KAPITOLA 6

# Kvadratické formy

## 1. Regulárne kužeľosečky v euklidovskej rovine

**1.1. Kružnica.** Je daná stredom $S \in \mathbb{E}^2$ a polomerom $r \in \mathbb{R}$, $r < 0$ ako množina bodov, ktorých vzdialenosť od stredu $S$ je $r$:

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XS| = r\}.$$

Z tejto definície potom už ľahko odvodíme rovnicu kružnice. V špeciálnom prípade, ak $S = (0, 0)$, tak bod $X = (x, y)$ leží na kružnici práve vtedy, keď $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. Túto rovnosť štandardne upravujeme tak, aby sme sa vyhli odmocnine. Dostávame tak **implicitnú rovnicu kružnice**, t.j. čosi ako všeobecnú rovnicu:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pri hľadaní rovnice pre kružnicu so stredom v ľubovoľnom bode $S = (m, n)$ môžme uvažovať dvoma spôsobmi:

(a) Priamo z definície kružnice musí pre bod kružnice platiť, že

$$\begin{aligned} |(x, y)(m, n)| &= r \\ \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} &= r \\ (x-m)^2 + (y-n)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Ak to nie je pre nejaké následné výpočty potrebné, rovnicu pre prehľadnosť nechávame v tomto tvare, neroznásobujeme.

(b) Kružnicu môžme vnímať aj ako kružnicu so stredom v začiatku súradníc, pokiaľ si súradnice vhodne zvolíme. Zvoľme začiatok súradníc v strede kružnice a jednotkové vektory v smere súradnicových osí ponecháme bezo zmeny. Pôvodné súradnice $(x, y)$ sú tak s našimi pomocnými súradnicami $(x', y')$ previazané posunutím:

$$\begin{aligned} x' &= x - m, \\ y' &= y - n. \end{aligned}$$

Ak má teda kružnica v pomocných súradniciach rovnicu

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

tak v pôvodných súradniciach má táto kružnica rovnicu

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Príklad 6.1. Akú kružnicu popisuje rovnica

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 4y + 12 = 0?$$

**1.2. Elipsa.** Je daná dvoma ohniskami $F_1, F_2$ a kladným reálnym číslom $a$, pre ktoré navyše musí platiť $2a > |F_1, F_2|$. Elipsa je definovaná ako množina takých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od ohnísk je konštantná. Presnejšie:

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF_1| + |XF_2| = 2a\}.$$

Pre odvodenie implicitnej rovnice elipsy (t.j. rovnice, ktorú spĺňajú presne body elipsy) vložíme vhodným spôsobom situáciu do súradnicovej sústavy. Popritom sa zoznámime s terminológiou zviazanou s elipsou:

- $e = 1/2|F_1F_2|$ je **excentricita** elipsy,
- $S = 1/2(F_1 + F_2)$ je **stred** elipsy,
- priamka $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ je **hlavná os** elipsy,
- priamka cez stred $S$ kolmá na hlavnú os je **vedľajšia os** elipsy,
- **vrcholy** elipsy sú jej priesečníky s osami; priesečníky s hlavnou osou sú **hlavné vrcholy**, priesečníky s vedľajšou osou sú **vedľajšie vrcholy**.

Ľahko nahliadneme, že vzdialenosť hlavného vrchola od stredu elipsy je $a$, hovoríme tiež o **dĺžke hlavnej poloosi**. Podobne vzdialenosť vedľajšieho vrchola od stredu elipsy nazývame **dĺžka vedľajšej poloosi** a označujeme $b$. Medzi dĺžkami poloosí a excentricitou je vzťah

$$a^2 = b^2 + e^2. \tag{10}$$

Zvolíme teraz súradnice tak, že stred elipsy je v začiatku súradníc a ohniská ležia na $x$-osi, teda

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0)$$

a konečne môžme pristúpiť k odvodeniu rovnice elipsy. Bod $X = (x, y)$ leží na elipse práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} |(x,y)(-e,0)| + |(x,y)(e,0)| &= 2a \\ \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Trpezlivými a pozornými úpravami (dvakrát treba rovnicu umocniť, využiť vzťah (10)) sa nakoniec dopracujeme ku kvadratickej rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

nazývame ju tiež **kanonická rovnica** elipsy. Ak by sme chceli zapísať rovnicu elipsy so stredom v bode $S = (m, n)$, hlavnou osou rovnobežnou s $x$-osou, na základe úvah vykonaných pri kružnici len urobíme posunutie a dostaneme

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

**1.3. Hyperbola.** Definuje sa veľmi podobne ako elipsa. Je tiež daná dvoma ohniskami $F_1$, $F_2$ a kladným reálnym číslom $a$, no v prípade hyperboly sa vyžaduje, aby $2a < |F_1F_2|$. Zodpovedajúca hyperbola je potom množina takých bodov roviny, ktorých rozdiel vzdialeností od ohnísk je konštantná:

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid ||XF_1| - |XF_2|| = 2a\}.$$

Znovu **vrcholy hyperboly** sú jej priesečníky s priamkou $\overleftrightarrow{F_1F_2}$. Vzdialenosť vrchola od stredu hyperboly je $a$. Dĺžku $b \in \mathbb{R}^+$ môžme definovať vzťahom

$$e^2 = a^2 + b^2. \tag{11}$$

Ohniská vložíme do súradnicovej sústavy presne ako u elipsy: $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$ a pre body hyperboly dostaneme kanonickú rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hyperbola, ktorej stred bude posunutý do body $(m, n)$ bude mať rovnicu

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

**1.4. Parabola.** Parabola je určená **ohniskom** $F \in \mathbb{E}^2$ a **riadiacou priamkou** $l$ tak, aby ohnisko neležalo na riadiacej priamke. Parabola je množina takých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od ohniska je rovnaká ako vzdialenosť od riadiacej priamky:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid |XF| = |Xl|\}. \tag{12}$$

Pre parabolu v kanonickom tvare volíme $F = (0, \frac{p}{2})$ a riadiacu priamku $l$ tak, že jej všeobecná rovnica je $y + \frac{p}{2} = 0$, teda $p$ je vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky. Z metrickej definície paraboly (12) potom dostaneme jej kanonickú rovnicu

$$x^2 = 2py. \tag{13}$$

Ostatné tvary kanonickej rovnice sú $2py = -x^2$, $2px = y^2$, $2px = -y^2$. Pre parabolu v tvare (13) je

- bod $(0, 0)$ **vrcholom paraboly**,
- priamka $o_y$ (t.j. $y$-os) **osou paraboly**.

Tak ako v prípade elipsy a hyperboly, posunutím paraboly (13) tak, že jej vrchol sa posunie do bodu $(m, n)$ sa implicitná rovnica paraboly zmení na

$$(x - m)^2 = 2p(y - n).$$

PRÍKLAD 6.2. Zistite, akú parabolu popisuje rovnica

$$y^2 + 2x - 2y - 3$$

t.j. nájdite jej vrchol, ohnisko, riadiacu priamku.

**1.5. Kužeľosečky v rovine, všeobecnejšie.** Rovnice všetkých doteraz skúmaných kužeľosečiek boli kvadratickými rovnicami, v ktorých sa okrem absolútneho a lineárnych členov vyskytovali ešte členy s monómami $x^2$ a $y^2$. Rovnica kužeľosečky mala teda tvar

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0.$$

Typ kužeľosečky, teda či ide o elipsu, hyperbolu alebo parabolu, závisí od kvadratických koeficientov.

PRÍKLAD 6.3. Uvažujme parabolu $y = x^2$. Zmeňme súradnicovú sústavu tak, že začiatok sústavy ponecháme v $(0, 0)$ a novými súradnicovými vektormi budú

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Rovnica našej paraboly v novej súradnicovej sústave potom bude

$$x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0.$$

Vidíme, že kvadratická rovnica už obsahuje aj zmiešaný kvadratický člen.

Všeobecne rovnica kužeľosečky má tvar

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \tag{14}$$

Bude veľmi užitočné zapisovať túto rovnicu maticovo:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Vidíme, že kužeľosečku popísanú rovnicou (14) vieme reprezentovať symetrickou maticou stupňa 3.

Pre danú rovnicu (14) by sme chceli zistiť, či ide o rovnicu kužeľosečky, a ak áno, aký typ kužeľosečky rovnica reprezentuje. Vyčítať to priamo z rovnice (14) už nie je také priamočiare ako v prípade, keď jej rovnica neobsahuje zmiešaný člen. Zmiešaný člen sa v rovnici nachádza vtedy, keď osi kužeľosečky nie sú rovnobežné so súradnicovými osami. Snažíme sa preto aplikovať afinnú transformáciu (alebo ekvivalentne: zmeniť súradnicovú sústavu) tak, aby sme sa zmiešaného člena v rovnici zbavili.

## 2. Diagonalizácia kvadratickej formy

### 2.1. Kvadratické formy a symetrické matice.

DEFINÍCIA 6.4. Nech $k$ je pole (char $k \neq 2$). Potom **$n$-árna kvadratická forma nad $k$** je homogénny polynóm stupňa 2 o $n$ premenných:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j, \quad c_{ij} \in k/$$

Kvadratickú formu tiež chápeme ako zobrazenie $k^n \to k$

PRÍKLAD 6.5.
- $q(x) = ax^2$ – unárna kvadratická forma,
- $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ – binárna kvadratická forma,
- $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ – ternárna kvadratická forma,
- $\dots$.

PRÍKLAD 6.6. Kvadratický polynóm $ax^2 + bx + c$ nie je kvadratická forma! Podobne polynóm v rovnici pre kužeľosečky,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

nie je kvadratická forma, ale dá sa z neho homogenizáciou kvadratická forma vyrobiť:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2. \tag{15}$$

Naspäť k rovnici kužeľosečky sa dostaneme dosadením 1 za premennú $z$.

Kvadratickú formu (15) vieme zapísať aj v maticovom tvare:

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

TVRDENIE 6.7. *Ku každej $n$-árnej kvadratickej forme $q = q(x_1, \dots, x_n)$ existuje práve jedna symetrická matica $A$ stupňa $n$ taká, že*

$$q(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

*a naopak, každá symetrická matica zodpovedá kvadratickej forme.*

*Dôkaz.* Nech $q = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j$. Položme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j.$$

Ide o rovnosť kvadratických formiem. Splnená bude práve vtedy, keď na pravej aj na ľavej strane sú pri rovnakých monómoch rovnaké koeficienty.

Po roznásobení na ľavej strane tejto rovnosti máme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

Vidíme, že koeficienty $a_{ij}$ sú jednoznačne určené koeficientami $c_{ij}$ a naopak. $\square$

Kvadratickú formu $q$ sme nahradili symetrickou maticou $A$. Táto matica je podľa práve dokázanej vety jednoznačne určená. Teraz chceme maticu $A$ kvadratickej formy diagonalizovať, t.j. chceme voľbou vhodnej bázy priestoru $k^n$ eliminovať $a_{ij}$ pre $i < j$.

**2.2. Metóda 1: Lagrangeova.** Pri diagonalizácii kvadratickej formy touto metódou používame dva typy úprav:

- úprava na úplný štvorec: substitúcia typu
$$ax_i^2 + bx_ix_j = a(x_i + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}x_j^2 = a{x'_i}^2 - \frac{b^2}{4a^2}x_j^2,$$
- ak člen $x_ix_j$ nie je možné eliminovať predchádzajúcou substitúciou (lebo forma neobsauje člen s monómom $x_i^2$ ani $x_j^2$), použijeme úpravu
$$x_ix_j = \frac{1}{4}(x_i + x_j)^2 - \frac{1}{4}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{4}{x'_i}^2 - \frac{1}{4}{x'_j}^2.$$

Príklad 6.8. Diagonalizujme kvadratickú formu $q:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:
$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4,$$
t.j. jej matica je
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Používame Lagrangeovu metódu:
$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3.x_4) &= -2(x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - x_2x_3) - 3x_3x_4 \\ &= -2((x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 - (\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2) - 3x_3x_4 \\ &= -2(x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{2}x_3^3 + \frac{1}{2}x_1x_3 - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(-x_1 + 4x_2 = 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1^2 + 4x_1x_3) + \frac{1}{2}x_1x_3 - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(-x_1 + 4x_2 = 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(-x_1 + 4x_2 = 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - \frac{3}{4}(x_3 + x_1) + \frac{3}{4}(x_3 - x_1)^2 \end{aligned}$$
Vidíme, že po substitúcii (t.j. v novej báze $\mathbb{R}^4$)
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ x'_2 &= x_1 + 2x_3 \\ x'_3 &= x_3 + x_4 \\ x'_4 &= x_3 - x_4 \end{aligned}$$
je kvadratická forma $q$ diagonálna:
$$q = -\frac{1}{8}{x'_1}^2 + \frac{1}{8}{x'_2}^2 - \frac{3}{4}{x'_3}^2 + \frac{3}{4}{x'_4}^2.$$
Celý proces môžme elegantne zapísať pomocou matíc:
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Maticové vyjadrenie formy $q$ v novej báze je tak

$$q = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}.$$

Spolu s (16) potom máme

$$q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} P^T B P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

čiže pre matice $A$ a $B$ platí

$$A = P^T B P.$$

Pozorovanie z tohto príkladu možno zjavne prirodzene zovšeobecniť pre ľubovolnú kvadratickú formu $q: \ k^n \to k$:

Nech $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ sú dve bázy priestoru $k^n$ a nech $\mathbf{x}' = P\mathbf{x}$. Nech ďalej $A$ resp. $B$ je matica kvadratickej formy $q$ vzhľadom na bázu $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{x}'$. Potom $A = P^T B P$.

Naopak, nech $A$ a $B$ sú symetrické matice stupňa $n$. Nech existuje regulárna štvorcová matica stupňa $n$ taká, že $A = P^T B P$. Potom $A$ a $B$ sú matice tej istej kvadtratickej formy vzhľadom na dve rôzne bázy, pričom $P$ je maticou prechodu medzi týmito dvoma bázami.

Definícia 6.9. Štvorcové matice $A$ a $B$ stupňa $n$ sa nazývajú **kongruentné** ($A \equiv B$), ak existuje regulárna štvorcová matica $P$ taká, že $A = P^T B P$.

Úvahami spred definície sme dokázali tvrdenie:

Tvrdenie 6.10. *Symetrické matice $A$ a $B$ stupňa $n$ sú maticami tej istej kvadratickej formy (vzhľadom na možno rôzne bázy) práve vtedy keď sú navzájom kongruentné.*

Jednoducho a priamočiaro sa dajú ukázať tieto vlastnosti relácie kongruentnosti matíc:

- Kongruentnosť matíc je reláciou ekvivalencie.
- Ak $A$ je symetrická matica a $A \equiv B$, potom aj $B$ je symetrická matica.

Príklad 6.11. ??? Diagonálna matica, s ktorou je daná symetrická matica kongruentná, nie je jednoznačná: nech $q(x, y) = 10x^2 + 5y^2 - 2xy$.

(a) $q(x, y) = (9x^2 + y^2 - 6xy) + (x^2 + 4y^2 + 4xy) = (x + 2y)^2 + (3x - y)^2$

(b) Lagrangeovou diagonalizačnou metódou dostaneme:

$$\begin{aligned} 10x^2 + 5y^2 - 2xy &= 10(x^2 - \frac{1}{5}xy) + 5y^2 \\ &= 10(x - \frac{1}{10}y)^2 - \frac{1}{10}y^2 + 5y^2 = 10(x - \frac{1}{10}y)^2 + \frac{49}{10}y^2. \end{aligned}$$

Máme tak pre tú istú kvadratickú formu tri rôzne symetrické matice, ktoré ju popisujú, vždy v inej báze:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{49}{10} \end{pmatrix}.$$

Tieto matice sú všetky navzájom kongruentné.

**2.3. Metóda 2: simultánne ekvivalentné úpravy matice.** Skúsime teraz diagonalizovať kvadratickú iným postupom. Aby sme sa vyhli zdĺhavému vypisovaniu premenných, formu si hneď reprezentujeme maticou. Maticu budeme modifikovať takými úpravami, aby sme zotrvávali v triede kongruencie tejto matice, teda maticu modifikujeme tak, aby po každom kroku bola výsledkom matica, ktorá je kongruentná s danou maticou. To znamená, že ak na matici vykonáme nejakú ekvivalentnú riadkovú úpravu, následne v nej vždy vykonáme tú istú stĺpcovú úpravu: Ak $U$ je regulárna štvorcová matica, potom

- $AU$ je matica, ktorá vznikne z $A$ aplikovaním ekvivalentnej stĺpcovej úpravy „zakódovanej" v matici $U$,
- $U^T A$ je matica, ktorá vznikne z $A$ aplikovaním tej istej istej úpravy.

Zjavne vieme každú maticu diagonalizovať:

- úprava 1. typu: ak $a_{ii} \neq 0$, tak znulujeme všetky $a_{ij}$ a $a_{ji}$ $(i \neq j)$ pripočítaním vhodného násobku $i$-teho stĺpca resp. riadku k $j$-temu,
- úprava 2. typu: ak pre všetky $i$ také, že $a_{ii} \neq 0$, platí $a_{ij} = a_{ji} = 0$ (inak: už sme úpravou 1.typu znulovali všetko, čo sa dalo), nech $i$ je najmenšie také, že $a_{ii} = 0$ a $a_{ij} \neq 0$ pre nejaké $j$, potom $j$-ty riadok pripočítame k $i$-temu a to isté urobíme so stĺpcami.

Úpravou 2. typu určite „nerozhádžeme" ľavú hornú $(i-1) \times (i-1)$ podmaticu a v nasledujúcich krokoch už vieme vynulovať všetky prvky v $i$-tom riadku a stĺpci, okrem diagonálneho. Týmto sme vlastne ukázali:

TVRDENIE 6.12. *Každá symetrická matica je kongruentná s nejakou diagonálnou maticou.*

PRÍKLAD 6.13. Reprezentujme si maticu kvadratickej formy z Príkladu 6.8 maticou a snažme sa ju diagonalizovať práve popísanou metódou.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že sme dostali inú diagonálnu kvadratickú formu ako pomocou Lagrangeovej diagonalizačnej metódy. Vyvstáva tak prirodzená otázka: čo majú tieto diagonálne kvadratické formy spoločné? Môžme si všimnúť, že je to počet kladných a záporných čísel na diagonále.

## 3. Sylvestrov zákon zotrvačnosti

Odteraz až do konca kapitoly budeme pracovať s kvadratickými fomami nad reálnymi číslami.

DEFINÍCIA 6.14. Nech $A$ je diagonálna matica nad reálnymi číslami. **Signatúra** matice $A$, ozn. $\sigma(A)$ je trojica $(s_+, s_-, s_0)$, kde

- $s_+$ je počet kladných prvkov na diagonále,
- $s_-$ je počet záporných prvkov na diagonále,
- $s_0$ je počet nulových prvkov na diagonále.

Zrejme hodnosť matice $A$, $h(A) = s_+ + s_-$ a stupeň matice $n = s_+ + s_- + s_0$.

VETA 6.15 ((Sylvestrov zákon zotrvačnosti)). *Nech $A$, $B$ sú diagonálne matice nad $\mathbb{R}$ a nech $A \equiv B$. Potom $\sigma(A) = \sigma(B)$.*

*Dôkaz.* Nech $A \equiv B$. Riadkové ani stĺpcové ekvivalentné úpravy nemenia hodnosť matice, preto $h(A) = h(B) = h$. Označme

$$\sigma(A) = (k, h-k, n-h),$$
$$\sigma(B) = (l, h-l, n-h).$$

Potrebujeme ukázať, že $k = l$.

Poradie prvkov na diagonále vieme úpravami zachovávajúcimi kongruentnosť zmeniť, preto bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_k, -a_{k+1}, \dots, -a_h, 0, \dots, 0), \quad a_i > 0,$$
$$B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_l, -b_{l+1}, \dots, -b_h, 0, \dots, 0), \quad b_i > 0.$$

Keďže matice $A$ a $B$ sú kongruentné, platí $B = P^T AP$ pre nejakú regulárnu maticu $P$. Stĺpce matice $P$ tvoria bázu $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$.

Matica $A$ je maticou kvadratickej formy v štandardnej báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a matica $B$ je maticou tej istej kvadratickej formy vzhľadom na bázu $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Nech $S$ je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$ generovaný vektormi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ a nech $T$ je podpriestor generovaný vektormi $\mathbf{v}_{l+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. Potom pre všetky nenulové vektory $\mathbf{x} \in S$ platí $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$. Na druhej strane pre všetky vektory $\mathbf{y} \in T$ platí $\mathbf{y}^T B\mathbf{y} \leq 0$. Priestory $S$ a $T$ majú preto spoločný iba nulový vektor. Odtiaľ

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T = k + (n - l) \leq n,$$

preto $k \leq l$. Analogicky ukážeme, že $l \leq k$. □

Definícia 6.16. Nech $A$ je symetrická matica nad $\mathbb{R}$. **Signatúra** matice $A$, ozn. $\sigma(A)$ je signatúra diagonálnej matice, s ktorou je $A$ kongrunetná.

Dôsledok. *Nech $A, B$ sú symetrické matice rovnakého stupňa nad $\mathbb{R}$. Matice $A$ a $B$ sú kongruentné práve vtedy, keď $\sigma(A) = \sigma(B)$.*

*Dôkaz.* Každú symetrickú maticu vieme vhodnou zmenou bázy upraviť na takú diagonálnu maticu, v ktorej sa zhora nachádzajú na diagonále najprv kladné prvky, potom záporné a na záver nulové. Nad reálnymi číslami môžme s úpravami pokračovať tak, že kladné prvky nahradíme jednotkami a záporné mínus jednotkami. Zrejme každej symetrickej matici nad $\mathbb{R}$ zodpovedá práve jedna takáto diagonálna matica. □

(Ako by situácia vyzerala, keby sme uvažovali formy nad komplexnými číslami?)

Definícia 6.17. Kvadratická forma $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa nazýva

- **kladne definitná**, ak $q(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x} \neq 0$,
- **kladne semidefinitná**, ak $q(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- **záporne definitná**, ak $q(\mathbf{x}) < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x} \neq 0$,
- **záporne semidefinitná**, ak $q(\mathbf{x}) \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- **indefinitná**, ak $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \ q(\mathbf{x}) > 0, q(\mathbf{y}) < 0$.

Symetrická matica sa tiež nazýva kladne definitnou, ak kvadratická forma, ktorú reprezentuje, je kladne definitná, analogicky pre ostatné prípady definitnosti.

Diagonálna matica matica $A$ je zjavne kladne definitá, ak $\sigma(A) = (n, 0, 0)$. Podobne vieme charakterizovať aj ostatné prípady definitnosti.

Stojíme teraz ešte pred výzvou: ako zistiť definitnosť akejkoľvek symetrickej matice bez toho, aby sme ju upravovali na diagonálny tvar?

PRÍKLAD 6.18. Nech $A$ je symetrická matica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Hodnota kvadratickej formy $q$ určenej touto maticou v jednotkových vektoroch je

$$q(1,0) = a_{11}$$
$$q(0,1) = a_{22}.$$

Aby bola táto kvadratická forma kladne definitná, nutne musí platiť, že $a_{11}$ aj $a_{22}$ sú kladné čísla. Avšak vidíme, že tieto podmienky nie sú postačujúce: ak napríklad $a_{11} = a_{22} = 2$ a $a_{12} = -2$, pre vektor $(1,1)$ máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

Skúsme nájsť aj postačujúcu podmienku kladnej definitnosti pre maticu stupňa 2. Potrebujeme, aby pre maticu (17) platilo

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}((x,y) \neq (0,0))$$

$$\text{t.j.} \quad a_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x}{y} + a_{22} > 0.$$

Toto je zjavne ekvivalentné podmienke, že diskriminant kvadratickej rovnice je záporný a súčasne $a_{11} > 0$ alebo inak:

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det A > 0.$$

VETA 6.19 (Sylvestrovo kritérium kladnej definitnosti). *Nech $A$ je symtrická matica stupňa $n$ nad $\mathbb{R}$. Matica $A$ je kladne definitná práve vtedy, keď všetky vedúce hlavné minory matice $A$ sú kladné.*

*Dôkaz.* Nech $A$ je kladne definitná. Indukciou ukážeme, že jej vedúce hlavné minory sú kladné.

Pre $n = 1$ je tvrdenie zjavne pravdivé. (V predchádzajúcom príklade sme si ho dokázali dokonca pre $n = 2$.)

Nech je tvrdenie pravdivé pre $n-1$. Ak $\mathbf{e}_1$ je prvý bázový vektor, z podmienky $\mathbf{e}_1^T A \mathbf{e}_1 > 0$ máme, že $a_{11} > 0$. Pripočítaním vhodného násobku prvého riadku k ostatným (t.j. nahradením matice $A$ maticou $P^T A$; $P$ je vhodn8 regulárna matica) vynulujeme v prvom stĺpci všetky položky pod $a_{11}$. Potom prevedieme tie isté stĺpcové úpravy (t.j. maticu $P^T A$ nahadíme maticou $P^T a P$). Namiesto pôvodnej matice $A$ máme teraz s ňou kongruentnú maticu

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B' \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Matice $A$ a $B$ majú tie isté vedúce hlavné minory, pretože žiadna z prevedených úprav nezmenila determinant matice a dokonca ani determinant hlavných podmatíc. Keďže $A \equiv B$, je aj matica $B$ kladne definitná. Potom ale aj jej podmatica $B'$ je nutne kladne definitná. Z indukčného predpokladu sú potom všetky vedúce hlavné minory matice $B'$ kladné. Keďže vedúce hlavné minory matice $B$ (a teda aj matice $A$) sú $a_{11}$-násobkami vedúce hlavných minorov matice $B'$, sú aj vedúce hlavné minory matice $A$ kladné.

Pre opačnú implikáciu predpokladajme teraz, že $A$ má všetky vedúce hlavné minory kladné. Odtiaľ potom $a_{11} > 0$, keďže ide o prvý minor. Aj teraz maticu $A$ nahladíme kongruentnou maticou $B$ (18) s rovnakými minormi. Keďže podľa predpokladu druhý minor $a_{11}(B')_{11}$ je kladný, platí, že $(B')_{11} > 0$, a pomocou tohto prvku znulujeme všetky prvky nachádzajúce sa v druhom stĺpci pod diagonálou, podobne pre druhý riadok. Vidíme, že ak pokračujeme v diagonalizácii matice $A$, dopracujeme sa nakoniec k diagon8lnej matici, ktorá bude mať na diagonále iba kladné čísla, a teda je kladne definitná. □

Analogicky môžme charakterizovať zápornú definitnosť: matica $A$ je záporne definitná, ak pre jej vedúce hlavné minory platí

$$A_1 < 0,\ A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots$$

Semidefinitnosť a indefinitnosť už takto jednoznačne testovať nevieme. Pre nájdenie signatúry takej matice je naozaj vhodné siahnuť po diagonalizácii.

## 4. Kvadratické formy pri skúmaní priebehu funkcie dvoch premenných

Z analýzy už viete, že pri skúmaní vlastností funkcie viacerých premenných sú zaujímavými tzv. kritické body. V nich funkcia môže (ale nemusí) nadobudnúť extrém. Pre rozhodovanie, či ide o extrém a ak áno, o aký (maximum vs. minimum) sú veľmi užitočné naše práve nadobudnuté vedomosti o kvadratických formách. Postup, ktorý poznáte z analýzy, si teraz osvetlíme z hľadiska geometrie. Zaoberať sa budeme funkciou dvoch premenných.

Analytická funkcia je vo zvolenom bode $(x_0, y_0)$ aproximovaná Taylorovým polynómom:

$$\begin{aligned} T_f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) \qquad (19) \\ &\quad + \ldots . \end{aligned}$$

Čím vyšší stupeň polynómu zvolíme, tým lepšie bude polynóm funkciu aproximovať. Polynóm stupňa 0, t.j. konštanta, bude mať v skúmanom bode s danou funkciu spoločnú funkčnú hodnotu. Ak aproximujeme lineárnym polynómom, bude mať tento polynóm s funkciou v skúmanom bode spoločnú nielen funkčnú hodnotu, ale ich grafy budú mať v tomto bode spoločnú aj dotykovú rovinu. Ešte lepšiu aproximáciu poskytuje Taylorov polynóm druhého stupňa: tu už z polynómu vyčítame nielen, či funkcia v tom-ktorom smere rastie či klesá, ale aj ako sa jej rast či klesanie zrýchľuje alebo spomaľuje, t.j. ako sa jej graf v okolí tohto bodu ohýba. Exaktnejšie povedané, grafy funkcie a jej aproximácie Taylorovým rozvojom druhého stupňa majú v danom bode spoločnú nielen dotykovú rovinu ale aj krivosti v rôznych smeroch. Toto je už dostatočná informácia pre rozhodnutie, či v tomto bode má funkcia extrém.

Pri hľadaní extrémov funkcie $f$ dvoch premenných postupujeme takto:

(1) Nájdeme kritické body funkcie $f$, t.j. také body $(x_0, y_0)$, pre ktoré
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$
Sú to body, v ktorých je dotyková rovina grafu funkcie vodorovná.

(2) V každom kritickom bode aproximujeme funkciu polynómom druhého stupňa a na základe tohto polynómu rozhodneme, či ide o extrém funkcie, a ak áno, aký je to extrém.

Rozoberieme ešte trochu druhý krok tohto postupu. Pre pohodlnejšiu manipuláciu transformujme súradice tak, že začiatok súradnicovej sústavy posunieme do bodu $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a $z$-súradnicu naškálujeme, aby sme sa zbavili faktora $1/2$ v rozvoji. Máme tak nové súradnice $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - x_0, \\ \tilde{y} &= y - y_0, \\ \tilde{z} &= 2(z - f(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

Rozvoj (19) druhého stupňa v nových súradniciach bude potom vyzerať:

$$\tilde{z} = d_{20}\tilde{x}^2 + 2d_{11}\tilde{x}\tilde{y} + d_{02}\tilde{y}^2,$$

kde $d_{ij}$ sú hodnoty parciálnych derivácií, ako sme ich vypočítali v (19). Funkcia je po vhodnej voľbe súradníc teda aproximovaná kvadratickou formou, a o tejto už vieme ľahko rozhodnúť, či nadobúda v $(0, 0)$ (ostré) maximum resp. minimum – bude to práve vtedy, keď je kvadratická forma negatívne resp. pozitívne definitná. Definitnosť formy v tomto prípadne najlepšie rozhodneme pomocou Sylvestrovho kritéria.

Definícia 6.20. Nech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je funkcia, ktorá má všetky druhé derivácie. **Hessián** funkcie $f$ je štvorcová matica

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Hessián je teda vo vhodnej súradnicovej sústave matica kvadratickej formy, ktorá najlepšie aproximuje funkciu v skúmanom kritickom bode.