmi v tejto kapitole poukazujeme, pokiaľ možno, na slovenské a české zdroje.)

Benoit B. Mandelbrot zavádza matematickú definíciu fraktálu: geometrický útvar, ktorý má Hausdorffovu-Besicovichovu dimenziu väčšiu od topologickej celočíselnej dimenzie. Pojem topologická dimenzia je intuitívne jasný. Bod má topologickú dimenziu rovnú nula, priamka má dimenziu jedna a kocka dimenziu tri. Dimenzia týchto objektov je celočíselná.

Definícia [Mano4]. **Fraktál** je množina, ktorej Hausdorffova dimenzia je väčšia, ako topologická.

Geometrická štruktúra fraktálu sa opakuje v ňom samotnom až do nekonečna. Delíme ich na samopodobné a samopríbuzné.

Samopodobné sú také štruktúry, v ktorých sa opakuje pôvodný originálny vzor materského objektu. Akýkoľvek výsek je presnou kópiou pôvodného objektu.

Samopríbuzné sú také štruktúry, v ktorých sa opakuje podobný vzor pôvodného útvaru.

Fraktálna geometria

Za otca tejto časti matematiky sa považuje Benoit B. Mandelbrot (portrét zo [Sam15]), ktorý objavil aj jeden z významných fraktálov - Mandelbrotovu množinu. Kým na opísanie výrobkov a rôznych predmetov, vytvorených pomocou modelovacích programov typu CAD, ktoré sa riadia geometrickou presnosťou, stačia základné matematické objekty, na opis prírodných modelov nám to nestačí. A to pre veľkú nepravidelnosť a neefektívne popisovanie klasickým geometrickým modelovaním. Ako by sme napríklad opísali oblaky? Ako zjednotenie množiny gúl alebo



parametrických plôch? Takýto opis by asi nebol najlepší. Preto sa hľadali metódy ako čo najlepšie opísať dané objekty. To podnietilo vznik fraktálnej geometrie, ktorá poskytuje účinné a relatívne jednoduché metódy na modelovanie prírodných objektov [Veg02]. Pod objektom v matematickom modeli rozumieme danú podmnožinu priamky, roviny alebo priestoru.

Topologická dimenzia

Geometrické objekty spravidla rozdeľujeme na 1D (jednorozmerné), 2D (dvojrozmerné), 3D (trojrozmerné). Tento pohľad na počet rozmerov nazývame topologická dimenzia [Fab11].

Fraktálna dimenzia

Pri meraní dĺžky pobrežia dávame dôraz na dĺžku meracieho dielika, pretože ak meriame s väčšou dĺžkou, tak výsledok bude menší ako pri menšej dĺžke dielika, ktorý pobrežie odmeria aj v jemných nerovnostiach. Pri objektoch s vlastnosťami fraktálov používame fraktálnu dimenziu.

Výpočet fraktálnej dimenzie je nasledovný:

Máme útvar X . Preškálujeme ho s koeficientom d . Nech $N(d)$ je počet preškálovaných objektov, ktoré je potrebné použiť na celé pokrytie pôvodného objektu.

Vzorec pre fraktálnu dimenziu D je takýto:

$$D = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln[N(d)]}{\ln\left[\frac{1}{d}\right]}.$$

Objekty, ktoré nie sú fraktálmi, majú fraktálnu a topologickú dimenziu rovnakú [Fab11].

História

Až do objavenia fraktálnej geometrie, bola Euklidova geometria považovaná za najsilnejší nástroj opisu všetkých geometrických útvarov. V roku 1872 Karl Weierstrass ako prvý objavil a pokúšal sa definovať to, čo dnes nazývame fraktál. No v roku 1904 Helge von Koch nesúhlasil s Weierstrassovou abstraktnou a analytickou definíciou a podal inú konštrukciu, ktorá sa po ňom nazýva Kochova vločka. Myšlienku samopodobných kriviek rozvinul do detailov Paul Pierre Levy v roku 1938.

Fraktálna geometria je matematický nástroj, pomocou ktorého dokážeme popísať zložito štrukturované objekty, ktorých charakter sa nemení pri určitom zväčšení alebo zmenšení.

Poľský matematik Benoit Mandelbrot narodený 20. novembra 1924 vo Varšave, ktorý vyučoval na univerzite Yale a nositeľ akademickej hodnosti Sterling profesor, ktorý sa udeľuje výskumníkom najlepším v danom obore, si položil na prvý pohľad jednoducho zodpovedateľnú Richardsonovu otázku „Aké dlhé je pobrežie Veľkej Británie?“ Po rôznych úvahách a porovnávaní turistických a satelitných máp mohol Mandelbrot odpovedať i vo všeobecnosti a aj označiť pobrežie Veľkej Británie za fraktál.

Mandelbrot ako prvý zaviedol pojem fraktál v roku 1975. Pravdou je, že dnes objekty označované ako typické fraktály boli objavené už dávno v 19. storočí, niekedy okolo roku 1870, napr. Kochova krivka v roku 1904.

Mandelbrot spolu s ďalšími matematikmi zjednotil teóriu fraktálnej geometrie. Použil slovo fraktál pre všeobecné označenie objektov, ktorých tvar je nezávislý od veľkosti meradla, ktorým objekt premeriavame [Rin11].

Významné fraktály

Cantorova množina

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918), nemecký matematik, známy ako zakladateľ modernej teórie množín [Pia99a] v roku 1883 uverejnil ako sa zostrojí Cantorova množina. Patrí medzi najjednoduchšie fraktály [Zelo6].



KONŠTRUKCIA CANTOROVEJ MNOŽINY

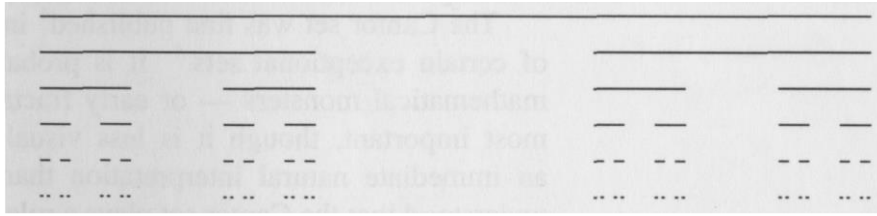
Množina leží na intervale $[0, 1]$.

Iniciátor: Interval

Generátor: Rozdelenie intervalu na tri rovnaké časti a vynechanie stredného intervalu. Ostanú nám dva podintervaly.

Algoritmus: Na všetky intervaly použijeme generátor. Iterujeme donekonečna (resp. požadovaného stupňa iterácie).

Na obrázku č. 2.1 je ukážka piatich prvých iterácií Cantorovej množiny. $D = \ln(2)/\ln(3) = 0.6309\dots$



Obrázok 2.1: Cantorova množina [Sam15].

Kochova krivka

Niels Fabian Helge von Koch (1870 - 1924), švédsky matematik, preslávil sa najmä Kochovou vložkou, ktorá je jednou z prvých objavených fraktálnych kriviek [Wko15].



V roku 1904 uverejnil nasledujúcu konštrukciu Kochovej krivky.

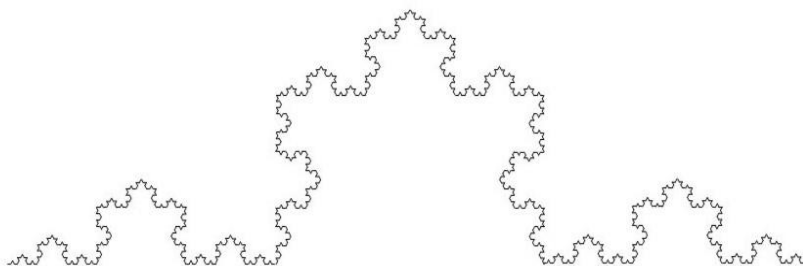
KONŠTRUKCIA KOCHOVEJ KRIVKY

Iniciátor: Úsečka

Generátor: Rozdelenie úsečky na tri rovnaké časti. Nahradenie strednej úsečky rovnostranným trojuholníkom a odstránenie strany trojuholníka, ktorá leží na iniciátore.

Algoritmus: Na všetky úsečky použijeme generátor. Iterujeme do požadovaného stupňa.

Na obrázku č. 2.2 je znázornená piata iterácia Kochovej krivky. $D = \ln(4)/\ln(3) = 1.2618\dots$



Obrázok 2.2: Kochova krivka, piata iterácia [Hot15] .

Peanova krivka

Giuseppe Peano (1858 - 1932), taliansky matematik, známy ako zakladateľ symboliky modernej algebry [Pia99c].



KONŠTRUKCIA PEANOVEJ KRIVKY

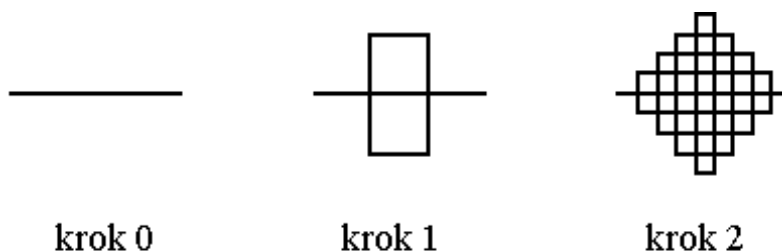
Princíp je podobný ako pri Kochovej krivke.

Iniciátor: Úsečka

Generátor: Rozdelenie úsečky na tri rovnaké časti. Nahradenie strednej úsečky dvomi štvorcami, ktoré budú mať danú úsečku spoločnú. Úsečka na prvom štvorci bude ako dolná strana štvorca a na druhom bude ako horná strana štvorca.

Algoritmus: Na všetky úsečky použijeme generátor. Iterujeme do požadovaného stupňa.

Na obrázku č. 2.3 je znázornená Peanova krivka do druhej iterácie.



Obrázok 2.3: Peanova krivka, iniciátor a dve iterácie [Šuj15].

Sierpinského trojuholník

Wacław Franciszek Sierpinski (1882 - 1969), poľský matematik, preslávil sa podstatnými prácami z teórie množín, teórie čísel, teórie funkcií a topológii [Wsi15]. V roku 1916 prvýkrát uverejnil Sierpinského trojuholník [Zelo6].



KONŠTRUKCIA SIERPINSKÉHO TROJUHOVNÍKA

Iniciátor: Rovnoramenný trojuholník

Generátor: Všetky strany trojuholníka rozdelíme na dve polovice. Stredy strán trojuholníka spojíme a trojuholník, ktorý je vytvorený spojením stredov strán, odstránime.

Algoritmus: Na všetky trojuholníky použijeme generátor. Iterujeme do požadovaného stupňa.

Obrázok č. 2.4 znázorňuje tretiu iteráciu Sierpinského trojuholníka. $D = \ln(3)/\ln(2) = 1.585\dots$



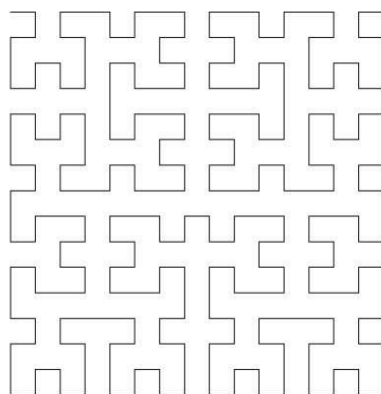
Obrázok 2.4: Sierpinského trojuholník [Lan15]. Kurzor poukazuje na prvý deliaci bod.

Hilbertova krivka

David Hilbert (1862 - 1943), nemecký matematik [Pia99b] (portrét [Mat10]).

V roku 1891 bola prvýkrát uverejnená Hilbertova krivka. Táto krivka má fraktálnu dimenziu 2 a vyplňa teda celý štvorec.

Na obrázku č. 2.5 je znázornená Hilbertova krivka po štvrtej iterácii.



Obrázok 2.5: Hilbertova krivka [Tiš00].

Juliove množiny

Gaston Maurice Julia (1893 - 1978), francúzsky matematik, sformuloval predpis pre Juliove množiny, ktoré úzko súvisia s Mandelbrotovou množinou [Sam15].

V časocho prvej svetovej vojny prvýkrát uverejnil nelineárnu konštrukciu v komplexnej rovine.



KONŠTRUKCIA JULIOVEJ MNOŽINY

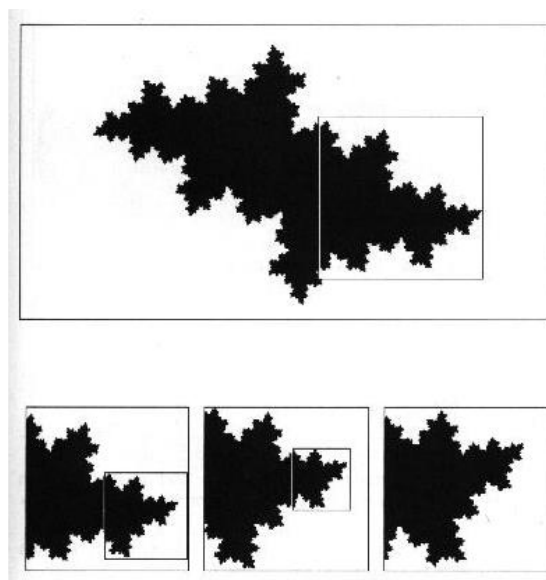
Iniciátor: z

Generátor: z nahradíme $z^2 + k$, kde komplexné číslo $k \in \mathbb{C}$.

Algoritmus: Na všetky z použijeme generátor. Iterujeme do požadovaného stupňa.

Pre komplexné číslo k , je Juliova množinou množina všetkých z , pre ktoré iterácie $z \rightarrow z^2 + c$ nedivergujú do nekonečna. Pre takmer všetky k , sú to fraktály...

Na obrázku č. 2.6 je znázornená Juliova množina pre konštantu $k = -0,5 + 0,5i$.



Obrázok 2.6: Juliova množina pre konštantu $k = -0,5 + 0,5i$. [Wma15].

Kým Juliove množiny získame sledovaním pohybov (iterácií, konvergencie) štartovacích bodov komplexnej roviny, Mandelbrotova množina vzniká sledovaním parametrov c a skladá sa z tých, pre ktoré je Juliova množina súvislá. Pretože predpis už nie je lineárny, ide o príklady nelineárnych fraktálov.

Mandelbrotova množina

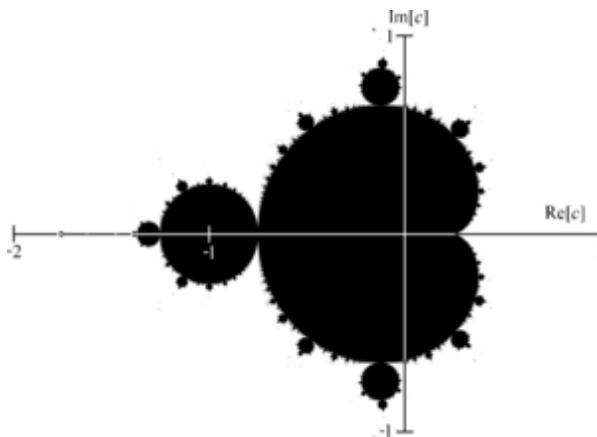
Mandelbrotova množina je definovaná ako množina komplexných čísel c , pre ktoré platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \neq \infty,$$

kde postupnosť $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná rekurzívnym predpisom $z_0 = 0$; $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Bod c v komplexnej rovine patrí do Mandelbrotovej množiny, ak limita neexistuje.

Postupnosť diverguje do nekonečna pre $|c| > 2$, všetky body mimo tejto množiny už nepatria do Mandelbrotovej množiny. Na obrázku č. 2.7 je ukážka iterácie Mandelbrotovej množiny.



Obrázok 2.7: Mandelbrotova množina [Wma15].

Hodno poznamenať, že samopodobnosť na Mandelbrotovej množine alebo v krajine s vrchmi, údoliami a jazerami nie je striktná, ako na Kochovej krivke, ak by sme ju začali vytvárať od prvej iterácie, nie z pôvodnej úsečky. Strešný pojem pre takéto fenomény je **multifraktál** a zaviedol ho už Mandelbrot.

V prílohe možno nájsť prezentáciu, ktorá objasňuje aj vykresľovanie takýchto fraktálov.

3 Matematické základy

Uvádžeme minimum potrebných pojmov. Rovnomenná alternatívna prezentácia je v prílohe, podrobnejší výklad o metrických priestoroch v slovenčine uvádza napr. K. Rostas [Ros10]. Množinu reálnych čísel označujeme \mathbb{R} a na označenie množín rezervujeme veľké písmená ako A, B, X . Pod pojmom bod si však treba myslieť nielen bod v rovine či na priamke... ale – v prípade potreby - hoci aj čiernobiely obrázok!

Definícia Metrický priestor. Nech X je nejaká neprázdna množina. Definujme zobrazenie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré spĺňa nasledujúce vlastnosti

- 1.) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2.) $d(x, y) = d(y, x)$ pre všetky $x, y \in X$ (symetria)
- 3.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pre všetky $x, y, z \in X$ (trojuholníková nerovnosť).

Usporiadanú dvojicu (X, d) nazývame metrickým priestorom, zobrazenie d metrikou a množinu X základnou množinou.

Definícia Hromadný bod. Nech (X, d) je metrický priestor a $A \subset X$. Bod $x_0 \in X$ sa nazýva hromadný bod množiny A , ak existuje prostá postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodov množiny A , ktorá konverguje k bodu x_0 . Množinu hromadných bodov označme A_d .

Definícia Limita postupnosti. Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru (X, d) konverguje k bodu $x \in X$, ak $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k > k_0: d(x_k, x) < \varepsilon.$$

Ak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$, tak x nazývame limitou danej postupnosti.

Definícia Úplný metrický priestor. Metrický priestor (X, d) sa nazýva úplný, ak každá cauchyovská postupnosť bodov tohto priestoru konverguje v X .

Definícia Kompaktný metrický priestor. Metrický priestor (X, d) sa nazýva kompaktný, ak z každej postupnosti bodov priestoru X možno vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá konverguje v X . Podmnožina A metrického priestoru (X, d) sa nazýva kompaktná, ak podpriestor (A, d) priestoru (X, d) je kompaktný (6).

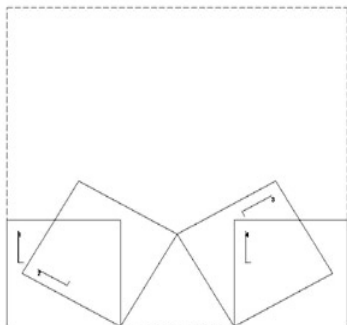
Definícia Kontraktívne zobrazenie. Zobrazenie f je kontraktívne, ak

$$\exists q: 0 < q < 1: \forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

Definícia Pevný bod. $x \in X$ je pevný bod zobrazenia f , ak $f(x) = x$.

Banachova veta o pevnom bode. Každé kontraktívne zobrazenie na úplnom metrickom priestore má práve jeden pevný bod.

S uvedenými pojmami už možno vyjadriť, že fraktál je pevným bodom kontraktívneho zobrazenia. Kontraktívnosť zaručuje konvergenciu iterácií k limitnému objektu. Pre Kochovu krivku je ním spojitá funkcia, ktorá pozostáva iba z bodov, v ktorých nemá deriváciu. Generátor, úsečku, spodnú stranu štvorca, nahradzame štvoricou afinných transformácií $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), f_4(\mathbf{x})$, na obrázku ich vizualizujú štvorce (ide však o ich spodné strany), \mathbf{x} označuje vektor premenných.



Obrázok 3.1. Vizualizácia IFS štvorcami.

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Scale by r

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.167 & -0.289 \\ 0.289 & 0.167 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scale by r , rotation by 60°

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.167 & 0.289 \\ -0.289 & 0.167 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.289 \end{bmatrix}$$

Scale by r , rotation by -60°

$$f_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scale by r

Determinanty každej z týchto matíc sú menšie ako jedna, čiže celé generovanie je kontraktívne, obrazy úsečiek sa zmenšujú. Hodnota koeficientu kontrakcie $r = \text{ad}$ (pre nulové b, c , inak treba spočítať determinant matice), hodnoty e, f vyjadrujú posunutie v smere x, y , v dvoch prípadoch aj otáčame o 60 , resp. 120 stupňov.

$$a[1]:=1/3; \quad b[1]:=0; \quad c[1]:=0; \quad d[1]:=1/3; \quad e[1]:=0; \quad f[1]:=0;$$

$$a[2]:=0.167; \quad b[2]:=-0.289; \quad c[2]:=0.289; \quad d[2]:=0.1667; \quad e[2]:=1/3; \quad f[2]:=0;$$

$$a[3]:=-0.167; \quad b[3]:=0.289; \quad c[3]:=0.289; \quad d[3]:=0.1667; \quad e[3]:=2/3; \quad f[3]:=0;$$

$$a[4]:=1/3; \quad b[4]:=0; \quad c[4]:=0; \quad d[4]:=1/3; \quad e[4]:=2/3; \quad f[4]:=0;$$

A výpočet sa vzťahuje na celý pôvodný obrázok x , potom na jeho zobrazenie a tak ďalej. Vyzerá to deterministicky, ale ukážeme si, že výpočet možno organizovať aj stochasticky, pomocou náhody. Najčastejšie sa to vyučuje na príklade Sierpinského trojuholníka, z ktorého vynechávame vnútorný podtrojuholník. Nech 1, 2, 3 sú vrcholy pôvodného trojuholníka. Nemusí byť ani rovnostranný.

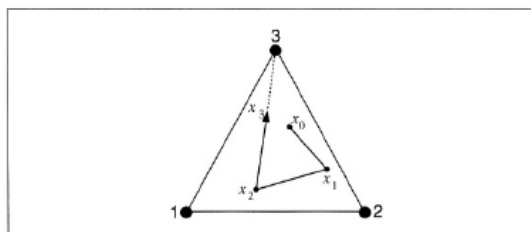


Figure 1.17: The three base points (vertices of a triangle) and a few iterations of the game point.

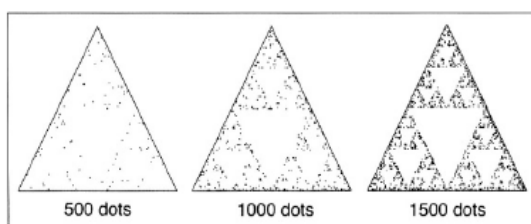


Figure 1.18 : 500, 1000 and 1500 dots of the chaos game.

Obrázok 3.2: Chaotická hra, Sierpinského trojuholník. Ilustrácia z knihy *Chaos & Fractals*.

Nasledujúci postup sa nazýva **chaotická hra** (chaos game).

INICIALIZÁCIA. Nech je daná trojica vrcholov rovnostranného trojuholníka v rovine a x_0 je náhodne zvolený štartovací bod. (Menšími značkami vyznačujeme polohu bodov x_0, x_1 atď.)

1. krok: Nájďme bod x_1 takto. Zvoľme náhodne jeden z bodov 1, 2, 3 a x_1 bude potom stred úsečky, spájajúcej ho so x_0 . (Na obrázku sa ilustruje poradie 2,1,3.)

N-tý krok: je analogický.

Zo stredu predchádzajúcej úsečky vedieme novú úsečku do niektorého z vrcholov.

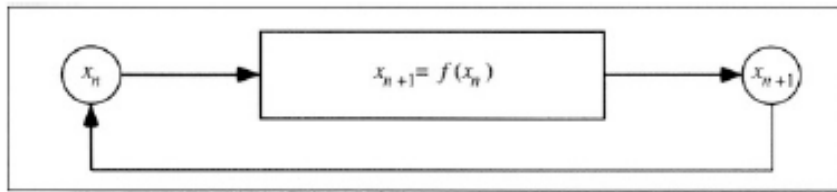
Otázka znie, akú časť roviny pokryje takáto nekonečná postupnosť bodov? Bude to Sierpinského trojuholník (na internete sa dá nájsť video zadaním „Chaos Game Sierpinski“).



Obrázok 3.3: Sierpinského trojuholník. Iterácie pomocou stochastického algoritmu Chaos Game.

Aby sme zistili, čo vlastne vyhodkovávame, musíme po spraviť veľa ($\sim 10^6$) krokov a poznať pojem Sierpinského trojuholník. Vieme však predpovedať správanie sa každej nekonečnej postupnosti bodov? Za určitých predpokladov ÁNO.

Predpoklad 1. Postupnosť bodov musíme vedieť zapísať ako ITERAČNÝ PROCES (alebo spätnoväzobný systém, feedback system), $x, f(x), f(f(x))...$



One-Step Feedback Machine
Principle of the one-step feedback machine.

Figure 1.13

Obrázok 3.4: Schéma jednokrokovej spätnej väzby. Ilustrácia z knihy *Chaos & Fractals*.

Predpoklad 2. Iteračný proces musí vytvárať objekty (body, obrázky, ich transformácie...), ktorých vzdialenosť vieme merať a na to potrebujeme metrický priestor, v ktorom objekty z iteračného procesu môžu mať a ak majú, tak vždy nájdu limitu.

Predpoklad 3. Zobrazenie f musí zaručiť nielen vytváranie objektov, ale aj ich konvergenciu.

Po splnení týchto predpokladov budeme mať zaručené tri vlastnosti:

1. Existenciu atraktora, t.j. limitného objektu.
2. Pevný bod, t.j. objekt, ktorý sa zobrazením nemení.
3. Odhad, ako rýchlo sa proces blíži k limitnému objektu.

Pre horeuvedenú chaotickú hru možno poznamenať vo štvore:

1. Jej atraktorom je Sierpinského trojuholník.
2. Istý počet prvých bodov v postupnosti nemusí do atraktora patriť.
3. Táto hra poskytuje atraktor s „veľkou pravdepodobnosťou“ (môže sa stať, že náhodná postupnosť bude just 1, 1, 1, 1, 1... Vtedy sa získava iba časť atraktora).
4. Jednoduchá lineárna iterácia dáva zložitý atraktor, s dimenziou $D=1,5849$.

Skúsime takto formulovať postup pre Kochovu krivku? Hoci je jednoduchšia, s ňou sa to vyučovať nezvykne...

Ukázali sme si teda dva zobrazovacie postupy, pomocou algoritmu a afinných transformácií pre celé jednotlivé iterácie (Kochovu krivku) a pomocou stochastickej procedúry, ktorá určí bod po bode. V oboch prípadoch nekonečného výpočtového procesu pre aproximácie limitného objektu sme vyrobili algoritmus zavedením ukončovacieho kritéria ako maximálny čas výpočtu či hranica pre počet iterácií.

Zavedli sme viaceré nevyhnutné presné definície, ktoré možno ilustrovať mnohými príkladmi.

1. **Priestor** X je množina. **Body priestoru** sú prvky množiny. Príkladmi priestoru sú reálna os a jej body (čísla), Euklidovská rovina a jej body, priestor symbolov nad N symbolmi, kde bodmi sú postupnosti symbolov, kruh v rovine so stredom v počiatku, priestor tela (všetky povrchové body ľudského tela) alebo Sierpinského priestor.

2. **Metrický priestor** (X, d) , kde v priestore X zavedieme funkciu vzdialenosti $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, ktorej hodnota je reálne číslo. Napríklad (\mathbb{R}, d) , kde $d = |x - y|$ metrickým priestorom je a (\mathbb{R}, d) NIE je metrický priestor pre $d = |x \cdot y|$, lebo $d(x, x) = |x^2| \neq 0$ nemá vlastnosť metriky.

Pristavíme sa pri priestore symbolov nad N symbolmi, kde bodmi sú postupnosti symbolov. Ako merať v takomto priestore vzdialenosť? Daný priestor sa označuje $X = \Sigma$, priestor symbolov nad N symbolmi, kde N je kladné celé číslo. Symboly sú $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Typický bod v Σ je

$$x = 21700\dots \text{(konečná postupnosť)}$$

Pre $N = 10$ dostávame priestor dekadických čísel, kde vzdialenosť vieme merať ich rozdielom a pre iné symboly, napr pre trojicu $\{F, +, -\}$, možno ich poradie očíslovať a metrike rozumieť ako rozdielu poradí symbolov v trojkovej číselnej sústave.

Tento príklad metrického priestoru, priestor symbolov (Σ, d) , má vo fraktálnej geometrii významné využitie.

Lindenmayerove systémy (L-systémy)

Aristid Lindenmayer (1925 - 1989), maďarský biológ a botanik, preslávil sa práve L-systémami.

V roku 1968 prvýkrát uverejnil Lindenmayerove systémy. Systémy vznikli ako následok modifikácie gramatík využívaných v matematike pre modelovanie jednoduchých viacbunkových organizmov.

Definícia. L-systémy sú paralelné prepisovacie systémy ako variant formálnej gramatiky.

Slúžia na produkciu fraktálov. Podstatou ich tvorby je prepisovanie reťazcov podľa určitých pravidiel. Pravidlá sú vopred definované v rámci množiny pravidiel nazývanej gramatika.

V najjednoduchšej verzii použitia formálnej gramatiky na modelovanie organizmov sú prepisovacie pravidlá bezkontextové, čo sa označuje pridaním nuly pred L. oL-systém je trojica

$$\langle V, w, P \rangle,$$

kde V je abeceda symbolov,

w (axióma) je počiatočný reťazec, a

P je množina (bezkontextových) produkčných pravidiel.

Príklad: axióma F (vykresli úsečku)

Abeceda: $F, +, -$ ($+$ & $-$ znamenajú smer otočenia hore alebo dole)

Pravidlá: $+ \rightarrow +, - \rightarrow -, F \rightarrow F+F--F+F$ (plus a mínus sa neprepisujú a úsečka sa nahradí lomenou čiarou zo štyroch úsečiek, tri prepisovacie pravidlá)

Uvažujeme teda množinu symbolov a pravidiel, v ktorej sú premenné (môžu sa prepísať), konštanty (pevné, zafixované symboly), pravidlá, ktoré určujú syntax takejto špeciálnej gramatiky a štart, inicializáciu, vstupný reťazec. David G. Green (1993) uvádza príklad oL-systému, ktorý generuje známu postupnosť prirodzených čísel.

Príklad: Fibonacciho čísla

Premenné: $A B$

Konštanty: žiadne (všetky symboly možno prepísať)

Štart: A

Pravidlá (dve): A sa nahradí B

B sa nahradí AB

Nahradzujeme teda:

Stav 0 : A

Stav 1 : B

Stav 2 : AB

Stav 3 : BAB

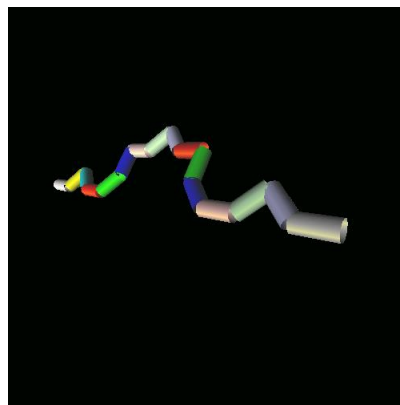
Stav 4 : ABBAB

Aké prekvapenie! Tento L-systém generuje predsa celkom neočakávaným postupom Fibonacciho čísla 1, 1, 2, 3, 5... Získame ich ako dĺžky reťazcov symbolov.

Sila L-systémov spočíva v tom, že symbolom a pravidlám môžeme priradiť význam, číselný, ako sme sa práve presvedčili, obrázkový, aj vizualizáciu v priestore. Štandardne sa používa korytnačia grafika (Turtle Graphics, navrhol ju Seymour Papert, pre detský programovací jazyk LOGO), ktorú sa zvládnu naučiť už 4-ročné deti. Korytnačka je 2D alebo 3D kurzor, s danou pozíciou a orientáciou, posúva sa, otáča sa, s kreslením alebo bez neho, v súradniciach rastrovej obrazovky.

Na horšie porozumenie teraz uvedieme príklad bez vysvetlenia symbolov. Kto uhádne, čo nakreslí s rotáciou 60 stupňov L-systém ('F--F--F', 'F+F--F+F', "", "", "")?

A študent na TU Graz, Armin Taschwer, v roku 2001 vytvoril obrázok Koch_simple: D: 3, G: (Start: B, B = A-A++A-A, A = ++cF-cF++cF-cF--). D: 3 vyjadruje dimenziu. Ďalšie nastavenia možno uhádnuť z obrázka.



Obrázok 3.5: Iterácia Kochovej krivky vizualizovaná pomocou farebných valcov. Armin Taschwer, TU Graz. Grafika nie korytnačia, ale orlia.

Definícia. Korytnačia grafika je pojem v počítačovej grafike pre metódu programovania vektorovej grafiky použitím relatívneho kurzora („korytnačky“) v rovinnej (dvojrozmernej) karteziánskej súradnicovej sústave. Predstavuje kľúčovú vlastnosť programovacieho jazyka LOGO.

Do L-systémov bola pridaná geometrická interpretácia reťazcov, aby sme mohli vizualizovať reťazce, ktoré reprezentujú morfológiu organizmu. Pôvodne z programovacieho jazyku LOGO, ktorý bol

vytvorený v roku 1967. Tento jazyk používa virtuálnu korytnačku, ktorá má svoju polohu a orientáciu. Tieto dve vlastnosti sa menia jej pohybom, ktorým môže zanechať čiaru. Pohybuje sa v dĺžkových krokoch. Spôsob kreslenia objektov sa prevádza na základe použitých symbolov. Táto grafika sa nazýva korytnačia 2D grafika.

Symbols:

F je posunutie dopredu o jeden dĺžkový krok, kde korytnačka za sebou zanecháva čiaru.

f je posunutie dopredu o jeden dĺžkový krok, kde korytnačka za sebou nezanecháva čiaru.

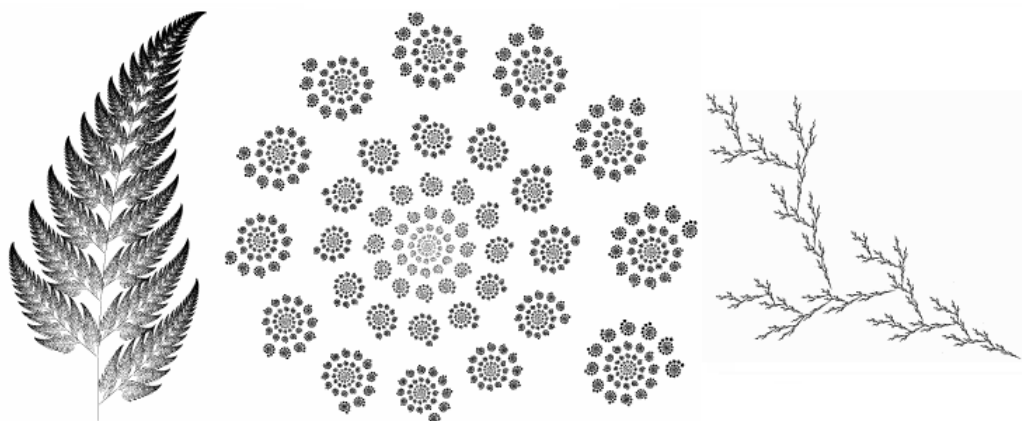
$+$ je otočenie doľava o uhol α

$-$ je otočenie doprava o uhol α , kde α je vopred určený uhol vo forme konštanty.

$|$ je otočenie o 180° .

Definícia [Fab11]. Orliá grafika je rozšírením korytnačej grafiky do priestorovej (trojrozmernej) karteziánskej sústavy.

Orliá 3D grafika je rozšírená o symboly charakterizujúce pohyb v ďalších smeroch.



Obrázok 3.6: Ukážka fraktálov vygenerovaných pomocou IFS systémov [Pet15].

Fraktály možno vytvoriť pomocou afinných transformácií, ako napríklad rôzne rotácie, škálovanie, posúvanie daného objektu. Opakovaným aplikovaním kontraktívnej transformácie sa začne vytvárať fraktálna štruktúra. Keď sa bude pravidelne používať rovnaká afinná transformácia vznikne samopodobný fraktál. Ak sa bude používať hierarchický IFS vznikne samopríbuzný fraktál. Takýto systém nazývame **deterministický IFS**. **Stochastický IFS** pridáva používanie náhody. K afinným transformáciám sa pridá aj pravdepodobnosť ich použitia [Zelo6]. Príkladom je horeuvedená chaotická hra.

Uvedené minimum potrebných pojmov od priestoru po vyslovenie Banachovej vety o pevnom bode sme doplnili vysvetlením, ako fraktály konštruovať a prehľadom terminológie fraktálnej geometrie.

Ako sa ale definuje Hausdorffova dimenzia? Množina všetkých kompaktných neprázdnych podmnožín úplného metrického priestoru X sa nazýva Hausdorffov priestor $H(X)$. Body z $H(\mathbb{R}^2)$ možno interpretovať ako čiernobiele obrázky a ich zjednotenie do $H(\mathbb{R}^2)$ patrí, prienik nie vždy. Voľba metriky niekedy rozhoduje o konvergencii. Pre $H(X)$ sa dodefínúva vzdialenosť bodu od množiny, vzdialenosť dvoch množín a **Hausdorffova metrika** takto.

Definícia. Vzdialenosť bodu od množiny. Nech (X,d) je úplny metrický priestor, B je kompaktná a neprázdna množina v $H(X)$ a bod $x \in X$. Potom

$$D(x,B) = \min \{d(x,y), y \in B\}.$$

Definícia Vzdialenosť dvoch množín. Nech (X,d) je úplny metrický priestor, A, B sú kompaktné a neprázdne množiny v $H(X)$ a bod $x \in X$. Potom

$$D(A,B) = \max \{d(x,B), x \in A\}.$$

Definícia Hausdorffova metrika. Nech (X,d) je úplny metrický priestor, A, B sú kompaktné a neprázdne množiny v $H(X)$ a bod $x \in X$. Potom

$$h(A,B) = \max \{d(A,B), d(B,A)\}.$$

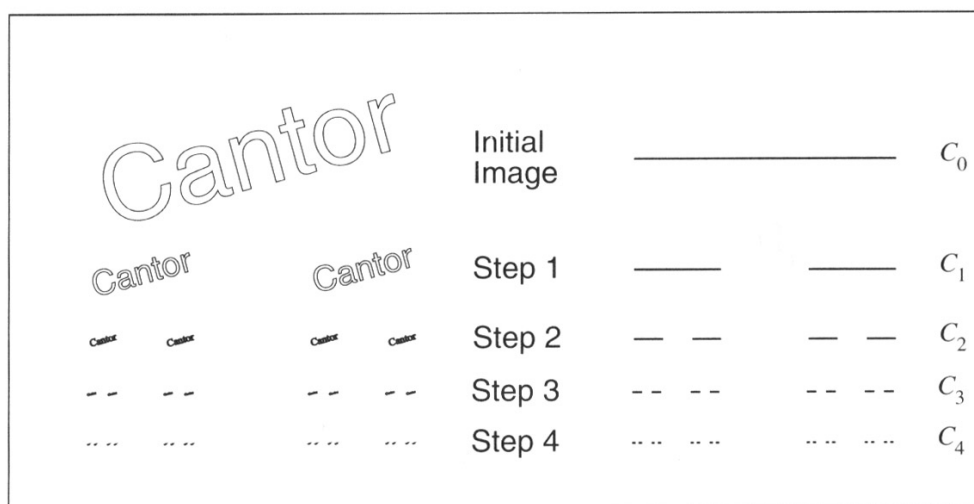
Hausdorffov priestor $(H(X),h)$ je úplny metrický priestor a “žijú v ňom fraktály”.

4 IFS (Iterované systémy funkcií)

Úplný metrický priestor (X,d) , prirodzené číslo N a konečná množina kontrakcií f_1, \dots, f_N s kontraktívnymi faktormi s_1, \dots, s_N definujú **Iterovaný systém funkcií** (X, f_1, \dots, f_N) . Na zjednotenie zobrazení sa používa označenie Hutchinsonov operátor W a kontraktívnym faktorom daného IFS je

$$s = \max \{ s_1, \dots, s_N \}.$$

Metaforu pre IFS poznáme, kopírovačí stroj s viacerými šošovkami, Multiple Reduction Copy Machine (MRCM). Afinné transformácie, zložené zo (zmenšujúceho, kontraktívneho) škálovania, otočenia a posunutia, umožňujú vytvárať deterministické lineárne fraktály. Napríklad, Cantorova množina je atraktorom IFS ($f_1 = (1/3)*x, (1/3)*y, f_2 = [(1/3)*x + 2/3, (1/3)*y$). Na obrázku 4.1 vidno štyri iterácie pre dva rôzne štartovacie obrázky. Obe postupnosti konvergujú k tej istej limite.



Obrázok 4.1: Štyri iterácie Cantorovho postupu, uplatnené na dva rôzne iniciátory [Mano4].

Georg Cantor (1845-1918) – autor teórie množín – našiel v roku 1883 príklad perfektnej a nikde hustej množiny. Samopodobná Cantorova množina C sa tradične konštruuje iteračne, v k -tom kroku sa pridáva $2k$ nových koncových bodov

$$C = \{0, 1, 1/3, 2/3, 2/9, 3/9, 7/9, 8/9, 1/27, 2/27, \dots\},$$

čo sa dá pekne vyjadriť v trojkovej sústave. Pomocou IFS ju vypočítavame iteračne a zobrazujeme tak, že predchádzajúci obrázok zrušíme a nahradíme novou iteráciou. Keď sa úsečky skrátia tak, že ich obrazy zaberajú po jednom obrazovom bode, nemá ďalší výpočet vizualizačný efekt a možno ho ukončiť. Iniciátorom môže byť ľubovoľný obrázok a obe metaforické šošovky f_1, f_2 vieme prehľadnejšie zapísať maticovo $y_1 = Ax_1 + b$. Na jednu kontraktívnu transformáciu IFS potrebujeme

nastaviť šesticu reálnych čísel tak, aby determinant každej z matíc bol menší ako 1, čiže aby sa napr. obrazy úsečiek skracovali.

$a[1]:=1/3;$ $b[1]:=0;$ $c[1]:=0;$ $d[1]:=1/3;$ $e[1]:=0;$ $f[1]:=0;$
 $a[2]:=1/3;$ $b[2]:=0;$ $c[2]:=0;$ $d[2]:=1/3;$ $e[2]:=2/3;$ $f[2]:=0;$

Naopak, ak takúto transformáciu hľadáme, na jej určenie postačujú tri body.

Alternatívny výpočet atraktora IFS ponúka stochastický algoritmus, ktorého príklad použitia ponúka náhodná hra, v ktorej s danou pravdepodobnosťou volíme jednu z kontrakcií. Na výpočet Cantorovej množiny by boli tieto pravdepodobnosti rovné 0.5.

Viac podrobností i príkladov IFS poskytuje prezentácia v prílohe.

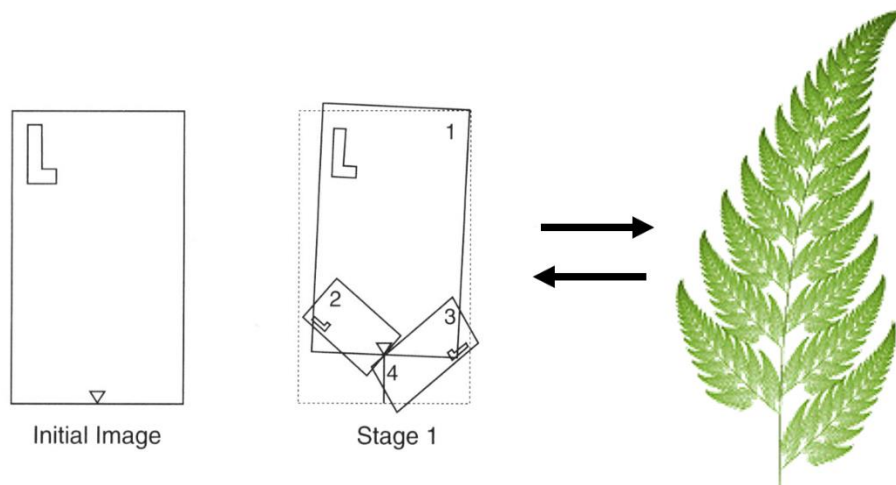
5 Fraktálna kompresia

Rovnomenná podrobná prezentácia je v prílohe. Základnú monografiu o kompresii napísal Yuval Fisher a využitie IFS na kompresiu údajne objavil, no nepublikoval Michael Barnsley.

Ak si pripomenieme maticový výpočet Kochovej krivky, tak vidíme, že na každú z kontraktívnych transformácií treba 6 reálnych čísel, spolu 24. A to je všetko, zakódovanie celého čiernobieleho obrázka potrebným počtom šesťíc reálnych čísel na správnych miestach:

```
a[1]:=1/3;    b[1]:=0;      c[1]:=0;      d[1]:=1/3;    e[1]:=0;      f[1]:=0;
a[2]:=0.167; b[2]:=-0.289; c[2]:=0.289;    d[2]:=0.1667; e[2]:=1/3;    f[2]:=0;
a[3]:=-0.167; b[3]:=0.289; c[3]:=0.289;    d[3]:=0.1667; e[3]:=2/3;    f[3]:=0;
a[4]:=1/3;    b[4]:=0;      c[4]:=0;      d[4]:=1/3;    e[4]:=2/3;    f[4]:=0;
```

Na takúto kompresiu každého obrázka musíme tieto transformácie objaviť, čo sa javí ako veľmi zložité. Možno práve preto sa fraktálna kompresia bežne nevyužíva. Uvedieme iba jej znázornenie na rastrovom obrázku samopodobnej paprade, vykreslené body sú ofarbené na zeleno, Obr. 5.1 vľavo. Pre tento obrázok treba nájsť také štyri kontraktívne transformácie, ktoré iniciálny obrázok zmenšia, otočia a posunú tak, ako to vidno vpravo. Prvky týchto matic skomprimujú obrázok takisto na 24 reálnych čísel. Dekompresiu získame iterovaním y každého iniciátora a vykreslenie napr. stochastickým algoritmom.



Obrázok 5.1: Na výpočet Barnsleyho paprade (Barnsley's fern) stačia 4 matice.

Viac obrázkov poskytnie Google Search „Barnsle'y fern IFS“.

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{bmatrix}$$

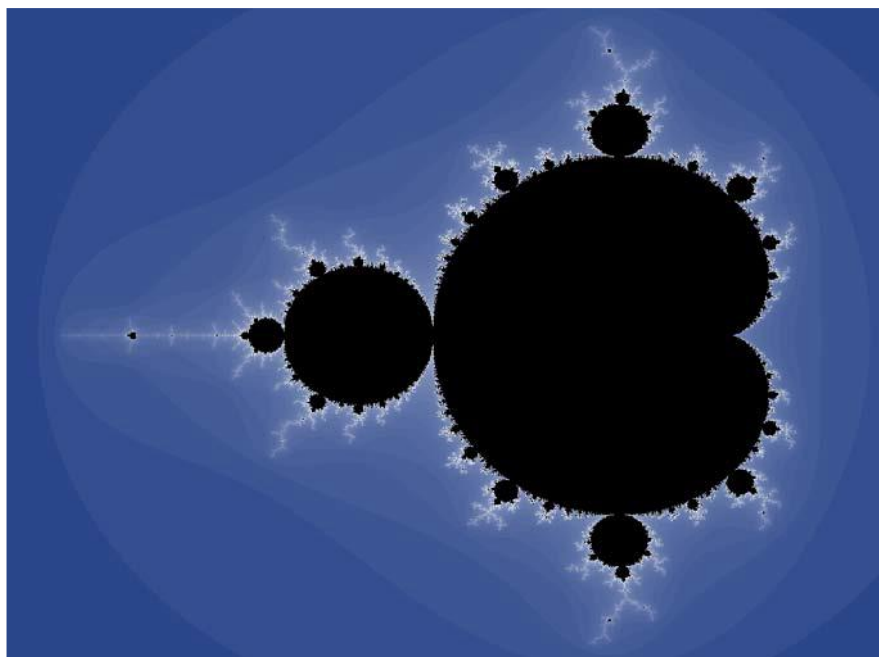
$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.44 \end{bmatrix}$$

Drobnými zmenami týchto matíc pri zachovaní kontraktívnosti získame „kompresie“ obrázkov „listov“ podobných na list paprade.

6 Juliove a Mandelbrotova množina

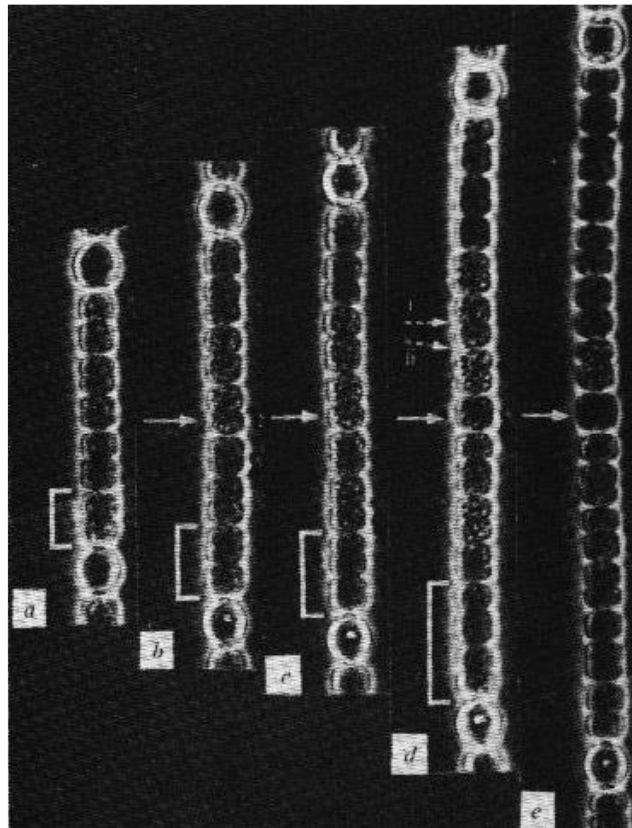
Rovnomenná podrobná prezentácia je v prílohe. Nelineárne fraktály v komplexnej rovine sa počítajú pomocou určenia oblastí konvergencie a ofarbujú sa napríklad podľa počtu iterácií. Zadaním „Julia Set Images“, „Julia Set Fractals“ alebo „Mandelbrot Set“ vo vyhľadávači sa otvoria galérie s krásnymi obrázkami. Mandelbrotovu množinu označujú za vôbec najkrajší matematický objekt.



Obrázok 6.1: Mandelbrotova množina z prezentácie v prílohe.

7 Lindenmayerove systémy (L-systémy)

Aristid Lindenmayer študoval, ako rastie *Anabaena catenula*, rod vláknitých siníc, žijúcich vo vode, kde spoluvytvárajú planktón. Má 2 typy buniek, delia sa počas rastu rôzne, ak sú ľavé alebo pravé dcéry, malé či veľké. Riešenie tohto problému prinieslo objav L-systémov.



Obrázok 7.1: *Anabaena catenula* rastie.

Definícia. L-systémy sú paralelné prepisovacie systémy ako variant formálnej gramatiky.

Slúžia na produkciu fraktálov. Podstatou ich tvorby je prepisovanie reťazcov podľa určitých pravidiel. Pravidlá sú vopred definované v rámci množiny pravidiel nazývanej gramatika.

V najjednoduchšej verzii použitia formálnej gramatiky na modelovanie organizmov sú prepisovacie pravidlá bezkontextové, čo sa označuje pridaním nuly pred L. 0L-systém (čítame nulaelsystém) je trojica

$$\langle V, w, P \rangle,$$

kde V je abeceda symbolov,

w (axióma) je počiatočný reťazec, a

P je množina (bezkontextových) produkčných pravidiel.

Definícia. Morfém je textový reťazec vo forme slova alebo súboru znakov, ktorý generuje morfológiu rastliny na základe geometrického obrazca s vlastnosťami fraktálu.

Definícia. Graftál je geometrické vyjadrenie morfému na základe korytnačej alebo orlej grafiky, ktorá produkuje vizuálnu podobu morfológie rastliny.

Definícia. Rastová gramatika je predpis vo forme L-systémov na produkciu morfémov. Obsahuje axióm, pravidlá a východiskové parametre.

Bezkontextové deterministické L-systémy

Tieto L-systémy patria medzi základné, od ktorých sa odvodzajú systémy na vyššej úrovni. Ich alternatívny názov je DoL-systémy. Prepisovanie nezávisí od kontextu, ale každý symbol má svoje pravidlo. Symbol nie je závislý na kontexte, nezáleží, aký symbol je pred alebo za ním, každý má svoje pravidlo. Ak nemá pravidlo, tak platí $X \rightarrow X$.

Ten istý výsledný (konečný) tvar vieme dosiahnuť dvomi postupmi:

- Prepisovanie hrán
- Prepisovanie uzlov

Prepisovanie hrán

Rozšírenie Kochovej vložky o definovanie pravej a ľavej hrany. V korytnačej grafike, hrana je čiara kreslená príkazom F .

Môže mať zadaný atribút orientácie (ľavá alebo pravá). Ľavá Fl a pravá Fr .

Prepisovanie uzlov

Zavádza do gramatiky uzly (objekty). Objekty označujeme negrafickými znakmi (A, B, \dots), ale nie takými, ktoré určujú pohyb korytnačky [Fab11].

Zátvorkové L-systémy

Rast stromov produkuje zložité morfológické štruktúry s bohatým vetvením. Stromy tvoria osi, ktoré môžu byť až n -tého stupňa. Základ (koreň) je os 0-tého stupňa. Osi prvého stupňa vychádzajú z kmeňa stromu. Vyššie stupne sú osi vetiev.

Každá os má svoju bázu a vrchol. Koreň je báza 0-tého stupňa

Osi sa skladajú zo segmentov.

Segmenty vznikajú jedným pohybom korytnačky. Segmenty na koreni sa nazývajú priame (zvislo zhora nadol). Segmenty na vedľajších vetvách sa nazývajú POSTRANNÉ/LATERÁLNE.

Koncové segmenty sa nazývajú **apex** a staršie **internódium**.

Bod vetvenia je uzol, z ktorého sa rozvetvujú osi.

Terminálny bod je uzol, ktorý ukončuje osi stromov.

Prvýkrát Gravelius (1914) predstavil schému usporiadaných vetiev v osových stromoch.

V roku 1983 MacDonald túto metódu preskúmal spolu s ďalšími metódami. Najzaujímavejšiu metódu predstavil Horton (1945, 1952). Je to základ pre syntézu morfológie stromových štruktúr.

Korytnačia grafika bola modifikovaná a rozšírená o zásobník, kde príkaz [označuje začiatok a príkaz] koniec.

Zásobník zabezpečuje, že poloha sa vracia v opačnom poradí ako bola do zásobníka vložená (obnovia sa predchádzajúce vetvenia).

Stochastické L-systémy

Predchádzajúce L-systémy generujú detaily identické, pretože rastové gramatiky sú deterministické. Na nahradenie symbolu v stochastickom prípade je použitých viacero pravidiel. Každé takéto pravidlo má priradenú pravdepodobnostnú hodnotu. Súčet pravdepodobností je 1. Tieto vlastnosti L-systému sa nazývajú stochastické.

Parametrické L-systémy

Doteraz sme hovorili len o L-systémoch, ktoré boli limitované na vytváranie fraktálov. Súčasnú podobu parametrických L-systémov predstavili Prusinkiewicz a Hanan v roku 1990. Tieto L-systémy sú rozšírením príkazov o ďalšie symboly:

! – parameter určujúci hrúbku čiary. Napríklad !(3), kde 3 je hrúbka čiary. Ak vynecháme zátvorky, hrúbka čiary sa zníži o 1.

´ – parameter určujúci farbu čiary. Index farby sa tiež zapisuje do okrúhlych zátvoriek. Ak vynecháme zátvorky, index farby sa zvýši o 1.

Ďalšie symboly boli pre otočenie a pohyb. Parametre sa zapisujú do okrúhlych zátvoriek. V zápise sú dovolené aj reálne čísla, premenné alebo aj súčet, rozdiel, súčin, podiel, mocnina.

Kontextovo-senzitívne L-systémy

Vyššie uvedené L-systémy neboli závislé na kontexte. Nazývali sme ich oL-systémy. Ďalšie L-systémy môžu byť závislé na kontexte, kde sa symbol nachádza. Využiteľné pri simulácii interakcie medzi časťami rastliny.

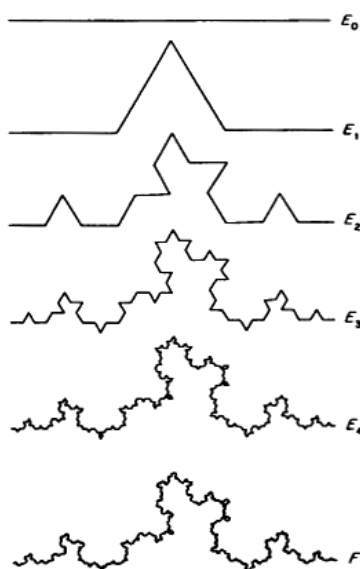
Vetvenie stromov a rastlín modelujú nielen L-systémy, ale aj **Systemy iterovaných funkcií (IFS)**, ktoré sme už spomenuli. Základnú knihu napísal Prusinkiewicz a špeciálne o virtuálnej vegetácii monografiu napísal Oliver Deussen.

8 Stochastické fraktály



Obrázok 8.1: Deterministická kombinácia dvoch farebných fotografií pôsobí náhodne, no v hornej časti pravidelné časti prezrádzajú fasády domov (v talianskom meste).

Úspešným spojením iterácií a strojovo generovanej náhodnosti vznikli algoritmy alebo čiastočne interaktívne postupy na tvorbu širokej škály grafických objektov od jednoduchej šumovej funkcie po procedurálne generované mestá a budovy daných štýlov.

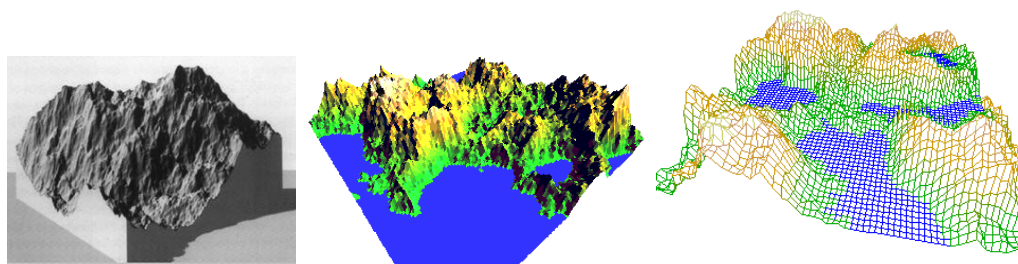


Obrázok 8.2: Pozmenená Kochova krivka z výsledkov Google Search „Koch Curve Random“.

Napríklad, Fournier, Fussel a Carpenter (1982) konštruujú fraktálne pohoria „randomným“ delením povrchu. Na 1D vysvetlenie možno nazerať ako na zovšeobecnenie Kochovej konštrukcie iným smerom – stochastickým. Vynechajme na úsečke prostrednú tretinu, ale bod nad ňou prenechajme generátoru náhodných súradníc. Pripojme ho dvomi hranami a na rovnom teréne máme prvý trojuholníkový hrbolček. To isté v priestore, kde nad stranami iniciálneho trojuholníka pridávame náhodné výšky, pridané výškové body dotriagulujeme.



Obrázok 8.3: Prvá iterácia budúceho virtuálneho terénu.



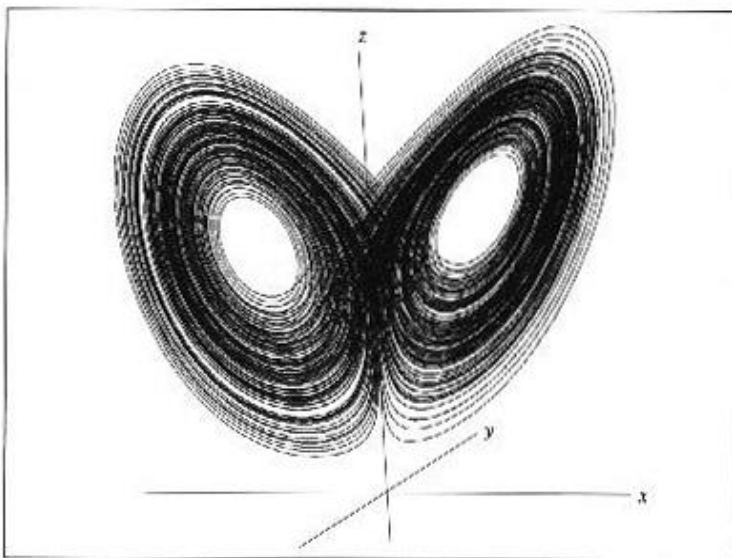
Obrázok 8.4: Virtuálne terény, príklady Paul Bourke. Ofarbenie podľa kartografickej palety.

Výšku pridáva súčin $P()$, funkcia, ktorá determinuje rozsah perturbácie podľa dĺžky a $R()$, náhodná premenná z intervalu $(1,0)$. V realite vrch nevyzerá ako invertované údolie a na prostrednom obrázku vidíme multifraktál, hladina horského jazera má inú fraktálnu dimenziu.

Na takéto generovanie možno nazerať aj ako na pohyb bodov alebo terénu v čase. Termodynamické pohyby molekúl objavil botanik R. Brown (1827), formalizovali ho Albert Einstein a Norbert Wiener. Na modelovanie prírodných objektov ho prvý raz použil B. Mandelbrot, ktorý skúmal, ako zistiť ich dimenziu. Tieto objekty nie sú samopodobné, ale štatisticky samopodobné.

9 Chaos & čudné atraktory

Teória chaosu skúma vlastnosti nelineárnych dynamických systémov a vychádza z objavu, ktorý vysvetľuje predtým nevysvetliteľné. Henri Poincaré (1854–1912) opísal deterministický chaotický systém. Niekedy je ťažké vypočítať vlastnosti, lebo nastáva priveľa náhlych nepredvídateľných zmien. Skúma sa správanie sa iterácií, čo vedie na riešenie diferenciálnych rovníc. Do populárnej komunikácie prenikol z tejto teórie obrazný pojem **Efekt motýľích krídel** (Butterfly effect). V prezentáciách Martina Samuelčíka možno nájsť príklady, ktorých vizualizácie pripomínajú hlavu sovy alebo iné prírodné javy, kde už pomerne jednoduchý predpis na zmenu stavu určuje chaotické správanie sa systému. Lorenzov atraktor na Obr. 9.1 pripomína usporiadanie pierok okolo očí sovy.



Obrázok 9.1. Na základe pozorovania prúdenia a teploty kvapalín odvodil Lorenz systém diferenciálnych rovníc, jeden z tzv. čudných atraktorov.

Ako sme už spomenuli, Heinz-Otto Peitgen a jeho kolegovia napísali takmer 900-stranovú učebnicu **Chaos and Fractals**. Výklad sa začína ľahkým úvodom do fraktálov, no postupne vyžaduje náročné pojmy a vedomosti z teórie chaosu. Princíp kauzality má dve verzie, slabú a silnú. Rovnaké príčiny majú rovnaké dôsledky. Podobné príčiny majú podobné dôsledky. V praxi však možno pozorovať, že silná verzia zákona príčinnosti neplatí. Podobné príčiny nemajú podobné účinky, mnohé procesy sa správajú chaoticky, počasie, kumulácia zaokrúhľovacích chýb v zložitejších výpočtoch... Práve predtým nevysvetliteľné správanie sa istých výpočtov motivovalo časť výskumu.

Teória dynamických systémov postupne objasňuje prvé kroky v porozumení, píše **Wolfgang Strasser** v jeho výklade fraktálnej geometrie. Dynamický systém pozostáva z fázového priestoru (množiny všetkých možných stavov) a pravidla, ako sa jeden stav mení na iný v čase, dynamika systému. Majme napr. spojitú funkciu $f(x)$ a postupnosť reálnych čísel $x, f(x), f(f(x)), \dots$, čiže stavy systému v čase $0, 1, 2, \dots$. Množina všetkých stavov sa nazýva diskretný dynamický systém a stavy sa môžu meniť periodicky ako pre funkciu $f(x) = -x$ (iba dva stavy pre nenulovú počiatočnú hodnotu x) alebo konvergovať k nejakému bodu alebo divergovať. Oblasti konverencie pre komplexné funkcie majú takisto ako fraktály vlastnosti samopodobnosti a škálovej invariance.

V prílohe je prezentácia s uvedením niektorých systémov diferenciálnych rovníc a ilustráciami ďalších.

10 Jazyky matematík

V prácach slovenských akademických tvorivých tímov metódy fraktálnej geometrie s úspechom aplikovali aj na analýzu i na syntézu.

V článkoch [BoGro9a], [BoGro9b] a [BoGr10] **Mária Bohdalová** a **Michal Greguš** v intenciách Mandelbrotových spracovali fraktálnu analýzu výmenných kurzov vybraných mien.

Katarína Mészárosová vydala monografiu **Fraktály v krajinnej štruktúre** [Mesz11], kde analyzuje pomocou fraktálnej dimenzie urbánne dáta, napr. mestské časti Bratislavy.

V oblasti syntézy sa najvýznamnejšou vedeckou prácou slovenčine stala simulácia rastu lesa a na Technickej univerzite vo Zvolene vyšla v roku 2011 monografia s rozsahom 599 strán **Marek Fabrika** a **Hans Pretsch** **Analýza a modelovanie lesných ekosystémov** a získala aj najvyššie ocenenie: výročnú Cenu Literárneho fondu za vedeckú literatúru. Táto kniha je ako kniha krásna.

Pri aplikáciách matematiky a informatiky v hospodárskej praxi môže nastať neprijateľná simplifikácia, ba až negovanie pôvodných myšlienok, na čo v relatívne nedávnej minulosti poukázali napr. Valent Zaľko [Zaľ00] a Ján Čižmár [Čiž10] v súvislosti s výkladom viacpohľadovej geometrie v knihách z aplikácií počítačového videnia. Aplikčný výskum však môže prispieť inšpiratívnym dielom, ktoré sa oddá si prečítať kvôli dotiahnutosti metód zo základných kurzov do praktického využitia. Takou základnou metódou je Prusinkiewiczovo procedurálne modelovanie virtuálnej vegetácie pomocou L-systémov a jej dotiahnutie do virtuálnej reality v prvej virtuálnej jaskyni na Slovensku, ktoré sa týka lesných ekosystémov. Pre počítačových grafikov a geometrov takéto dopresňujúce dielo vyšlo na Technickej univerzite vo Zvolene. Jeden z najcitovanejších článkov v oblasti virtuálnej vegetácie [Deu98], dostupný na sieti, uvádza všeobecnú architektúru systému na modelovanie vegetácie a klasickú bibliografiu v počte 66 položiek. Štandardne sa používa autorský nástroj ako xfrog [Xfr13] a systematický učebnicový výklad v angličtine možno nájsť v [Deu05], existuje aj druhé anglické a nemecké vydanie.

Prvý autor monografie **Analýza a modelovanie lesných ekosystémov** [Fab11] Marek Fabrika patrí ku špičke mladšej slovenskej vedy, vedie Centrum excelentnosti Adaptívne lesné ekosystémy, získal viaceré ocenenia i Humboldtovo štipendium. Prítomné monografické dielo je vedeckým vyvrcholením jeho autorského záujmu o lesnícku vedu, aplikovanú matematiku a na nej založené počítačové simulácie na analýzu a modelovanie lesa. Spoluautorom je európsky renomovaný nemecký profesor Hans Pretsch. Značná časť výsledkov sa opiera o významné inžinierske dielo SIBYLA, o ktorom sa dajú nájsť už aj kapitoly v zahraničných monografiách. Tento softverový systém doc. Fabrika a jeho tímu slúži na simuláciu lesa a jeho vizualizáciu pomocou virtuálnej reality. Autor 7 rokov po obhájení svojej Cenou Wernera von Siemens ocenej dizertácie vydal spolu so

spoluautorom v danej oblasti významné dielo v slovenčine, (v odhadovanom rozsahu spolu asi 100+ strán prispel spoluautor prof. Pretsch). Autori text po Predhovore a Úvode členia do desiatich častí, ktoré dopĺňajú Literatúra (559-594) a Register (595-599). V desiatich kapitolách nasleduje systematický výklad ekologických, kybernetických a biometrických základov modelovania, prehľad teórie modelovania, modely dynamiky a metódy empirického, štrukturálneho a procesného modelovania lesných ekosystémov, výklad metód vizualizácie a počítačom podporovaného modelovania lesa. Výklad ide do úrovne implementovateľných podrobností, čiže časti knihy môžu slúžiť aj učebnicovo pre niektoré príslušné predmety na viacerých technických univerzitách, nielen na lesníckej. Text bohato ilustrujú rádovo stovky obrázkov, tabuliek a schém, profesionálne typograficky parádne upravených.

Na tomto nanajvýš aktuálnom diele môže vyrásť generácia mladých vedcov v danej oblasti. Ide podľa mojej mienky o ojedinelý projekt fundamentálneho významu, hoci pre relatívne úzku skupinu odborníkov na Slovensku a s mimoriadny významom pre vzdelanie odborníkov na výchovu lesa, jedného z našich mála prírodných a obnoviteľných bohatstiev.

Keď sa zaoberáme riešením problémov reálneho sveta, zriedka sa vyhneme neurčitosti. Na empirickej úrovni sa každé meranie zaťažuje chybou prístrojov, na kognitívnej úrovni neurčitosť pochádza z vágnosti a nejednoznačnosti jazyka. Na psychologickú úroveň na neurčitosť vplývajú individuálnosť vnímania, vzdelanie... Napriek neurčitosti sa rozhodujeme a riešime problémy, aj pomocou počítačov. Vzniklo 5 teórií, ktoré neurčitosť merajú: klasická teória množín, teória fuzzy množín, teória pravdepodobnosti, možnosti a evidencie. Tri druhy neurčitosti sú vágnosť (fuzziness), nešpecifickosť (nonspecificity), rozpornosť (strife). Posledné dve možno označiť ako mnohoznačnosť (ambiguity). Neurčitosti sa môžu pri simulácii lesného ekosystému kombinovať. Na ich kontrolu v danej oblasti slúži jednak budovanie adekvátnej ontológie (dátového modelu i zjednocujúceho multidisciplinárneho jazyka, spoluautorom medzinárodnej normy je zhodou okolností práve prof. Pretsch) a miestami netriviálny matematický aparát na spracovanie nasnímaných i modelom vygenerovaných dát. V knihe sa postupne buduje systematika i hierarchická teória, ktorá umožní čo najpresnejšie aj informaticky a vizualizačne reprezentovať jednotlivé roly či moduly expertného systému a napokon vo virtuálnom svete simulátora SIBYLA zrýchľovať čas, keďže vedy o lese pracujú s procesmi, presahujúcimi dĺžkou ľudský život. Samotné stromy sa ako vetviace sa štruktúry modelujú Lindenmayerovými systémami na opis morfológie rozvetvených geometrických objektov, po ktorých sa šíria rôznorodé vnútrostromové signály.

V inak, z hľadiska čitateľa z blízkej vednej oblasti, kompletnej knihe však chýba vyobrazenie všetkých typov stromov podľa známej klasifikácie, autori uvádzajú ich „európsku“ podmnožinu. Kompletnú

klasifikáciu cituje v prvej slovenskej dizertácii o virtuálnej vegetácii **Katarína Smoleňová** [Smo10].

Autori po mnohoročnom rozsiahlom výskume preukázali výnimočnú schopnosť originálnej a systematizujúcej teoretickej i pedagogickej práce, ktorá priniesla dielo jednak múdre a jednak milníkové, ktoré ešte dlho bude prinášať aj ďalšie plody.

Nadhládovou publikáciou v slovenčine je dielo, ktorého témou je sila vlastností jazyka matematik. Zamyslime sa nad knihou **Ladislav Kvasz Jazyk a zmena**.

Noam Chomsky, „otec modernej linguistiky“, autor idey o univerzálnej gramatike, vrodenej schopnosti mozgu, ktorá umožňuje dieťaťu sa naučiť jazyk (inak by dieťa nemohlo reflexívne prijímať jazyk z akéhokoľvek komplexu dát, ktoré ho obklopujú) v knihe rozhovorov **Mocenské systémy** (slovenský preklad Pavla Dinku, 2013) v časti *Náuka o objavovaní*, na s. 117 upresňuje, že „jazyk je matematický systém. Napriek tomu, že jazyk zasahuje do iných odborov, kapacity, o ktoré sa delíme a ktoré uplatňujeme, sa zakladajú na matematických procesoch, ktoré formujú nekonečný súbor hierarchicky štrukturovaných vyjadrení“. Vrodená univerzálna gramatika za evolučne krátky čas, asi stotisíc rokov, zhmotňuje zdroj ľudského kreatívneho úsilia – jazyk. „Jazyk bol hybnou pákou pri rozvoji ďalších ľudských schopností... možno predpokladať, že naše aritmetické a zrejme aj morálne schopnosti sa vyvíjali porovnateľným spôsobom, odvíjajúc sa od analytického matematického mechanizmu, z ktorého vyrástol jazyk v celej svojej komplexnosti. A to v takej miere, že rozumieme ostatným záležitostiam (ak ich nie je až tak veľa), ktoré používajú ten istý alebo podobný matematický mechanizmus“ (s. 117-118). – V súčasnej výpočtovej matematike sa narába so štyrmi univerzami: fyzikálny svet sa matematicky modeluje, matematický model sa počítačovo reprezentuje a konkrétna implementácia redukuje reprezentujúce pojmy ako reálna aritmetika na ich konečné diskretizácie, dané príslušnými technickými normami. Najvyššiu presnosť, ak ju vieme merať, tak až nulovú chybu v týchto štyroch univerzách dosahujeme v matematikách. Ilustrujme to na príklade pojmu bod.

Bod je, čo nemá časti. Táto prvá gramatická veta Euklidových Základov ešte matematickú definíciu neposkytuje, no pragmaticky zavádza pojem, ktorého význam pomáha myslieť, idealizáciou pojmu sa jeho predstava spresní. Matematickú definíciu bodu súradnicami jeho polohy vzhľadom k začiatku priniesol až Descartes, súradnice bodu bez častí sú časťami nášho ešte presnejšieho porozumenia. Tretím typom bodu v našom myslení sa stal bod imaginárny. Bod v realite ako miesto zabodnutia kružidla do papiera, jeho upresnenie súradnicami a bod, označujúci prienik rovnobežiek, vedú ľudskú predstavu k označeniu miesta vo svete reálnom, upresneniu vo svete imaginárnom a rozlíšeniu bodov skonštruovateľných a neskonštruovateľných. Neskonštruovateľná môže byť iracionálna hodnota súradnice samotnej alebo celý imaginárny bod. Môžeme si presne, presne tak

ako iní matematici, myslieť body, na osi x bod 1, v rovine (π, π) alebo doplnenie euklidovskej priamky na model tzv. projektívnej priamky, či nekonečnorozmerný bod Sobolevovho priestoru – iba v matematickom modeli, najpresnejšom zo štyroch univerz.

V predchádzajúcich riadkoch sme sa pokúsili zachytiť vývoj významov pojmu bod, od objavu ideálneho sveta geometrie, starého asi 2600 rokov v mysli Pytagorovej cez Euklida a generácie iných spoluautorov pojmov, metód a otázok po dnešok, po bod, ako si ho individuálne myslíme tu a teraz. Kvalitatívnu zmenu obsahu pojmu možno nazvať hoci ruptúrou. S inou fenomenológiou, nie na úrovni obsahu pojmov, ale jazykov, či nárečí matematiky sa do analýzy jazykov matematík pustil Ladislav Kvasz. Jeho celoživotný výskumný program, ktorý v roku 2008 zmaterializoval do knihy **Patterns of Change** [Kva08], korunovali cenou Fernanda Gila za rok 2011 a prémiou 125 tisíc euro. Rozšírenú 60-stranovú verziu prednášky z Lisabonu vydali v slovenčine pod názvom **Jazyk a zmena, ako sme menili jazyk matematiky a ako jazyk matematiky zmenil nás.**

Ak jazyk obsahuje matematický systém a matematiky to, čo sa dá naučiť, aj vďaka vrodeným schopnostiam mozgu, tak sa pri úvahe nad Kvaszovým štúdiom ruptúr predovšetkým prepája vizuálne myslenie s logickým, podstatné mená na takomto premostení označujú objekty, slovesá naznačujú metódy, otázky indikujú šestoraké možné osúradnicovanie pre matematický model... Kvasz už od svojej prvej širšie dostupnej publikácie v slovenčine, Vývin jazyka v dejinách matematiky (kapitola 2 v učebnici *Kapitoly z epistemológie III* autorov Rybár a kol., UK Bratislava 1996), rozlišuje osem typov jazykov, ktoré vznikli v dejinách matematiky, prechody medzi nimi znamenali sedem vedeckých revolúcií, štyri z nich predstavujú konštrukciu nového ikonického jazyka, tri nový symbolický jazyk.

Chronologicky sa symbolické a ikonické striedali nepár-pár: elementárna aritmetika, syntetická geometria, algebra, analytická geometria, infinitezimálny počet, iteratívna geometria, predikátový počet a teória množín (vývoj, ilustrovný „cik=cak“ lomenou čiarkou znázorňuje tabuľka na s. 48). Na takto štruktúrovanom myšlienkovom kultúrnom dedičstve Ladislav Kvasz, inšpirovaný Fregeho staťou *Funktion und Begriff* (Gottingen 1989), po rozsiahlych historických analýzach, opisuje rozvoj potencialít jazyka matematík. Fregeho pasáž bola podnetom k zavedeniu *logickej sily jazyka* a výkladu dejin matematiky ako jej rastu. Celkovo autor v ocenennej knihe a texte prednášky skúma horeuvedenú sedmicu ruptúr (s. 14) cez:

1. *logickú silu jazyka*, ktorá ukazuje, ako zložité formuly je možné v jazyku dokázať;
2. *expresívnu silu jazyka*, ktorá ukazuje, čo nového, čo sa v predošlých štádiách vymykalo vyjadreniu, teraz jazyk umožňuje vyjadriť;
3. *metodickú silu jazyka*, ktorá ukazuje, aké nové metódy je možné v jazyku zaviesť tam, kde na predošlých štádiách existovala iba spleť nesúvisiacich trikov;

4. *integratívnu silu jazyka*, ktorá ukazuje, ako jazyk umožňuje vidieť jednotu a poriadok tam, kde na báze predošlého jazyka sa ukazovali len navzájom nesúvisiace prípady;
5. *explanatorickú silu jazyka*, ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vysvetliť zlyhania jazyka, ktoré boli na predošlom štádiu nepochopiteľné;
6. *konštitutívnu silu jazyka*, ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje prekročiť medze skutočnosti danej v rámci predošlého jazyka a konštituovať radikálne nový druh objektov.

Je dôležité si uvedomiť, že tieto aspekty sú úplne objektívne črty určitého jazyka (napríklad jazyka algebry). Nevzťahujú sa na psychológiu objavu či sociológiu vedeckého spoločenstva. Nezávisle od toho, ako bol jazyk objavený a na aké účely sa používa, to, „aké tvrdenia je v ňom možné dokázať“, „aké vzťahy je v ňom možné vyjadriť“, „aké problémy umožňuje vyriešiť“ či „aké súvislosti umožňuje odhaliť“, je objektívnou vlastnosťou samotného historicky existujúceho jazyka. Jazyk matematiky má svoje syntaktické a sémantické pravidlá, a tieto pravidlá jednoznačne určujú, aká je odpoveď na uvedené otázky... (vynechal A.F.) Uvedených šesť aspektov možno nazvať *potencialitami jazyka matematiky*, lebo predstavujú rôzne smery, v ktorých jazyk rozširuje naše kognitívne schopnosti. Kvôli úplnosti treba poznamenať, že dve z týchto potencialít, metodická a konštitutívna sila, nie sú diskutované v knihe *Patterns of Change*, a predstavujú tak ďalší krok v rozvoji príslušnej teórie“.

Inak povedané, v stručnej knihe v slovenčine Ladislav Kvasz rozširuje správu o bádani po dopísaní anglického diela. Chronotop skúmaného nehmotného kultúrneho dedičstva sa na s. 11 začína jedným z najstarších matematických textov, úlohou o objeme kruhovej sýpky v počte meríc, R42 z Rhindovho papyrusu (18. storočie p.n.l.) a končí sa podľa zoznamu literatúry (34 položiek) v roku 2011, českým prekladom Descartesovej Geometrie, spolu asi 38 storočí. Matematiky egyptské, babylonské, grécke a ďalšie postupne rozvíjali jazyk pomocou zmien, pôvodne vyvolaných potrebami praxe, neskôr aj hlbokým štúdiom základov vedy. Najnovšou z geometrií, v diele spomenutých, je geometria fraktálna, ktorej pôvod pripisuje na s. 50 Bolzanovi pod označením iteratívna.

Na Kvaszovu knihu možno vzťahovať význam slov z Barnsleyho knihy **Fractals Everywhere**: „Fraktálna geometria spôsobí, že uvidíte všetko inak. Je nebezpečné čítať ďalej. Riskujete stratu svojej detskej vízie oblakov, lesov, galaxií, listov, peria, kvetov, skál, vrchov, vodných tokov, kobercov, tehál a mnohého ďalšieho. Vaša interpretácia týchto vecí (javov) už nikdy nebude ako predtým.“

Kvaszov výklad zmien jazyka matematík je podmanivý, vysoko fundovaný a právom medzinárodne ocenený. Experimenty s výkladom tohto štruktúrovania pri vyučovaní počítačovej grafiky prijímali študujúci vysoko pozitívne. Na porovnanie rozdelenie dejín matematiky podľa A. N. Kolmogorova (pp. 758-765 in Škrášek a Tichý *Základy aplikované matematiky*. Praha: SNTL 1990).

1. Matematika konštantných veličín a geometrických útvarov
2. Matematika premenných veličín a geometrických transformácií
3. Matematika všeobecných kvantitatívnych vzťahov a priestorových foriem
4. Matematika v dobe po druhej svetovej vojne

Kolmogorovovo členenie v prvých troch položkách vyjadruje symbolické a ikonické rozdelenie jazyka matematík, no označenie štvrtej etapy by bolo vhodnejšie spojiť s výpočtovou technikou, bez ktorej by sa napr. nepodaril dôkaz vety o štyroch farbách. Kvaszovo kritérium členenia by sa dalo približne charakterizovať ako vnútorné a procedurálne, v jazyku, hľadajúce odpoveď na otázku AKO?, kým Kolmogorovovo (prvé tri) ako vonkajšie a deklaratívne, akentujúce objekty myslenia, odpovedajúce na otázku ČO?, resp. v štvrtej etape na otázku iného typu KEDY? Samozrejme, pri výklade historického kontextu pre daný predmet, možno odhadnúť, že porozumeniu študujúcich prospeje kombinácia oboch prístupov k výkladu dejín (jazyka) matematík. Možno diskutovať o vhodnosti Kvaszovho pojmu sila, ktorý poukazuje na fyziku a meranie veľkosti, ide skôr iba o vlastnosti jazyka matematík. Hodilo by sa definovať napr. stav vecí, uviesť viac, keď sa na s. 48 k celoknihovej osmici znenazdajky pridá deviata teória algoritmov, dala by sa zväziť sociolingvistická alternatíva výskumu. Nemožno však diskutovať o úspechu výskumného projektu prof. Kvasza, docenta filozofie a profesora matematiky. Jeho dielo nedosahuje predpísaný rozsah monografie, no možno aj preto sa ho oplatí čítať viackrát.

Záujemcom o hlbšie poznanie Kvaszovho výskumu alebo fraktálnej geometrie ostávajú dve alternatívy. Ostať pri slovenčine a čítať na sieti dostupné texty, vybrané diplomovky, napr. **Peter Borovský** [Boro0], **Elena Šikudová** [Šiko4], **M. Štefček** [Šte06], **D. Végh** [Veg02] a články, uverejnené v G, časopise pre geometriu a grafiku, kde sa sporadicky objavujú aj texty v slovenčine, alebo sa, aj kvôli svojmu vlastnému poznávaniu naučiť primerane po anglicky.

Záver

Vyučujúci matematiky na základnej alebo strednej škole bez znalostí angličtiny by mali s pomocou tohto kurzu kontinuálneho vzdelávania získať možnosť rozhodnúť sa pre zapojenie vybraných tém zo slovenského prekladu **Prezentácie fraktálnej geometrie Cynthie Lanius** alebo ďalších do svojho osobnostného rastu, resp. portfólia alebo do praxe, napr. v matematických krúžkoch.

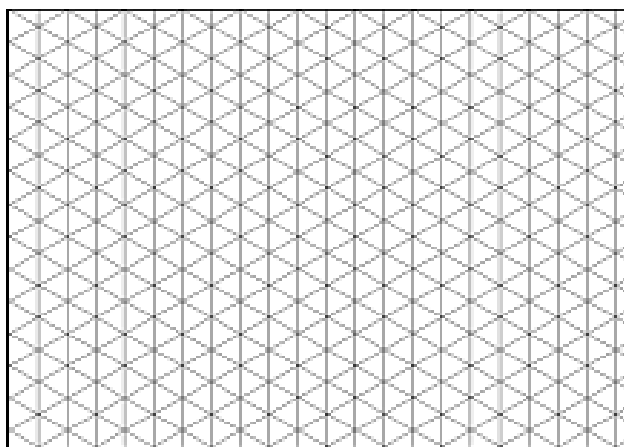
Pani profesorka Cynthia Lanius dostala viacero ocenení v oblasti publikovania a používania matematiky na webe. Z jej matematického portálu *Mathematics Lessons* sme sa najmä v prvých častiach výkladu zaoberali len jednou časťou – fraktálmi [Lan15], ktorá pri hľadaní cez Google Search vychádza najvyššie. Pôvodný analogický projekt, ktorý vo svojej autobiografii vyzdvihuje Mandelbrot, nemá v ponuke v roku 2015 porovnateľnú podporu, a preto sme autorku požiadali o súhlas s poslovenčením pre Moodle e-learning **EmatikPlus**, rešpektujúc jej dizajn i didaktiku.

Tento portál sa zameriava na žiakov základných a stredných škôl. Vybrali sme si ho preto, že našou cieľovou skupinou sú hlavne učitelia takýchto škôl, ktorých môže inšpirovať pri vyučovaní žiakov o základoch fraktálnej geometrie, napríklad v matematických krúžkoch.

Fraktály na stránke sa členia do troch kapitol. Autorka najskôr motivuje, prečo sa vôbec zaoberať touto časťou matematiky.

V druhej kapitole Cynthia Lanius opisuje tvorbu fraktálov zábavným štýlom, najskôr vysvetľuje ako sa vytvára, potom na príklade si to môžu žiaci vyskúšať. Keďže deti sú hravé, je to veľmi motivujúce sa takýchto hodín/krúžkov zúčastňovať (škola hrou).

Jeden z jej príkladov: Poďme si z papiera vytvoriť fraktál, každý si vystrihne trojuholník a urobí zopár iterácií, teda vystrihne vnútri menší trojuholník, podľa daných pravidiel. Nakoniec môže celá trieda žiakov pospája vytvorené trojuholníky avidia, ako to na vytlačenej teselácii funguje.



Keďže pre danú vekovú skupinu študujúcich sú kognitívne dostupné len základy geometrie fraktálov, venuje sa len didakticky najvhodnejším grafickým objektom, napríklad Sierpinského trojuholník, Kochova vložka a pod. V tretej kapitole pani autorka vysvetľuje vlastnosti fraktálov, takisto najmä voľbou čo najzábavnejších príkladov.

Inak povedané, spája Komenského školu hrou s Mandelbrotovým objavom fraktálnej geometrie, čo v podtexte vedie na motiváciu programovať. Jej prístup na najvyššej hierarchickej úrovni signalizujú už názvy podkapitoliek.

- 1. Prečo študovať fraktály**
- 2. Fraktál rastie zložitejšie**
- 3. Jurský park, fraktál**
- 4. Konečná plocha**
- 5. Zlomková dimenzia**
- 6. Nekonečný obvod**
- 7. Naozaj prvý krok!**
- 8. Iteratívna tvorba verzie pre tlač**
- 9. Matematické otázky nad Sierpinského trojuholníkom**
- 10. Samopodobnosť**
- 11. Sierpinski a Pascal sa stretli!**
- 12. Sierpinski a Pascal sa stretli ešte raz!!!**
- 13. Anti -Kochova snehová vložka**
- 14. Sierpinského trojuholník ešte raz**

Didaktický prístup v diele prof. Lanius možno nájsť v angličtine v originále [Lan15], t.j. LANIUS, C. 2009. *Fractals*. [Online] <http://math.rice.edu/~lanius/frac/>. Slovenský preklad so zachovaním pôvodného dizajnu vytvorila pre výučbu v každom ďalšom semestri na portáli E-MatikPlus ŠPRLÁKOVÁ, V. <http://elearn.ematik.fmph.uniba.sk/course/view.php?id=285>. Toto dielo sa šíri voľne.

Ďakujeme obom oponentom dr. Mészárošovej aj prof. Gregušovi za cenné vylepšenia výkladu i grantovej agentúre KEGA za podporu projektu EmatikPlus.

Dúfame, že pomocou vhodnej kombinácie myšlienok pre deti a svojho autorského výkladu sa podarí vyučujúcim na školách ponúknuť viac očarenia matematikou aj ďalšej generácii.

Literatúra

- [Bar00] BARNSLEY, M. 1988. *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press.
- [BoGro9a] BOHDALOVÁ, M. – GREGUŠ, M. 2009. [Financial time series and chaos](#). Forum Statisticum Slovacum, Roč. 5, č. 3 (2009), pp. 1-9.
- [BoGro9b] BOHDALOVÁ, M. – GREGUŠ, M. 2009. *Fraktálna analýza výmenných kurzov vybraných mien*. MSED 2009. Sborník príspevků, Praha: VŠE, 2009 nestr. [pp. 1-6]
- [BoGr10] BOHDALOVÁ, M. – GREGUŠ, M. 2010. [Markets, information and their fractal analysis](#). E-Leader, New York: CASA, 2010 nestr. [pp. 1-8]
- [Bor00] BOROVSÝ, P. 2000. *Procedural Textures*. Diploma thesis. Bratislava: FMFI UK.
- [Čiž10] ČIŽMÁR, J. 2010. Aplikácie matematiky a insitná tvorba v matematike. pp. 27-32 in *Proceedings of Seminars on Computational Geometry, Vol. 19*. Bratislava : STU, 2010.
- [Deu98] DEUSSEN, O. et al. 1998. Realistic modeling and rendering of plant ecosystems. *Proceedings of SIGGRAPH 98*. In *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 1998, ACM SIGGRAPH, pp. 275–286.
- [online] <http://algorithmicbotany.org/papers/ecosys.sig98.pdf>.
- [Deu05] DEUSSEN, O. – LINTERMANN, B. 2005. *Digital Design of Nature: Computer Generated Plants and Organics*. Springer, 2005.
- [Fab11] FABRIKA, M. – PRETSCH, H. 2011. *Analýza a modelovanie lesných ekosystémov*. Zvolen: TU Zvolen 2011.
- [Fer12] FERKO, A. et al. 2012. *Virtuálny svet 2012*. Bratislava: FMFI UK 2012.
- [online] <http://www.sccg.sk/~ferko/VirtualnySvet2012-finalPCRevue.pdf>.
- [Gro91] GROLLER, E. 1991. *Fraktale*. Wien: TU Vienna.
- [Hot15] HOTÁŘ, V. 2015. *Úvod a historie*. [Online] <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/uvod.html>.
- [Kva08] KVASZ, L. 2008. *Patterns of Change*. Birkhauser Verlag 2008.
- [Kva12] KVASZ, L. 2012. *Jazyk a zmena*. Filozofia 2012.
- [Lan15] LANIUS, C. 2009. *Fractals*. [Online] <http://math.rice.edu/~lanius/frac/> Slovenský preklad ŠPRLÁKOVÁ, V. <http://elearn.ematik.fmph.uniba.sk/course/view.php?id=285>.
- [Man83] MANDELBROT, B. 1983. *The Fractal Geometry of Nature*. ISBN 0-7167-1186-9.
- [Man04] MANDELBROT, B. 2004. *Fractals and Chaos*. ISBN 978-0-387-20158-0. Berlín: Springer 2004.
- [Mar04] MARTINEZ, L. 2004. *GASTON MAURICE JULIA*.
- [Online] <http://www.fractalartist.com/art/people/julia.html>. [Dátum: 30. 10 2015.]
- [Mat10] MATSIN, L. 2010. *20TH CENTURY MATHEMATICS – HILBERT*.
- [Online] http://www.storyofmathematics.com/20th_hilbert.html.
- [Mesz11] MESZÁROSOVÁ, K. 2011. *Fraktály v krajinej štruktúre*. ISBN 978-80-227-3451-6. Bratislava: Nakladateľstvo STU 2011.
- [Pet15] PETYOVSKÝ, P. – TIŠNOVSKÝ, P. 2003. *Fraktál, dimenze, soběpodobnost, systémy iterovaných funkcí IFS*. [Online] http://www.elektrorevue.cz/clanky/03019/kap_1.htm.
- [Pia99] PIAČEK, J. 1999. Cantor, G. [Online] http://dai.fmph.uniba.sk/~filit/fvc/cantor_g.html.

- [Pia99] PIAČEK, J. 1999. Hilbert, D. [Online] http://dai.fmph.uniba.sk/~filit/fvh/hilbert_d.html.
- [Pia99] PIAČEK, J. 1999. Peano, G. [Online] http://dai.fmph.uniba.sk/~filit/fvp/peano_g.html.
- [Rin11] RINTELOVÁ, J. et al. 2011. *FRAKTÁLNA GEOMETRIA*.
[Online] http://www.1sg.sk/www/data/01/projekty/2011_2012/pilots/chaos/fraktaly.html
- [Ros10] ROSTÁS, K. 2010. METRICKÉ PRIESTORY.
[Online] <http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~rostas/vyuka/2i/MP.pdf>.
- [Ru95] RUŽICKÝ, E. – FERKO, A. 1995. *Počítačová grafika a spracovanie obrazu*. 1995. ISBN 80-967180-2-9. Bratislava: SAPIENTIA 1995.
[Online] <http://www.sccg.sk/~ferko/PGASO2012-bookmarks.pdf>.
- [Sam15] SAMUELČÍK, M. 2015. Fractals. [Online] <http://www.sccg.sk/~samuelcik/fractal>.
- [Sm004] SMOLENOVÁ, K. 2010. *Virtual Vegetation*. PhD. thesis. Bratislava: Faculty of Mathematics and Physics, Comenius University.
- [Str96] STRASSER, W. 1996. *Fraktale Geometrie*. Hagen: Fernuniversität-Gesamthochschule.
- [Šiko4] ŠIKUDOVÁ, E. 1994. *Ku súvisu fraktálov a hudby*. Diploma thesis. Bratislava: Faculty of Mathematics and Physics, Comenius University.
- [Šteo6] ŠTEFČEK, M. 2006. *Vysokoúrovňové programovanie súčasných GPU*. Diploma thesis. Bratislava: Faculty of Mathematics and Physics, Comenius University.
- [Štu02] ŠTUGEL, J. 2002. *Výučba počítačovej grafiky na internete*. Rigorózna práca. Bratislava: Faculty of Mathematics and Physics, Comenius University.
- [Šuj15] ŠUJANSKÝ, M – SOBOTA, B. 2015. *Reálne fraktály*.
[Online] <http://pg.kpi.fe.i.tuke.sk/?q=node/26>
- [Tiš00] Tišnovský, P. *Fraktály*. 2000. [Online] <http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/clanky/1.htm>
- [Veg02] VÉGH, D. *Fraktály*. Diploma thesis. Bratislava: Faculty of Mathematics and Physics, Comenius University. [Online] <http://doc.inver.sk/dip/FRAKTAL.HTM#uvod>.
- [Wko15] Wikipédia: *Helge von Koch*. [Online] https://sk.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch.
- [Wsi15] Wikipédia: *Wacław Sierpiński*. [Online] https://sk.wikipedia.org/wiki/Wac%C5%82aw_Sierpi%C5%84ski.
- [Wju15] Wikipédia: *Gaston Julia*. [Online] https://en.wikipedia.org/wiki/Gaston_Julia.
- [Wma15] Wikipédia: *Mandelbrotova množina*. [Online] https://sk.wikipedia.org/wiki/Mandelbrotova_mno%C5%BEina.
- [Xfr13] *XFROG portal*. A procedural organic 3D modeler by Xfrog Inc. [online] <http://xfrog.com/>.
- [Zelo6] ZELINKA, I, – VČELÁŘ, F – ČANDÍK, M. 2006. *Fraktální geometrie, principy a aplikace*. ISBN 80-7300-191-8. Praha: BEN-technická literatura, 2006.
- [Zař00] ZAŘKO, V. 2000. Some new books on CAGD from viewpoint of the geometers or to quote or not to quote ? pp. 215-220 in *Proceedings of Seminars on Computational Geometry, Vol. 9*. Bratislava : STU, 2000.

[Dátum platnosti pre Internetové odkazy: 01. 11 2015, ak nie je uvedené inak.]

Prekladový slovník ku geometrii fraktálov (EN-SK)

area	plocha
Cantor dust	Cantorov prach
circle	kruh
coastline	čiara pobrežia
complicated geometric	zložitý geometrický útvar
contain	obsahovať
corner	roh
cube	kocka
depth	hĺbka
dimension	dimenzia, rozmer
direction	smer
doubling	zdvojnásobenie
enclose	uzatvárať
equilateral	rovnostranný
fern	papraď
figure	útvar
figure out	prísť na
finite	konečný
flip	prevrátiť
formula	vzorec
fractal	fraktál
fractal geometry	fraktálna geometria
grab	chytiť
gridpaper	mriežkovaný papier
height	výška
hexagon	šesťuholník
in the center	v strede
infinite	nekonečný
investigate	vyšetriť
iteration	iterácia
length	dĺžka
line	priamka
line segment	úsečka
measurement	meranie
measure	merať
midpoint	stredný bod
odd	nepárne
outline	obrys
paper-fold	zloženie (skladanie)papiera
Pascal's triangle	Pascalov trojuholník
path	dráha, cesta
pattern	vzor
perimeter	obvod
plane	rovina
point	bod

power	mocnina
proportion	pomer
rectangle	obdĺžnik
rotate	otočiť
rule	pravidlo
self-similarity	samo-podobnosť
shape	tvar
Sierpinski triangle	Sierpinského trojuholník
snowflake	vločka
square	štvorec
trapezoid	lichobežník
triangle	trojuholník
tripling	strojnásobenie
turn	zákruta
unit	jednotka
way	spôsob
width	šírka
zoom	priblížiť

Prezentácie

Fraktály

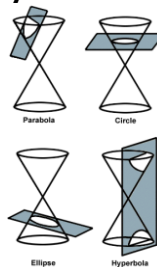
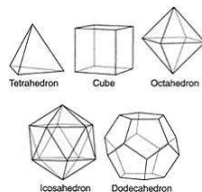
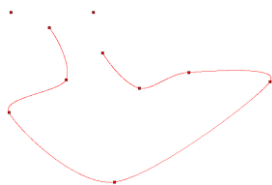
Časť 1 : Úvod & História



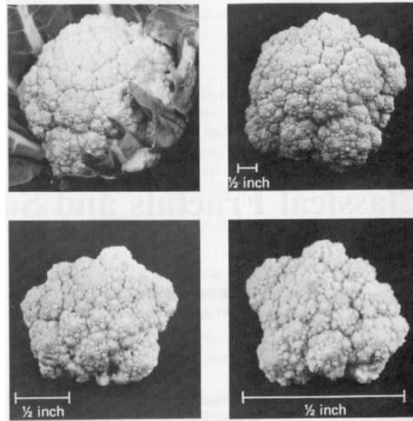
Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Andrej Ferko, 2015
I4, Department of Applied Informatics, FMFI UK

Klasická geometria

- Pravidelné objekty
- Úsečka, kruh, štvorec, hladké krivky
- Kuželosečky, hladké plochy
- Ťažko nimi opísať prírodniny
- Jednoduché na škálovanie



Príroda

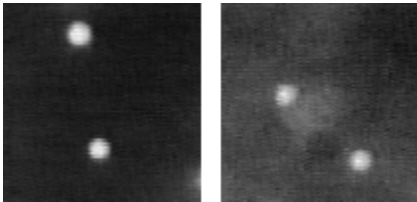


“Prírodná” geometria

- Nepravidelné, fragmentované objekty, tvary
- Vovnútri chaos
- Vzhľad pekný, l'úbezný, utešený
- Ťažko opísateľné
- Pobrežia, stromy, oblaky...
- Proces vytvárania – opakované “operácie”

Brownov pohyb

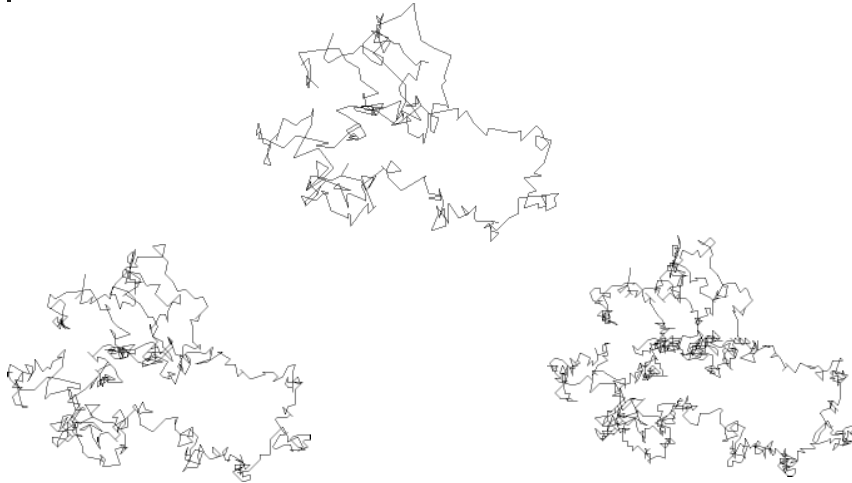
- Robert Brown – škótsky botanik
- Náhodný pohyb malej čiastočky (zrnka peľu) na kvapaline alebo v plyne



Brownov pohyb 2

- Jean Perrin
- Pokus zmerať rýchlosť, ktorá je deriváciou pohybu polohy častice
- „ *sa pohybuje čo najdivokejším spôsobom vo veľkosti a smere, a nemá tendenciu sa ohraničiť*“
- *"príroda obsahuje aj nediferencovateľné aj diferencovateľné procesy"*

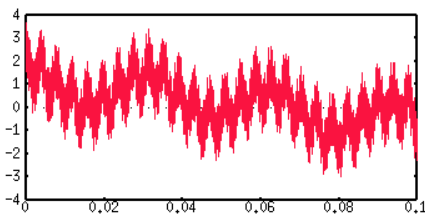
Brownov pohyb 3



Matematické obludy

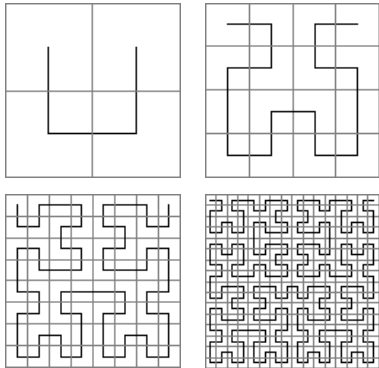
- Nediferencovateľné funkcie
- Začiatok 20. storočia
- Žalostné zlo, patologické monštrum
- Karl Weierstrass

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$



Matematické obludy 2

- David Hilbert
- Krivka vyplňna plochu



Dĺžka pobrežia

- Aká je dĺžka pobrežia?
- L.F. Richardson – Korzika
- B. Mandelbrot – V. Británia
- Spain-Portugal: 987-1214 km
- Holandsko-Belgicko: 380-449 km
- 1cm:100km – 1cm:1km





Richardsonova metóda

- Dané pravítko s konštantnou dĺžkou
- Meranie dĺžky pomocou pravítka
- Použitím menšieho pravítka dostaneme podrobnejšie meranie
- Dĺžka narastá (so skracovaním kroku)
- Nekonečná dĺžka?
- Nemožno merať presne

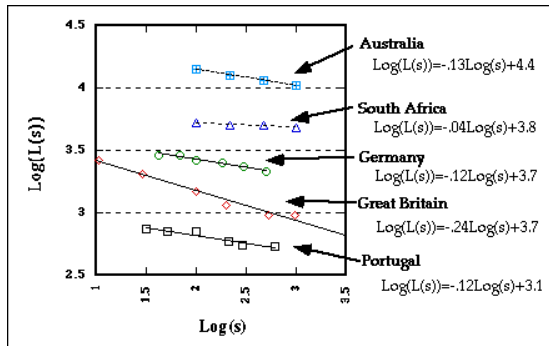


Richardsonova dĺžka

- Merajú dĺžku pobrežia Korziky
- $L(s) \approx Hs^{1-D}$, $N(s)s^D = H$
- $L(s)$ – dĺžka pobrežia meraná pravítkom dĺžky s
- H – konštanta
- s – dĺžka pravítka
- D – konštanta (Richardsonova)
- $N(s)$ – počet kúskov

Richardsonova dĺžka 2

- Graf log/log
- Mandelbrot: $\log[L(s)] = (1-D)\log(s) + b$



Dĺžka krivky

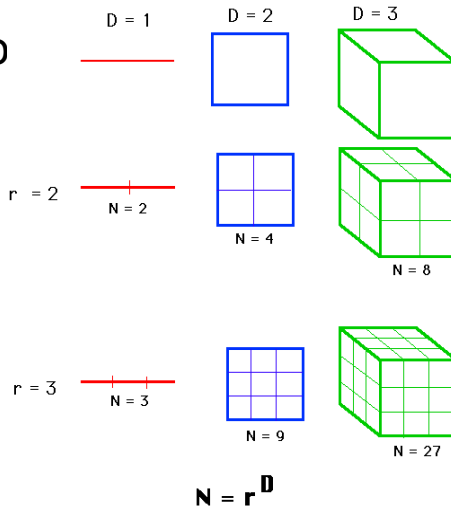
- Krivka aproximovaná otvoreným polygónom
- Limitne do nekonečna
- Dĺžka danej spojitej krivky:

$$L(f) = \int \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

- Čo ak funkcia nemá deriváciu?
- Čo ak to nie je presná funkcia?

Topologická dimenzia

- Celé kladné číslo
- F. Hausdorff
- L. E. J. Brouwer



Fraktálna dimenzia

- Založená na Hausdorff-Besicovitchovej (H-B) dimenzii v metrickom priestore
- s – škálovací faktor
- $N(s)$ – počet pokrývajúcich množín so škálovacím faktorom s

$$N(s) \approx s^{-D} \quad \text{for} \quad s \rightarrow 0^+$$

$$D = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\log N(s)}{\log s}$$



Fraktálna dimenzia 2

- Neceločíselná H-B dimenzia = fraktálna dimenzia
- Niekedy ťažko vypočítať analyticky
- Štatistické metódy
- Clipper method, box counting method, mass-radius method



Dimenzia samopodobnosti

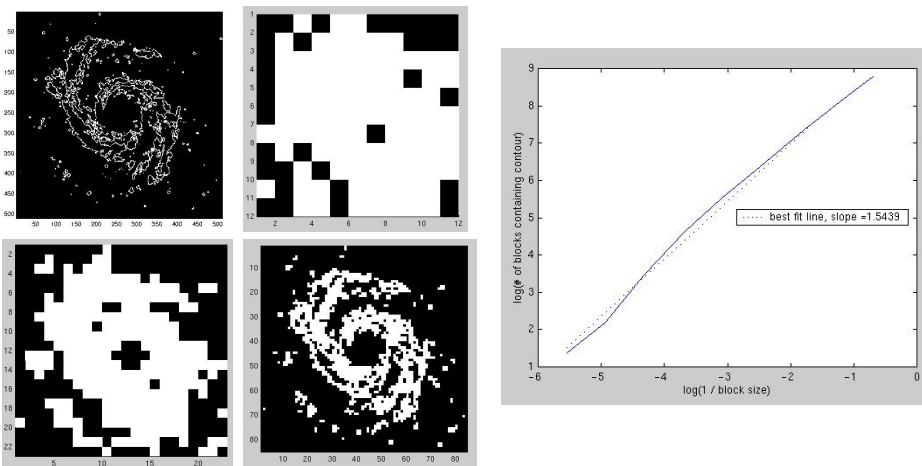
- Vhodná pre samopodobné fraktály
- Ľahko sa počíta
- Analytické vyjadrenie
- Vzorec

$$D = \frac{\log L(s)}{\log(1/s)}$$

Box counting method

- Rozdeliť meranú oblasť do mriežky
- Počet obsahujúcich obdĺžnikov (box)
- Viacero meraní s rôznymi veľkosťami obdĺžnikov, obsahujúcich množinu
- Vytvoriť graf $\log N(s)/\log(1/s)$
- Sklon (smernica) aproximujúcej priamky je fraktálna dimenzia

Box counting method 2





Fraktál - definícia



- Benoit Mandelbrot
- Fraktálna dimenzia $>$ topologická dimenzia
- Iné definície
- Založené na vlastnostiach fraktálov
- Fractus = zlomiť, nepravidelne





Fraktály - vlastnosti

- Samopodobnosť, Self-affinity
- Deterministické
- Nedeterministické
- Rozširujú Euklidovu geometriu, iterácie
- Nekonečno
- Nezávislosť na mierke
- Modelovanie, aproximácia prírodných objektov



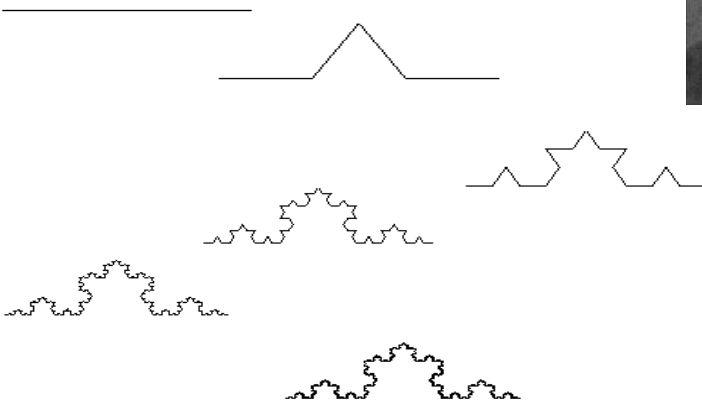
Kochova krivka

- Niels Fabian Helge von Koch
- Iniciátor: úsečka E 
- Generátor: 4 úsečky 
- Algoritmus: v E_{i-1} nahradit' každú úsečku generátormi zostrojí E_i
- Kochova krivka:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$



Kochova krivka 2





Kochova krivka 3

- Dĺžka K:

$$L(E_0) = l$$

$$L(E_1) = \frac{4}{3} l$$

$$L(E_i) = \frac{4}{3} L(E_{i-1})$$

$$L(E_i) = \left(\frac{4}{3}\right)^i l$$

$$L(K) = \infty$$



Kochova krivka 4

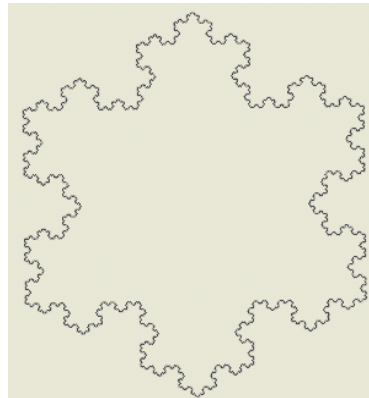
- Dimenzia samopodobnosti – ľahký výpočet
- V každom (i-tom) kroku $s = 1/3^i$, $N(s)=4^i$
- $D = \log N(s)/\log(1/s) = \log 4/\log 3$
- $D = 1,261859\dots$
- Štatisticky sa blíži k tejto hodnote
- Viac ako krivka, menej než rovina
- Dimenzionálne: Kochova krivka K = pobrežie Korziky, či pobrežie Veľkej Británie

Kochova snehová vločka

- Plocha vnútra vločky:

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2$$

- Nekonečná hranica
- Nulová plocha krivky
- Konečná časť roviny



Zovšeobecnená Kochova krivka

- Možno generovať krivky rôznych dimenzií
- Nový parameter α
- Pre $\alpha = 60^\circ$ štandardná Kochova krivka
- Dimenzia:

$$D = \frac{\log 4}{\log(2 + 2 * \cos \alpha)}$$

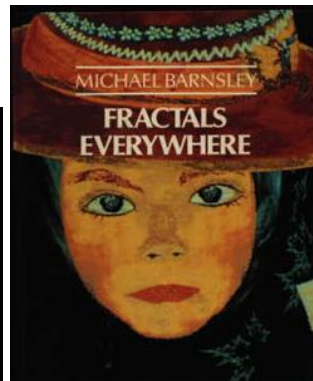
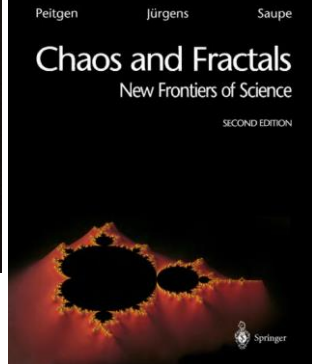
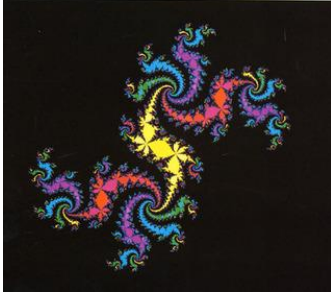
Literatúra

Fraktální geometrie principy a aplikace



Ivan Zolinka, František Vojtek, Marek Čech

THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE
Benoit B. Mandelbrot



Videa

- **Hunting the Hidden Dimension**
 - <http://www.youtube.com/watch?v=ZbK92bRW2IQ>
- **Clouds Are Not Spheres**
 - <http://www.youtube.com/watch?v=Y9CFZbgJ94I>
- **Fractals - The Colors Of Infinity**
 - <http://www.youtube.com/watch?v=Lk6QU94xAb8>



Koniec Časti 1

Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015



Fraktály

Časť 2 : História & Klasické fraktály



*Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Veronika Šprláková, 2015
Department of Applied Informatics*



Samo-podobnosť

- Podobné transformácie
- Desatinné čísla
- Geometrické rady
- Transformácia z časti objektu do celého objektu
- Štatistická samo-podobnosť
- Rozšírené afinné transformácie



Klasické fraktály

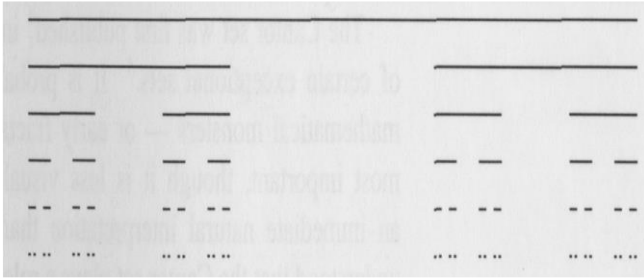
- Deterministické
- Samo-podobné
- Viac ako 100 rokov staré
- Dobré pre modelovanie
- Najhoršie aproximovanie prírodných objektov
- Obludy (mathematic monsters)



Cantorova množina (CM)

- Georg Cantor, teória množín
- Iniciátor _____
- Generátor _____
- Základ pre modely iných fraktálov
- Chaotické dynamické systémy

Cantorova množina 2



Triadická konverzia CM

- Triadické čísla
- $X \in [0,1]$
- $X = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + \dots$
- $a_i = 0, 1, 2$
- Triadické rozšírenia neobsahujú '1'
- Riešenia systému

Vlastnosti CM

- Koncové body intervalu sú častou CM
- Kardinalita je rovná k. intervalu $[0,1]$:
- Nespočítateľná
- Dĺžka 0
- $D = \log(2)/\log(3)$
- $D = 0,6309$

Sierpinského trojuholník

- Wacław Sierpiński
- Mesačný kráter nesie jeho meno
- Definícia z bodov, oblastí



Sierpinského trojuholník 2

- $D = \log(3)/\log(2)$
 - Dĺžka hranice = nekonečno
 - Oblasť (celkovo je 0)
-
- Riešenie systému (L,R,T)

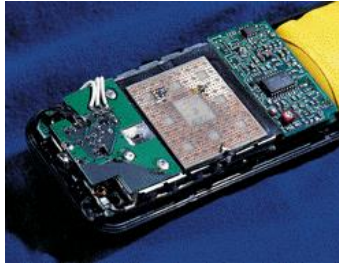
Sierpinského trojuholník 3

- Inštalácia Paul Bourke, galéria fraktálov



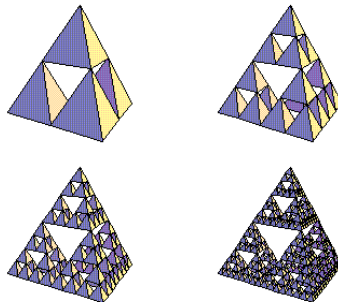
Sierpinského koberec

- Prerozdelenie štvorca
- $D = \log(8)/\log(3)$
- $\text{Oblasť} = 0$



„Sierpinski“ v 3D

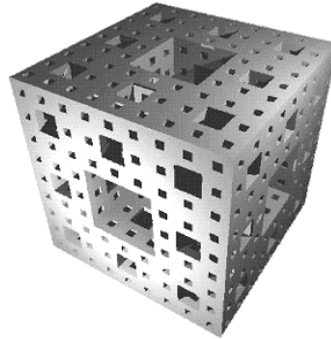
- Založené na štvorstene, ihlane
- $D=2, D = \log(5)/\log(2)$
- $\text{Objem} = 0$



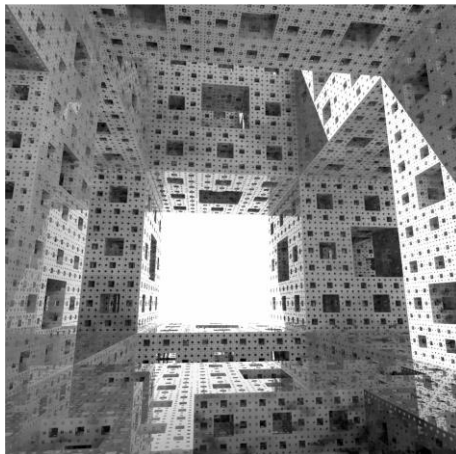
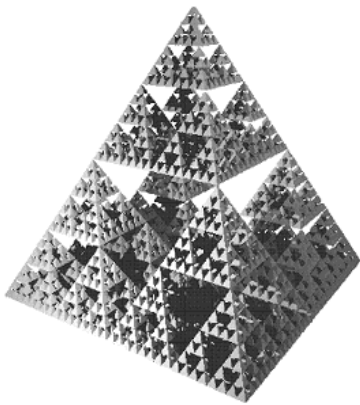


„Sierpinski“ v 3D

- Mengerova špongia
- $D = \log(20)/\log(3) = 2.7268$



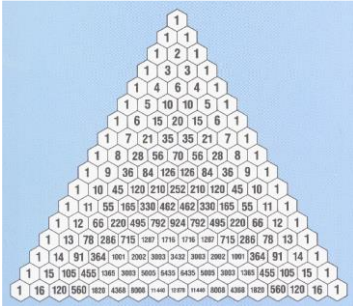
„Sierpinski“ v 3D



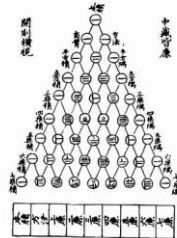


Pascalov trojuholník

- 1303 Čína, 1527 Európa
- Blaise Pascal (17. storočie)
- Binomické koeficienty

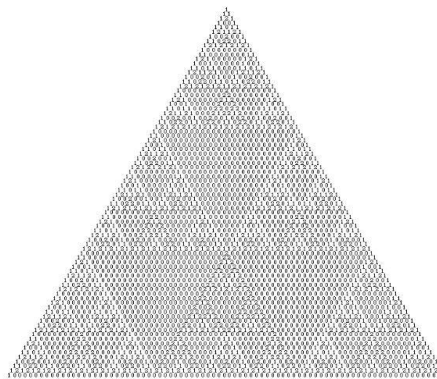
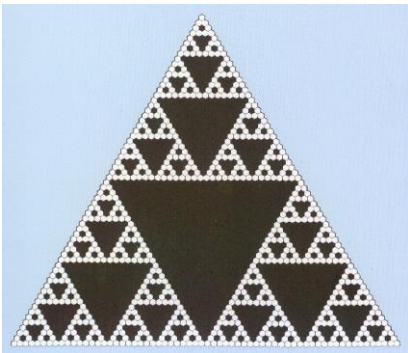


圖方算七法古



Pascalov trojuholník ako fraktál

- Farbenie s modulom 2
- Iné moduly



Priestor, vyplňaný krivkami

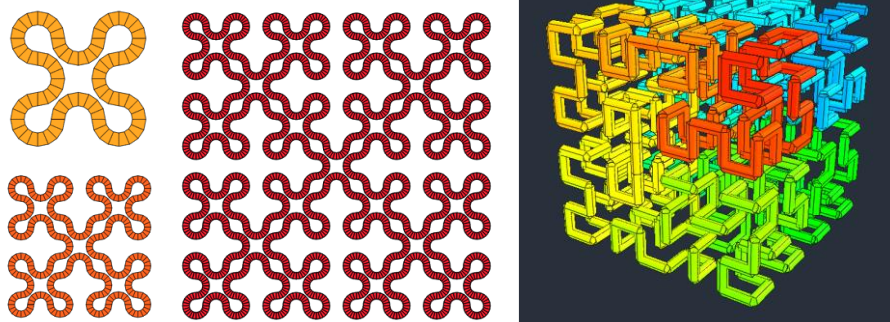
- Peano, Hilbert
- Zig-zag
- Zovšeobecnený Koch
- "Zvláštne" "krivky"
- Topologická dimenzia: 1
- Fraktálna: 2

Peanova krivka

- Giuseppe Peano
- Podobná Kochovej
- $D = \log(9)/\log(3) = 2$
- Dĺžka = 3^k

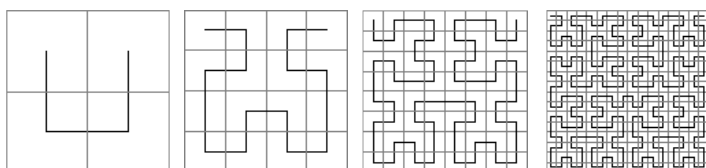


Viac Peanových kriviek



Hilbertova krivka

- Nejednoduchý generátor





Rozklad Hilbertovou krivkou

- Zo šedotónov do čierno-biela
- Každý pixel obsahuje Hilbertovu krivku
- Počítanie chýb
- Chyba v ďalšom pixeli

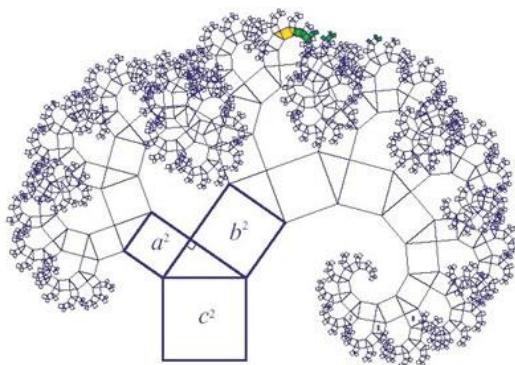


Zovšeobecnená Kochova krivka

- Pre $\alpha = 90^\circ$
- Seba pretínajúca
- $D = \log(4)/\log(2) = 2$
- Vypĺňanie trojuholníka

Pytagorické stromy

- Založené na Pytagorovej vete
- Môžu byť zovšeobecnené



Koniec

Koniec Časti 2

Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015




Fraktály

Časť 3 : Matematické základy



Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Veronika Šprláková, 2015
Department of Applied Informatics



Priestor

- Priestor = množina
- Je vzťah medzi prvkami tejto množiny?
- Topológia = ako
- Geometria = kde
- Vzťah = funkcia dvoch argumentov = metrika



Metrický priestor

- X – množina (priestor)
- $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$
- $d(x,y) = d(y,x)$ (symetria)
- $d(x,y) \geq 0$
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$
(trojuholníková nerovnosť)



Metrické priestory

- (X,d) – metrický priestor
- Otvorená guľa:
$$B(x, r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$
- Kružnica:
$$C(x, r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$$
- r = polomer



Metrické priestory – príklady

- Triviálny: $d(x,y)=0$, ak $x=y$ inak 1
- (\mathbb{R},d) ; $d(x,y) = |x-y|$
- Euklidovský priestor (\mathbb{R}_n,d)
- Manhattanský (\mathbb{R}_2,d_1)
- Rozšírený (\mathbb{R}_n,d_p)
- Sférický priestor



Rozšírené priestory

- Topologický priestor
- Vektorový priestor – vektorový súčet, skalárny súčin
- Hilbertov priestor – vektorový priestor so skalárnym súčinom
- Banachov priestor – vektorový priestor s normou
- Hausdorffov priestor



Limity

- Konvergentná postupnosť x_n má limitu s
- Pre $\varepsilon > 0$ existuje $N > 0$ také, že $d(x_n, x) < \varepsilon$, pre každé $n > N$
- Zápis:
- Cauchyho postupnosť: Pre $\varepsilon > 0$ existuje $N > 0$ také, že $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, pre každé $n, m > N$
- Cauchy \Rightarrow zistíme konvergenciu bez limity



Úplnosť & kompaktnosť

- Úplný priestor: ak každá Cauchyovská postupnosť má limitu v priestore X
- Kompaktná množina: z ľubovoľnej postupnosti S sa dá vybrať podpostupnosť, aby $\rightarrow x \in S$
- Limitný bod: limita postupnosti
- Úplna množina: $S =$ limitné body
- Uzavretá množina: S obsahuje všetky limity bodov



Úplnosť & kompaktnosť 2

- Kompaktné \Leftrightarrow je ohraničené a uzavreté
- Cantorová množina je úplna
- Množina racionálnych čísel je neúplná, ale kompaktná
- Euklidovský priestor s metrikou je úplny



Ďalšie metriky

- V úplných metrických priestoroch
- $d(x,A) = \inf\{d(x,y); y \in A\}$; A je množina
- ? $d(A,B) = \sup\{d(x,B); x \in A\}$
- $d(A,B) \neq d(B,A)$ – nie je metrika
- Riešenie: Hausdorffova metrika
$$h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}$$



Hausdorffovský priestor

- X – úplný metrický priestor
- $H(X)$ – množina všetkých neprázdnych kompaktných podmnožín z X
- “Podmnožina množiny všetkých podmnožín”
- Potrebujeme metriku pre kompaktnosť
- $(H(X), h)$ – Hausdorffovský priestor



Hausdorffovský priestor 2

- $h(A, B)$ je malá pre podobné množiny
- $A_\varepsilon = \{x \mid d(x, y) < \varepsilon \text{ pre nejaké } y \in A\}$ – ε -okolie
- $h(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset B_\varepsilon \text{ \& } B \subset A_\varepsilon\}$
- Ak A, B sú dva body $\Rightarrow h(A, B) = d(A, B)$
- Fraktály “žijú” v $(H(X), h)$



Hausdorffovská miera

- $\text{diam}(A) = \sup\{d(x,y); x,y \text{ in } U\}$
- Otvorené pokrytie A:
- s-rozmerná Hausdorffova miera:

- Môže byť použitý pre dĺžku krivky, plochy povrchu, ...



Hausdorffova dimenzia

- Pre ľubovoľnú množinu A existuje číslo $D(A)$
- Pre $s < D(A)$ je miera nekonečno
- Pre $s > D(A)$ je miera 0
- $D(A)$ – Hausdorffova dimenzia
- $D(A)$ môže byť nekonečno, 0, ľubovoľné kladné reálne číslo



Transformácie

- V metrickom priestore X
- Transformácia na X je funkcia $f: X \rightarrow X$
- Ak S je podmnožina X , $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$
- Dopredné iterácie $x, f(x), f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots$
- Orbita, nekonečný proces
- Musíme merať transformácie



Transformácie 2

- Afinné: zachovanie kolinearity a pomery vzdialenosti – škálovanie, posunutie, rotácia, skosenie
- Afinné: $F(x) = Ax + b$
- Polynomické
- Mobiove, racionálne lomené



Kontraktívna transformácia

- Kontrakcia: $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|$ pre každé x, y v X
- $C \in (0,1)$
- C závisí na metrike
- Kontraktívnosť ($C < 1$), expanzia ($C > 1$), symmetria ($C = 1$)
- Spojitosť



Veta o pevnom bode

- Banach
- (X,d) úplny metrický priestor
- f – kontraktívne
- Existuje jediný pevný bod x_f : $f(x_f)=x_f$
- Pre každé x v X postupnosť $\{f^n(x)\}$ konverguje ku x_f



Veta o pevnom bode 2

- Jednoduchý dôkaz
- Predpísaná vzdialenosť s daným n
- Základ pre mnoho fraktálov
- Zovšeobecnené pre množiny
- Ďalšie vety o pevnom bode



Transformácie v HS

- $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$, pre $B \in H(X)$
- Ak f je kontraktívne v X , potom je aj f v $H(X)$
- Kontrakcie $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ s faktormi $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$.
- $W: H(X) \rightarrow H(X)$
- W je kontrakcia s faktorom $s = \max \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$




Koniec Časti 3


Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015



Fraktály

Časť 4 : IFS

 *Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Veronika Šprláková, 2015*
Department of Applied Informatics



Transformácie v HS

- Kontrakcie $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ s faktormi $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$.
- $W: H(X) \rightarrow H(X)$
- W je kontrakcia
- W má pevný bod v $H(X)$
- Pevný bod = neprázdna kompaktná množina
- Atraktor, nemenný



IFS (Iterované systémy funkcií)

- Úplný metrický priestor (X, d)
- Konečná množina s kontrakciami f_1, \dots, f_N s kontraktívnymi faktormi s_1, \dots, s_N
- Zápis (X, f_1, \dots, f_N)
- Hutchinsonov operátor W
- Kontraktívny faktor $s = \max \{s_1, \dots, s_N\}$



IFS 2

- Systém iterovaných funkcií
- Deterministický fraktál
- Jednoduchý popis atraktorom
- Viacnásobné znižovanie kopírovania
- Atraktor je limita dopredných iterácií
- Nezávisí na počiatočnej množine



IFS – výpočet atraktorov

- Deterministický & stochastický algoritmus
- Deterministický:
- $B \in H(X)$
- Pre $n = 1$ do nekonečna
 $W^n(B) = W(W^{n-1}(B))$
Vymažeme W^{n-1} , vykreslíme W^n
- Môže byť počítaný adaptívne



Dimenzia IFS atraktora

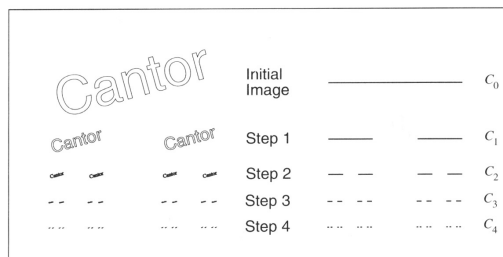
- V jednoduchom prípade
- $f_i(A)$ a $f_j(A)$ sú disjunktné pre atraktor A a $i \neq j$, to znamená, že sa neprekrývajú
- f_i sú kontraktívne s rovnakým faktorom c
- $D = \log(N) / \log(1/c)$
- $s_1^D + \dots + s_N^D = 1$

Afinné transformácie

- $y = Ax + b$
- A sa skladá z otočenia, škálovania
- b reprezentuje posunutie
- Potrebujeme 3 body na určenie
- Pevný bod
- Kontraktívne: $a^2 + c^2 < 1$, $b^2 + d^2 < 1$,
- $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1 + (ad - cb)^2$

Klasické fraktály ako IFS

- Cantorova množina
- $f_1 = [(1/3)*x, (1/3)*y]$
- $f_2 = [(1/3)*x + 2/3, (1/3)*y]$
- Atraktor = Cantorova množina





Kochova krivka ako IFS

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Scale by r

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.167 & -0.289 \\ 0.289 & 0.167 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

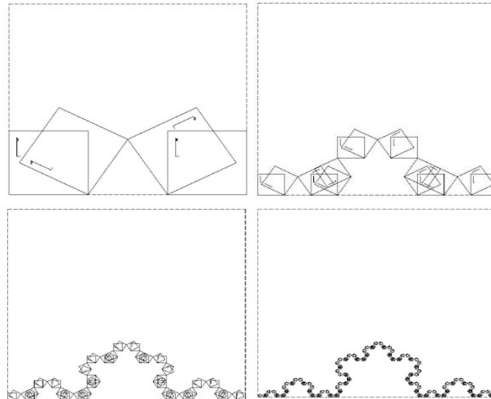
Scale by r , rotation by 60°

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.167 & 0.289 \\ -0.289 & 0.167 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.289 \end{bmatrix}$$

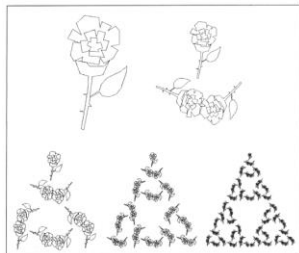
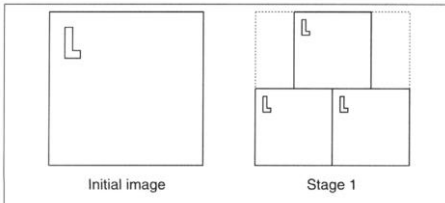
Scale by r , rotation by -60°

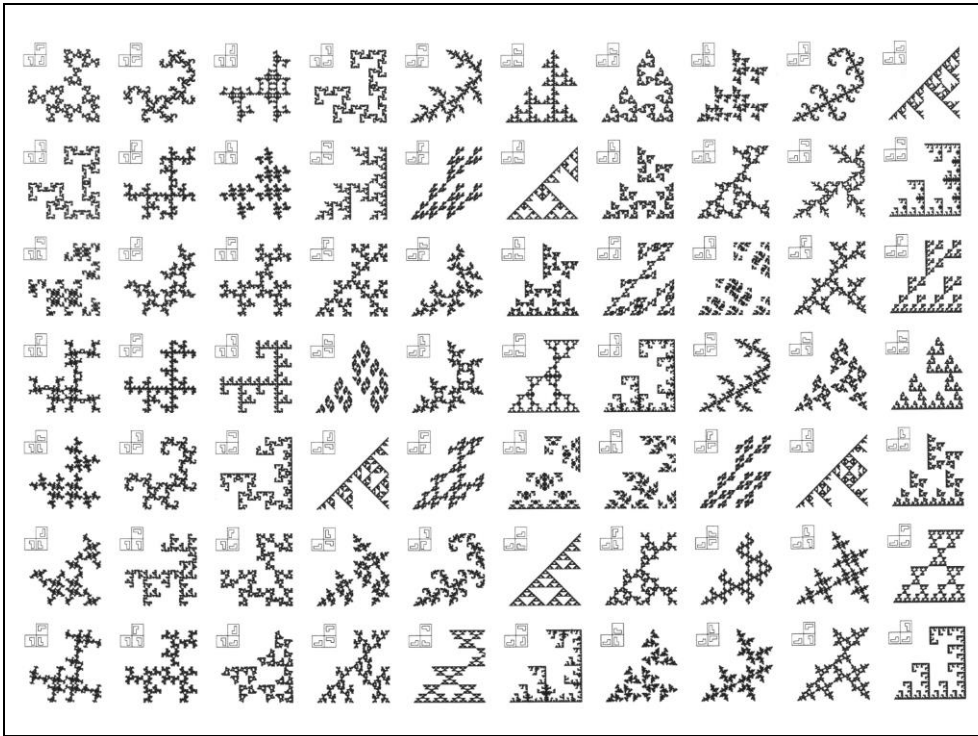
$$f_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scale by r



Sierpinského trojuholník, IFS

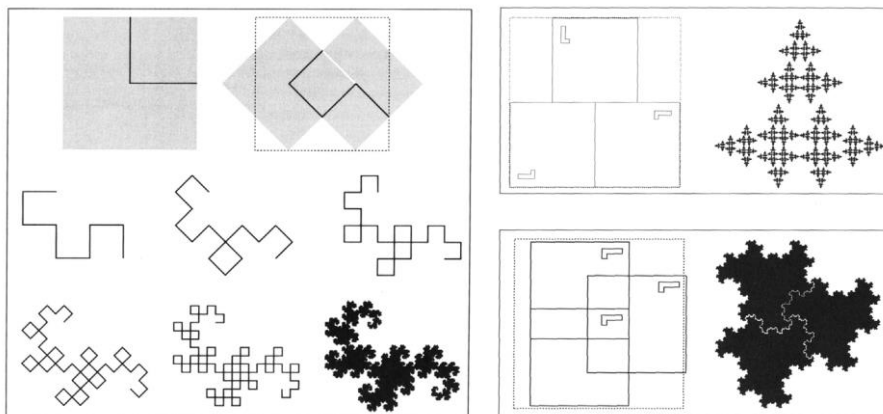




 **Barnsleyho paprad' 2**



Ďalšie IFS príklady



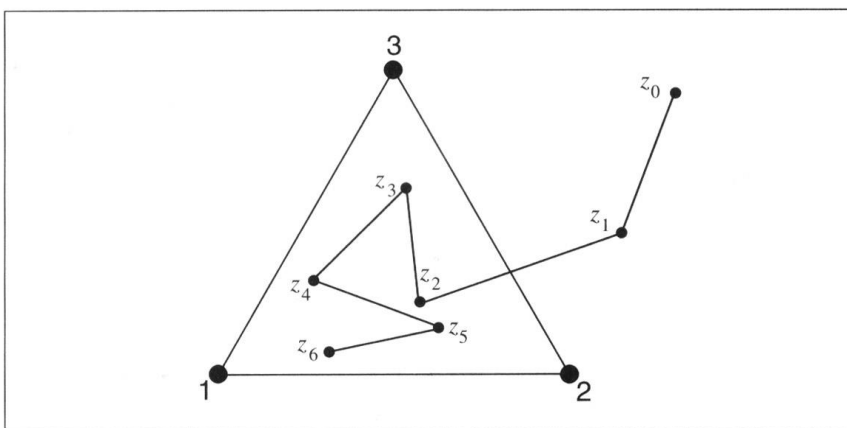
Chaos game

- Stochastický algoritmus pre výpočet atraktora
- Používanie náhodnosti
- Riadené s pravdepodobnosťou
- Atraktor sa môže objaviť rýchlejšie
- Práca iba s bodmi

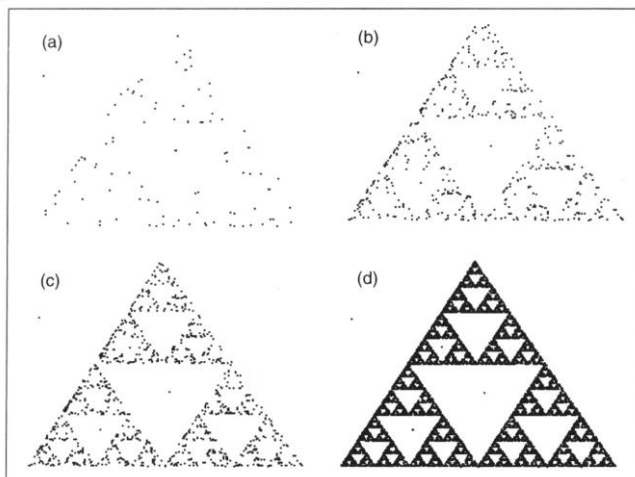
Chaos game v trojuholníku

- Dané sú 3 body A, B, C
- Pravdepodobnosti bodov p_1, p_2, p_3
- Počiatočný bod z_0 z roviny
- V kroku i vyberieme náhodne bod z A, B, C s danou pravdepodobnosťou
- Urobíme stred od vybraného bodu a z_i
- Toto je bod z_{i+1}

Chaos game v trojuholníku



A výsledok je ...



Chaos game všeobecne

- Daný IFS
- Dané sú pravdepodobnosti pre každú kontrakciu v IFS - p_1, \dots, p_N ; $p_1 + \dots + p_N = 1$
- Vyberieme počiatočný bod z_0
- V i -tom kroku vyberieme jednu kontrakciu w_j
- $z_{i+1} = w_j(z_i)$



Prečo to funguje?

- Môžeme mať $A_0 = \{z_0\}$
- V IFS: $A_1 = \{f_1(z_0), \dots, f_N(z_0)\}$
- V k-tom kroku: N_k bodov
- Chaos game produkuje iba jeden z týchto bodov; $z_k \in A_k$
- Takže z_k je stále v blízkosti atraktora



System riešení

- Po k iteráciách máme nejaký bod
- Riešenie: $s_1 s_2 \dots s_k$; $s_i \in \{1, 2, \dots, N\}$
- V j-tom kroku vyberieme j-tu kontrakciu, s_j
- Bod v atraktore = nekonečné riešenie
- V IFS máme v k-tom kroku k dispozícii všetky riešenia, v Chaos game máme jedno



Generovanie atraktora

- Daný bod P z atraktora
- $P = s_1 s_2 \dots$
- Pre nejaké číslo m , bod $s_1 \dots s_m$ je ε blízko P
- Ak nejaký bod S obsahuje postupnosť $s_1 \dots s_m$, potom je ε blízko P
- Taká postupnosť bude existovať

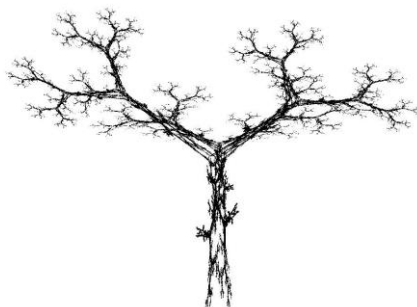
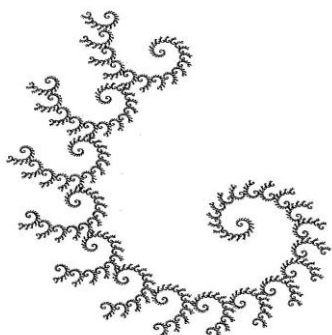


Výber dobrých pravdepodobností

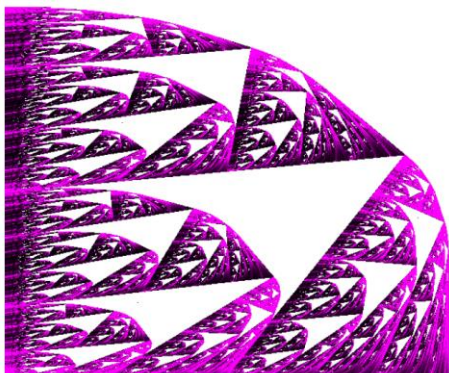
- Môžu byť dané
- Každá pravdepodobnosť je $1/N$
- Heuristické metódy:

- Adaptívne metódy

Chaos game & IFS



Ďalšie transformácie





Koniec Časti 4

Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015




Fraktály

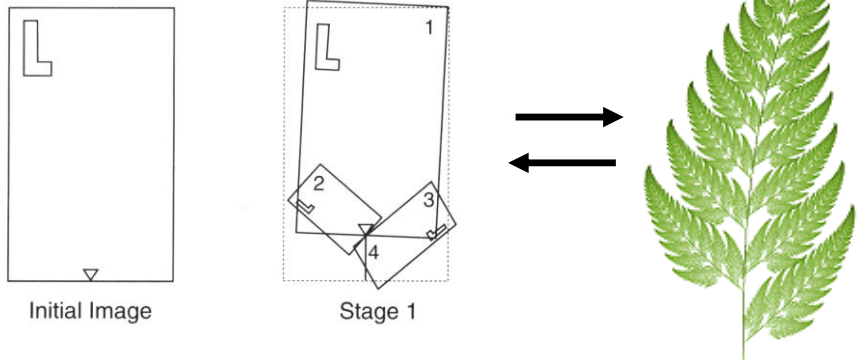
Časť 5 : Fraktálna kompresia



Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Andrej Ferko, 2015
Department of Applied Informatics



IFS (Iterovaný systém funkcií)



Initial Image

Stage 1



Aplikácie IFS

- Modelovať prírodné objekty
- Simulovať prírodné procesy
- Inverzný problém
- Rekonštrukcia objektov
- Fraktálna interpolácia
- Kompresia a kódovanie obrazu



Kódovanie IFS

- Nech daný fraktál = atraktor IFS
- Ľahunký opis obrazu (tri matice)
- Perfektné zakódovanie
- Nezávisí od mierky
- Dokonalá kompresia:
- Zložitý tvar \leftrightarrow málinko bitov





Zovšeobecnenie

- Čo tak tento prístup na každý obraz?
- Vhodná kompresia
- Stačí nájsť v obraze podobnosti
- Treba dosiahnuť obraz ako atraktor
- Alebo jeho slušnú aproximáciu
- Progresívne predvedenie (iterácií) obrazu



Obraz (image)

- Matica pixlov – v diskretnom priestore
- Konečná rozlišovacia schopnosť
- Zovšeobecnený obraz pre IFS
- $I(x,y)$ v intervale $\langle 0,1 \rangle$, $x,y \in \langle 0,1 \rangle$
- Nekonečná rozlišovacia schopnosť
- Potom patrí do $H(X)$



Vzdialenosť dvoch obrazov

- Porovnať 2 obrazy
- Definujú kontraktívne zobrazenie
- Základná metrika
 - $\sup_{x,y \in \langle 0,1 \rangle} |f(x,y) - g(x,y)|$
- Najmenšie štvorce (Least square metric)
 - Nech a_i a b_i označujú intenzity 2 obrazov
 - Minimalizácia R
 - R je vzdialenosť
$$R = \sum_{i=1}^n (s \cdot a_i + o - b_i)^2$$



Kompresia obrazov

- V diskretnom priestore (pixel space)
- Uložiť pixle a použiť kompresiu dát
- Pamätať koeficienty transformácií, DCT
- Napospol v diskretnom priestore
- Napr. formáty Jpeg, Gif, Png, Bmp...



Veta o koláži, Collage theorem

- (X, d) úplný metrický priestor
- $L \in H(X)$, $\varepsilon > 0$
- IFS $\{X, f_1, \dots, f_N\}$ s faktorom kontrakcie s

$$h(L, \bigcup_{i=1}^N f_i(L)) < \varepsilon$$

- Potom $h(L, x_w) < \frac{\varepsilon}{(1-s)}$,
- kde $x_w = \text{atraktor IFS } \{X, f_1, \dots, f_N\}$



Veta o koláži 2

- Ak pokryjeme presne L zjednotením jeho afinných kópií, potom atraktor IFS sa blíži k L so zaručenou presnosťou
- Na menšie ε treba viac zobrazení f_i
- Efektívna reprezentácia predpokladá, že transformácie pokryjú L a po dvojiciach nemajú žiadny prienik

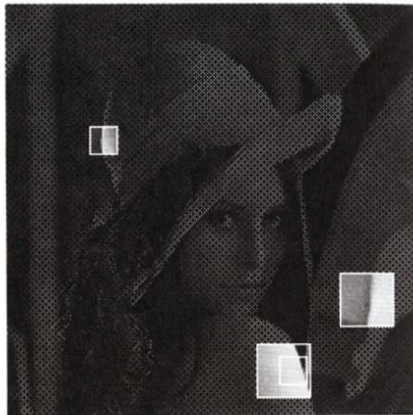
Vylepšenie IFS

- $f_i: D_i \rightarrow R_i, i=1, \dots, N$

$$f_i: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \\ o_i \end{pmatrix} \quad \prod_{i=1}^N R_i = I; R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j$$

- $f_i(I) = f_i(x, y, I(x, y))$
- s_i, o_i – kontrast, jas
- f_i je zúžené na D_i
- Podrozdelené IFS (Partitioned IFS, PIFS)

Transformácie

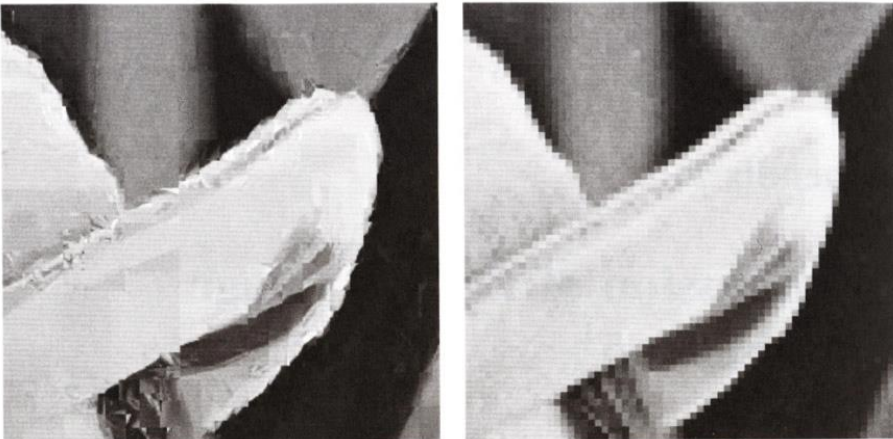


Fraktálna kompresia

- Michael Barnsley
- Podlieha patentu/copyright
- Perfektné <-> nepoužiť!!!
- Treba optimalizovať
- Rapídne vylepšené
- Dnes? Nepoužíva sa



Fraktály kontra/verzus Pixle





Kódovanie

- Teraz úloha: pre daný obraz treba nájsť vylepšený IFS $\{X, f_1, \dots, f_N\}$
- Koláž $W(I)$ by sa mala veľmi blížiť obrazu
$$I \approx I' = W(I') \approx W(I)$$
- Minimálna hodnota $h(I \cap R_i, f_i(I))$
- Treba nájsť D_i, R_i, s_i, o_i
- Uložiť iba tieto hodnoty, t.j. kódovanie



Dekódovanie

- Máme IFS , t.j. kódovanie
- Možno štartovať s akýmkoľvek obrazom
- Malo by mať dekodovanie veľa krokov
- Pomocou deterministického alebo stochastického algoritmu
- Bez pixelizácie = detail na danej škále
- Potreba dekodovať celý obraz, nie časti

Dekódovanie 2



Jednoduchý príklad

- Obraz s rozlíšením 256 x 256
- R_1, \dots, R_{1024} – pre všetky neprekrývajúce sa podobrazy s rozlíšením 8x8
- D_1, \dots, D_{58081} – pre časti s rozlíšením 16x16
- Pre každé R_i sa hľadá D_i , pre minimum

$$h(I \cap R_i, f_i(D_i))$$

Jednoduchý príklad 2

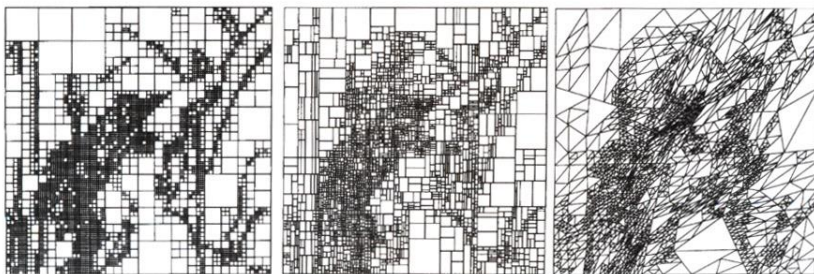
- Minimalizácia pomocou metriky najmenších štvorcov (Least square metric)
- Tento postup poskytuje aj hodnoty s_{ij} o_i
- Dostávame f_1, \dots, f_{1024}
- Ukladá sa tento systém (PIFS)
- 65536 -> 3968
- Dekódovaním vylepšenie detailu 8x8, 4x4

Výsledky



Podrozdelenie obrazu

- Uniformné
- Použitím Quadtree, HV
- Alebo Triangular, Custom



Iné výsledky





Optimalizácia

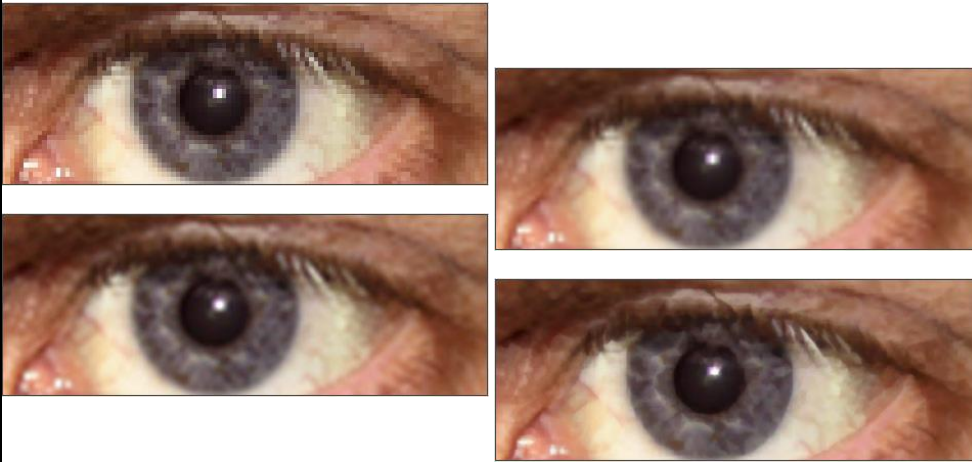
- Kompresný pomer \leftrightarrow vernosť
- Čas zakódovania
- Voľba rozsahov (ranges)
- Výber oblastí (domén)



Fraktálna interpolácia

- Obraz kódovaný pomocou fraktálnej kompresie nemá chybu "pixelácie"
- Výborné na zväčšovanie obrazov – inak bilineárne, kubickým splajnom, či štatistickou interpoláciou
- PIFS sa vytvorí, použije na expanziu, kontrakciu obrazu a potom zruší

Fraktálna interpolácia 2



Prehľadavacie stratégie

- Hrubou silou
- Hrubou silou zľahka (Light brute force)
- Obmedzením oblasti prehľadávania
- Miestne špirálové vyhľadávanie
- Pozrieť rovnaké miesto
- Kategorizované hľadanie



Fraktálna kompresia

- Sľubná technológia koncom 1980s
- Hlavný konkurent – JPEG
- Veľké výhody oproti formátu JPEG na úrovniach nízkej kvality obrazu
- "Graduate Student Algorithm": zamknúť absolventa v miestnosti s počítačom, kým nevyrieši váš problém...



Fraktálna interpolácia

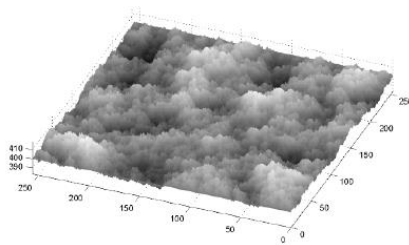
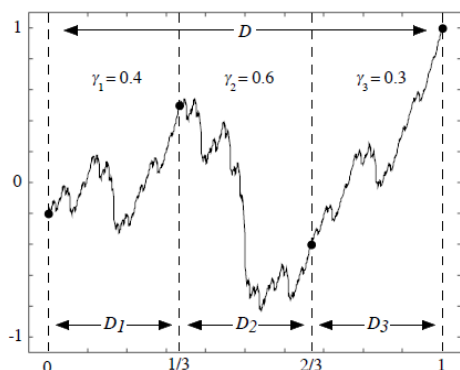
- Body v rovine $A_i=(x_i,y_i)$, $i=0,\dots,M$
- Treba nájsť funkciu w tak, aby $f(x_i)=y_i$
- a aby f bola atraktorom IFS (w_1,\dots,w_M) ,
- pričom d_i je voľný parameter, $|d_i|<1$

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

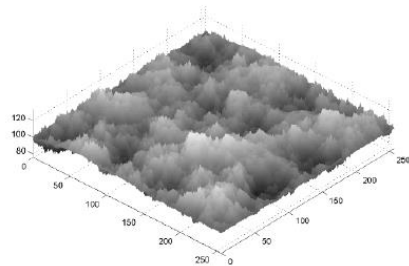
$$w_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad w_i \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{(x_i - x_{i-1})}{(x_M - x_0)} \\ c_i &= \frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_M - x_0)} - d_i \frac{(y_M - y_0)}{(x_M - x_0)} \\ e_i &= \frac{(x_M x_{i-1} - x_0 x_i)}{(x_M - x_0)} \\ f_i &= \frac{(x_M y_{i-1} - x_0 y_i)}{(x_M - x_0)} - d_i \frac{(x_M y_0 - x_0 y_M)}{(x_M - x_0)} \end{aligned}$$

Interpolácia



(a)



(b)

Koniec

Koniec Časti 5


Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015



Fraktály

Časť 6 : Juliova a Mandelbrotova množina

 *Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Veronika Šprláková, 2015*
Department of Applied Informatics



Pixel game

- Začínanie s diskretnou „šachovnicou“
- Vybraný počiatkový bod (štvorec, políčko)
- Dva prípady: periodické a pevné
- Oblasť atraktívnosti pevného štvorca = množina počiatkových štvorcov, ktoré zvedú orbity k danému štvorcu

Pixel game 2

L	K2	K3	K3	K4	K4	I5	I6	I7	I8	I8	I9
K	K3	K3	X	K3	I3	H4	H5	G7	H8	H9	H9
I	I3	I3	K4	K3	I2	G3	F5	F7	F8	G9	G10
H	H3	I4	K5	L3	K1	D2	B5	D7	F9	F9	G10
G	G4	H5	K7	K6	L2	A2	C7	C10	E10	F10	F10
F	F4	F6	F9	F10	F11	F11	F11	F11	X	F10	F10
E	E4	D5	B7	B6	A2	L2	I7	I10	G10	F10	F10
D	D3	C4	B5	A3	B1	H2	K5	H7	F9	F9	E10
C	C3	C3	B4	B3	C2	E3	F5	F7	F8	E9	E10
B	B3	B3	X	B3	C3	D4	D5	E7	D8	D9	D9
A	B2	B3	B3	B4	B4	C5	C6	C7	C8	C8	C9
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

2	1	1	2	2	5	6	4	4	4	4
1	1	●	1	3	3	3	5	6	4	4
3	3	2	1	4	5	3	3	3	3	2
5	2	4	2	2	3	4	5	3	3	2
5	3	4	4	2	2	4	4	2	1	1
2	3	3	1	2	2	2	2	2	●	1
5	3	4	4	2	2	4	4	2	1	1
5	2	4	2	2	3	4	5	3	3	2
3	3	2	1	4	5	3	3	3	3	2
1	1	●	1	3	3	3	5	6	4	4
2	1	1	2	2	5	6	4	4	4	4

Cayleyho problém

- Newtonova metóda pre numerický výpočet koreňa funkcie
- Výpočet používa iterácie

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$$

- Pre daný koreň, ktoré počiatočné body vedú k tomúto koreňu?

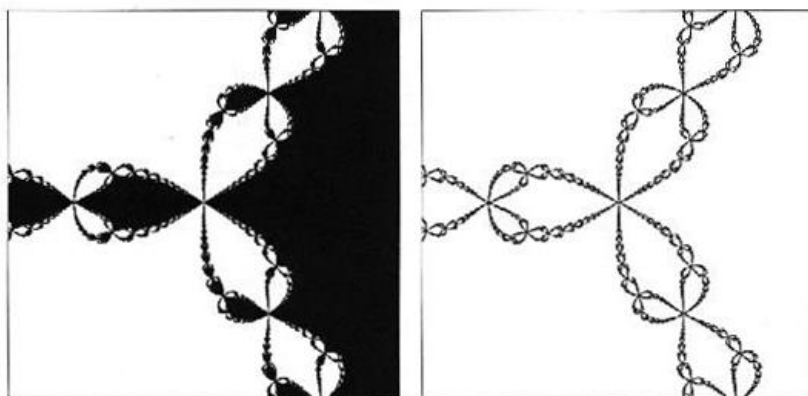
Príklad

- Rovnica: $z^3 - 1$
- Podľa základnej vety algebry má 3 korene

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^3 - 1}{2y_n^2}$$

- Čo je oblasť atrakcie?
- Čo sú hranice daných 3 oblastí?

Newtonov fraktál





Komplexné čísla

- 3 typy zápisu:

$$a + bi; r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)); r.e^{i\varphi}$$

- Jednoduchý na sčítavanie, násobenie
- Operácie ako s reálnymi číslami
- Odmocniny
- Rovnice



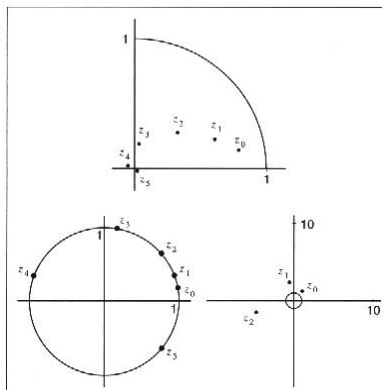
Väzni, utečenci

- Pozorujme iterácie $z \rightarrow z^2$
- Nekonečné iterácie = orbity
- Pre body v jednotkovom kruhu máme väzňov (prisoners)
- Inak máme utečencov (escapees)
- Úniková množina E, väzenská množina P
- Hranica medzi E, P = Juliova množina

Väzni, utečenci 2

- Invariantné vzhľadom na iteráciu

	length	angle	length	angle	length	angle
z	0.8	10°	1.0	10°	1.5	50°
z^2	0.64	20°	1.0	20°	2.25	100°
z^4	0.4096	40°	1.0	40°	5.06	200°
z^8	0.1678	80°	1.0	80°	25.63	40°
z^{16}	0.0281	160°	1.0	160°	656.90	80°
z^{32}	0.0008	320°	1.0	320°	431439.89	160°



Rozšírenie

- $z^2 + c$

	Orbit 1		Orbit 2		Orbit 3	
	x	y	x	y	x	y
z_0	1.00	0.00	0.50	0.25	0.00	0.88
z_1	0.50	0.50	-0.31	0.75	-1.27	0.50
z_2	-0.50	1.00	-0.96	0.03	0.87	-0.77
z_3	-1.25	-0.50	0.43	0.44	-0.34	-0.85
z_4	0.81	1.75	-0.51	0.88	-1.12	1.07
z_5	-2.90	3.34	-1.01	-0.39	-0.41	-1.90
z_6	-3.26	-18.91	0.37	1.30	-3.93	2.04
z_7	-347.46	123.68	-2.04	1.46	10.79	-15.52
z_8			1.53	-5.46	-124.77	-334.49
z_9			-28.01	-16.27		

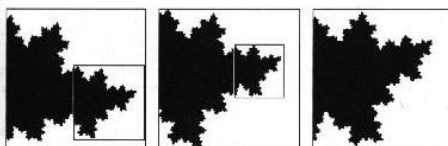
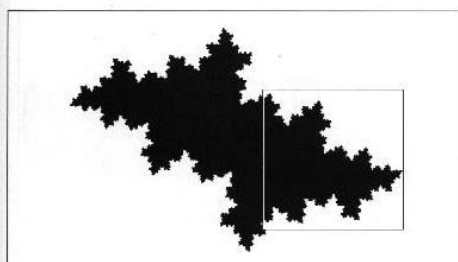
- Juliova množina
- Tvar?

	Orbit 1		Orbit 2		Orbit 3	
	x	y	x	y	x	y
z_0	0.000	0.000	0.500	-0.250	-0.250	0.500
z_1	-0.500	0.500	-0.313	0.250	-0.688	0.250
z_2	-0.500	0.000	-0.465	0.344	-0.090	0.156
z_3	-0.250	0.500	-0.402	0.180	-0.516	0.472
z_4	-0.688	0.250	-0.371	0.355	-0.456	0.013
z_5	-0.090	0.156	-0.488	0.237	-0.292	0.488
z_{100}	-0.473	0.291	-0.393	0.290	-0.438	0.217
z_{200}	-0.394	0.279	-0.411	0.271	-0.409	0.290
z_{300}	-0.411	0.273	-0.409	0.276	-0.407	0.272
z_{400}	-0.408	0.276	-0.409	0.275	-0.409	0.276
z_{500}	-0.409	0.275	-0.409	0.275	-0.409	0.275



Juliova množina

$$c = -0.5 + 0.5i$$



Hraničný polomer

- Pri iterácií ponecháva polomer, bod uniká
- $r(c) = \max(|c|, 2)$
- Použitie na vizualizácie
- Jednoduchý dôkaz

Obkolesenia

- Zovšeobecnenie kruhu pre každý iteračný krok

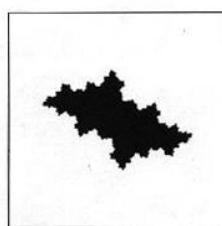
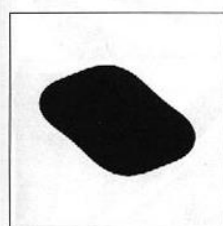
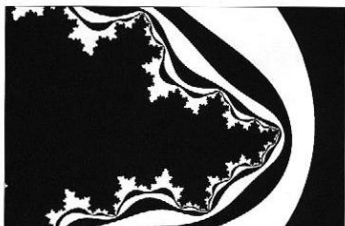
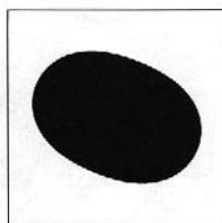
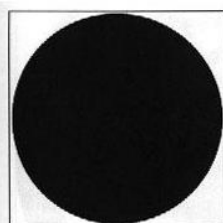
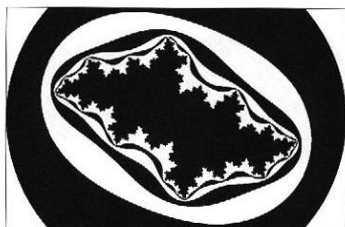
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$Q_c^{(-k)} = \{z_0; |z_k| \leq r(c)\}; k = 0, 1, \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_c^{(-k)} = P_c$$

- Explicitný vzorec nie, iba iteračný proces

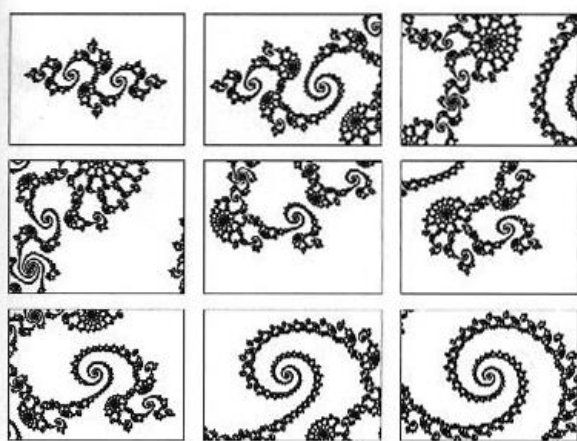
Obkolesenie 2



Súvislosť oblasti

- Môže byť súvislá a nesúvislá
- V závislosti na kritickej orbite
- $0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \dots$
- Táto postupnosť by mohla byť ohraničená

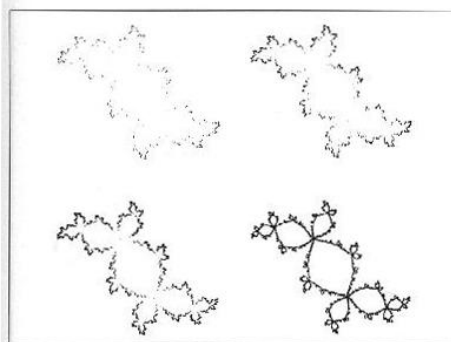
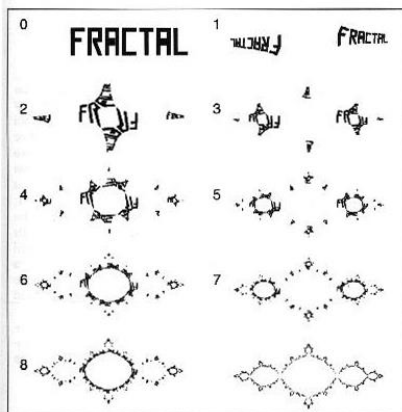
Priblíženie Juliovej množiny



Použitie IFS

- Použitie inverzných transformácií
- 2 funkcie
- Nájdenie bodu vnútri Juliovej množiny
- Nájdenie pevného bodu
- Úplná invariancia

Použitie IFS 2





Invariancia

- Ak je z bod z danej množiny, tak aj $f(z)$, je z tejto množiny
- $f(z) = +(z-c)^{0,5}$
- $f(z) = +(z-c)^{0,5}$
- $f(z) = z^2+c$
- Označuje samo-podobnosť



Quaterniónová Juliova množina

- Rozšírenie reálnych a komplexných čísel
- $X=x_0+x_1i+x_2j+x_3k$
- Štyri dimenzie
- Môžeme ignorovať nejaké súradnice
- Znovu $z \rightarrow z^2+c$



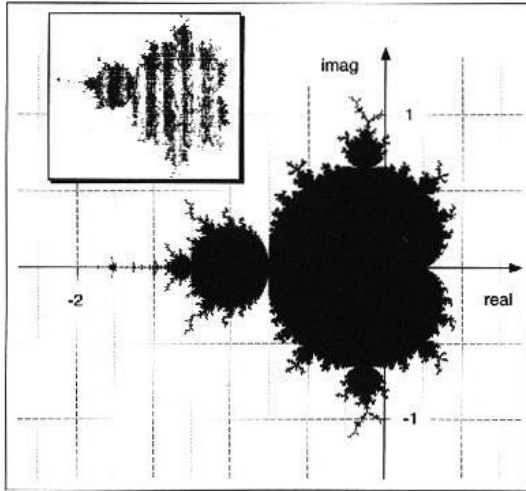
QJ množina, „osie hniezdo“



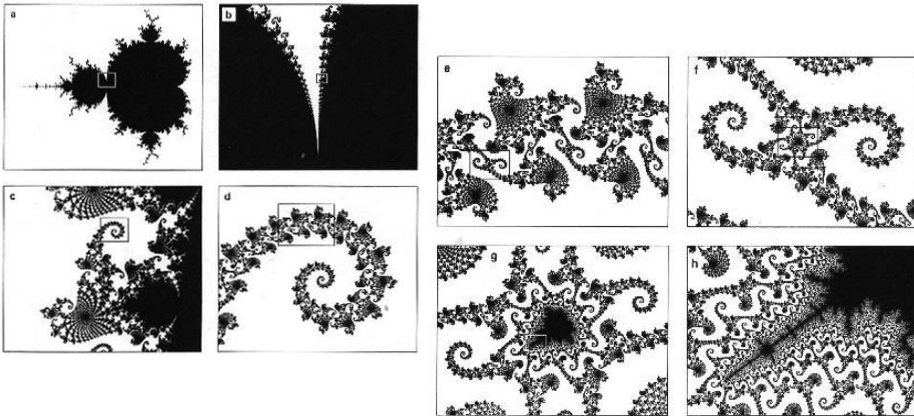
Mandelbrotova množina

- $M = \{c \in \mathbb{C}; J_c \text{ je spojité}\}$
- $M = \{c \in \mathbb{C}; c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \dots \text{ je ohraničené}\}$
- Prah polomeru 2
- Obklúčené
- Nerovnaké iterácie, rôzne zmeny pre každý bod

Mandelbrotova množina 2

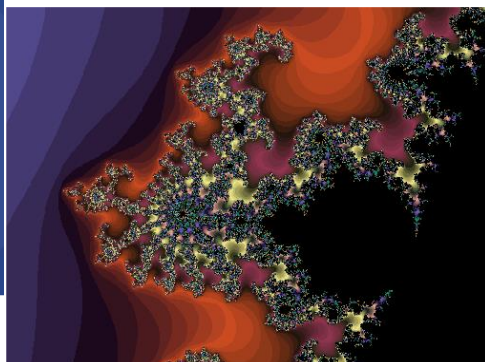
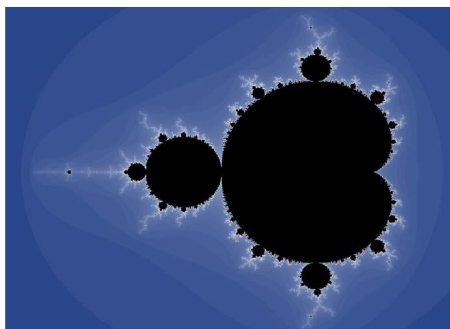


Priblíženie Mandelbrotovej m.

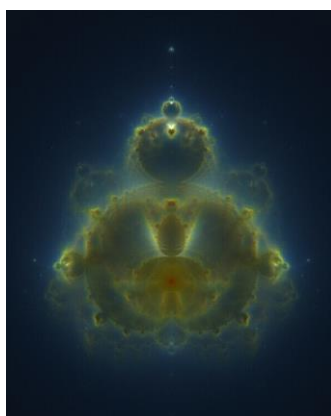
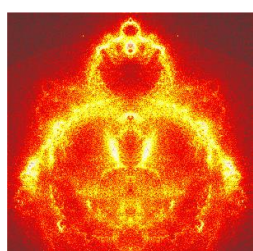
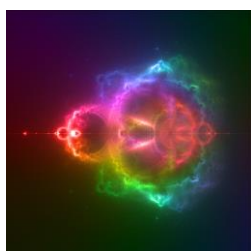
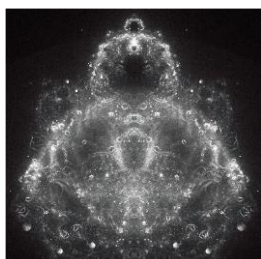


Farebná Mandelbrotova množina

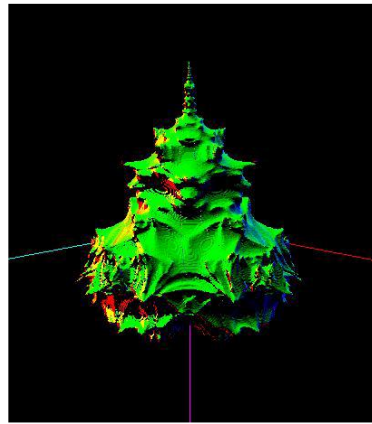
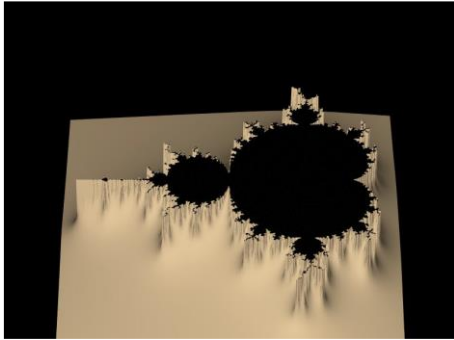
- Ofarbenie založené na počte iterácií



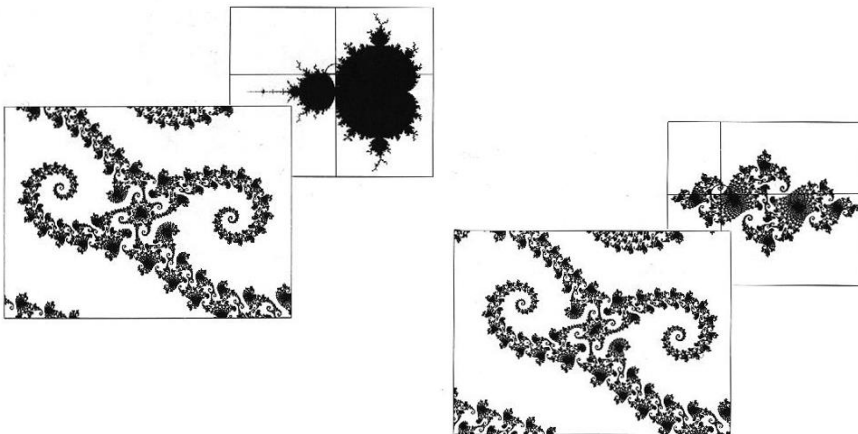
Budhabrotova technika



3D Mandelbrot

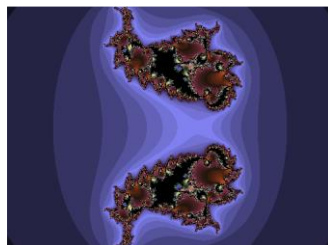
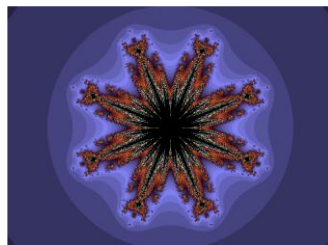
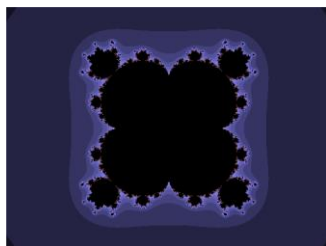
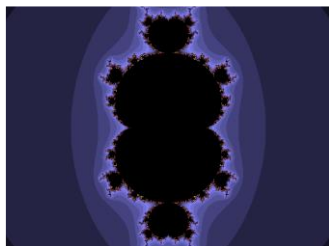


Porovnanie





Ďalšie ukážky



Koniec

Koniec Časti 6

Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ěmatik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015

Fraktály

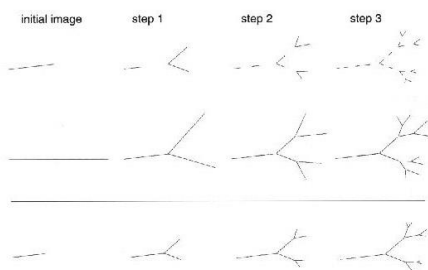
Časť 7 : L -systémy



*Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Veronika Šprláková, 2015
Department of Applied Informatics*

Ako modelovať rast?

- Chceme tvarové zmeny v čase
- Poznáme ale iba výsledok, nie proces, rast
- Ťažké, keď použijeme IFS

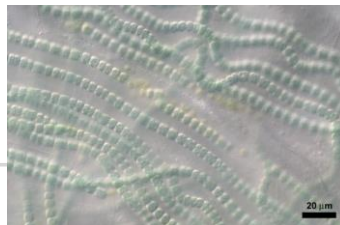


Vývoj v čase

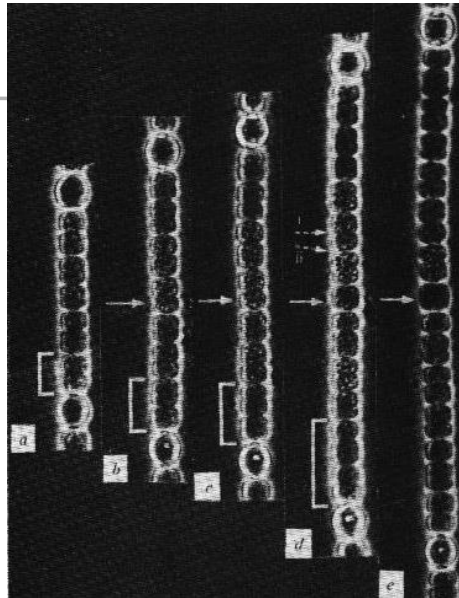
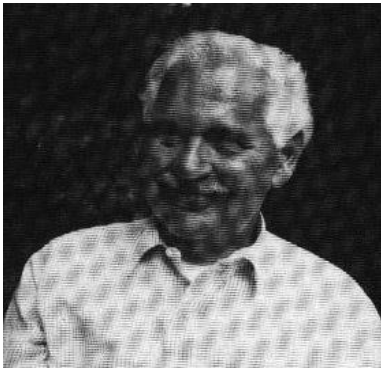
- Biológ Aristid Lindenmayer
- Vynašiel formálny opis pre rast rastlín
- Založené na základe biologických pozorovaní
- Tvarovanie \leftrightarrow rast
- Vhodné na počítačovú implementáciu

Príklad rastu

- *Anabaena catenula*
- 2 typy buniek
- Bunky sú delené rôzne, ak sú ľavé alebo pravé dcéry
- Bunky sú rozdelené na malé a veľké



Príklad



Použitie algebry

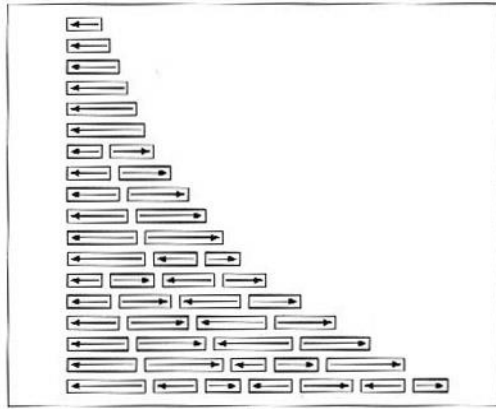
- A je malá bunka, B je veľká bunka
- Šípka znamená ľavú alebo pravú dcéru
- Použitím pravidla sme dostali nové iterácie a systém rastie

- Pravidlá:

$$\begin{array}{l} \circ \quad \circ\rho \\ A \rightarrow AB \\ \rho \quad \sigma\rho \\ A \rightarrow BA \\ \sigma \quad \sigma\rho \\ B \rightarrow AB \\ \rho \quad \sigma\rho \\ B \rightarrow BA \end{array}$$

Rozšírenie

- Malé bunky musia rásť, dlhšie sa deliť



L -systémy

- Abeceda: $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Vyrábanie mapy: $P: V \rightarrow V^*$; $a \rightarrow P(a)$
- Axióma $a(0) \in V^*$
- Pre každý symbol vo V je tu jedno výrobné (production) pravidlo $P(a)$
- V^* je množina všetkých reťazcov



Vizualizácia

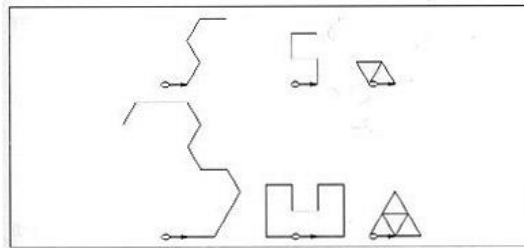
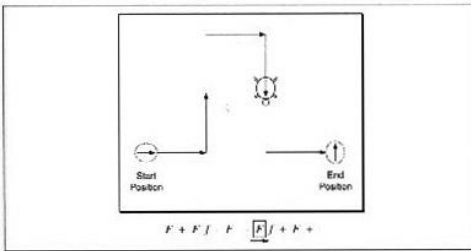
- Grafická interpretácia reťazcov
- Nie je vopred nijako stanovená
- Založené na analýze a pozorovaní prírody
- Môže byť v 2D, 3D
- Použitie mnohých základných prvkov (primitívov) pre časť reťazcov



Korytnačia grafika

- Jedna z grafických interpretácií L-systémov
- Korytnačka: kreslenie čiary založené na základných príkazoch
- F - krokom vpred s kreslením čiary
- f - len presunúť vpred bez kreslenia
- +,- odbočiť vľavo (vpravo) o daný uhol

Korytnačia grafika 2



Viac symbolov

- Kombinované pohyby
- $L = + F - F - F +$
- $R = -F + F + F -$
- $S = FF + F + FF -F -FF$
- $Z = FF -F -FF + F + FF$



Rast klasických fraktálov

- L-systém: Kochova krivka
- Axióma: F
- Výrobné pravidlá:
 $F \rightarrow F + F - F + F$
 $+ \rightarrow + ; - \rightarrow -$
- Parameter: uhol = 60°
- Možné škálovanie



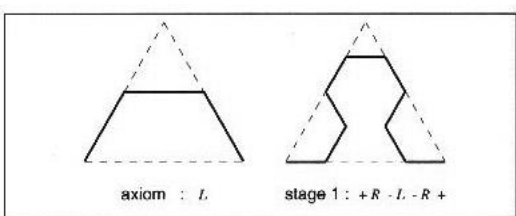
Cantorova množina

- L-systém: Cantorova množina
- Axióma: F
- Výrobné pravidlá:
 $F \rightarrow F f F$
 $f \rightarrow f f f$
 $+ \rightarrow + ; - \rightarrow -$
- Parameter: uhol = 60°

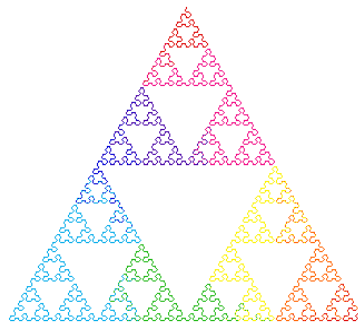
Sierpinského trojúhelník

- L-systém: Sierpinského trojúhelník
- Axióma: L
- Výrobné pravidlá:
 - L \rightarrow + R -L -R +
 - R \rightarrow -L + R + L -
 - + \rightarrow + ; - \rightarrow -
- Parameter: uhol = 60°
- L = +F-F-F+, R = -F+F+F-

Sierpinského trojúhelník 2



YF, X \rightarrow YF+XF+Y, Y \rightarrow XF-YF-X





Peanova krivka

- L-systém: Peanova krivka
- Axióma: F
- Výrobné pravidlá:
 - $F \rightarrow FF + F + F + FF + F + F -F$
 - $+ \rightarrow + ; -- \rightarrow -$
- Parameter: uhol = 90°

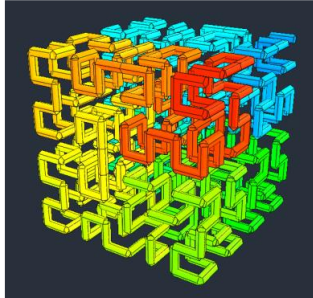
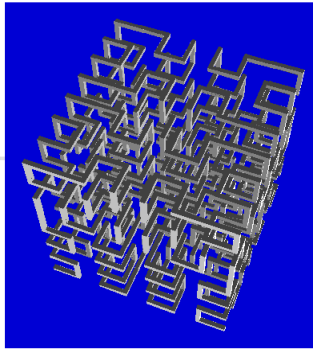


Hilbertova krivka

- Uhol 90 , Axióma X, $X = -YF+XFX+FY-$,
- $Y = +XF-YFY-FX+$
- Rozšírenie do 3D: hore & smer vektora, viac operátorov
- $A \rightarrow B-F+CFC+F-D\&F^D-F+\&\&CFC+F+B$
- $B \rightarrow A\&F^CFB^F^D^D^-F-D^|F^B|FC^F^A$
- $C \rightarrow |D^|F^B-F+C^F^A\&\&FA\&F^C+F+B^F^D$
- $D \rightarrow |CFB-F+B|FA\&F^A\&\&FB-F+B|FC$

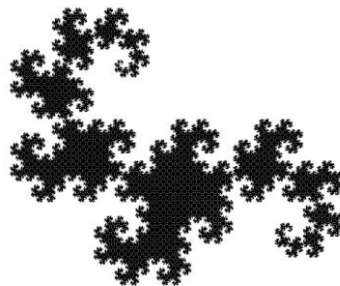


Hilbertova krivka 2

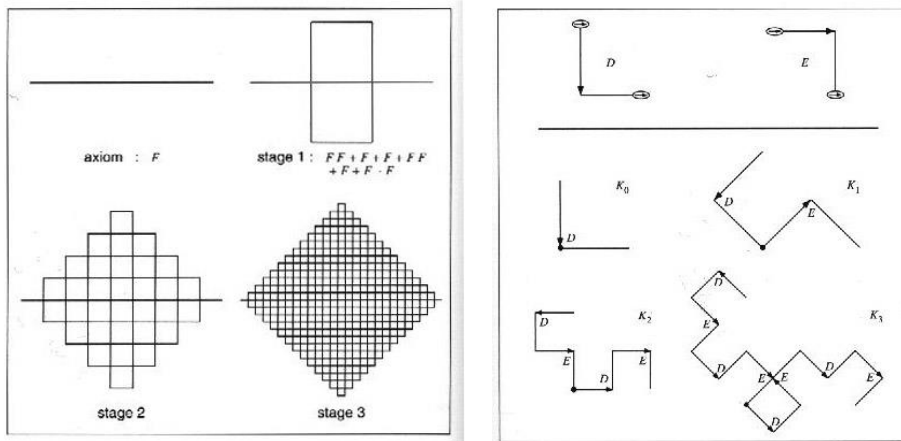


Dračia krivka

- L-systém: Dračia krivka
- Axióma: D
- Výrobné pravidlá:
 - $D \rightarrow -D + + E$
 - $E \rightarrow D --E +$
 - $+ \rightarrow + ; -- \rightarrow -$
- Parameter: uhol = 45°
- $D = --F + + F; E = F --F + +$



Príklady



Fraktálna dimenzia

- Pre krivky a interpretáciu korytnačej grafiky
- $\log(N)/\log(d)$
- N = efektívna vzdialenosť od začiatku až do koncového bodu po i -tom kroku
- d = vzdialenosť od začiatku do konca bodu, v krokoch korytnačky



Kefy a stromy

- Štruktúra vetvenia nemôže byť opísaná lineárnym sekvenčným zoznamom
- Preto treba 2 nové symboly: [a]
- Ľavá zátvorka uloží aktuálny stav korytnačky na zásobníku, pravá zátvorka stav zo zásobníku vyberie a nastaví
- V zátvorkách sú vetvy



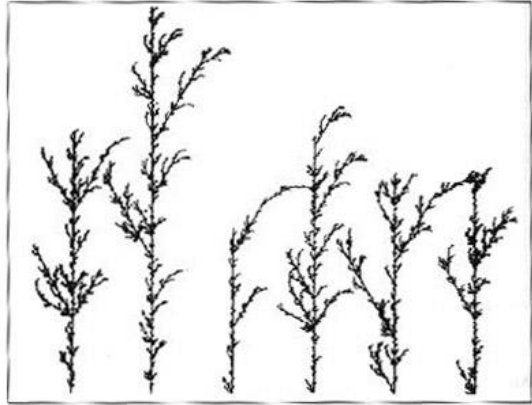
Burinovitá rastlina

- L-systém: Burinovitá rastlina
- Axióma: F
- Výrobné pravidlá:
$$F \rightarrow F[+F]F[-F]F$$
$$+ \rightarrow + ; -- \rightarrow -$$
- Parameter: uhol = 25.7°

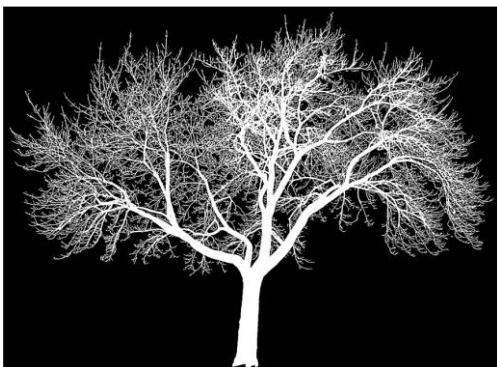
Náhodné burinovitě rastliny

- L-systém: Náhodná burina
- Axióma: F
- Výrobné pravidlá:
 - F \rightarrow F[+F]F[-F]F (prob. 1/3)
 - F \rightarrow F[+F]F (prob. 1/3)
 - F \rightarrow F[-F]F (prob. 1/3)
 - + \rightarrow + ; -- \rightarrow -
- Parameter: uhol= 25.7°

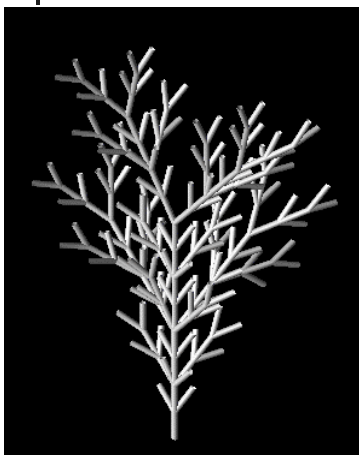
Buriny



Viac príkladov



Viac príkladov 2



Viac a viac príkladov



Koniec

Koniec Časti 7

Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015



Fraktály

Časť 8 : Náhodnosť



*Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Veronika Šprláková, 2015
Department of Applied Informatics*

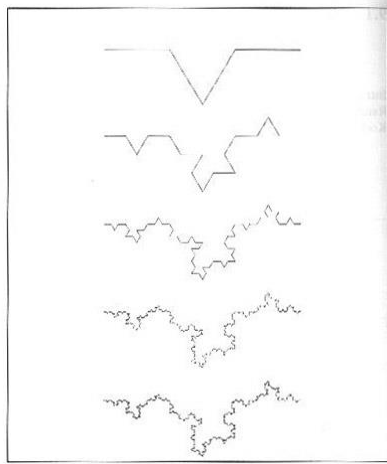
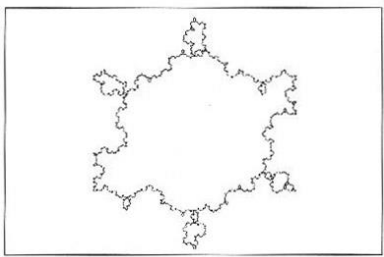


Prečo náhodnosť?

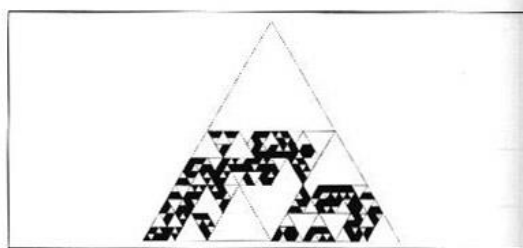
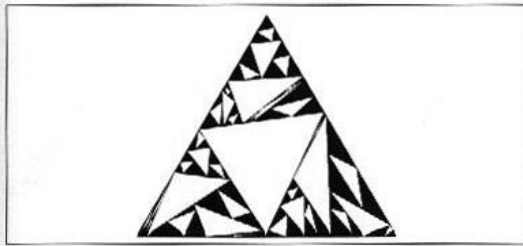
- Zovšeobecnená množina tvarov
- Viac prírodné
- Prísna nesamo-podobnosť
- Často používaný Brownov pohyb
- Pre každý typ fraktálov
- Použitie náhodnosti v akomkoľvek kroku iterovania



Klasické fraktály - Koch



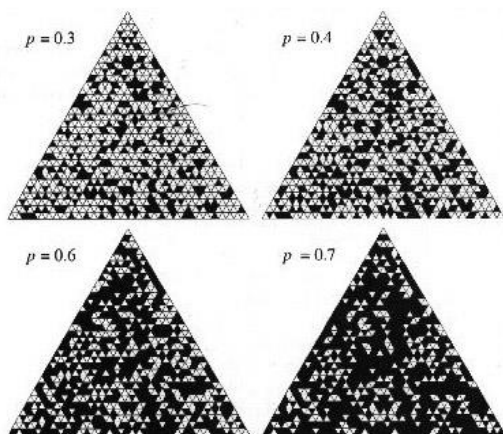
Sierpinski



Cedenie (perkolácia)

- Dané trojuholníkové priehradky
- Dana pravdepodobnosť p
- Farba pre podtrojuholník s pravdepodobnosťou
- Kontrola počtu disjunktných častí
- Veľá \rightarrow jeden klaster = cedenie
- p_c – prah cedenia

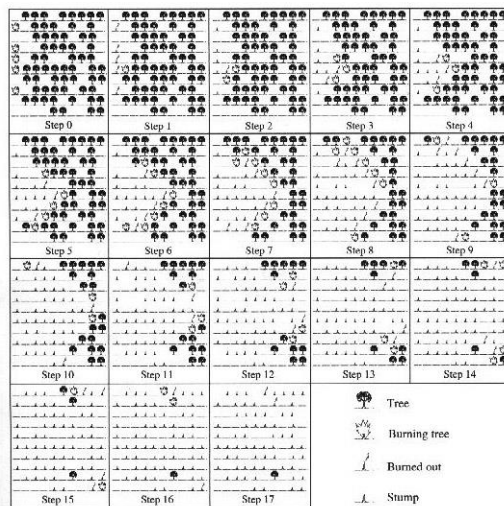
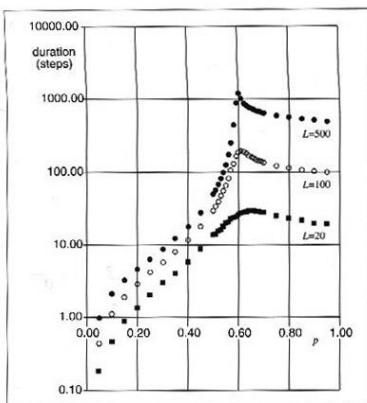
Cedenie 2



Simulácia lesného požiaru

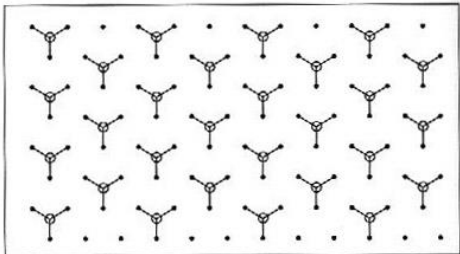
- Štvorcová mriežka
- Stromy s pravdepodobnosťou p
- Pre $p > p_c$ celý les zhorí
- Pre $p < p_c$ len časť lesa zhorí
- Pre $p = p_c$ les bude horieť najdlhšie
- $p_c \sim 0.5928$

Simulácia lesného požiaru 2



Renormalizácia

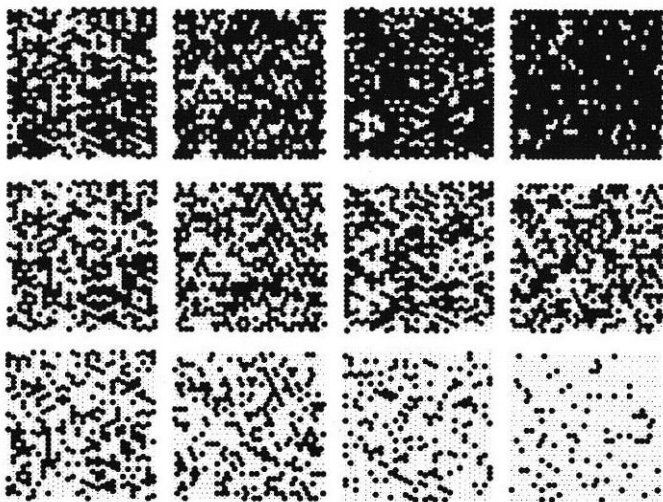
- Pre trojuholníkovú mriežku
- Miesta \rightarrow super-miesta
- Super-miesto je obsadené, ak sú dve alebo tri miesta obsadené



Renormalizácia 2

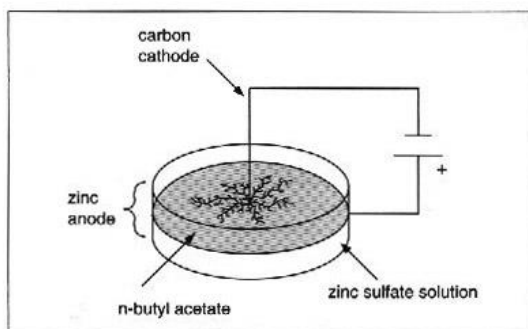
- S $p' > p$ vyplňame medzery (gaps)
- S $p' < p$ klastre zmiznú
- $p' = p$ očakávame, že sú podobné
- $p' = p_3 + 3p_2(1-p)$
- $p = p_c = 0.5$
- Štatistická samo-podobnosť

Renormalizácia 3

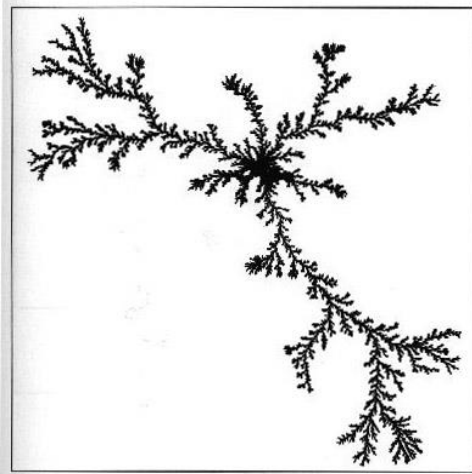


Častice sa zhukujú (agregácia)

- Laboratórny experiment
- Zinkovo-kovové listy, prírodný proces



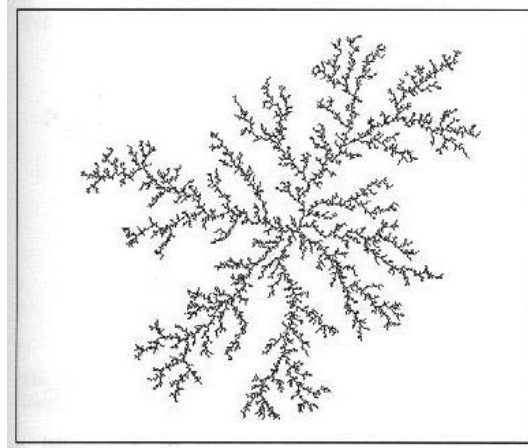
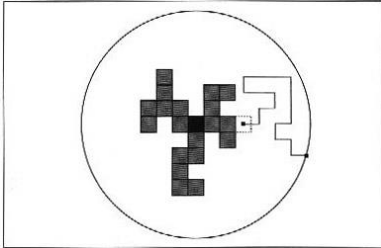
Výsledok



Metóda DLA

- Častice pohybujúce sa Brownovým pohybom
- **If comes to sticky particle, it stops and becomes sticky**
- Robí s inou časticou
- Simulácia použitím pixlov
- Diffusion Limited Aggregation (difúziou obmedzená agregácia)

Simulácia DLA



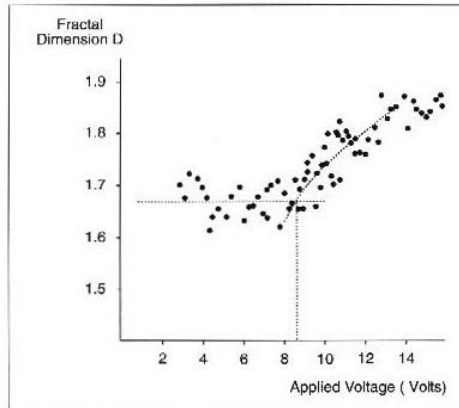
Problémy

- Aká je fraktálna dimenzia?
- Hustota častíc od stredu klesá. Platí na ňu nejaký mocninou vyjadriteľný zákon?
- Je vzťah medzi počtom voltov napätia a výslednou fraktálnou dimenziou?
- Je veľkosť agregátu (zhľuku) vo vzťahu k fraktálnej dimenzii?

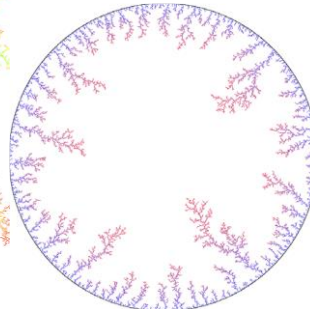
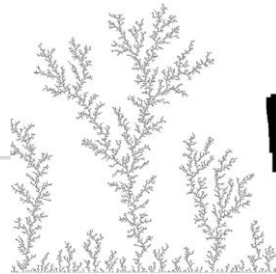
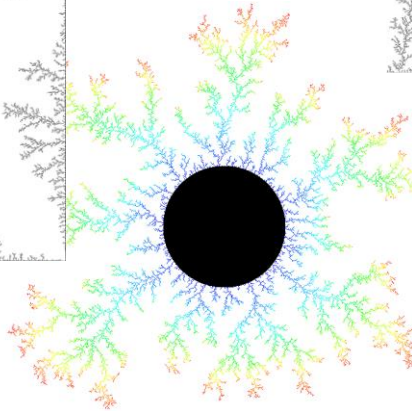
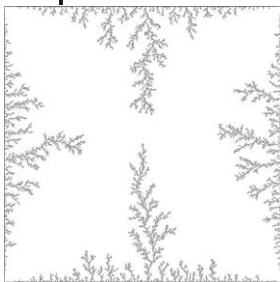


Problémy 2

- Neuspokojivé riešenia týchto problémov
- $D \sim 1.7$

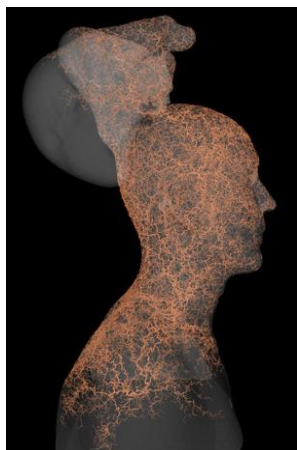
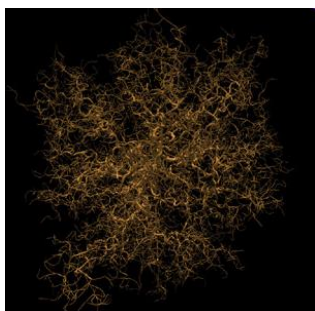


Ďalšie DLA



3D DLA

- local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/dla3d/



Použitie DLA & perkolácia

- Distribúcia galaxií
- Mikrokozmos
- Porézne médiá
- Mraky, zrážky plochy
- Simulácia rastu
- Kryštály



Brownov pohyb

- "Chaotický" pohyb častíc
- Príbuzný s Gausovskou distribúciou
- Štatistický samo-podobný fraktál
- Základ pre iné štatistické fraktály



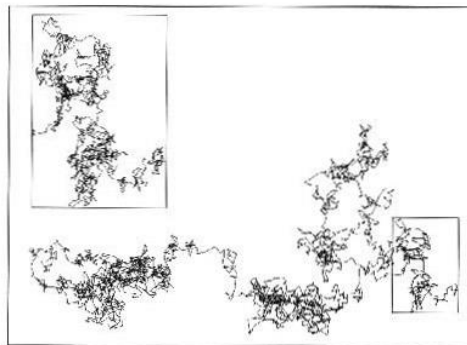
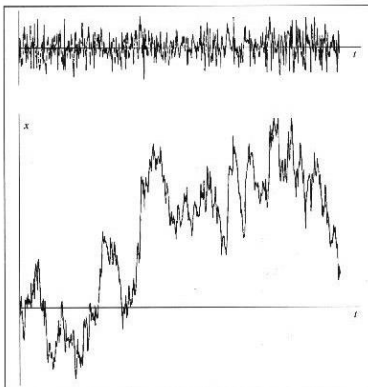
Gausovské náhodné čísla

- A ... horná hranica náhodného generátora
- N ...použitý počet čísel
- Y_1, \dots, Y_n výsledky generátora
- Aproximácia Gausovskej náhodnej premennej

Simulácia Brownovho pohybu

- 1D simulácia
- Spracovanie v t s jednotkovými krokmi
- $X(0)=0$
- $X(k\Delta t)=D_1+\dots+D_k; k=1,2,3,\dots$
- Použitie Gausovských náhodných čísel ako posunutie
- Škálovanie: v x 2-krát, v y $\sqrt{2}$ -krát

Simulácia Brownovho pohybu 2





Stred posunutia

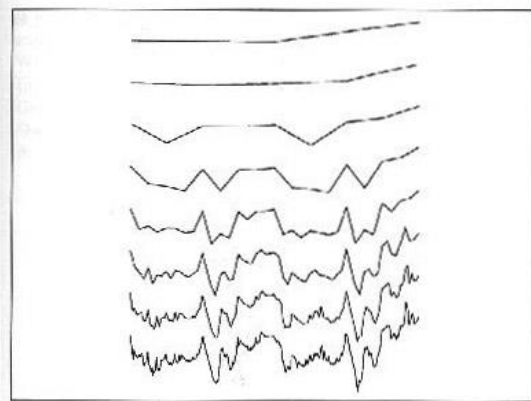
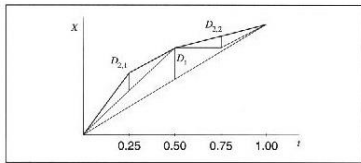
- V každej etape pre každý riadok premiestniť stred v y-smere s Gausovským náhodným číslom vynásobené škálovaním
- $X(0)=0$; $X(1)=GRN$
- $X(1/2)=(1/2)*(X(0)+X(1))+D1/\text{sqrt}(2)$
- Rekurzívny algoritmus



Hurstov exponent

- Je možné zovšeobecniť pomocou parametra H
- V i-tom kroku, násobiť Gausovské náhodné číslo o 2^{-Hi}
- H –Hurstov exponent, $0 < H < 1$
- Krivky $D = 2-H$
- Povrchy $D = 3-H$

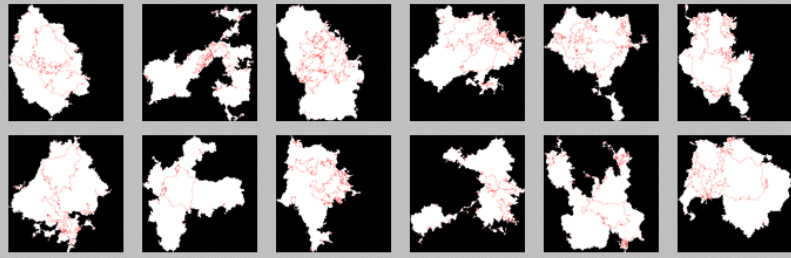
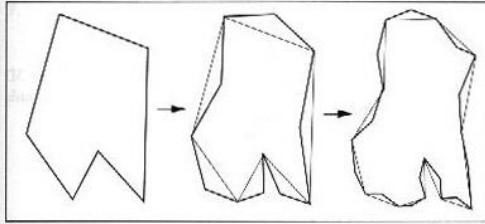
Stred posunutia 2



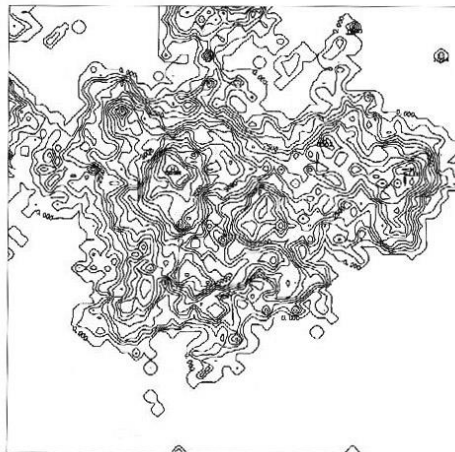
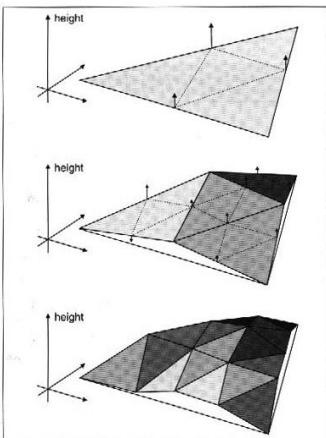
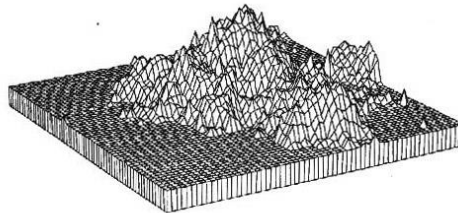
Stred posunutia (pokr.)

- Modelovanie prírodných objektov
- Pobrežná čiara = pôvodný uzavretý polygón,
- Krajina = rozšírenie 2D, delenie trojuholníkov alebo štvorcov
- Falošné mraky = farebná výšková mapa
- Pravé mraky = mapa bodov nad prahom

Pobrežná čiara

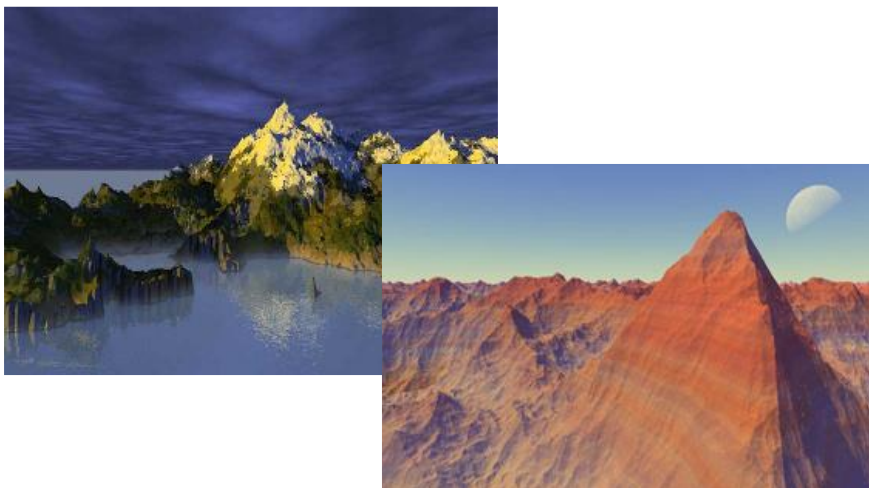


Krajina





Krajina 2



Koniec

Koniec Časti 8

Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015



Fraktály

Časť 9 : Chaos & čudné atraktory



*Martin Samuelčík, samuelcik@sccg.sk, preklad: Andrej Ferko, 2015
Department of Applied Informatics*



Teória chaosu

- Vychádza z objavu H. Poincaré (1854–1912)
- Deterministický chaotický systém
- Niekedy ťažké vypočítať vlastnosti
- Veľa náhlych nepredvídateľných zmien
- Správanie sa iterácií (riešenie diferenciálnych rovníc)
- Efekt motýlich krídel (Butterfly effect)



Princípy teórie chaosu

- Citlivosť, napínanie (stretching) – stav citlivý na počiatočné podmienky
- Miešanie – z daného stavu do akéhokoľvek stavu
- Skladanie (folding) – stavy zostávajú v nejakej uzavretej množine
- Periodické body – stav sa periodicky opakuje
- Miešanie a periodické body -> citlivosť

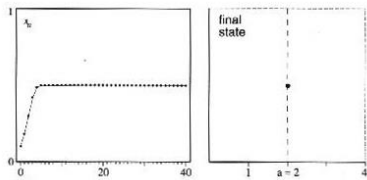


Kvadratický iterátor

- Jednoduchá kvadratická rovnica
- $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$
- Simulácia populačného rastu
- Pozorovaním iterácií, pre akékoľvek a môžeme nájsť rôzne správanie
- a spravidla z intervalu $[0,4]$
- Vykresliť konečnosťový diagram

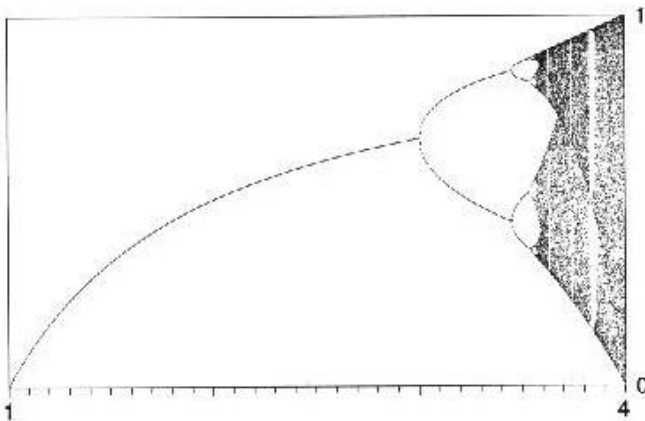
Konečnostavový diagram

- Výpočet iterácií pre dané a
- Zvolíme počiatočnú hodnotu $x_1 \in [0,1]$
200 iterácií x_1, \dots, x_{200}
- Vynechať prvých 100 iterácií
- Zobrazit' ostávajúce iterácie v diagrame



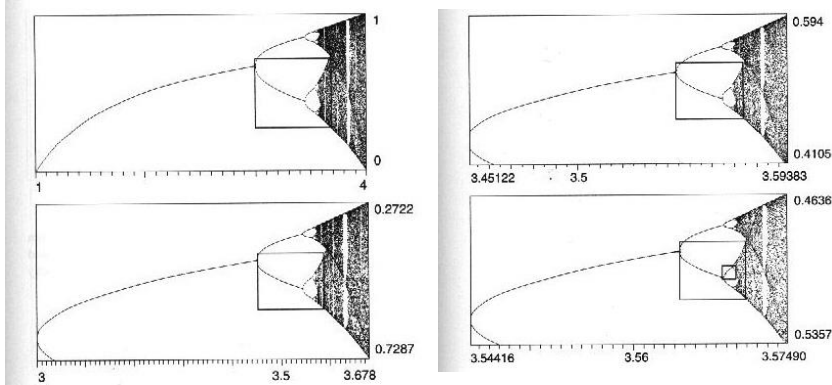
Celý diagram

- Feigenbaumov diagram



Zdvojnásobenie periódy

- Každá vetva bifurkuje do dvoch nových
- Samopodobnosť



Feigenbaumov bod

- Limita vetvení v diagrame
- Koniec zdvojnásobovania períód v strome
- Začína sa oblasť prevládajúceho chaosu
- $a = s_{inf} = 3,5699456\dots$
- Feigenbaumova konštanta = pomer dĺžky dvoch susedných vetiev
- $\delta = 4,6692\dots$

Iterácie

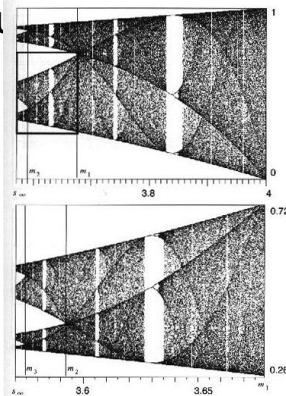
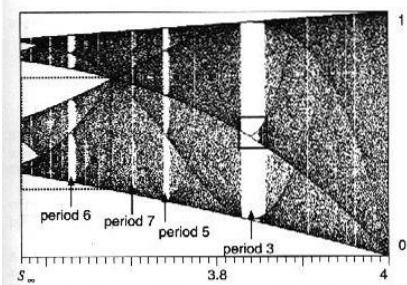
- $a \in (0,1)$ – limita = 0
- $a \in [1,2]$ – limita = $(a-1)/a$, konvergujú rýchlo
- $a \in [2,3]$ – limita = $(a-1)/a$, fluktuácie okolo hodnoty $a = 2$
- $a \in [3, 1+\sqrt{6}]$ – limita osciluje medzi dvomi hodnotami, koreňmi kubickej funkcie $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2x_0)^{2^n}$
- $a \in [3, 3.5699\dots]$ – časť so zdvojnásobovaním períód
- $a \in [3.5699\dots, 4]$ – chaotická časť
 - $a=4$

Periodické pre racionálne θ

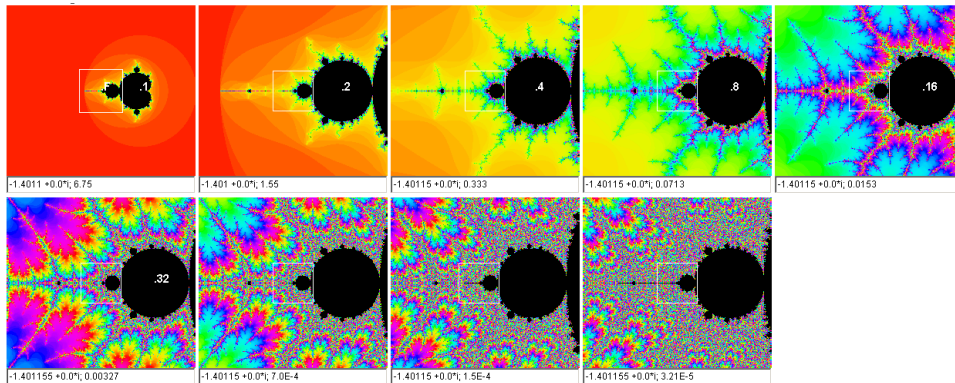
$$x_{n+1} = \sin^2(2^n \theta \pi) \quad \theta = \frac{1}{\pi} \sin^{-1}(x_0^{1/2})$$

Pozorovanie v oblasti chaosu

- Sú tam napichnuté pásy na začiatku
- a obsahuje δ (Feigenbaumov bod)
- Sú tam periodické okná (prázdne pruhy, ostrovy stability)



Mandelbrot <-> Feigenbaum



Diferenciálne rovnice

- Numerické riešenia

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

- Eulerova metóda

$$t_n = t_0 + nh \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

- Runge–Kutta 4. rádu

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & k_1 &= hf(t_n, y_n), \\
 t_{n+1} &= t_n + h & k_2 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1), \\
 & & k_3 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2), \\
 & & k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3).
 \end{aligned}$$



Dynamické systémy

- Založené na reálnych pozorovaniach alebo teoretických výpočtoch
- Riešenie dynamického systému alebo opakovanými transformáciami
- Vykresľuje podivné tvary v 2D, 3D
- Atraktory takýchto systémov



Dynamické systémy 2

- Štartovacie podmienky x_0, y_0, z_0
- Počet iterácií
- Parametre p_0, \dots, p_n
- for ($n=0$ až počet iterácií) do
 - $x_{n+1} = f_1(x_n, y_n, z_n, p_0, \dots, p_n)$
 - $y_{n+1} = f_2(x_n, y_n, z_n, p_0, \dots, p_n)$
 - $z_{n+1} = f_3(x_n, y_n, z_n, p_0, \dots, p_n)$
 - $paint_point(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$

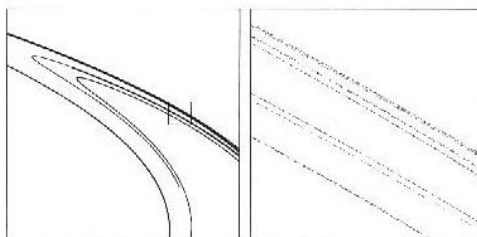
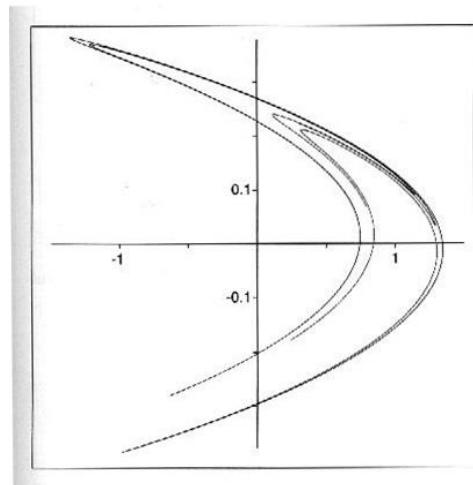


Henonov atraktor

- Francúzsky astronóm Michel Henon
- $H(x,y) = (y+1-ax^2, bx)$
- Výpočty orbity transformácie
- $a=1,4; b=0,3$
- Odchytová oblasť $R =$ štvoruholník pre orbity z východiskových bodov

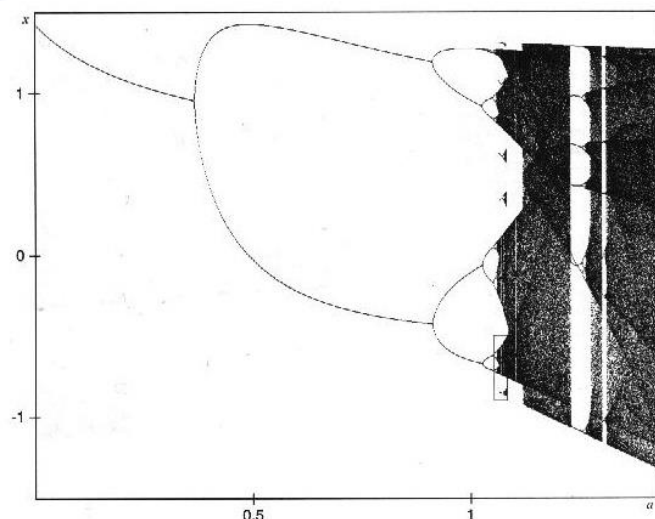


Henonov atraktor 2





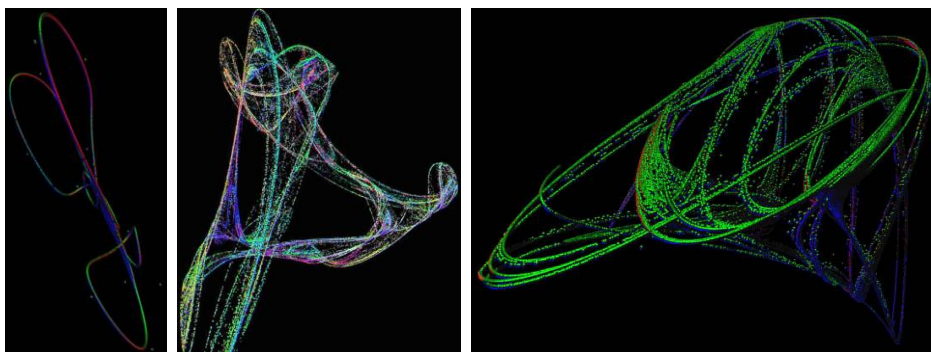
Feigenbaumov scenár pre H.A.



Zovšeobecnené kvadratické zobrazenia

$$x_{n+1} = a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + a_4 x_n y_n + a_5 y_n + a_6 y_n^2$$

$$y_{n+1} = a_7 + a_8 x_n + a_9 x_n^2 + a_{10} x_n y_n + a_{11} y_n + a_{12} y_n^2$$

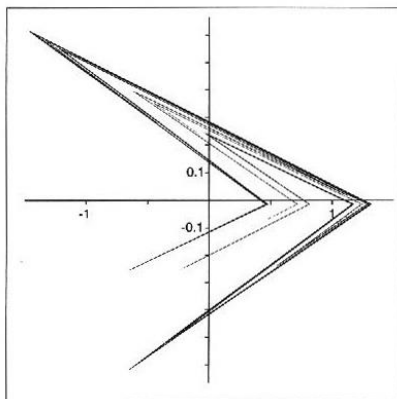


Podivuhodné (strange) atraktory

- Ozn. A – chaotický a podivný atraktor
- R – odchyťová oblasť (trapping region)
- 1. R susedí s A
- 2. Orbity z R sú citlivé na počiatkové podmienky
- 3. Atraktor má fraktálnu štruktúru
- 4. A nemožno rozdeliť do dvoch atraktorov

Loziho podivný atraktor

- $H(x,y)=(1+y-a/x, bx)$
- $a=1,7; b=0,5$

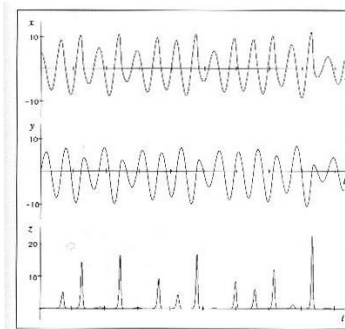


Rosslerov atraktor, R. A.

- Systém diferenciálních rovnic
- $x' = -(y+z)$
- $y' = x + ay$
- $z' = b + xz - cz$
- Základné geometrická konštrukcia chaosu v spojitéch systémoch
- $a = b = 0,2$

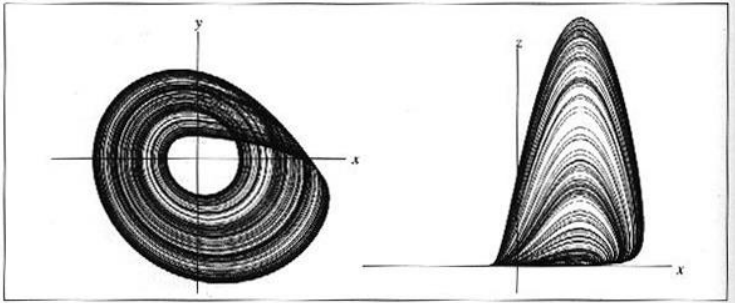
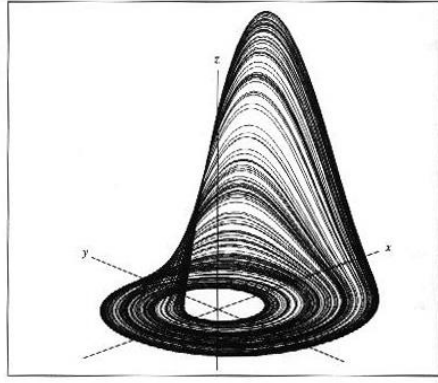
Rosslerov atraktor 2

- Rovnica sa numericky vyhodnotí
- Riešením je trajektória s časovým parametrom so štartom v počiatočnom bode
- $c = 5,7$ ->

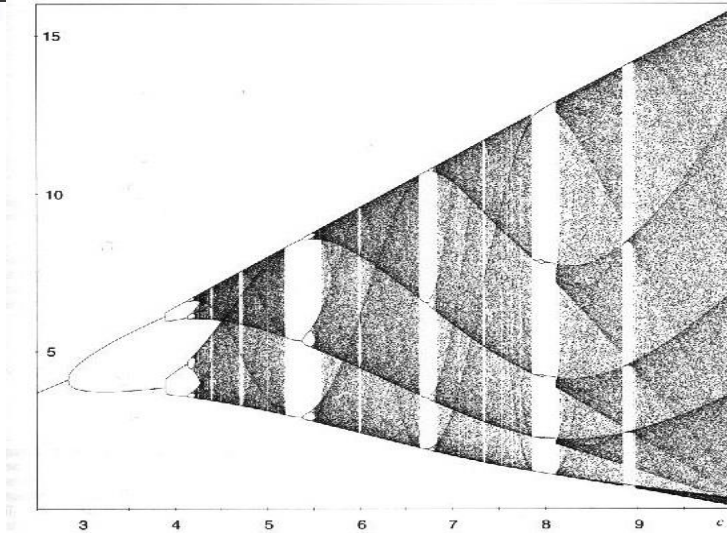




R. A. 3



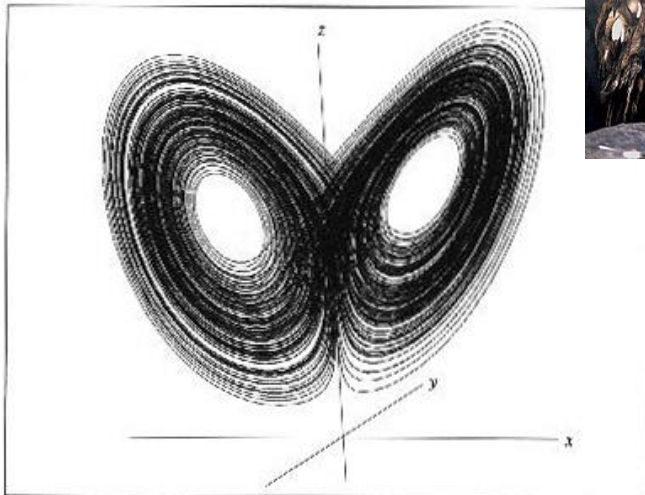
Feigenbaumov scenár pre R.A.



Lorenzov atraktor

- Takisto systém diferenciálnych rovníc
- $x' = \delta(-x+y)$
- $y' = Rx - y - xz$
- $z' = -Bz + xy$
- $\delta = 10; B = 8/3; R = 28$
- Na základe pozorovania prúdenia a teploty kvapalín

Lorenzov atraktor 2

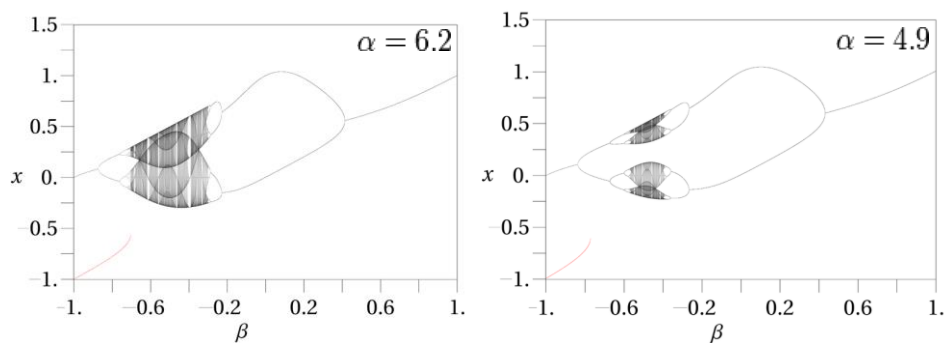


Dimenzia atraktorov

- Experimenty ukazujú, že metóda box-counting nedáva presné výsledky
- Riešením je vypočítať počet boxov v súvislosti s veľkosťou boxu a číselných parametrov S.A.
- Tie majú napríklad dimenzie v rozpätí
 - Lorenz – 2.06 ± 0.01
 - Hénon – 1.261 ± 0.003
 - Feigenbaum ($a = 3.5699456\dots$) – ± 0.538

Gaussova transformácia

- Nelineárne iterácie $x_{n+1} = \exp(-\alpha x_n^2) + \beta,$
- Prezývka "mouse map"

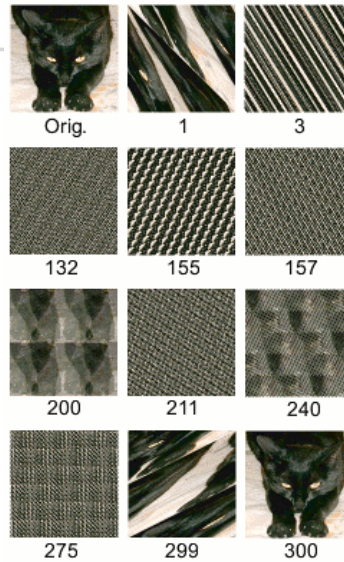


Arnoldova mačka

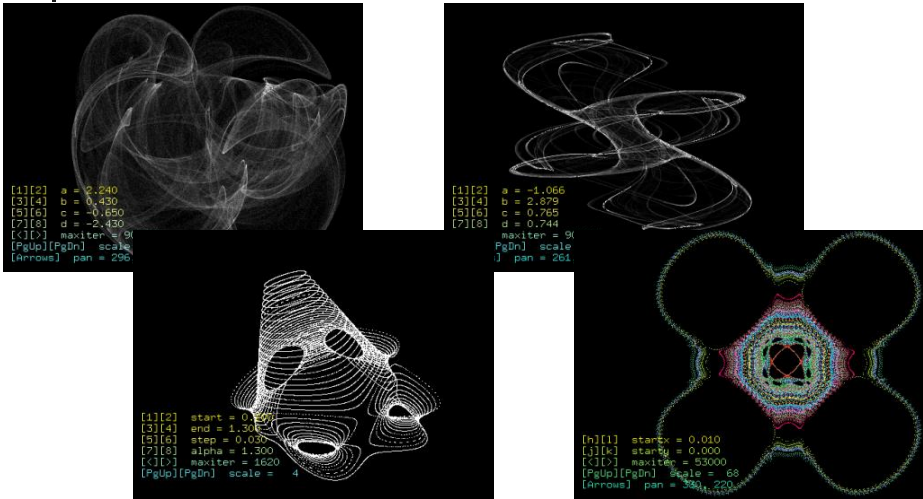
- "Podivná" transformácia obrazu
- Iterácie pixla $[p_t, q_t]$ v čase t

$$q_{t+1} = 2q_t + p_t \pmod N$$

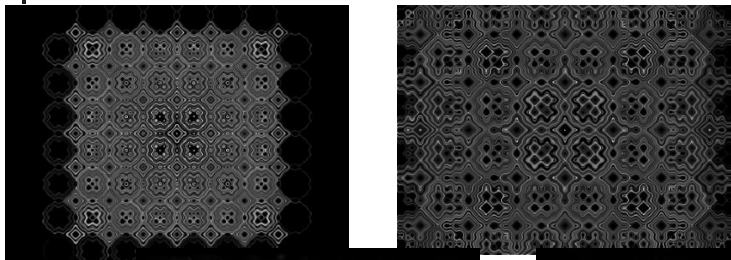
$$p_{t+1} = q_t + p_t \pmod N$$
- $0 \leq p_t, q_t < N$
- N – šírka, výška obrazu
- Možno dokázať, že počet iterácií potrebných na obnovenie obrazu nikdy neprekročí $3N$
- Arnoldovo „mačacie zobrazenie“



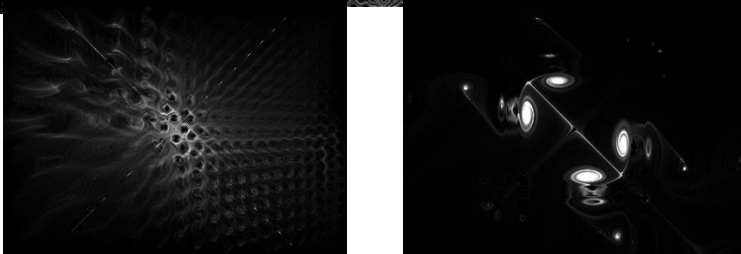
Ďalšie dynamické systémy



Zmenou východiskovej pozície



Podobné
vizuálne na
Chladniho
obrazce
Pozn. prekl.

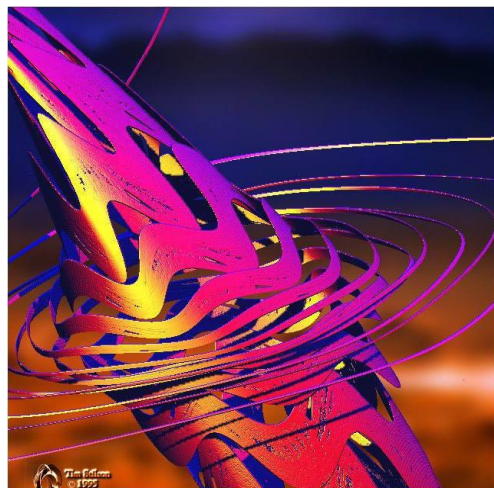


Známe S. A.





Známe S. A. 2



Koniec

Koniec Časti 9

Slovenský preklad anglického originálu pre projekt KEGA
"Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky"
(KEGA 094UK-4/2013), FMFI UK 2015