

## 6. SÚRADNICOVÝ OKRUH ALGEBRAICKEJ VARIETY, MORFIZMUS VARIET.

**39.** Nech  $\varphi$  je ľubovoľný homomorfizmus okruhov (komutatívnych s jednotkou)

$$\varphi: R_1 \rightarrow R_2.$$

*Jadro* homomorfizmu  $\varphi$  je množina

$$\ker \varphi = \{r \in R_1 \mid \varphi(r) = 0\}.$$

Ukážte, že  $\ker \varphi$  je ideál v okruhu  $R_1$ .

**40.** Nech  $\varphi$  je ľubovoľný homomorfizmus okruhov (komutatívnych s jednotkou) a nech  $J$  je ideál v okruhu  $R_2$ .

(a) Ukážte, že vzor ideálu  $J$  v zobrazení  $\varphi$ , t.j. množina

$$\varphi^{-1}(J) = \{r \in R_1 \mid \varphi(r) \in J\}$$

je ideál v okruhu  $R_1$ .

(b) Ukážte, že ak  $J \subset R_2$  je prvoideál, potom aj jeho vzor  $\varphi^{-1}(J) \subset R_1$  je prvoideál.

**41.** Nech  $X = V(x^2 + y^2 - 1, x - 1) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ . Nájdite  $\mathbb{C}[X]$ .

**42.** Nech  $X = V(x^2 + y^2 - 1, y) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ . Nájdite  $\mathbb{C}[X]$ .

**43.** Uvažujte morfizmus  $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  daný predpisom  $\sigma : (x, y) \mapsto (x, xy)$ .

(a) Čo je obrazom  $\mathbb{A}^2$  v tomto zobrazení? Je obraz  $\mathbb{A}^2$  v Zariskiho topológii uzavretou množinou? Je otvorenou?

(b) Nájdite obraz priamky  $V(y - x)$  v tomto zobrazení.

(c) Pokúste sa nájsť obraz jednotkovej kružnice v tomto zobrazení.

(Uvedené zobrazenie je veľmi významným zobrazením v algebraickej geometrii, využíva sa pri štúdiu singularít rovinných kriviek.)

V príkladoch 41 a 42 popíšte bližšie, čo je to za množinu, akú má štruktúru. Nestačí mi len definícia, že  $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x, y]/I(X)$ , kde za  $I(X)$  dosadíte správny ideál.