Všeobecné poznámky na úvod

Každý (aj kto sa chce uspokojiť s hodnotením E) by mal ovládať definície: rozumieť, aký pojem definujete, a tiež vedieť definíciu korektne matematicky zapísať. Rozunmieť definícii znamená, že viete rozlíšiť, ktorý objekt, útvar, vzťah, ... definícii vyhovuje a ktorý nie.

Jadrom predmetu je striktné matematické budovanie konkrétnej disciplíny z axióm. Preto nielen od adeptov na známku A či B budem očakávať, že zvládnu predviesť nejaké, aspoň jednoduché dôkazy!

Axiómy incidencie

Definícia. Dve priamky v rovine sa nazývajú *rovnobežnými (rovnobežkami)*, ak nemajú spoločný bod. (Formálne: $p \parallel q \iff p \cap q = \emptyset$.)

Definícia. Body $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sú *kolineárne*, ak existuje priamka so všetkými týmito bodmi incidentná. (Formálne: $B_1, B_2, \ldots$ sú *kolineárne*, ak $\exists p : B_i \in p \ \forall B_i$.)

Tvrdenie. *Ak p, q sú dve rôzne priamky, potom p a q majú najviac jeden spoločný bod. (Formálne: $p \neq q \Rightarrow |p \cap q| \leq 1$.)*

Mali by ste zvládnuť zadefinovať:

- nekolineárne body,
- rôznobežné priamky,
- priesečník priamok.

Vyjasnite si (mali by ste vedieť vysvetliť):

- Čo je to model?
- Čo je to „dokázateľné tvrdenie“? Čo je to „pravdivé tvrdenie“? Aký je medzi týmito dvoma pojmami rozdiel?
- Čo znamená, že „tvrdenie je nezávislé od axióm?“

Axiómy usporiadania

Definícia.

- *Úsečka* $AB = \{A, B\} \cup \{X \mid A * X * B\}$.
- *Polpriamka* $\overrightarrow{AB} = AB \cup \{X \mid A * B * X\}$
  (tiež $\overrightarrow{AB} = \{X \mid X = A \ \vee \ X = B \ \vee \ A * X * B \ \vee \ A * B * X\}$)

Mali by ste tiež vedieť zadefinovať:

- čo znamená „ležať na tej istej strane“ od danej priamky,
- čo znamená „ležať na opačných stranách“ od danej priamky.
  (Napríklad: $A, B \notin p$ *ležia na opačných stranách* od priamky p, ak $AB \cap p \neq \emptyset$.)

Veta (separačná vlastnosť v rovine, U4S).
V usporiadanej rovine platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia (ide o rôzne formulácie toho istého tvrdenia)

- *Každá priamka delí rovinu na dve polroviny.*
- *Ľubovoľná priamka p delí rovinu okrem bodov priamky p na dve triedy tak, že body ležia v tej istej triede práve vtedy, keď ležia na tej istej strane od priamky p. (t. j. neexistuje bod $X \in p$ taký, že $A * X * B$, kde A a B sú dané body.)*
- *Pre priamku p a body A, B, C neležiace na tejto priamke platí:*

(i) *Ak A a B ležia na tej istej strane od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom aj A a C ležia na tej istej strane od priamky p.*
(ii) *Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na opačných stranách od priamky p, potom A a C ležia na tej istej strane od priamky p.*
(iii) *Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom aj A a C ležia na opačných stranách od priamky p.*

Teraz by ste mali vedieť definovať

- polrovinu,
- vnútorné body polroviny, hranicu polroviny,
- opačnú polrovinu k danej polrovine.

Veta (o usporiadaní štyroch bodov).
Nech $A*B*C$ a $A*C*D$. Potom $B*C*D$ aj $A*B*D$.

Veta (Paschova).
Nech $A*B*C$ a $B*C*D$. Potom $A*B*D$ a $A*C*D$.

Tvrdenie (separačná vlastnosť na priamke, U*).
V usporiadanej rovine platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia (ide o rôzne formulácie toho istého tvrdenia)

- *Každý bod B na priamke p rozdeľuje ostatné body tejto priamky na dve triedy tak, že dva body X a Y neležia v tej istej triede práve vtedy, keď $X*B*Y$.*
- *Nech $A*B*C$ sú body na priamke p. Potom pre každý bod $X \in p$, $X \neq B$ platí, že buď $X \in \overrightarrow{BA}$ alebo $X \in \overrightarrow{BC}$.*
- *Ak $A*B*C$ sú body na priamke p, potom $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = B$ a $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = p$.*

Definícia. Polpriamka $\overrightarrow{AC}$ je *opačnou polpriamkou* k polpriamke $\overrightarrow{AB}$, ak $C*A*B$.

Dôkladné zvládnutie teórie o usporiadanej rovine demonštrujete, ak viete dokázať, že:

- U4P a U4S sú za predpokladu I1-I3, U1-U3 ekvivalentné,
- U* a veta o usporiadaní štyroch bodov sú za predpokladu I1-I3, U1-U3 ekvivalentné,
- U* vyplýva z U4,
- U4 **ne**vyplýva z U*, U4 je silnejšia ako U* (demonštrujete na modeloch).

Určite treba vedieť definovať

- uhol,
- ramená uhla, vrchol uhla,
- vnútorné a vonkajšie body uhla.

Veta (crossbar theorem, veta o priečke uhla). *Nech D je vnútorný bod uhla $\angle ABC$. Potom polpriamka $\overrightarrow{BD}$ pretína úsečku AC.*

Mali by ste zvládnuť zadefinovať:

- trojuholník, jeho vrcholy a strany,
- vnútorné a vonkajšie body trojuholníka (bez použitia Jordanovej vety).

Axiómy zhodnosti

Vyhýbajte sa pojmu „dĺžka úsečky“! Dĺžka úsečky ani veľkosť uhla sa zatiaľ nedajú zadefinovať. To ale vôbec nevadí, bohate si vystačíte s reláciou zhodnosti úsečiek / uhlov.

Geometria axióm zhodnosti pozostáva z viacerých tém:

- aritmetika úsečiek, artimetika uhlov,
- pravý uhol, kolmosť priamok,
- vety o zhodnosti trojuholníkov,
- rôzne iné.

Tieto sú ale svojimi dôkazmi veľmi previazané a nedajú sa preto rozvíjať separátne.

O aritmetike úsečiek: mali by ste vysvetliť, ako a prečo vieme úsečky

- sčítavať (vysvetliť, že korektnosť sčítavania vychádza z axiómy Z3),
- odčítavať (vedieť dokázať korektnosť odčítania, t.j. prečo ak od zhodných úsečiek odčítame zhodné, dostaneme vo výsledku zhodné úsečky - to je neformálny popis, mali by ste to vedieť zapísať aj formálne),
- porovnávať (ukázať, že porovnávanie úsečiek je relácia lineárneho usporiadania).

O zhodnosti trojuholníkov:

Definícia. Trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú *zhodné* (zapisujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$), ak $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$.

Treba poznať a ideálne aj vedieť dokázať prvé vety o zhodnosti trojuholníkov:

- sus, usu,
- a ich dôsledky o rovnoramennom trojuholníku.

O geometrii uhlov: treba vedieť zadefinovať:

- susedné uhly,
- vrcholové uhly,
- pravý uhol,
- kolmosť priamok.

Tvrdenie.

- *Susedné uhly zhodných uhlov sú tiež zhodné.*
- *Vrcholové uhly sú zhodné.*

O aritmetike uhlov:

- zadefinovať, čo znamená, že polpriamka $\overrightarrow{BD}$ leží medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$
- vysvetliť ako a prečo vieme uhly
  - sčítavať,
  - odčítavať,
  - porovnávať.

Rôzne: ďalšie vety o zhodnosti trojuholníkov:

- sss,
- uus,
- Ssu.

Iné vety o geometrii trojuholníka:

- veta o vonkajšom uhle trojuholníka,
- trojuholníková nerovnosť,
- oproti väčšej strane trojuholníka leží väčší uhol (a naopak).

Čosi viac o pravom uhle:

- všetky pravé uhly sú zhodé (Euklidov štvrtý postulát, v Hilbertovom axiomatickom systéme je to dokázateľné tvrdenie),
- konštrukcia kolmice na danú priamku prechádzajúca daným bodom (existencia, jednoznačnosť).

Ďalšie pojmy, na ktoré sa môžem vrámci Hilbertovej roviny pýtať, sú:

- stred úsečky,
- os uhla,
- kružnica a s ňou súvisiace pojmy (na prednáške sme ju síce spomínali až pri axiómach spojitosti, ale všimnite si, že sa dá zaviesť už v Hilbertovej rovine),
- a možno aj iné, o ktorých si myslím, že by ste ich definíciu mali byť schopní zapísať bez toho, aby ste sa ju vopred učili.

Axióma rovnobežnosti

V tejto skupine je jediná axióma, no extrémne dôležitá, preto jej treba dôkladne rozumieť. Možno pomôcka: majme dve priamky $p.q$ preťaté spoločnou transverzálou (= priečkou) a sledujme striedavé uhly pri tejto transverzále. Uvažujme výroky:

- A: „striedavé uhly pri priečke priamok p, q sú zhodné“,
- B: „priamky p, q sú rovnobežné“.

Mali by ste rozumieť a vedieť vysvetliť, že:

- implikácia $A \Rightarrow B$ je tvrdenie, ktoré sa v Hilbertovej rovine dá dokázať,
- implikácia $B \Rightarrow A$ sa dá dokázať, len ak platí aj axióma rovnobežnosti; táto implikácia je v Hilbertovej rovine s axiómou rovnobežnosti ekvivalentná,
- implikáciu $\neg A \Rightarrow \neg B$ by ste mali spoznať v Euklidovom piatom postuláte (obmena predchádzajúcej, ekvivalentná axióme rovnobežnosti).

V axióme rovnobežnosti (Playfairova formulácia) mať jasno, že

- existencia rovnobežky sa dá dokázať: rovnobežku k danej priamke prechádzajúcu daným bodom vieme skonštruovať už v Hilbertovej rovine (ako?),
- postuluje sa len jednoznačnosť rovnobežky.

Vedieť (a ideálne vedieť ukázať), že Playfairova axióma je v Hilbertovej rovine ekvivalentná s týmito tvrdeniami:

- Euklidov piaty postulát,
- „súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je rovný dvom pravým uhlom“.

O Hilbertovej rovine (axióma rovnobežnosti môže platiť, no tiež nemusí) treba vedieť, ideálne aj dokázať, že súčet uhlov v trojuholníku neprevýši dva pravé.

Axiómy spojitosti

Mali by ste vedieť, že existujú alternatívne možnosti, ako vysloviť axiómy spojitosti. My sme si spomenuli tri:

- princípy spojitosti kružnice,
- Hilbertove axiómy (Archimedova axióma a axióma úplnosti),
- Dedekindova axióma (treba vedieť zadefinovať Dedekindov rez).

K Dedekindovým rezom: mali by ste

- rozumieť, že separačná vlastnosť na priamke sa dá sformulovať ako tvrdenie o existencii Dedekindovho rezu,
- rozumieť rozdielu medzi separačnou vlastnosťou na priamke a Dedekindovou axiómou.

Mali by ste poznať nejaké súvislosti medzi rôznymi variáciami axióm spojitosti, prípadne i s presahom do analýzy:

- Dedekindova axióma je ekvivalentná s Bolzanovým výrokom o existencii supréma,
- Hilbertove axiómy sú ekvivalentné s Dedekindovou axiómou (dokazovali sme si len, že Archimedova axióma je dôsledkom Dedekindovej),
- princípy spojitosti kružnice sú dôsledkom Dedekindovej axiómy, avšak naopak to neplatí; princípy spojitosti kružnice sú slabšie.