12. Aplikácie rezultantov

68. Vyriešte pomocou rezultantov nad $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10 \\ x^2 + xy + 2y^2 &= 16. \end{aligned}$$

(Stačí, keď rezultanty použijete na nájdenie jedného priemetu množiny riešení, druhú súradnicu dopočítajte podľa vlastného uváženia.)

69. Zistite, pre ktoré $a \in \mathbb{C}$ má sústava

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x^2 + y^2 &= a^3 \\ x^3 + y^3 &= a^5 \end{aligned}$$

riešenie nad $\mathbb{C}$.

70. Doplňte dôkaz lemy z prednášky:

(a) Ukážte, že ak $f, g \in k[x, y]$, kde f je ireducibilný a $f \nmid g$ v $k[x, y]$, tak za predpokladu, že x sa v polynóme f vyskytuje (t.j. $f \notin k[y]$), platí $f \nmid g$ v $k(y)[x]$.

(b) Overte, že lema platí aj prípade, keď $f \in k[y]$ (t.j. že pre ireducibilný $f \in k[y]$ a pre $g[x, y]$ taký, že $f \nmid g$ majú f a g len konečne veľa spoločných koreňov).

71. Nech $g \in \mathbb{R}[x]$ má korene $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$. Položme $h(x, y) = g(y - x) \in \mathbb{R}[x, y]$. Ako vyzerá množina riešení $h(x, y) = 0$? (Ide o podmnožinu $\mathbb{R}^2$, skúste ju zakresliť.)

72. Nech $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je koreňom polynómu f (nie nutne jediným) a $\beta \in \mathbb{C}$ je koreňom polynómu g. Nájdite polynóm $p \in \mathbb{Q}[x]$, ktorého jedným z jeho koreňov bude $\alpha + \beta$.
(Môžte využiť skúsenosť z predchádzajúcej úlohy: skúmajte spoločné riešenia sústavy $f(x) = 0, g(y - x) = 0$.)

73. Nájdite implicitnú rovnicu krivky v reálnej rovine, ak má táto krivka racionálnu parametrizáciu (tzv. *Descartov list*):

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$