

## 9. BUCHBERGEROV ALGORITMUS

**55.** Použite Buchbergerov algoritmus na nájdenie Gröbnerovej bázy ideálu  $(z - x^5, y - x^3) \subset k[x, y, z]$ . Použite

- (a) lexikografické usporiadanie ( $x > y > z$ ),
- (b) graduované reverzné lexikografické usporiadanie.

Uveďte aj všetky výpočty a redukcie S-polynómov.

**56.** (m) Buchbergerov algoritmus je zovšeobecnením špeciálnejších algoritmov, ktoré už poznáte. Skúste ich identifikovať:

- (a) Nech  $I = (f, g) \subset k[x]$  je ideál v okruhu polynómov o jednej premennej. Čo viete povedať o Buchbergerovom algoritme v tomto prípade? (Pomôcka: možno si vyskúšajte na príklade: pre  $I = (x^3 - 1, x^5 - 1) \subset \mathbb{R}[x]$  overte (Buchbergerovým algoritmom), či  $x^3 + x^2 - 2$  patrí do  $I$ .)
- (b) Nech  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  je ideál generovaný lineárnymi polynómami (čiže popisujúci lineárnu varietu). Čo viete povedať o Buchbergerovom algoritme?

**57.** Nech

$$g_1 = y^3 + 3y^2z^3, \quad g_2 = xyz + 3xz^4, \quad g_3 = 4x^2z - 7y^2$$

sú polynómy v  $k[x, y, z]$  a nech  $I = (g_1, g_2, g_3)$  je ideál. Uvažujme lexikografické usporiadanie monómov s  $x > y > z$ . Je možné nájsť  $g \in I$  také, že

$$\text{LT}(g) \notin (\text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2), \text{LT}(g_3))?$$

Ak áno, nájdite taký polynóm. Ak nie, dokážte.