5. Zadania na cvičenie 19.3.

Axiómy usporiadania

41. Dokončite dôkaz separačnej vlastnosti na priamke: ukážte, že ak $A * B * C$, tak $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = B$

Množina bodov $\mathcal{M}$ sa nazýva *konvexnou*, ak pre každú dvojicu bodov $A, B \in \mathcal{M}$ platí, že celá úsečka AB leží v množine $\mathcal{M}$.

42. Ukážte, že úsečka je konvexná množina.

*** 43.** Na prednáške sme videli, že separačná vlastnosť na priamke je dôsledkom vety o štyroch bodoch:
„Nech $A * B * C$ a $A * C * D$. Potom $B * C * D$ aj $A * B * D$."
Ukážte, že aj naopak táto veta je dôsledkom separačnej vlastnosti na priamke, teda ide (za predpokladu I1,I2,I3, U1,U2,U3, bez použitia U4!) o ekvivalentné tvrdenia.

44. Nech $A * B * C$. Ukážte, že $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$.

Domáca úloha (do 26.3.)

Axiómy usporiadania

45. Nech $A * B * C$ a $B * C * D$. Ukážte, že $BC \subset AD$.

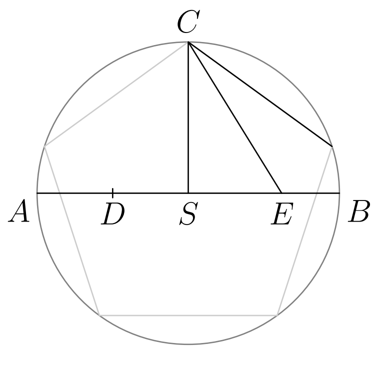
*** 46.** Ukážte, že separačná vlastnosť v rovine (U4S) je ekvivalentná Paschovej axióme. (Na prednáške sme si ukázali, že z U4P vyplýva U4S. Treba ešte ukázať, že za predpokladov I1-3, U1-3 z U4S vyplýva U4P.)

47. Vynechajme z bodov algebraického modelu $\mathbb{R}^2$ body na y-osi, a z priamok vynecháme y-os. Ktoré z axióm usporiadania táto geometria spĺňa?

Ptolemaiova konštrukcia pravidelného päťuholníka

48. Overte, že nasledovnou konštrukciou zostrojíme pravidelný päťuholník vpísaný do kružnice.
Daná je kružnica k so stredom S.

(1) AB je priemer kružnice k.
(2) C je taký bod na kružnici k, že $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{SC}$.
(3) D je stred úsečky AS.
(4) E je taký bod na úsečke BS, že $DE \cong DC$.
(5) Strana pravidelného päťuholníka vpísaného do k je zhodná s úsečkou EC.

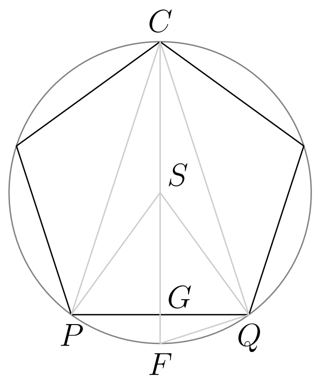


(Možný postup: vypočítajte dĺžku úsečky EC a vypočítajte dĺžku strany pravidelného päťuholníka vpísaného do danej kružnice. Keď sa tieto hodnoty rovnajú, naozaj sa konštruuje pravidelný päťuholník.

Vypočítať dĺžku úsečky EC by nemal byť problém.
Pre dĺžku strany pravidelného päťuholníka môžte postupovať viacerými spôsobmi. Napríklad si pomôžete trigonometriou. Vtedy možno budete potrebovať poznať presnú hodnotu $\cos 36°$. S trigonometrickými vzorcami je potom užitočné aj vyjadrenie, že

$$90° = 72° + 18° = 2 \cdot 36° + \frac{1}{2} \cdot 36°.$$

Alternatívne sa dĺžka strany pravidelného päťuholníka dá vypočítať pomocou klasickej Euklidovej geometrie, s využitím už dokázaných vlastností pravidelného päťuholníka, Tálesovej vety a vety o stredovom a obvodovom uhle, nápovedou je nasledovný obrázok.)



49. Narysujte si pravidelný päťuholník konštrukciou v cvičení 48.