3. Ideály a variety, Hilbertova veta o báze

17. Zistite, či dané dve sústavy určujú tú istú lineárnu varietu v $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, teda či platí $V(f_1, f_2(, f_3)) = V(g_1, g_2)$:

(a) $f_1 = x + y + z - 1, f_2 = x - y + 2z - 4,$
$g_1 = x + 5y - z + 5, g_2 = 3x + y + z - 2.$

(b) $f_1 = 2x + 3y - z, f_2 = x + y - 1, f_3 = x + z - 3,$
$g_1 = x + 3y - 2z + 3, g_2 = y - z + 2.$

(c) Navrhnite algoritmus, ktorý pre lineárne variety $X_1 = V(f_1, \dots, f_r)$, $X_2 = V(g_1, \dots, g_s) \subset \mathbb{A}^n$ rozhodne, či $X_1 = X_2$ ($f_i, g_j \in k[x_1, \dots, x_n]$ sú lineárne polynómy).

18. Dvojbodovú množinu z prednášky $X = \{(1, 2), (3, 4)\} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{Q})$ vieme popísať viacerými spôsobmi ako riešenie sústavy polynomických rovníc. Ukážte, že

$$((x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 2, x - y + 1) = ((x - 1)(x - 3), x - y + 1).$$

Čiže obe sady polynómov generujú ten istý ideál. (Ide o silnejšie tvrdenie, než že obe sady polynómov popisujú tú istú algebraickú varietu.)

19. (m) Nech pole k je nekonečné a nech $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ je konečná množina. Vieme už, že X je algebraická varieta. Ukážte, že existuje n polynómov $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $X = V(f_1, \dots, f_n)$. (Nápoveda: interpolácia.)

20. Nech $I, J \subset k[x_1, \dots x_n]$ sú ideály a nech $X = V(I)$, $Y = V(J)$ sú zodpovedajúce variety. Čo viete povedať o varietách $V(IJ)$, $V(I \cap J)$, $V(I + J)$? Svoje tvrdenie dokážte.

21. (m) Nech k je pole. Je okruh $k[x_1, x_2, \dots]$ polynómov s nekonečne veľa premennými noetherovský?

22. (m) Uvažujme množinu reálnych funkcií spojitých na intervale $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Táto množina tvorí okruh. Ukážte, že tento okruh nie je noetherovský.

23. Nech $S \subset \mathbb{A}^n(k)$ a nech $I(S) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ je definovaná ako na prednáške. Ukážte, že $I(S)$ je ideál v okruhu $k[x_1, \dots, x_n]$.

24. Dokážte tvrdenie z prednášky:
Nech $F, G \subset k[x_1, \dots, x_n]$ a nech $S, T \subset \mathbb{A}^n(k)$. Platí

(i) Ak $F \subset G$, potom $V(F) \supset V(G)$.
Ak $S \subset T$, potom $I(S) \supset I(T)$.

(ii) $V(I(S)) \supset S$.
$I(V(F)) \supset F$.

(iii) $V(I(V(F))) = V(F)$.
$I(V(I(S))) = I(S)$.

(Dôkazy tvrdení (i) a (ii) sú len prepisovaním definícií pre $V()$ a $I()$. Tvrdenie (iii) potom vyplýva z (i) a (ii).)