

10. ELIMINÁCIA POMOCOU GRÖBNEROVÝCH BÁZ

58. Vyriešte pomocou Gröbnerových báz:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\x^2 + 2y^2 &= 5, \\xz &= 1.\end{aligned}$$

59. Zistite, či

- (a) $x + y \in \sqrt{(x^3, y^3, xy(x+y))}$,
 (b) $x^2 + 3xz \in \sqrt{(x+z, x^2y, x-z^2)}$.

60. (m) Varieta sečníc krivky nech je množina pozostávajúca z bodov priamok, ktoré pretínajú danú krivku v aspoň dvoch bodoch.

- (a) Ukážte, že varietou sečníc vinutej kubiky je celý priestor \mathbb{A}^3 . Návod: využite parametrizáciu vinutej kubiky, parametrizujte sečnicu a tak získate parametrizáciu variety sečníc.
 (b) Ukážte, že sečnice nepokryjú celý afinný priestor \mathbb{A}^3 .

61. (m) *Whitneyho dáždňik* je plocha daná parametricky

$$\begin{aligned}x &= uv, \\y &= v, \\z &= u^2.\end{aligned}$$

- (a) Nájdite rovnice najmenej variety obsahujúcej Whitneyho dáždňik.
 (b) Ukážte, že nad \mathbb{C} pokrýva parametrizácia celú varietu, nad \mathbb{R} ale nie. Ktoré body variety nie sú nad \mathbb{R} pokryté?
 (c) Ukážte, že parametre u, v nie sú vždy jednoznačne určené súradnicami x, y, z . Nájdite body, kde jednoznačnosť zlyháva.

Pri riešení si pomôžte nejakým systémom počítačovej algebry:

- napríklad Singular (<https://www.singular.uni-kl.de/>),
- alebo Maximu (<https://maxima.sourceforge.io/>),
- alebo Sage (<https://sagecell.sagemath.org/>),
- alebo hociaký iný, ak ste sa s nejakým už stretli.