2. Okruhy a ideály

10. Nech R je okruh a $G \subset R$ je ľubovoľná neprázdna množina. Ukážte, že

$$(G) = \{r_1 g_1 + r_2 g_2 + \cdots + r_k g_k\}$$

(t.j. konečné kombinácie prvkov z G s koeficientami z R) je ideál v R.

11. V okruhu $\mathbb{Q}[x]$ majme ideál $I = (f, g)$, kde

$$f = x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x - 3$$
$$g = x^5 - 3x^3 + 2x^2.$$

Nájdite polynóm h taký, že $I = (h)$, a vyjadrite tento polynóm ako kombináciu f a g nad $\mathbb{Q}[x]$, t.j. nájdite polynómy $u, v \in \mathbb{Q}[x]$, pre ktoré platí

$$h = u.f + v.g$$

12. Nech R je okruh a nech $I, J \subset R$ sú ideály.

(a) Ukážte, že IJ aj $I \cap J$ sú ideály.
(Množina IJ pozostáva z prvkov $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$, kde $a_i \in I$, $b_i \in J$.)

(b) Rozhodnite, či platí $IJ = I \cap J$.

13. Nech R je okruh a nech $I, J \subset R$ sú ideály. Definujme $I + J := \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$. Ukážte, že $I + J$ je ideál v okruhu R. (Pozn.: $I + J$ je najmenší ideál obsahujúci I a J.)

14. (m) Nech R je okruh a nech $I, J \subset R$ sú ideály. Definujme $I : J := \{a \mid ab \in I\ \forall b \in J\}$.

(a) Ukážte, že $I \subset I : J$.
(b) Ukážte, že $I : J$ je ideál v okruhu R.
(c) Pre $I = (x^3 y^2, x^2 y^3, y^4)$, $J = (x)$ nájdite $I : J$.
(d) Pre $I = (x^3 y^2, x^2 y^3, y^4)$, $J = (x^2)$ nájdite $I : J$.

15. V okruhu R uvažujme rastúcu reťaz ideálov $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots$. Ukážte, že

$$I_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$$

je ideál v R.

16. Nech R je okruh a nech $I \subset R[x]$ je ideál. Pre každé $m \in \mathbb{N}_0$ uvažujme množinu

$$J_m = \{a_m \in R \mid a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 \in I \text{ pre nejaké } a_0, \ldots, a_{m-1} \in R\},$$

čiže J_m pozostáva z vedúcich koeficientov polynómov v I, ktoré sú stupňa m, a nuly.

(a) Ukážte, že J_m je ideál v R.
(b) Ukážte, že $J_m \subset J_{m+1}$ pre všetky $m \in \mathbb{N}_0$.