

5. ZARISKIHO TOPOLOGIA.

- 33.** (mpg) Doplňte dôkaz lemy z prednášky: ukážte, že ak $f, g \in k[x, y]$, kde f je ireducibilný a $f \nmid g$ v $k[x, y]$, tak za predpokladu, že x sa v polynóme f vyskytuje (t.j. $f \notin k[y]$), platí $f \nmid g$ v $k(y)[x]$.
- 34.** (m) Nech X je ireducibilný topologický priestor. Ukážte, že každá neprázdna otvorená množina v X je hustá.
- 35.** Nech $S \subset \mathbb{A}^n$ je ľubovoľná množina. Ukážte, že $V(I(S)) = \overline{S}$, kde symbolom \overline{S} označujeme uzáver množiny v Zariskiho topológii na \mathbb{A}^n . Inými slovami, máte ukázať, že $V(I(S))$ je najmenšia algebraická varieta obsahujúca S . (Zatiaľ sme si to len zbežne a bez dôkazu spomenuli.)
- 36.** (m) Ukážte, že ideál $(xy, yz, xz) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ sa nedá generovať menej ako tromi polynómami.
- 37.** Nech $I = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 - y^2 - z^2 + 1) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$. Nájdite ireducibilné komponenty variety $V(I)$.
- 38.** Nech $I = (x - yz, xz - y^2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$. Nájdite ireducibilné komponenty variety $V(I)$.

Pri dekompozíciách variety na ireducibilné komponenty nemusíte dokazovať, že jednotlivé komponenty sú naozaj ireducibilné, zatiaľ na to nemáte dostatočný aparát.