## 9. Zadania na cvičenie 30.4.

### Axiómy zhodnosti

**68.** Dokážte vetu Ssu o zhodnosti trojuholníkov:
Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B' > AC \cong A'C'$ a $\angle C \cong \angle C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.
(Možný postup: sporom predpokladajte $CB < C'B'$, naneste na $\overrightarrow{CB}$ bod $B''$ tak, že $CB'' \cong C'B'$. Porovnajte $AB$ s $AB''$. Využijete pritom vlastnosť trojuholníkov, že oproti väčšej strane sa nachádza väčší uhol a naopak, viď úloha 62 a 64.)

**69.** Demonštrujte, že predpoklad v tvrdení z úlohy 68, že uvažovaný uhol musí ležať oproti väčšej z uvažovaných strán, je podstatný. Presnejšie, nájdite $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ také, že $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle C \cong \angle C'$, ale tieto dva trojuholníky nie sú zhodné.

### Konštrukčné úlohy

**70.** Sú dané dva rôzne body $A, B$ ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou $p$. Zostrojte bod $X$ na priamke $p$ taký, aby priamky $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BX}$ zvierali s priamkou $p$ zhodné uhly.

**71.** Sú dané dva rôzne body $A, B$ ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou $p$. Zostrojte bod $X$ na priamke $p$ taký, aby súčet dĺžok úsečiek $|AX| + |BX|$ najmenší.

**72.** Zostrojte $\triangle ABC$, ak sú dané: veľkosť uhla $\angle A$, veľkosť uhla $\angle B$ a dĺžka strany $AC$. Úlohu riešte s využitím

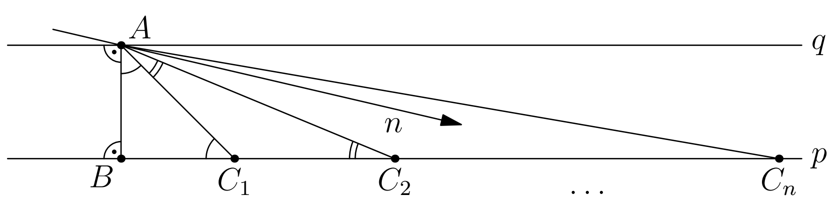
(a) obvodového a stredového uhla nad tetivou kružnice,
(b) podobnosti trojuholníkov.

## Domáca úloha (do 7.5.)

### Axióma rovnobežnosti

**73.** Ukážte, že ak v Hilbertovej rovine (t.j. v rovine, kde platia axiómy incidencie, usporiadania a zhodnosti) platí axióma rovnobežnosti, potom je súčet vnútorných uhlov trojuholníka rovný dvom pravým uhlom. (Dôkaz možno niektorí poznáte zo strednej školy, prípadne sa inšpirujte: Euklides I.32.)

**74.** Vypracujte dôsledne indukciu v dôkaze vety: „Ak je v Hilbertovej rovine súčet uhlov v každom trojuholníku rovný dvom pravým, potom v tejto rovine platí axióma rovnobežnosti." (Veta 6.9 z prednášky).
V dôkaze sa medzi rovnobežkami $p$, $q$ ($q$ zostrojená cez bod $A$ pomocou kolmíc) konštruuje postupnosť rovnoramenných trojuholníkov $\triangle AC_iC_{i+1}$ so základňou $AC_{i+1}$. Overte,

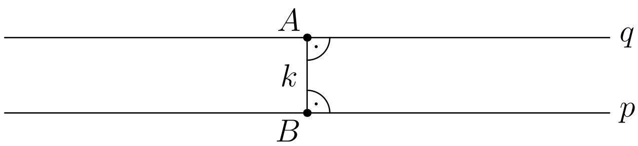



že vnútorný uhol v $\triangle AC_iC_{i+1}$ pri základni je $(1/2^{i+1})$-násobok pravého uhla.

(pokračovanie na ďalšej strane)

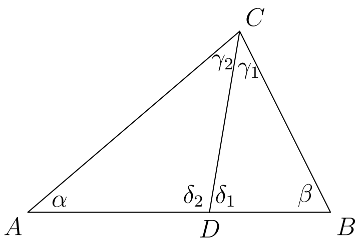
Nasledujúce „dôkazy” vychádzajú iba z axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti a snažia sa ukázať, že jedinečnosť rovnobežky netreba postulovať, ale že sa dá dokázať.

**75.** Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:
*Tvrdenie:* Pre danú priamku a daný bod neležiaci na tejto priamke existuje jediná priamka prechádzajúca týmto bodom a rovnobežná s danou priamkou.
*Dôkaz:* Daná je priamka $p$ a bod $A$ na nej neležiaci. Z bodu $A$ spustíme na priamku




$p$ kolmicu $k$. Potom bodom $A$ vedieme kolmicu na priamku $k$, označíme ju $q$. Vieme (bolo ukázané aj na prednáške), že $q$ a $p$ sú rovnobežné. Tiež už vieme (bolo ukázané na prednáške), že kolmica $k$ spustená z bodu $A$ na priamku $p$ je jediná, a tiež kolmica $q$ ku $k$ vedená bodom $A$ je jediná, preto je rovnobežka $q$ ku priamke $p$ vedená bodom $A$ jediná.

**76.** Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:
*Tvrdenie:* Súčet uhlov v trojuholníku je rovný dvom pravým uhlom (t.j. 180°) (bez použitia axiómy rovnobežnosti).
*Dôkaz:* Uvažujme označenie ako na obrázku: trojuholník $ABC$ je úsečkou $CD$ ($D$ je vnútorný bod strany $AB$) rozdelený na $\triangle ADC$ a $\triangle DBC$. Nech $x$ označuje zatiaľ neznámy




súčet uhlov v trojuholníku. Teda máme:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta_2 + \gamma_2 &= x, \\ \delta_1 + \beta + \gamma_1 &= x. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto dvoch rovností dostávame

$$\alpha + \delta_2 + \delta_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 2x.$$

Na druhej strane v $\triangle ABC$ máme

$$\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = x.$$

Navyše uhly $\delta_1$ a $\delta_2$ sú vedľajšie, teda

$$\delta_1 + \delta_2 = 180°.$$

Odtiaľ dostávame, že

$$x + 180° = 2x.$$

a preto $x = 180°$ je hľadaný súčet uhlov v trojuholníku.