8. Zadania na cvičenie 16.4.

Axiómy zhodnosti

Budeme dokazovať štandardné tvrdenia geometrie základnej a strednej školy (zadania 62, 63 a 64) V každom dôkaze budeme podľa potreby využívať aj predchádzajúce (ideálne už dokázané) tvrdenia.

62. Ukážte, že v trojuholníku je protiľahlý uhol k väčšej strane väčší ako protiľahlý uhol k menšej strane. Inak: ak v $\triangle ABC$ platí $AB > AC$, potom $\angle C > \angle B$.
(Nápoveda: na strane AB nájdite bod D tak, že $AD \cong AC$ a skúmajte okrem $\triangle ABC$ aj rovnoramenný trojuholník $\triangle ADC$. Zrejme využijete porovnávanie uhlov, Pappovu vetu a vetu o vonkajšom uhle trojuholníka.)

63. Dokážte trojuholníkovú nerovnosť. Presnejšie, ukážte, že v ľubovoľnom trojuholníku $\triangle ABC$ je súčet strán (úsečiek) AC a BC väčší ako strana (úsečka) AB.
(Nápoveda: na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{CA}$ zostrojíte bod D tak, že $CD \cong BC$. Potom okrem $\triangle ABC$ skúmajte aj rovnoramenný trojuholník $\triangle BDC$. Zrejme využijete Pappovu vetu, porovnávanie uhlov, a tvrdenie z cvičenia 64.)

Domáca úloha (do 30.4.)

Axiómy zhodnosti

64. Ukážte, že v trojuholníku je protiľahlá strana k väčšiemu uhlu väčšia ako protiľahlá strana k menšiemu uhlu.
(Nápoveda: ide o veľmi jednoduchý dôsledok cvičenia 62.)

65. Dokončite dôkaz existencie jediného stredu úsečky. (Nápoveda: pre jednoznačnosť uvažujte usporiadanie $A * S_1 * S_2$ a $S_1 * S_2 * B$ na priamke $\overleftrightarrow{AB}$, vyargumentujte, že nejde o ujmu na všeobecnosti. Pre existenciu nech $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, nech D je taký bod v polrovine opačnej k $\overrightarrow{ABC}$, že $\angle ABD \cong \angle BAC$ a $BD \cong AC$. Uvažujte priesečník CD s $\overleftrightarrow{AB}$ a skúmajte trojuholníky, ktoré Vám týmto vzniknú.)

66. Polpriamka $\overrightarrow{BD}$ medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ uhla $\angle ABC$ je *osou uhla* $\angle ABC$, ak $\angle ABD \cong \angle DBC$.
Ukážte, že každý uhol má práve jednu os.
(Treba ukázať jednoznačnosť aj existenciu. Pri dôkaze jednoznačnosti sa môžte inšpirovať v Hilbertovom dôkaze štvrtého Euklidovho postulátu.)

(pokračovanie na ďalšej strane)

67. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:
Tvrdenie: Pravý uhol je zhodný s tupým uhlom.

Dôkaz: Nech AB je úsečka, nech body C a D ležia v tej istej polrovine od $\overleftrightarrow{AB}$ tak, že $AC \cong BD$, $\angle ABD$ je pravý a $\angle BAC$ je tupý (viď obrázok). Ukážeme, že tieto dva uhly sú zhodné.

- Nech o_1 je os úsečky AB a nech o_2 je os úsečky CD.
- Priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ určite nie sú rovnobežné,
- preto aj o_1 a o_2 sú rôznobežné; označme ich priesečník N.
- Priesečník N sa určite nachádza na tej istej strane od $\overleftrightarrow{CD}$ ako body A a B,
- máme teda možnosti: N leží vnútri štvoruholníka $ABDC$, N leží na úsečke AB alebo N leží zvonka štvoruholníka $ABDC$ „pod priamkou" $\overleftrightarrow{AB}$.
- Nech N leží vnútri štvoruholníka $ABDC$. Uvažujme trojuholníky $\triangle ANC$ a $\triangle BND$. V nich
  - $AN \cong BN$, lebo $N \in o_1$,
  - $CN \cong DN$, lebo $N \in o_2$,
  - $AC \cong BD$ z konštrukcie bodov C a D,

  preto $\triangle ANC \cong \triangle BND$.
- Odtiaľ $\angle NAC \cong \angle NBD$.
- Ďalej $\triangle ABN$ je rovnoramenný, preto $\angle ABN \cong \angle BAN$.
- Sčítaním uhlov tak dostaneme $\angle BAC \cong \angle ABD$.
- V prípade, keď $N \in AB$, postupujeme tak isto, v tomto prípade zhodnosť uhlov $\angle BAC$ a $\angle ABD$ vyplynie hneď zo zhodnosti $\triangle ANC \cong \triangle BND$.
- Nakoniec v prípade, keď N leží zvonka štvoruholníka $ABDC$ postupujeme tiež analogicky; zhodnosť uhlov $\angle BAC$ a $\angle ABD$ dostaneme odčítaním uhlov $\angle NAC - \angle NAB$ a $\angle NBD - \angle NBA$.