

## 11. REZULTANTY

**62.** Nech  $f, g \in k[x]$  ( $k$  je pole), nech  $f$  je stupňa  $m$  a  $g$  je stupňa  $n$  ( $m, n > 0$ ). Ukážte:

- (a)  $\text{Res}(f, g) = (-1)^{mn} \text{Res}(g, f)$ ,  
 (b)  $\text{Res}(af, bg) = a^n b^m \text{Res}(f, g)$ , kde  $a, b \in k$ ,  $a, b \neq 0$ ,

Platia tieto rovnosti aj v prípade, keď  $m = 0$  alebo  $n = 0$ ?

**63.** Nech  $f, g \in k[x]$  ( $k$  je pole), nech  $f$  je stupňa  $m$  a  $g$  je stupňa  $n$  ( $m, n > 0$ ). Ukážte:

- (a)  $\text{Res}(f(x+a), g(x+a)) = \text{Res}(f, g)$ , kde  $a \in k$ ,  
 (b)  $\text{Res}(f(ax), g(ax)) = a^{mn} \text{Res}(f, g)$ , kde  $a \in k$ ,  $a \neq 0$ ,  
 (c) ak 0 nie je koreňom  $f$  ani  $g$ , tak  $\text{Res}(f_r, g_r) = (-1)^{mn} \text{Res}(f, g)$ , kde  $f_r(x) = x^m f(1/x)$  a  $g_r(x) = x^n g(1/x)$ .

**64.** Nech  $f, g \in \mathbb{C}[x]$ . Ukážte, že polynóm  $f(x)g(y) - g(x)f(y)$  je deliteľný polynómom  $x - y$ .

Na základe cvičenia 64 môžeme pre polynómy  $f, g \in \mathbb{C}[x]$  definovať tzv. *Bézoutovu maticu*  $B(f, g) = (b_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$  ( $n = \max\{\deg f, \deg g\}$ ), kde  $b_{ij}$  sú koeficienty polynómu

$$\frac{f(x)g(y) - g(x)f(y)}{x - y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} b_{ij} x^i y^j.$$

**65.** Nájdite Bézoutovu maticu polynómov  $f = 2x^2 - 5$  a  $g = x^3 + 2x$ .

**66.** Porovnajte determinant Bézoutovej matice  $B(f, g)$  a rezultant  $\text{Res}(f, g)$  polynómov  $f = f_2 x^2 + f_1 x + f_0$  a  $g = g_1 x + g_0$  ( $f_2, g_1 \neq 0$ ).

**67.** Majme kubický polynóm

$$p(x) = x^3 + ax^2 + b \in \mathbb{C}[x].$$

Akú podmienku (aké podmienky) musia spĺňať koeficienty  $a, b$ , aby polynóm  $p$  mal dvojnásobný koreň? Viete medzi týmito polynómami nájsť taký, ktorý má trojnásobný koreň?