7. Morfizmy a racionálne zobrazenia

44. (m) Nech afinné algebraické variety X a Y sú izomorfné. Ukážte, že ak varieta X je ireducibilná, potom je ireducibilná aj varieta Y.

45. Pomocou predchádzajúcej úlohy ukážte, že vinutá kubika $V(y-x^2, z-x^3) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ je ireducibilná.

46. (m) Nech matica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

nad nekonečným poľom k je regulárna. Ukážte, že racionálne zobrazenie

$$f: \ \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^1(k), \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

je dominantné. Je f biracionálnou ekvivalenciou?

47. Nech $X = V(y^2 - xz, z^2 - y^3) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. Rozložte X na ireducibilné komponenty. O každej komponente ukážte, že je racionálna (t.j. biracionálna s $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ pre nejaké n).

48. Nech C je kubická krivka $C = V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Ukážte, že funkcia y/x nie je regulárna, t.j. $y/x \notin \mathbb{C}[C]$. V ktorých bodoch krivky C je táto funkcia regulárna?

49. Kubická krivka $C = V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ má v $(0,0)$ tzv. singulárny bod. Krivku načrtnite (jej reálne body). Nájdite biracionálnu ekvivalenciu tejto krivky s afinnou priamkou. (Pomôcka: môžte postupovať podobne ako pri stereografickej projekcii kružnice. Tentokrát veďte priamky cez singulárny bod a body krivky zobrazujte napr. na priamku $x = 1$.)

50. (m) Nech $X \subset \mathbb{A}^n$ je nadplocha definovaná polynómom

$$F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) + F_n(x_1, \ldots, x_n),$$

kde F_{n-1} resp. F_n je homogénny polynóm stupňa $n-1$ resp. n. Ukážte, že ak X je ireducibilná, potom je biracionálne ekvivalentná $\mathbb{A}^{n-1}$.