1. Základné planimetrické konštrukcie

1. Daná je kružnica k a bod B ležiaci zvonka tejto kružnice. Zostrojte dotyčnicu ku kružnici k prechádzajúcu bodom B.

2. Nech k, l sú kružnice, z ktorých ani jedna neleží vo vnútri druhej. Zostrojte spoločnú dotyčnicu kružníc k a l.

2. Osová súmernosť

1. Sú dané dva rôzne body A, B ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamou p. Zostrojte bod X na priamke p taký, aby priamky $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BX}$ zvierali s priamkou p zhodné uhly.

2. Nech A, B predstavujú polohu dvoch biliardových gulí. Narysujte dráhu gule A, ktorá sa odráža od hrán h_1, h_2, h_3 (v tomto poradí) biliardového stola a nakoniec zasiahne guľu B.

3. Dané sú dva rôzne body A, B ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamou p. Zostrojte bod X na priamke p, pre ktorý je:

(a) súčet dĺžok úsečiek $|AX| + |BX|$ najmenší,
(b) rozdiel dĺžok úsečiek $|AX| - |BX|$ najväčší, ak B je bližšie k p ako A.

4. Za predpokladov z príkladu 3 zostrojte bod X na priamke p taký, aby priamky $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BX}$ zvierali s priamkou p ostré uhly, z ktorých jeden je dvakrát väčší ako druhý.

5. Je daná priamka p, úsečka PQ a dva rôzne body A, B na tej istej strane od priamky p. Na priamke p zostrojte body X, Y tak, aby úsečka XY bola zhodná s danou úsečkou a dĺžka lomenej čiary $AXYB$ bola minimálna.

6. Nech A je vnútorný bod daného ostrého uhla. Na ramenách uhla nájdite body B, C (každý z bodov na inom ramene) tak, aby obvod trojuholníka ABC bol minimálny.

7. Nad danou úsečkou AB možno zostrojiť nekonečne veľa trojuholníkov ABC, ktoré majú rovnakú dĺžku v_c. Zostrojte ten z nich, ktorého obvod je najmenší.

8. Na základni AB ľubovoľného rovnoramenného trojuholníka ABC nájdite bod L, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od priamok $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}$ minimálny.

9. Daná je priamka b a kružnice p, q. Zostrojte úsečku XY tak, aby $X \in p$, $Y \in q$, stred úsečky XY bol bodom priamky b a aby XY bola kolmá na b.

10. Dané sú dve kružnice k, l a priamka p. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC, ktorých ťažnica t_c je časťou priamky p a vrcholy A, B ležia postupne na kružniciach k, l.

11. Dané sú tri rôznobežné a tým istým bodom neprechádzajúce priamky a, b, c. Zostrojte úsečku BC kolmú na priamku a tak, aby $B \in b$, $C \in c$ a stred úsečky BC bol na priamke a.

12. Dané sú dve rovnobežné priamky x, y a priamka z s nimi rôznobežná. Zostrojte všetky štvorce $XYZV$, ktorých vrcholy sú $X \in x$, $Z \in z$ a uhlopriečka YV je časťou priamky y.

13. Dané sú tri rôzne priamky o_1, o_2, o_3 prechádzajúce bodom O a na jednej z nich je daný bod $A \neq O$. Zostrojte trojuholník ABC, pre ktorý sú dané priamky osami vnútorných uhlov.

14. Daná je kružnica k a tri rôzne priamky a, b, c prechádzajúce stredom kružnice k. Zostrojte trojuholník ABC, ktorý je opísaný danej kružnici a jeho vrcholy A, B, C ležia v poradí na priamkach a, b, c.

15. Dané sú tri priamky s_1, s_2, s_3 prechádzajúce bodom S a na jednej z nich je daný bod A_1. Zostrojte trojuholník ABC, pre ktorý je A_1 stredom strany BC a priamky s_i sú osami jeho strán.

16. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané

(a) $c, v_c, \omega = \alpha - \beta$
(b) $b, a, \omega = \alpha - \beta$

17. Je daná priamka p, kružnica k, bod T a smer s. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC s ťažiskom v bode T, ktorého základňa AB patrí smeru s, A leží na p a B na k.

18. Daná je priamka $\overleftrightarrow{MN}$ a dve rôzne kružnice ležiace na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{MN}$. Na priamke $\overleftrightarrow{MN}$ zostrojte taký bod X, aby dotyčnice vedené z bodu X ku kružniciam zvierali s priamkou $\overleftrightarrow{MN}$ zhodné uhly.

19. Je daný uhol $\angle MON$ a dva rôzne body A, B vo vnútri uhla. Na polpriamke $\overrightarrow{OM}$ zostrojte bod X tak, aby trojuholník XYZ bol rovnoramenný, pričom Y, Z sú v poradí priesečníky priamok $\overleftrightarrow{XA}, \overleftrightarrow{XB}$ s polpriamkou $\overrightarrow{ON}$.

20. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak poznáte dĺžky všetkých jeho strán a uhlopriečka AC je osou vnútorného uhla pri vrchole A.

21. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, do ktorého je možné vpísať kružnicu, ak sú dané dĺžky dvoch susedných strán AB, AD a veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch B, D.

22. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak sú dané: dĺžky $|AB|, |CD|$, súčet $|BC| + |AD|$, vzdialenosť vrchola A od priamky $\overleftrightarrow{CD}$ a viete, že vnútorné uhly pri vrcholoch C a D sú zhodné.

23. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak sú dané: dĺžky $|AB|, |CD|$, súčet $|BC| + |AD|$ a vzdialenosti vrcholov A, B od priamky $\overleftrightarrow{CD}$.

24. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak poznáte dĺžky strán BC, CD, DA a uhol $\omega = \measuredangle DAB - \measuredangle ABC$.

25. Nech V je priesečník výšok ľubovoľného trojuholníka ABC. Dokážte, že body V_1, V_2, V_3 súmerné k bodu V podľa strán trojuholníka ABC ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

26. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané body V_1, V_2, V_3 z predchádzajúceho príkladu.

27. Dané sú dve rovnobežky p, q a bod A ležiaci na priamke p. Ďalej je daný bod M ležiaci vnútri pásu s hranicami p, q. Zostrojte taký rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB, aby vrcholy B, C ležali po rade na priamkach q, p a bod M na priamke $\overleftrightarrow{BC}$. Urobte diskusiu vzhľadom na vzdialenosť rovnobežiek p, q a vzdialenosť A, M.

28. Daná je priamka p a body A, B ležiace po tej istej strane od priamky p. Na priamke p zostrojte taký bod X, aby súčet $|AX| + |BX|$ bol zhodný s danou dĺžkou $|MN|$.

29. Je daná priamka p, úsečka AB a dva rôzne body P, Q po rôznych stranách od priamky p. Zostrojte na priamke p taký bod X, aby rozdiel dĺžok úsečiek PX, QX bol zhodný s dĺžkou danej úsečky AB.

30. Vo vnútri obdĺžnika $ABCD$ je daný bod M. Dokážte, že existuje vypuklý štvoruholník s kolmými uhlopriečkami, ktorých dĺžky sa rovnajú dĺžkam strán AB, BC, a so stranami, ktorých dĺžky sa rovnajú po rade dĺžkam strán AM, BM, CM, DM.

31. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte $a + b, v_a, c$.

32. Je daná kružnica k so stredom S a priemerom AB. Ďalej sú dané kružnice m, n, ktoré majú priemery AS, SB. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú súčasne kružníc k, m, n.

33. (**Fagnanov problém. Ortický trojuholník.**) Do ostrouhlého trojuholníka vpíšte trojuholník s čo najmenším obvodom. (Na každej strane daného trojuholníka leží jeden vrchol vpísaného trojuholníka.)

3. Posunutie

1. Dané sú dve kružnice k, l a priamka p. Zostrojte priamku q rovnobežnú s p tak, aby vzdialenosť medzi jej priesečníkmi s kružnicami k, l bola rovná dĺžke danej úsečky.

2. Daná je priamka p, kružnica k a úsečka AB v rovine. Zostrojte úsečku PK tak, aby bola rovnobežná a zhodná s úsečkou AB a aby bol bod P z prianky p a K z kružnice k.

3. Na ktorom mieste je potrebné zostrojiť most cez rieku, ktorá oddeľuje dve obce A, B tak, aby cesta z obce A do obce B bola čo najkratšia. Brehy rieky sa predpokladajú navzájom rovnobežné a most má byť postavený kolmo na brehy rieky.

4. Nájdite množinu bodov M, ktorých

(a) súčet
(b) rozdiel

vzdialeností od dvoch daných rôznobežných priamok p, q je rovný danej konštante a.

5. Dané sú priamky x, y, z a kladné číslo w. Zostrojte také body X, Y po rade na priamkach x, y, aby priamka $\overleftrightarrow{XY}$ bola rovnobežná s priamkou z a dĺžka úsečky sa rovnala číslu w.

6. Dané sú dve tetivy AB, CD kružnice k. Na kružnici k nájdite taký bod X, aby tetivy AX, BX preťali tetivu CD v bodoch E, F, ktorých vzdialenosť je rovná danému kladnému číslu a.

7. Dané sú dve kružnice k, l pretínajúce sa v bodoch A, B. Bodom A zostrojte priamku p tak, aby preťala kružnicu k v bode M a kružnicu l v bode N, ktoré určujú úsečku danej dĺžky.

8. Je daná kružnica k s vyznačeným priemerom PQ a nesečnica p kružnice s vyznačenou úsečkou AB. Zostrojte bod Z kružnice k, ktorý má tú vlastnosť, že priamky $\overleftrightarrow{PZ}, \overleftrightarrow{QZ}$ pretínajú priamku p v bodoch X, Y tak, že úsečka XY je zhodná s úsečkou AB.

9. Dané sú úsečky s dĺžkami a, c, e, f a uhol ω Zostrojte štvoruholník $ABCD$, v ktorom $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|AC| = e$, $|BD| = f$ a uhol ω je zhodný s uhlom $\measuredangle ASB$, kde S je priesečník uhlopriečok.

10. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak je známy uhol priamok $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ a dĺžky všetkých strán štvoruholníka.

11. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak sú dané dĺžky všetkých jeho strán.

12. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak poznáte veľkosti jeho strán a veľkosť uhla uhlopriečok, ktorého ramená prechádzajú vrcholmi A, B.

13. Dané sú dve kružnice k, l. Zostrojte priamku p

(a) rovnobežnú s danou priamkou r tak, aby p vytínala na k a l tetivy rovnakej dĺžky,
(b) rovnobežnú s danou priamkou r takú, aby na k a l vytínala tetivy, ktorých súčet (rozdiel) dĺžok je rovný kladnému číslu a,
(c) 💀 prechádzajúcu daným bodom A a takú, ktorá na k, l vytína tetivy rovnakej dĺžky.

14. Je daná kružnica k a úsečka KL. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ vpísaný do kružnice tak, aby úsečky AB a KL boli rovnobežné a zhodné.

15. Dané sú dva páry rovnobežiek a bod P. Bodom P veďte priamku, ktorá pretína rovnobežky v zhodných úsečkách.

16. Označme $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, $|AC| = e$, $|BD| = f$ a bod M nech je priesečník uhlopriečok. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak sú dané

(a) $e, f, \measuredangle AMB, a$ (resp. b, c, d),
(b) $a + c, e, f, \gamma$,
(c) $a + c, e, f, \alpha$,
(d) $a + c, e, f, d$.

4. Otočenie

1. Dané sú dve priamky p, q, bod T a rovnoramenný trojuholník KLM. Zostrojte rovnoramenný trojuholník TUV s vrcholom v bode T podobný s KLM tak, aby U bol z priamky p a V z priamky q.

2. Daný je štvorec $ABCD$ a úsečka MN. Zostrojte štvorec $XYUV$, ktorého každý vrchol leží na jednej strane štvorca $ABCD$ a strana štvorca XY je zhodná s úsečkou MN.

3. Daná je kružnica k a dva rôzne body P, Q. Zostrojte dve rovnobežky p, q prechádzajúce po rade bodmi P, Q tak, aby pretínali kružnicu k v bodoch X, Y ohraničujúcich štvrtinu kružnice.

4. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC, ktorého vrcholy ležia na

(a) troch rôznych rovnobežných priamkach,
(b) troch sústredných kružniciach.

5. Dané sú dve sústredné kružnice k, l a bod A ležiaci na jednej z nich. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC, ktorého vrchol B leží na kružnici k a C na l.

6. Dané sú dve sústredné kružnice k, l, bod A a uhol ω. Bodom A zostrojte priamky p, q zvierajúce uhol ω tak, aby kružnice k, l vytínali na nich tetivy navzájom zhodné.

7. Dané sú dve kružnice k, l so spoločným bodom A. Zostrojte štvorec $ABCD$, ktorého vrchol B je z k a D z l.

8. Daná je kružnica k a bod A. Zostrojte tetivu XY kružnice k, ktorá má danú dĺžku a leží na priamke prechádzjúcej bodom A.

9. Daná je kružnica k, bod B a úsečka MN. Zostrojte tetivu XY kružnice k zhodnú s úsečkou MN tak, aby ju bolo vidieť z bodu B pod uhlom $60°$.

10. Na stranách ľubovoľného trojuholníka ABC sú zvonku zostrojené rovnostranné trojuholníky. Dokážte, že stredy týchto trojuholníkov sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka. Platí toto tvrdenie aj v tom prípade, keď rovnostranné trojuholníky sú zostrojené v polrovinách, v ktorých leží aj trojuholník ABC?

11. Dané sú body A, A_1, $B \neq A$. Otáčanie, ktoré zobrazí bod A do bodu A_1, zobrazí bod B do určitého bodu B_1. Čo vyplnia body B_1, ktoré dostaneme všetkými takýmito otáčaniami?

12. Nad stranami ľubovoľného rovnobežníka $ABCD$ sú zvonka zostrojené štvorce. Dokážte, že stredy S_1, S_2, S_3, S_4 týchto štvorcov sú vrcholmi štvorca. Platí toto tvrdenie aj vtedy, ak sú štvorce zostrojené v polrovinách obsahujúcich rovnobežník $ABCD$?

13. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník, K stred úsečky BD a M stred strany EF. Dokážte, že trojuholník AMK je rovnostranný.

14. Daný je rovnobežník $ABCD$. Zostrojte štvorec $KLMN$, aby body K, L, M, N ležali po rade na stranách AB, BC, CD, AD.

5. Stredová súmernosť

1. Dané sú dve priamky p, q a bod F. Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom F tak, aby A bol z priamky p a C z q.

2. V rovine je daná priamka p, kružnica k a bod Q. Zostrojte úsečku XY tak, aby X ležal na p, Y na k a Q bol stredom úsečky XY.

3. Daná je priamka p, kružnica k a body S, O navzájom rôzne. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby A ležal na p, B na k a S, O boli po rade stredmi strán AC, BC.

4. Zostrojte trojuhoník ABC, a poznáte c, t_a a uhol medzi t_a, b.

5. Zistite, čo vznikne zložením dvoch stredových súmerností alebo stredovej súmernosti a posunutia.

6. Dokážte, že zložením nepárneho počtu stredových súmerností vznikne stredová súmernosť, ale zložením párneho počtu stredových súmerností vznikne posunutie alebo identita.

7. Na základe predchádzajúceho príkladu riešte: Zostrojte päťuholník, ak poznáte stredy jeho strán M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.

8. Spoločným bodom dvoch kružníc k, l zostrojte priamku p, ktorá vytína na kružniciach zhodné tetivy.

9. Vonkajším bodom A danej kružnice k veďte priamku, ktorá pretína danú kružnicu v bodoch P, Q tak, že úsečky AP a PQ sú zhodné.

10. Daný je rovnobežník $ABCD$. Na jeho stranách sú dané body A_1, B_1, C_1, D_1 tak, aby $A_1B_1C_1D_1$ bol rovnobežník. Dokážte, že stredy týchto rovnobežníkov sú totožné.

11. Daný je trojuholník PCQ a vnútri tohto trojuholníka bod T. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby T bol jeho ťažiskom, bod A ležal na polpriamke CP a bod B na polpriamke CQ.

12. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané t_a, t_b, t_c.

6. Tálesova veta, obvodový uhol

1. Je daná kružnica k a jej vonkajší bod P. Na sečniciach vedených bodom P vytína kružnica k tetivy. Akú množinu vytvoria stredy týchto tetív?

2. Je daná kružnica k, v nej tetiva AB a vnútorný bod G rôzny od stredu kružnice k. Bodom G veďte v kružnici tetivu, ktorú tetiva AB rozpoľuje. Pre akú polohu bodu G je úloha riešiteľná?

3. Dve kružnice sa pretínajú v bodoch K a L. Bodom K veďte v oboch kružniciach priemery KM, KN. Dokážte, že priamka MN prechádza priesečníkom L.

4. Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os vnútorného a os vonkajšieho uhla pri vrchole A pretína kružnicu k v bodoch U_1, U_2. Dokážte, že priamka U_1U_2 je osou strany BC.

5. Kružnici k je opísaný lichobežník $ABCD$. Dokážte, že kružnice zostrojené nad jeho ramenami AD, BC sa dotýkajú v strede kružnice k.

6. Dve zhodné kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v bodoch A, B. Nech sečnica vedená bodom A pretína kružnicu k_1 v bode $M \neq B$ a kružnicu k_2 v bode N ($N \neq B$). Dokážte, že $BM \cong BN$.

7. Nech AB je pevne zvolená tetiva kružnice k rôzna od priemeru. Bod C sa pohybuje po kružnici k. Akú dráhu opisuje priesečník výšok $\triangle ABC$?

8. Dotyčnice ku kružnici k so stredom S vedené z bodu P na tejto kružnice dotýkajú v bodoch T, U. Priamka TS pretína kružnicu v bode H. Dokážte, že $HU \parallel SP$.

9. Vonkajšie spoločné dotyčnice dvoch kružníc sa ich dotýkajú v navzájom rôznych bodoch. Dokážte, že tieto dotykové body sú vrcholmi tetivového štvoruholníka.

7. Rovnoľahlosť

1. Je daná kružnica $k = k(S, r)$ a bod A, ktorý leží zvonku kružnice. Zostrojte sečnicu kružnice k tak, aby obsahovala bod A, pretínala k v bodoch X, Y a aby platilo $|AX| = 3|AY|$.

2. Je daný trojuholník ABC a bod M ležiaci zvonka trojuholníka. Zostrojte priamku obsahujúcu bod M tak, aby preťala obvod trojuholníka v bodoch X, Y a aby platilo $|MX| = 5|XY|$.

3. Dané sú body A, B, C a rôzne rovnobežky a, b obsahujúce po rade body A, B. Zostrojte priamku prechádzajúcu bodom C tak, aby preťala priamku a v bode X, priamku b v bode Y a aby platilo $|AX| = 2|BY|$.

4. Daný je trojuholník ABC. Zostrojte úsečku XY takú, že $|AX| = |XY| = |YB|$ a $X \in AC$, $Y \in BC$.

5. Daný je uhol AVB a jeho vnútorný bod M. Zostrojte bod $X \in AV$, ktorého vzdialenosť od VB je dvojnásobkom úsečky XM.

6. Dané sú dve rôznobežky a, b a bod M, ktorý na nich neleží. Zostrojte všetky kružnice, ktoré prechádzajú bodom M a dotýkajú sa priamok a, b.

7. Dané sú dve rôznobežky a, b a kružnica k, ktorá sa nedotýka žiadnej z nich. Zostrojte kružnicu l, ktorá sa dotýka súčasne a, b, k.

8. V rovine je daná kružnica k, priamka p a bod $Q \in p$, $Q \notin k$. Zostrojte kružnicu l, ktorá sa dotýka kružnice k aj priamky p v bode Q.

9. Daná je kružnica k a jej kod K. Určte množinu všetkých bodov X v rovine, ktoré delia tetivy kružnice k obsahujúce K v pomere 2:5.

10. Zostrojte kosoštvorec, ak poznáte jeho strany a pomer uhlopriečok.

11. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:

(a) $b : c = 7 : 4$, $\alpha = \pi/4$, t_b
(b) $a : b = 4 : 5$, $\gamma = \pi/3$, v_c
(c) $a + b$, $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$

12. Spojte daný bod M s nedostupným priesečníkom daných priamok a, b.

13. Veďte daným bodom M rovnobežku s priamkou, ktorá je určená nedostupnými priesečníkmi priamok a, b a c, d.

14. (**Eulerova priamka.**) Daný je trojuholník ABC. Dokážte, že priesečník výšok V, stred opísanej kružnice S a ťažisko T buď splynú v jeden bod alebo ležia na jednej priamke, pričom $(SVT) = -1/2$.

15. Zostrojte trojuholník, ak poznáte

(a) ťažisko, priesečník výšok, stred jednej strany,
(b) ťažisko, priesečník výšok, jeden vrchol,
(c) S, V, jeden vrchol.

16. (**Feuerbachova kružnica.**) Dokážte, že kružnica, ktorá prechádza stredmi strán trojuholníka, obsahuje aj päty výšok trojuholníka a stredy úsečiek určených vrcholmi trojuholníka a priesečníkom výšok. Táto kružnica má polovičný polomer ako kružnica opísaná trojuholníku a nazýva sa kružnica deviatich bodov. Stred kružnice deviatich bodov je stredom úsečky určenej priesečníkom výšok a stredom kružnice opísanej trojuholníku.

17. Do daného ostrouhlého trojuholníka ABC vpíšte štvorec tak, aby jeho dva susedné vrcholy ležali na strane AB a ďalšie dva vrcholy postupne na stranách AC, BC.

18. Dané sú dve pretínajúce sa kružnice. Jedným ich spoločným bodom veďte takú priamku, ktorá vytína na kružniciach tetivy s pomerom 3:2.

19. Daná je kružnica $k = k(S, r)$ s priemerom AB. Nech C je bod kružnice k rôzny od A, B. Na polpriamke $\overrightarrow{BC}$ určte bod D tak, aby C bol stredom úsečky BD. Nech X je priesečník AC, SD. Popíšte geometrický lokus bodov X, ak bod C sa pohybuje po kružnici k.

20. V rovine sú dané štyri body A, B, S, O. Zostrojte kružnicu k prechádzajúcu bodmi A, B a kružnicu l so stredom S tak, aby O bol ich stredom rovnoľahlosti. (Preveďte diskusiu.)

21. Daná je kružnica k a jej navzájom kolmé priemery. Zostrojte tetivu kružnice k, ktorú dané priemery rozdeľujú na tri zhodné úsečky.

22. Do daného rovnobežníka $ABCD$ vpíšte kosoštvorec $MNPQ$ tak, aby $MN \parallel AC$, $PN \parallel BD$, $M \in AB$.

23. Daná je kružnica k a jej body A, B, C. Zostrojte tetivu AX kružnice k tak, aby z nej jej priesečník Y s tetivou BC oddelil štvrtinu.

24. Daný je trojuholník ABC. Nech M je ľubovoľný bod strany BC a P, Q sú priesečníky výšok trojuholníka ABM a trojuholníka ACM (v tomto poradí). Dokážte, že potom trojuholník MPQ je podobný s trojuholníkom ABC.

8. Podobnosť

1. V ostrouhlom troluholníku ABC sú zostrojené výšky AA_1 a BB_1. Dokážte, že platí: $A_1C : B_1C = AC : BC$.

2. Základne lichobežníka majú dĺžky a, c.

(a) Nájdite dĺžku úsečky vyťatej uhlopriečkami na strednej priečke.
(b) Nájdite dĺžku úsečky, ktorú vytínajú ramená lichobežníka na priamke prechádzajúcej priesečníkom uhlopriečok rovnobežne s jeho základňami.

3. Dokážte, že stredy strán ľubovoľného štvoruholníka sú vrcholmi rovnobežníka. Pre aký štvoruholník je tento rovnobežník pravouholníkom, kosoštvorcom, štvorcom?

4. Nech V je priesečník výšok v trojuholníku ABC, ktorý nie je pravouhlý, a A_1, B_1, C_1 päty výšok prechádzajúcich po poriadku vrcholmi A, B, C. Dokážte, že platí: $|AV|.|A_1V| = |BV|.|B_1V| = |CV|.|C_1V|$

5. Nech S je obsah trojuholníka ABC a nech s je jeho polovičný obvod. Nech r je polomer kružnice trojuholníku vpísanej a táto nech sa dotýka strany BC v bode G_a. Nech ďalej r_a, r_b, r_c sú polomery zvonku pripísaných kružníc. Kružnica pripísaná trojuholníku pri strane BC sa jej dotýka v bode N_a.

(a) $|CG_a| = |BN_a| = s - c$,
(b) $S = (s - a).r_a$,
(c) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$.

6. Dokážte, že priesečník uhlopriečok a priesečník ramien lichobežníka ležia na priamke prechádzajúcej stredmi jeho podstáv.

7. Nech AA_1, BB_1 sú výšky trojuholníka ABC. Dokážte, že trojuholník A_1B_1C je podobný s trojuholníkom ABC.

8. Dokážte, že výšky AA_1, BB_1, CC_1 ostrouhlého trojuholníka ABC sú osami uhlov trojuholníka $A_1B_1C_1$.

9. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku platí:

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

kde v_a, v_b, v_c, a, b, c sú dĺžky príslušných úsečiek.

10. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku ABC delí os vnútorného uhla protiľahlú stranu na úsečky úmerné priľahlým stranám.

9. Rôzne

1. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané

(a) t_c, v_a, v_c,
(b) t_b, γ, c,
(c) t_c, v_a, β,
(d) t_a, α, v_b,
(e) t_a, b, α,
(f) t_a, t_b, t_c, (je aj v časti Stredová súmernosť)
(g) t_b, c, a.
(h) t_a, t_b, γ,

2. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC, ak poznáte dĺžku ťažnice t_b a výšky v_b.

3. V rovine je daná priamka p, kružnica so stredom S a polomerom r a kladné číslo R. Zostrojte kružnicu k s polomerom R, ktorá sa dotýka priamky p a kružnice (S, r).

4. V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1. Určte v rovine množinu $\mathcal{M}$, ktorú vyplnia tretie vrcholy všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia vo vnútri alebo na hranici daného štvorca $ABCD$.

5. Nech C je bod vnútri štvorca $ABDE$ taký, že $\triangle CDE$ je rovnoramenný a jeho uhly pri vrcholoch D a E majú 15°. Čo za trojuholník je $\triangle ABC$?

6. Nech P leží vnútri rovnostranného trojuholníka. Ukážte, že súčet vzdialeností bodu P od strán trojuholníka nezávisí od polohy P.

7. (**Švrčkove body.**) V $\triangle ABC$ nech o_a označuje os strany BC a o_α nech je os $\angle CAB$. Ak o_a a o_α sú rôzne priamky, potom sú rôznobežné a ich priesečník leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Dokážte.

8. (**Ortický trojuholník.**) Nech $\triangle ABC$ nie je pravouhlý. Nech A_1, B_1, C_1 sú po rade päty výšok $\triangle ABC$ z vrcholov A, B, C. Ukážte, že $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$, $\triangle A_1B_1C$ sú podobné trojuholníku ABC.

9. Výšky ostrouhlého trojuholníka sú osami uhlov jeho ortického trojuholníka. Čo viete povedať v prípade, keď je daný trojuholník tupouhlý?

10. Feuerbachova kružnica (t.j. kružnica opísaná ortickému trojuholníku daného trojuholníka) sa dotýka vpísanej aj pripísaných kružníc daného trojuholníka.

11. (**Ortocentrický systém / ortocentrická štvorica bodov.**) Nech V je ortocentrum trojuholníka ABC. Overte nasledovné tvrdenia:

(a) Ľubovoľný z bodov A, B, C, V je ortocentrom trojuholníka tvoreného zvyšnými troma bodmi.

(b) Ak $\triangle ABC$ nie je pravouhlý, tak úsečka určená ĺubovoľnou dvojicou z bodov A, B, C, V je kolmá na úsečku určenú dvojicou zvyšných bodov.

(c) Nech A, B, C, V je ortocentrická štvorica bodov. Trojuholníky ABC, ABV, ACV, BCV majú spoločný ortický trojuholník a tým aj Feuerbachovu kružnicu.

12. Nech I je stred vpísanej kružnice ľubovoľného trojuholníka ABC a $I_aI_bI_c$ sú stredy tomuto trojuholníku pripísaných kružníc. Dokážte:

(a) Body $I, I_aI_bI_c$ tvoria ortocentrický systém.

(b) Ortickým trojuholníkom trojuholníkov $I_aI_bI_c, II_bI_c, II_aI_c aII_aI_b$ je trojuholník ABC.

13. (**Simsonova-Walaceova priamka.**) Nech bod P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Nech A' je päta kolmice z bodu P na stranu BC, podobne B' resp. C' nech je päta kolmice z bodu P na stranu CA resp. AB. Ukážte, že ak P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, potom sú body A', B', C' kolineárne.

14. (**Fermatov / Fermatov–Torricelliho bod.**) Nech všetky uhly v $\triangle ABC$ sú väčšie ako 120°. Nájdite v rovine taký bod F, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od vrcholov $\triangle ABC$ minimálny.

15. (**Morleyova veta.**) V ľubovoľnom trojuholníku ABC nech a_B, a_C sú polpriamky rozdeľujúce vnútorný uhol pri vrchole A na tri zhodné uhly, kde polpriamka a_B je bližšie k vrcholu B, polpriamka a_C zas bližšie k vrcholu C; podobne b_A, b_C resp. c_A, c_B pre vrcholy B resp. C. Nech $X = b_C \cap c_B$, $Y = a_C \cap c_A$, $Z = a_B \cap b_A$. Potom $\triangle XYZ$ je rovnostranný. Dokážte.