Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

PROJEKTÍVNA GEOMETRIA I.

Štefan SOLČAN

Bratislava 2015

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

PROJEKTÍVNA GEOMETRIA I.

Štefan SOLČAN

Bratislava 2015

Názov: **PROJEKTÍVNA GEOMETRIA I.**

Autor: doc. RNDr. **Štefan SOLČAN**, PhD

Recenzenti: **Prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc.**
doc. RNDr. Marián Trenkler, CSc., mim.prof. KU

Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK Bratislava

Vydané s finančnou podporou grantu
KEGA 094UK-4/2013, E-matik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

(C) Štefan SOLČAN, 2015

ISBN 978-80-8147-051-6
EAN 9788081470516

Štefan SOLČAN: PROJEKTÍVNA GEOMETRIA I.

OBSAH

Úvod

Tento učebný text je súčasťou riešenia projektu KEGA – „Ematik+, Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky“ (KEGA 094UK-4/3013). Bude publikovaný formou CD ako študijný materiál k e-learningovému portálu.

Text vznikol doplnením a rozšírením kurzu Projektívnej geometrie pre učiteľské štúdium deskriptívnej geometrie a následne aj e-learningového kurzu pre ESF projekt Ematik o tie časti , ktoré sa v rámci výučby spomenú len okrajovo a sú zaujímavé tak z hľadiska získania vedomostí z projektívnej geometrie – tej oblasti geometrie, ktorá je úzko prepojená s inými odvetviami geometrie – afinnou, euklidovskou ale aj Lobačevského geometriou, ale ktorá je vo výučbe matematiky a geometrie dosť opomínaná, ako aj z hľadiska iného – axiomatického budovania teórie, v tomto prípade geometrie projektívnej roviny. Pridané sú aj partie o konečných projektívnych rovinách, ktoré majú súvis s inými oblasťami matematiky – teória čísel, elementárna geometria, štatistika, kódovanie a redukované sú tie časti, ktoré sú grafického charakteru a sú zamerané na aplikovanie v deskriptívnej geometrii. Myslím, že je tým text zrozumiteľnejší aj pre širšiu komunitu matematikov a učiteľov matematiky.

Text je zároveň prípravou na projektívny pohľad na teóriu kužeľosečiek, bude obsahom textov Projektívna geometria II. – Kužeľosečky v rozšírenej euklidovskej rovine.

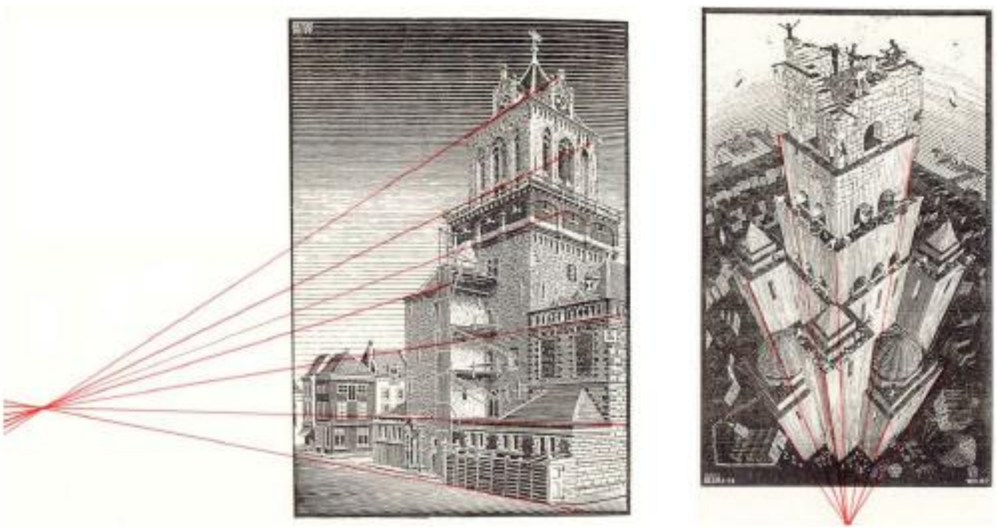
Autor chce poďakovať recenzentom – Prof. RNDr. Jánovi Čižmárovi, CSc. a doc. RNDr. Mariánovi Trenklerovi, CSc., mim.prof. KU za starostlivé prečítanie textu a podnetné pripomienky, ktoré pomohli zlepšiť a skultivovať grafickú, pojmologickú a na niektorých miestach aj odbornú stránku textu.

1. Rozšírená euklidovská rovina a jej vlastnosti

1.1 Motivácia rozšírenia euklidovskej roviny

Praktické problémy života ľudí sa týkali aj merania dĺžok a plôch, všímali si aj tvary rôznych telies a rovinných útvarov. Zobrazovali ich z dôvodov technických – niektoré súčasti stavieb sa „vyrábali“ inde, než sa stavali, ale aj z čisto duchovných a estetických. Po istom čase začali skúmať svoje obrazy a porovnávať ich vzory s tým, ako ich videli vlastnými očami. K prvým a najznámejším bádateľom v tomto smere patrili renesanční maliari, ako Leonardo da Vinci (1452 – 1519), Albrecht Dürer (1471 – 1528), architekti Filippo Brunelleschi (1377 – 1446) a Leon Battista Alberti (1404 – 1472), či neskôr grafik Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972).

Obr. 1.1 Pohľad do knihy A. Dürera

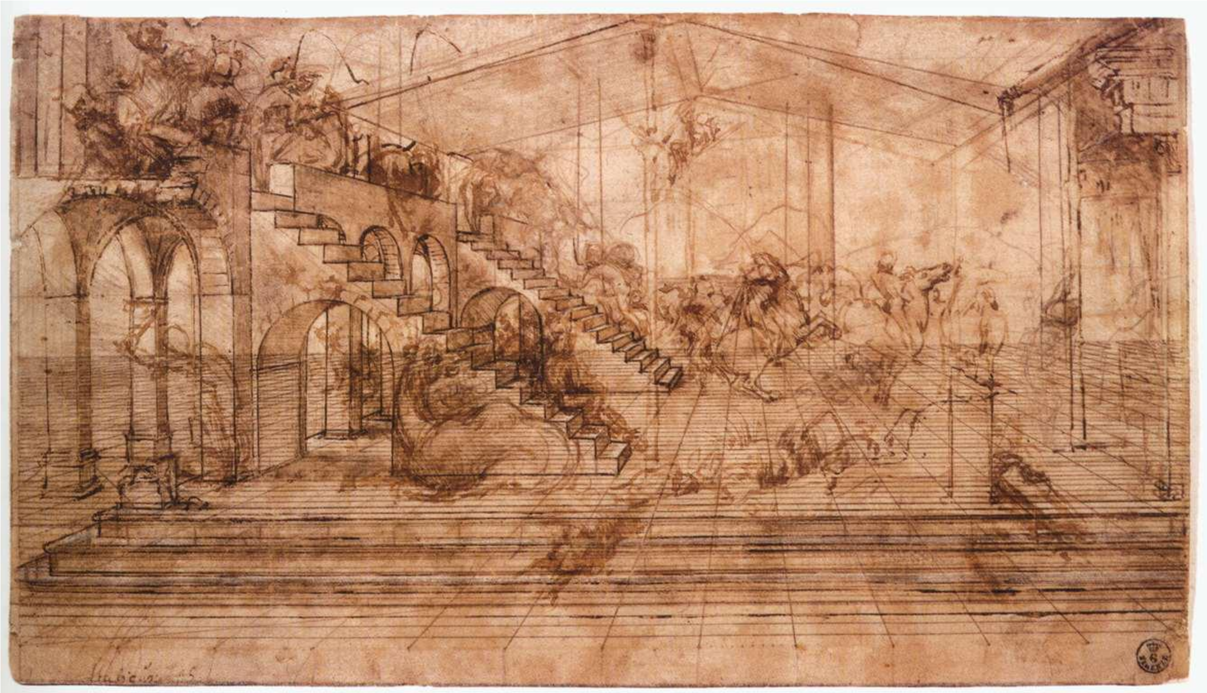


Obr. 1.2 Dve medené rytiny holandského grafika M. C. Eschera

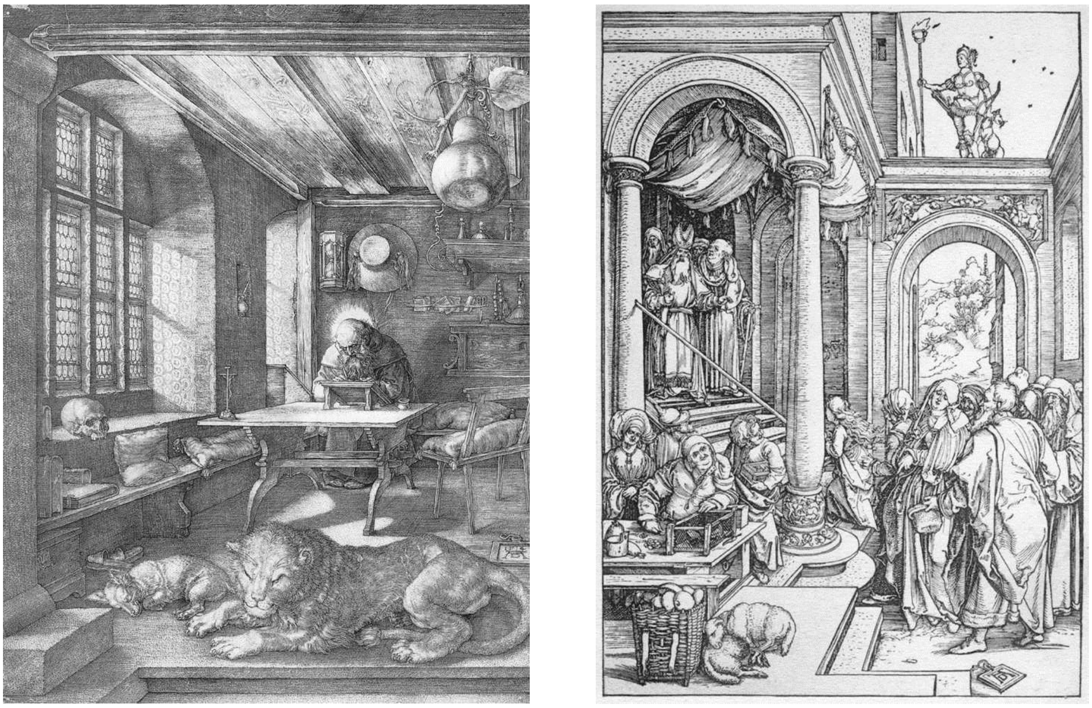
Všimli si napríklad, že pri maľovaní útvarov sa ich rovnobežné hrany – po predĺžení – preťali. Pravda len vtedy, ak sa snažili o verné napodobenie ľudského videnia. Ten "chýbajúci" bod tam potom teda "dodali".

Čo to prinieslo ?

1. **Realistické zobrazovanie** – v maliarstve obrazy, ktoré zodpovedali ľudskému videniu, dostali hĺbku a výraz (pozri napr. skicu da Vinciho, alebo grafiky Dürera).



Obr. 1.3 Leonardo da Vinci – Štúdia lineárnej perspektívy pre obraz *Klaňanie troch kráľov*, 1481



Obr. 1.4 Grafiky A. Dürera nakreslené s využitím metódy lineárnej perspektívy

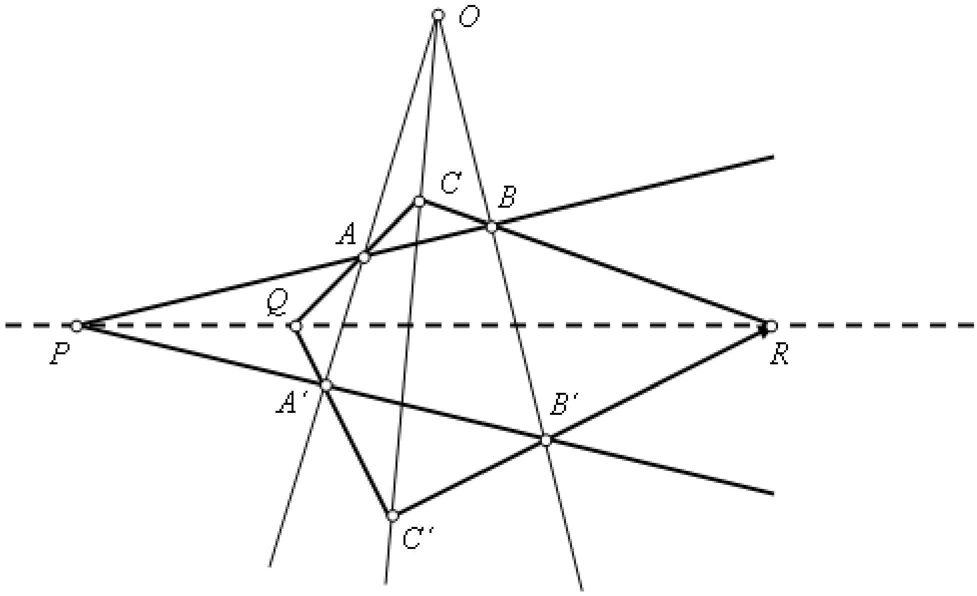
2. **Zjednodušenie vyjadrovania** v neskôr rozpracovanej teórii tejto geometrie, napr. známa veta, ktorú objavil Girard Desargues (1591 – 1661) po pridaní tých "nových" bodov (takú rovinu potom nazveme rozšírenou euklidovskou rovinou) znie:

   Desargova veta

   Ak spojnice zodpovedajúcich si vrcholov dvoch trojuholníkov ABC a A′B′C′ prechádzajú jedným bodom O, tak priesečníky odpovedajúcich si strán tých trojuholníkov ležia na jednej priamke.

   Iná formulácia tejto vety (v rozšírenej euklidovskej rovine):

   Nech ABC a A′B′C′sú dva trojuholníky. Ak existuje bod O, ktorým prechádzajú (súčasne) priamky AA′, BB′, CC′ , tak body P = AB ∩ A′B′, Q = AC ∩ A′C′, R = BC ∩ B′C′ ležia na jednej priamke (sú kolineárne).



To isté tvrdenie má až päť verzií (päť formulácií) pre nerozšírenú, teda „klasickú" euklidovskú rovinu. Sú to napríklad nasledovné tvrdenia:

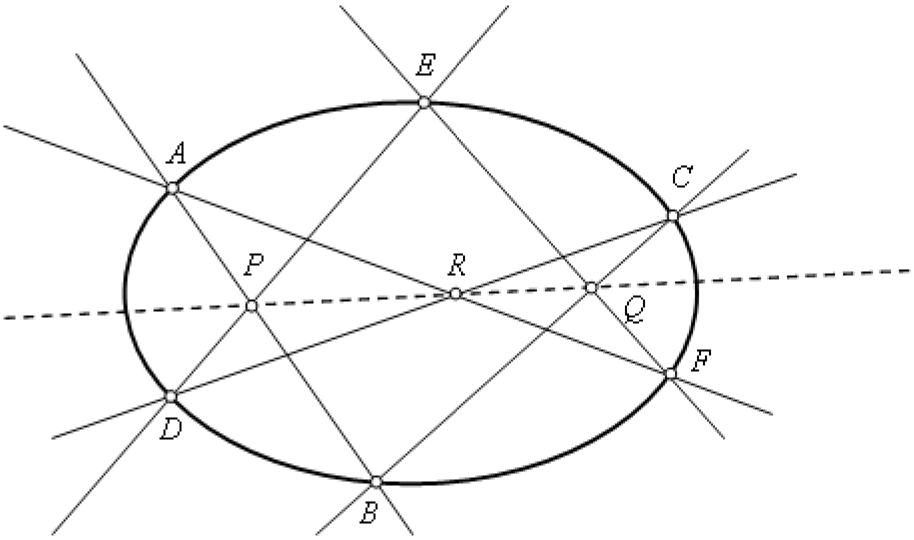
DVAf-1. *Nech ABC a A′B′C′sú dva trojuholníky. Ak priamky AA′, BB′, CC′ sú navzájom rovnobežné , tak body P = AB ∩ A′B′, Q = AC ∩ A′C′, R = BC ∩ B′C′ sú kolineárne (ak všetky tieto body existujú).*

DVAf-2. *Nech ABC a A′B′C′sú dva trojuholníky. Ak existuje bod O, ktorým prechádzajú (súčasne) priamky AA′, BB′, CC′ , a P = AB ∩ A′B′, Q = AC ∩ A′C′, a priamka BC je rovnobežná s priamkou PQ, tak je s priamkou PQ rovnobežná aj priamka B′C′.*

DVAf-3. *Nech ABC a A′B′C′ sú dva trojuholníky. Ak existuje bod O, ktorým prechádzajú (súčasne) priamky AA′, BB′, CC′ , a priamky AB a A′B′ sú rovnobežné a taktiež priamky AC a A′C′ sú rovnobežné, tak aj priamka BC je rovnobežná s priamkou B′C′.*

Ďalším príkladom je veta (B. Pascal, 1623 – 1662), ktorá hovorí :

Pascalova veta. *Protiľahlé strany šesťuholníka vpísaného do kužeľosečky sa pretínajú v bodoch jednej priamky.*



Daný šesťuholník nemusí byť konvexný, môže byť aj samopretínajúci sa – hviezdicový. Vrcholmi šesťuholníka *ABCDEF* na vyššie uvedenom obrázku sú body *A, B, C, D, E, F,* ale jeho stranami nie sú úsečky, ale priamky *AB, BC, CD, DE, EF a FA* . Pascalova veta hovorí o tom, že body *P, Q, R* sú kolineárne. Aj v tomto prípade sa však môže stať, že dve protiľahlé strany, napr. *AB* a *DE* budú – v euklidovskej rovine – rovnobežné. Špeciálnym prípadom je aj pravidelný šesťuholník vpísaný do kružnice. V euklidovskej rovine má potom Pascalova veta pre tieto špeciálne polohy bodov vždy inú formuláciu.

3. **Ďalším prínosom je možnosť rozumného definovania niektorých zobrazení**, ktoré by inak „fungovali“ s problémami, napr. stredové premietanie bodov priamky na body inej priamky, alebo bodov roviny do inej roviny.
   (Pozri napr. https://en.wikipedia.org/wiki/Perspective_%28graphical%29 alebo aj https://en.wikipedia.org/wiki/3D_projection#Perspective_projection)

4. Možnosť „emancipácie“ bodov a priamok, čo neskôr vedie k mocnému nástroju výstavby projektívnej geometrie – **princípu duality.** (Pozri časť 2.3 – Vlastnosti projektívnych rovín a dualita). Z platnosti Desargovho výroku možno tak na základe princípu duality odvodiť v rozšírenej euklidovskej rovine aj platnosť tohto výroku (duálneho k Desargovmu výroku):

   Ak a, b, c resp. a′, b′, c′ sú dve trojice priamok, pričom žiadna z trojíc neprechádza jedným bodom. Ak sa dvojice priamok a,a′, b,b′ a c,c′ pretínajú v bodoch jednej priamky, tak priamky spájajúce body a∩b a a′∩b′, a∩c a a′∩c′, b∩c a b′∩ c′ prechádzajú jedným bodom.

   Jeho platnosť s odvolaním sa na princíp duality je možná **len v rozšírenej euklidovskej rovine** a nie v euklidovskej rovine. Tam ju treba presne sformulovať a dokázať bez použitia princípu duality.

   Spomeňme tiež tvrdenie známe ako **Brianchonova veta**: *Spojnice protiľahlých vrcholov šesťuholníka opísaného (regulárnej) kužeľosečke prechádzajú jedným bodom.* V rozšírenej euklidovskej rovine je vetou duálnou k Pascalovej vete.

5. Po zovšeobecnení a následnom štúdiu projektívnych rovín s konečným počtom bodov sa ukázal **súvis s praktickými problémami a inými odvetviami matematiky** (kombinatorika, štatistika, algebra, teória kódovania, …).

Na ukážku jeden **problém**:

Vo firme treba zostrojiť počítačovú sieť, ktorá by mala isté vlastnosti z hľadiska optimálneho fungovania i bezpečnosti. Jej pracovníci formulovali svoje požiadavky takto: každé dva počítače by mali byť prepojené v rámci lokálnej podsiete, každé dve takéto rôzne podsiete by mali len jeden počítač spoločne prepojený a chceli mať aspoň 4 počítače tak, aby žiadne 3 z nich neboli zapojené v jednej podsieti. Pre aký počet počítačov má táto úloha riešenie?

(pozri tiež – Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum : Projective Geometry: from foundations to applications. Cambridge University Press 1998 , časť 2.8 Application: a communication problem. Dostupné na http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/beutel.pdf)

1.2 Konštrukcia rozšírenej euklidovskej roviny

Túto konštrukciu urobíme dohodou:

- ku každej priamke *m* euklidovskej roviny $\boldsymbol{E}_2$ pridáme práve jeden nový bod (ozn. U_∞^m);
- dva "nové" body U_∞^a, U_∞^b, pridané **priamkam** *a, b* **sa budú rovnať (bude to ten istý bod)** práve vtedy, ak pôvodné priamky *a, b* boli (v $\boldsymbol{E}_2$) **rovnobežné**;
- dva "nové" body pridané priamkam *c, d* budú rôzne práve vtedy, ak pôvodné priamky *c, d* boli (v $\boldsymbol{E}_2$) **rôznobežné**;
- množinu všetkých nových bodov nazveme "nevlastnou" priamkou, t. j. budeme túto množinu chápať ako novú priamku (v označení u_∞), ktorú sme vlastne tiež pridali k doterajším priamkam.

Táto dohoda nielen definuje nové objekty, ale opisuje, kedy body ležia na priamkach, teda opisuje ako vyzerá relácia incidencie bodov a priamok po procese rozšírenia.

Definícia 1.1 **Rozšírenou euklidovskou rovinou** (v označení $\overline{\boldsymbol{E}_2}$**)** budeme rozumieť systém pozostávajúci

- zo všetkých pôvodných bodov z $\boldsymbol{E}_2$ (nazveme ich **vlastnými bodmi**) a všetkých nových – pridaných bodov (podľa vyššie uvedenej dohody), ktoré nazveme **nevlastné**;
- zo všetkých priamok z $\boldsymbol{E}_2$ doplnených ich novým (nevlastným) bodom (nazveme ich **vlastnými priamkami**) a
- z **nevlastnej priamky**, pozostávajúcej zo všetkých nevlastných bodov a žiadnych iných.

Relácia incidencie bodov a priamok rozšírenej euklidovskej roviny:

- ak je bod vlastný, je rozšírením relácie na novú množinu bodov a priamok,
- ak je bod nevlastný, je táto relácia definovaná v opise procesu rozšírenia.

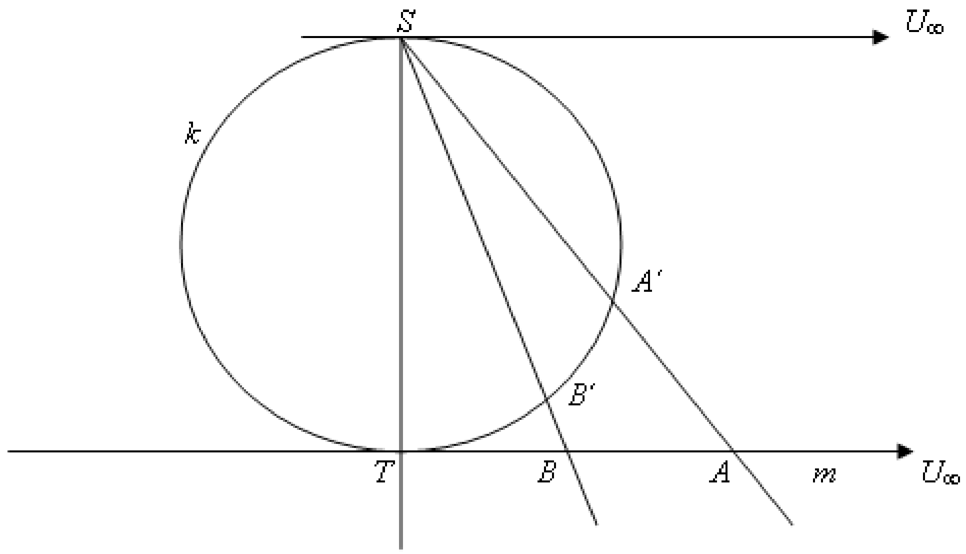
Niektoré vlastnosti rozšírenej priamky

Nech je daná v $\boldsymbol{E}_2$ priamka *m* a kružnica *k*, ktorá sa priamky *m* dotýka v bode *T*. Nech *S* je taký bod kružnice *k*, v ktorom je dotyčnica kružnice *k* rovnobežná s priamkou *m*. (Úsečka *ST* je priemerom kružnice *k*.)

Body priamky *m* (chápanej ako priamka euklidovskej roviny) vieme navzájom bijektívne (a spojite) priradiť bodom kružnice *k* (ale bez bodu *S*) pomocou tzv. stereografickej projekcie – bodu A' priradíme bod $A = SA' \cap m$.

Uvažujme teraz v pojmoch rozšírenej euklidovskej roviny $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ **:**

Body kružnice *k*, **aj s bodom *S***, vieme bijektívne (a spojite) priradiť bodom priamky m (chápanej ako priamka **rozšírenej euklidovskej roviny)** pomocou stereografickej projekcie. Ak toto priradenie chápeme ako zobrazenie množiny bodov kružnice *k*, tak bodu A' priradíme bod $A = SA' \cap m$, **bodu *S* priradíme nevlastný bod U_∞ priamky *m*.**



Dôsledky týchto úvah

- Rozšírená priamka, t. j. priamka rozšírenej euklidovskej roviny je uzavretá čiara.
- Jeden bod (napr. *T*) nerozdelí túto (rozšírenú) priamku na dve časti (v euklidovskej rovine bod T by rozdelil priamku na dve polpriamky), pojem *polpriamka* teda tu stráca zmysel.
- Na euklidovskej priamke bod *B* leží medzi bodmi *T*, *A* , na rozšírenej priamke sa z bodu *T* môžeme dostať do bodu *B* dvoma spôsobmi – buď pritom "prejdeme" cez bod *A*, alebo prejdeme cez nevlastný bod U_∞ priamky *m*. Tieto dve časti priamky sa nazývajú (projektívnymi) úsečkami určenými bodmi *A*, *T*, ale sú *dve*, na rozdiel od euklidovskej roviny, kde dva rôzne body určia práve jednu úsečku (a dve polpriamky).
- Podľa predchádzajúceho bodu stráca zmysel v rozšírenej euklidovskej rovine aj pojem (relácia) „ležať medzi", ktorý je základným pojmom usporiadania pre euklidovskú rovinu.

1.3 Niektoré (ďalšie) vlastnosti rozšírenej euklidovskej roviny:

V rozšírenej euklidovskej rovine $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ platia (aj) nasledovné dve tvrdenia.

Veta 1.2

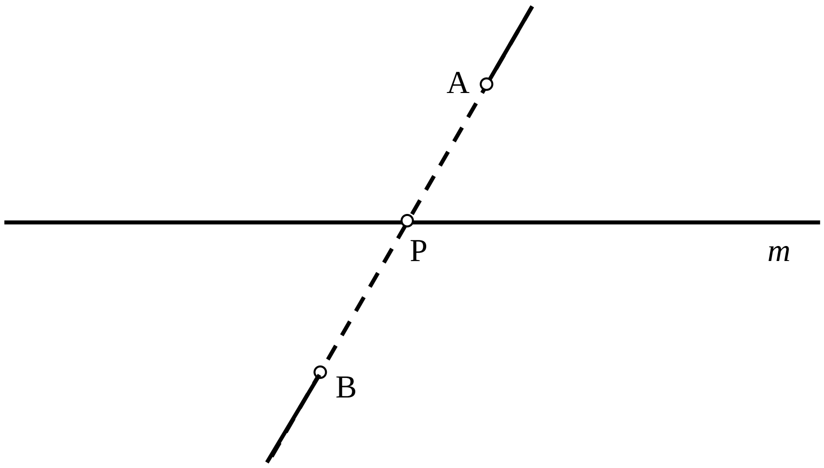
a) Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka tak, že inciduje s oboma danými bodmi. (Dva rôzne body určia práve jednu priamku.)

b) Ku každým dvom rôznym priamkam existuje práve jeden bod tak, že inciduje s oboma danými priamkami. (Dve rôzne priamky určia práve jeden bod, t. j. každé dve rôzne priamky sa pretnú.)

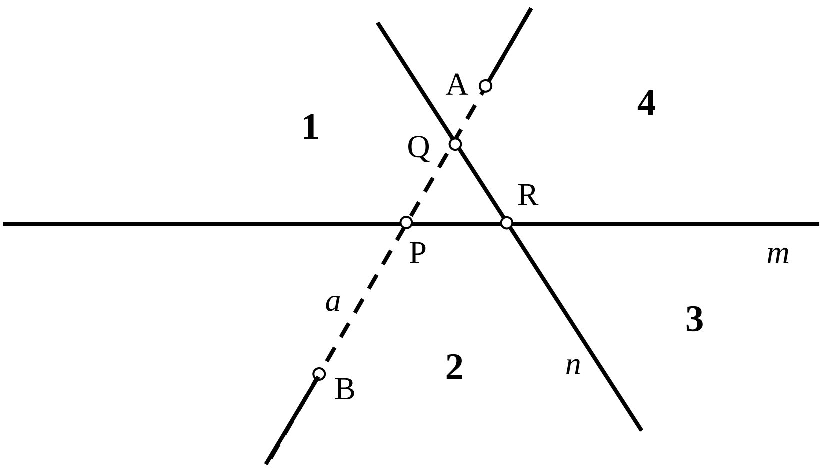
Tvrdenie a) platí aj v euklidovskej rovine $\boldsymbol{E}_2$, výrok b) v $\boldsymbol{E}_2$ neplatí.

Ďalšie vlastnosti rovín $\boldsymbol{E}_2$ a $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ na porovnanie ich rozdielnosti

1. V $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ neexistujú rovnobežné priamky, každé dve rôzne priamky sa pretnú.
2. V $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ priamka *m* nerozdelí rovinu na dve oblasti, pojem polrovina nemá zmysel.

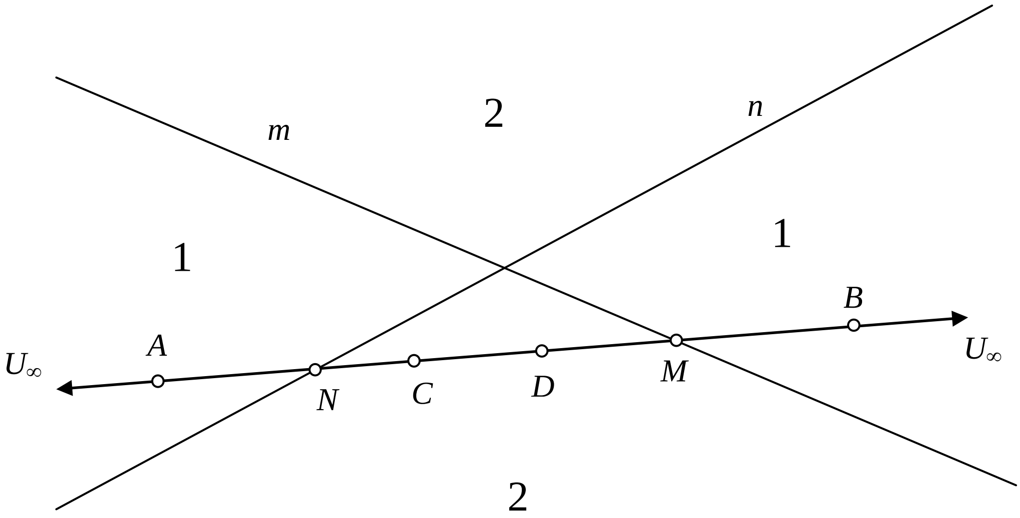


3. Dve rôzne priamky *a*, *b* v $\boldsymbol{E}_2$ rozdelia rovinu na štyri (ak sú *a*, *b* rôznobežné) alebo tri oblasti (ak sú *a*, *b* rovnobežné).

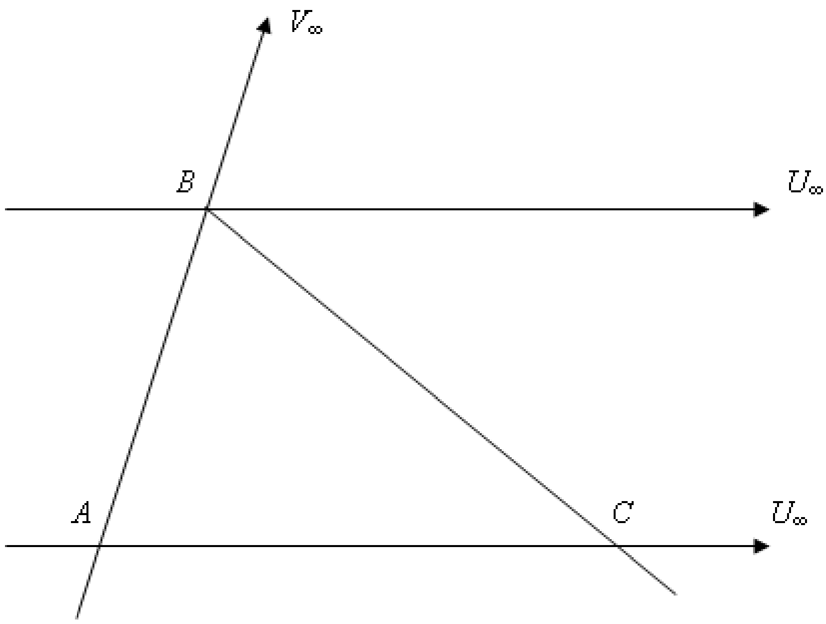


Dve rôzne priamky v rozšírenej euklidovskej rovine $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ rozdelia rovinu na dve oblasti.

(Z bodu *A* sa do bodu *B* môžeme dostať – cez bod U_∞ – bez toho aby sme museli „prejsť“ cez body *M*, *N* priamok *m*, *n*. Preto ležia body *A*, *B* v jednej a tej istej oblasti, naopak body *A* a *C* ležia v dvoch rôznych oblastiach určených priamkami *m*, *n*.)



4. Tri priamky neprechádzajúce jedným bodom rozdelia rozšírenú euklidovskú rovinu $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ na štyri oblasti, na rozdiel od euklidovskej roviny, kde je oblastí sedem (pozri napr. priamky *m*, *n*, *AB* z vyššie uvedeného obrázku).
5. V euklidovskej rovine sa trojuholník *ABC* definuje ako množina troch nekolineárnych bodov *A*, *B*, *C* spolu s úsečkami *AB*, *BC* a *AC*. Pretože v rozšírenej euklidovskej rovine dva body neurčia jednoznačne úsečku, významnú úlohu tu bude hrať trojica nekolineárnych body *A*, *B*, *C* spolu s priamkami *AB*, *BC* a *AC*, ktoré sú nimi určené. Niekedy sa tento útvar nazýva (projektívnym) trojuholníkom, v staršej literatúra aj „trojrohom“. Na nižšie uvedenom obrázku sú znázornené trojuholníky *ABC*, ABU_∞ (jeden jeho vrchol je nevlastný bod) a $AU_\infty V_\infty$ (jedna jeho strana je nevlastná priamka).



1.4 Súradnice v rozšírenej euklidovskej rovine

V euklidovskej rovine sme mohli bodom jednoznačne „prideliť“ usporiadané dvojice čísel ako ich súradnice (karteziánske súradnice). Po pridaní nových, nevlastných bodov **je bodov v novej – rozšírenej euklidovskej rovine viac než usporiadaných dvojíc** (reálnych čísel). Čo teda prideliť novým bodom ako ich súradnice? Z týchto úvah vyplýva, že dvojice to byť nemôžu, je ich „primálo“, trojíc je zase „priveľa“.

Ak chceme aby bod ležiaci na priamke $c+ax+by=0$ túto vlastnosť (incidencie) nestratil, skúsime namiesto dvojice $[x,y]$ uvažovať o trojici $(1,x,y)$ a vzťah incidencie s priamkou bude vyjadrený rovnicou:

$$c.1+a.x+b.y=0$$

Pretože tejto rovnici vyhovuje aj trojica $(t,t.x,t.y)$ pre číslo t rôzne od nuly, budeme trojicu $(t,t.x,t.y)$ považovať za nové – tzv. homogénne súradnice bodu, ktorého karteziánske súradnice v $\boldsymbol{E}_2$ boli $[x,y]$. Tieto nové súradnice budeme označovať (x_0,x_1,x_2), pričom fakt, že začíname od indexu 0, nám bude signalizovať, že to už nie sú karteziánske súradnice, ale nové, homogénne súradnice. Vzťah medzi „starými“ súradnicami $[x,y]$ a ”novými” súrad-nicami vlastných bodov je daný rovnicami

$$x=\frac{x_1}{x_0},\quad y=\frac{x_2}{x_0}\quad .$$

Teraz je už zrejmý aj fakt, prečo sme uvádzali koeficient *c* na začiatku rovnice.

Priamka euklidovskej roviny je určená svojou rovnicou $c+ax+by=0$, budeme preto koeficienty (c,a,b) ako trojicu považovať za súradnice danej priamky. Opäť za jej súradnice budeme považovať aj trojicu (tc,ta,tb) pre každé reálne číslo *t* rôzne od nuly.

V euklidovskej rovine rovnica $c+0.x+0.y=0$ pre $c\neq 0$ neurčuje priamku (nespĺňajú ju súradnice žiadneho bodu) a tak je to kandidát pre to, aby to boli súradnice nevlastnej priamky. V nových súradniciach je to rovnica $x_0=0$.

K takejto rovnici dospejeme aj riešením sústavy rovníc určujúcich dve rovnobežné (v $\boldsymbol{E}_2$) priamky.

$$c+ax+by=0$$

$$c'+ax+by=0$$

Ak prejdeme k novým súradniciam, a namiesto (c,a,b) budeme písať (a_0,a_1,a_2), sústava rovníc

$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$$

$$a_0^{'}x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$$

už riešenie bude mať. Je ňou napr. trojica $(0,-a_2,a_1)$. Dve priamky, ktoré boli v euklidovskej rovine rovnobežné, sa v novej rovine, kde už body majú nové súradnice, pretnú v bode, ktorý má súradnice $(0,-a_2,a_1)$. Nemôže to byť žiadny z pôvodných bodov $\boldsymbol{E}_2$, pretože tie majú na prvom mieste číslo rôzne od nuly. Sú to súradnice nového, nevlastného bodu (už) rozšírenej euklidovskej roviny. Takže vlastné body možno zistiť podľa toho, že ich homogénne súradnice sa dajú vybrať tak, že majú tvar $(1,x,y)$, a nevlastné podľa toho, že ich homogénne súradnice majú tvar $(0,u,v)$.

Takto sme vyriešili koordinatizáciu bodov (a priamok) rozšírenej euklidovskej roviny. Nie je to jediná možnosť. V $\boldsymbol{E}_2$ môžeme zvoliť inú súradnicovú sústavu, s iným začiatkom a inými osami a z nich získame iné súradnice pre body rozšírenej euklidovskej roviny. Náš spôsob prechodu k novým súradniciam je viazaný na určitú pevne zvolenú karteziánsku súradnicovú sústavu. Tento proces je možné uskutočniť aj nahradením karteziánskych súradníc afinnými ($\boldsymbol{E}_2$ je aj afinná rovina). Do rozšírenej euklidovskej (a všeobecne projektívnej) roviny je možné zaviesť súradnice aj bez toho, aby sme ju museli viazať prísne na čosi pevne zviazané s euklidovskou rovinou.

(Pozri k tomu napr. Blattner J.: Projective Plane Geometry, alebo Buseman H., Kelly P. J.: Projective geometry and projective metrics, kap.I.)

1.5 Poznámky k histórii projektívnej geometrie

Aj keď každé „škatuľkovanie“ prináša zjednodušenia, dajú sa vo vývoji projektívnej geometrie vytypovať tri hlavné obdobia.

Prvé obdobie sa datuje od objavovania geometrických zákonitostí okolitého sveta, či už súviseli s rozmermi objektov („metrické zákonitosti) alebo so vzájomnou polohou telies a ich prvkov („polohové“ zákonitosti). Neskoršie štúdium týchto zákonitostí viedlo k vytvoreniu odvetvia geometrie, ktoré dostalo pomenovanie „**geometria polohy**“ alebo „**projektívna geometria**“. V prvej etape sa skúmali tieto úlohy v rámci elementárnej geometrie, bez toho, aby ich nejak kategorizovala. A tak popri výsledkoch ako sú Pytagorova veta (6. st. p. n. l.), tvrdenia o Hippokratových mesiačikoch (5. st. p. n. l.), Euklidova axióma (3. st. p. n. l), alebo Ptolemajova veta (2. st. p. n. l.), sa objavili aj práce súvisiace so zobrazovaním trojrozmerných objektov do roviny, napr. Euklidova práca *Optika*, rovnomenné dielo *Optika* od *Heliodora* (3.stor. p. n. l.) a stereografická projekcia, objavená *Hipparchom*, práce venované kužeľosečkám (*Aristos*, 4. st. p. l., *Euklides*, 330 – 275 p. n. l., a *Apollonios z Pergy*, asi 262 – 190 p. n. l.) alebo tvrdenia o vzájomnej polohe bodov a priamok (*Pappos*) alebo kružníc (*Appolonios*). Ďalší veľkí geometri tohto obdobia boli: *Archimedes* zo Syrakúz (287 – 212 p. n. l), *Menelaos* z Alexandrie (1. st. n. l.) a *Pappos*, (okolo 320). Dielo Pappa pozostáva z ôsmich kníh (kapitol). Žiaľ, zachovalo sa z nich len posledných šesť kníh a neveľká časť z druhej knihy. V tejto práci sú prvé začiatky pojmu involúcia, špeciálne je tu spomenutý involutórny vzťah troch párov bodov, ktorý potom omnoho neskôr objavil Desargues**.** Pappos tiež dokázal vetu (*Pappova veta*), ktorá je jedným z prvých výsostne projektívnych tvrdení – jej formulácia i tvrdenie obsahuje len požiadavky o incidencii bodov a priamok. Z dnešného pohľadu sa dá chápať ako špeciálny prípad *Pascalovej vety* o šesťuholníku vpísanom do kužeľosečky.

Geometria dosiahla v starom Grécku vysokej úrovne tak zo „strany“ faktografického materiálu, ako aj v zmysle položenia určitého teoretického základu. V tomto zmysle osobitne významná úloha patrí *Základom* Euklida, v ktorých bol urobený pokus systematizovať všetok nahromadený geometrický materiál a postaviť ho na základe na začiatku vymedzených axióm, postulátov a definícií.

Druhá etapa vývoja projektívnej geometrie súvisela so štúdiom otázok perspektívy nevyhnutných pre výtvarné umenie a nadviazala na výsledky antickej geometrie, ktoré mali projektívny charakter. Viedla k rozšíreniu euklidovskej roviny, a tým k novému typu geometrie.

O úrovni poznatkov o perspektíve pred obdobím renesancie môžeme usudzovať len podľa dvoch diel, ktoré sa zachovali do dnešných čias – už spomínaná *Euklidova* práca *Optika* (3. st. p. n. l.) a *Desať kníh o architektúre* od *Vitruvia* (1. st. p. n. l.). V nich uvedené poznatky sú nedostatočne systematizované a tvoria z veľkej časti súbor pravidiel, nájdených často empirickým spôsobom.

V období od 4. do 14. stor. bol pokrok v oblasti geometrie len nepatrný. V dobe renesancie v 15.storočí sa pod rastúcim vplyvom antickej kultúry začína nový silný rozvoj umení a vied. Potreby maliarstva a architektúry opäť pritiahli pozornosť k teórii perspektívy.

Okrem astronómie (či astrológie) a optiky mali totiž na rozvoj geometrie a projektívnej geometrie veľký vplyv práve architektúra a maliarstvo. Taliansky architekt z Florentíny *Filippo Brunelleschi*

(1377 – 1446) študoval teóriu perspektívy, neskôr jeho žiak *Leon Battista Alberti* (1404 – 1472) spísal jeho texty o perspektíve v práci *Della Pittura* (O maľbe, 1435). V nej opisuje myšlienku „miznúceho“ alebo aj „nekonečne vzdialeného“ bodu (angl.vanishing point, nem. uneigentlicher Punkt) a „miznúcej – nekonečne vzdialenej“ priamky. Všetky navzájom rovnobežné priamky sa „pretínajú“ na horizonte, množinou rovnobežných priamok sa myslí množina priamok kolmých na nákresňu pretínajúcich sa v „miznúcom“ bode.

Všestranne nadaný umelec a vedec, génius *Leonardo da Vinci* (1452 – 1519) sa prejavil aj v oblasti perspektívy. Leonardo napísal systematický, na svoju dobu vynikajúci výklad zákonov perspektívy pod názvom *Trattato delle Pittura* (Traktát o maľbe). V tejto práci podáva okrem iného empirické pravidlá skrátenia mierky.

Nemecký maliar *Albrecht Dürer* (1471 – 1528) napísal prácu venovanú výskumu zákonov perspektívy, ktorá bola vydaná v r.1525 v Norimberku. Dürer využíval tzv. dištančné body (Distanzpunkte), pomocou ktorých zostrojoval mierku „hĺbky“, a tým určoval, akým spôsobom sa pri perspektívnom zobrazovaní skracujú úsečky tej istej dĺžky, keď ich nanášame na priamky kolmé na nákresňu.

V prácach vynikajúcich maliarov Leonarda da Vinci a Albrechta Dürera si teória o perspektíve ešte v začiatkoch zachováva empirický charakter. V jej geometrických základoch uskutočnil znateľný pokrok *G. Ubaldi* v práci *Perspectivae libri sex* (Šesť kníh o perspektíve, 1600). Ubaldi sa zaoberal aj určením rozmerov telies z ich obrazov a dal tým základy takej vetve deskriptívnej geometrie, ktorá – po vynáleze a rozšírení fotografie – dostala názov fotogrametria.

K ďalšiemu zdokonaleniu metód zobrazenia telies do roviny prispeli svojimi prácami *B. Taylor* (1685 – 1731), *G. Desargues* (1593 – 1662) a *J. H. Lambert* (1728 – 1777). V knihe Lamberta *Die freye Perspektive* (Voľná perspektíva, 1759) nadobudla teória perspektívy takmer súčasnú podobu.

Na záver tejto časti treba ešte spomenúť dve známe a slávne mená – *Johannes Kepler* (1571 – 1630) a *Galileo Galilei* (1564 – 1642), ktorí prispeli k štúdiu geometrie, k teórii kužeľosečiek štúdiom astronómie, štúdiom pohybu planét.

Tretia etapa vývoja projektívnej geometrie sa dá nazvať obdobím vytvorenia projektívnej geometrie ako vedného odvetvia. Mala svoj základ v priamej súvislosti medzi vytvorením zobrazovacích metód a štúdiom projektívnych vlastností útvarov.

V prvom rade tu treba menovať výskum a vedeckú činnosť *Gérarda Desarga* a jeho neveľkú prácu „Všeobecná metóda zobrazovania predmetov v perspektíve“ (Paríž, 1636). Desargues bol inžinierom a architektom. Jeho prvé práce boli spojené s teóriou zobrazení a technikou opracovania stavebných materiálov. Desargove štúdie o perspektíve mu poslúžili ako východiskový bod pri vytvorení pre projektívnu geometriu základného diela – *Brouillon project d´une atteinte aux événemens des recontres d´une cone avec un plane – Rough draft for the results of taking plane sections of a cone* (Stručný náčrtok o výsledkoch rezu kužeľa rovinou, 1639). Základnou metódou v tomto diele je použitie perspektívneho zobrazenia rovín; vlastnosti kružnice sa pomocou stredového premietania (centrálnej projekcie) prenášajú na všetky typy kužeľosečiek. Toto je samozrejme možné **len pre projektívne vlastnosti kružnice**, ktoré boli takto implicitne oddelené od všetkých jej ostatných vlastností. Právom ho pokladajú za zakladateľa projektívnej geometrie ako vedeckej disciplíny. **Tretia etapa** sa prelínala s druhou a bola ovplyvnená priemyselnou revolúciou a ňou vyvolanou potrebou zdokonaliť zobrazovacie metódy. Od experimentálnych metód a neskôr teoretického skúmania lineárnej perspektívy sa cez „spolužitie“ s deskriptívnou geometriou (Mongeovo zobrazenie, axonometria, rovnobežné a stredové premietania, neskôr i fotogrametria) dostala projektívna geometria do štádia formovania ako samostatnej vedeckej disciplíny. Súviselo to aj s vývojom v ostatných matematických disciplínach (teória množín, matematická analýza, algebra), s objavom neeklidovskej (Lobačevského) geometrie a axiomatizáciou matematických teórií.

Okrem G. Désarga (Desargova veta, involúcie, projektívne vlastnosti kužeľosečiek) sem treba zaradiť a spomenúť *J. V. Ponceleta* (počas dvoch rokov v ruskom zajatí ako vojak vytvoril svoje teórie, o. i. je spoluobjaviteľom princípu duality), *K. G. Ch. von Staudta* (vybudoval axiomaticky rozšírenú euklidovskú rovinu, bez toho, aby z nej „štartoval“ – využil na to projektívne „škály“ a pojem harmonických štvoríc), *J. Steinera* (Steinerova „projektívna“ definícia kužeľosečky, ale aj zovšeobecnenie Apolloniovho problému nájdenia kružníc dotýkajúcich sa troch daných kružníc – v projektívnej rovine sa hľadajú kužeľosečky dotýkajúce sa piatich daných kužeľosečiek), a treba spomenúť aj mená ako *B. Pascal, J. D. Gergonne, Ch. J. Brianchon,* alebo *M. F. Chasles*.

Ďalšie mená sú spojené so štúdiom prepojenia viacerých geometrií a hľadaním ich spoločných vlastností a ich odlišností a ich prepojenia na iné časti matematiky, najmä na algebru, teóriu kategórií a iné. (V 19. storočí to boli *D. Hilbert, A. Cayley, F. Klein, B. Riemann* a jeho učiteľ *C. F. Gauss* alebo aj *G. Kantor* či *H. Poincaré*.)

Axiomatickou výstavbou projektívnej geometrie sa zaoberali geometri aj neskôr a konečným projektívnym geometriám, či incidenčným štruktúram sa intenzívne venovali aj v 50. a 60. rokoch 20. storočia.

K histórii geometrie pozri aj Dirk J. Struik: *A Concise History of Mathematics*. G. Bell & Sons Ltd. 1954, alebo napr. P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag (1968) ISBN 3-540-61786-8), či Scriba, Christoph J., Schreiber, Peter: 5000 Jahre. Geschichte, Kulture, Menschen. Springer 2005 (5000 Years of geometry. Mathematics in history and culture. Springer 2015), pozri tiež encyklopedie a ďalšie odkazy na internete :

http://www.britannica.com/ - Encyklopedia Britannica

https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_mathematics

https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_geometry

https://www.goodreads.com/shelf/show/history-of-mathematics

https://archive.org/details/AConciseHistoryOfMathematics

https://ia801707.us.archive.org/34/items/AConciseHistoryOfMathematics/Struik-AConciseHistoryOfMathematics.pdf

Poznámky.

1. Pojem *nevlastný bod* zaviedol a používal J. Kepler (1604) a trochu neskôr Desargues (1639). Poznámky k tejto idei nájdeme však už v Albertiho práci *Della Pittura* (1435) – „miznúce body“, hoci tu uvažuje asi „len“ o (navzájom rovnobežných) priamkach kolmých na nákresňu (tzv. hĺbkových priamkach).

2. Súradnice do euklidovskej roviny a (3-rozmerného) priestoru zaviedol René Descartes (1637).

3. (Homogénne) súradnice do rozšírenej euklidovskej roviny zaviedol (až) r.1827 *A. F. Möbius* a (trochu odlišné) *J. Plücker* (1830). Tie, ktoré zaviedol Plücker, používame dodnes.

Literatúra k časti 1

[Berg87] Berger M.: *Géométrie* I, II. Editions Nathan, Paris 1977, angl. preklad Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987

[BR98] Beutelspacher, A., Rosenbaum, U. : *Projective Geometry: from foundations to applications*. Cambridge University Press 1998.
Dostupné na http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/beutel.pdf

[Bla74] Blattner, J.: *Projective Plane Geometry*. Holden-Day,Inc. San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 1974

[BK53] Buseman H., Kelly P.J.: *Projective geometry and projective metrics*. Academic Press Inc., Publishers New York 1953 (ruský preklad Moskva 1957)

[Cox89] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry*. J. Wiley, 2nd edition, London 1989

[Čet53] Četveruchin, N. F.: *Projektivnaja geometrija*. Vyd.Učpedgiz, Moskva 1953

[Gur60] Gurevič, G. B.: *Projektivnaja geometrija*. Gosudarstvennoje izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva 1960

[Kar76] Karteszi, F.: *Introduction to Finite Geometries*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1976

[OKe93] O'Keefe, Christine M. : *Applications of finite geometries to information security.* Australasian J. Combinatorics 7, 1993, 195-212
Dostupné na http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/7/ocr-ajc-v7-p195.pdf

[ScS15] Scriba, Christoph J., Schreiber, P.: 5000 *Years of geometry. Mathematics in history and culture*. Springer 2015

[Sol95] Solčan, Š.: *Projektívna geometria*. 2. vyd. Vydavateľstvo UK, Bratislava 1995

[Sol11a] Solčan, Š. : *O kolineárnosti bodov a zbiehavosti (konkurentnosti) priamok*. Acta Mathematica 14, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2011. S. 3-18

[Str54] Struik, Dirk J.: *A Concise History of Mathematics*. G. Bell & Sons Ltd. 1954

2. Projektívna rovina

2.1 Axiomatická metóda

V úvodnej časti ste v poznámke „Z histórie projektívnej geometrie (časť 1)“ mohli čítať:

Geometria dosiahla v starom Grécku vysokú úroveň tak zo „strany“ faktografického materiálu, ako aj v zmysle položenia určitého teoretického základu. V tomto zmysle osobitne významná úloha patrí Základom Euklida, v ktorých bol urobený pokus systematizovať všetok nahromadený geometrický materiál a postaviť ho na základ na začiatku vymedzených axióm, postulátov a definícií.

Čo to znamená – „postaviť“, či vybudovať geometriu na základe axióm? Pre tých, ktorí už vedia, čo to je axiomatizovaná teória, axiomatický systém, axióma, základné (primitívne, primárne) pojmy a odvodené pojmy, si stačí spomenúť, či pozrieť nižšie uvedené odkazy na učebnice alebo webovské stránky. Pre tých, čo sa s tým stretli buď dávno, alebo vôbec nie, trochu vysvetlenia.

Ak máme určitú teóriu (geometriu, aritmetiku, teóriu množín,...) a chceme v nej dokázať tvrdenie, v procese jeho dokazovania používame ďalšie tvrdenia, o ktoré sa pri zdôvodňovaní opierame. Tieto tvrdenia by sme mali vedieť tiež dokázať na základe ešte skôr dokázaných tvrdení. Obdobne definujeme (zložitejšie) pojmy pomocou jednoduchších pojmov. Ak sa nechceme zacykliť, musíme dospieť k tvrdeniam, ktoré už nedokazujeme a k pojmom, ktoré nemáme pomocou čoho definovať – k tzv. základným tvrdeniam (axiómam) a základným (primitívnym) pojmom.

Základnými pojmami v geometrii sú

– základné objekty: bod, priamka (v priestore aj rovina),
– základné vzťahy (relácie): relácie incidencie, usporiadania, v euklidovskej geometrii aj relácia zhodnosti (úsečiek a uhlov).a relácia rovnobežnosti.

K základným tvrdeniam, ktoré sú splnené vo väčšine geometrických teórií, patrí nasledovné: **Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka, ktorá inciduje s obidvomi danými bodmi.**

Súhrn základných pojmov a základných tvrdení (axióm) spolu s logickými pravidlami odvodzovania nových tvrdení tvorí axiomatický systém.

Na axiomatické sústavy sú kladené isté požiadavky, najdôležitejšou je **bezospornosť** (neprotirečivosť) – značí, že pri správnom použití logických pravidiel nemožno zo sústavy axióm odvodiť spor, t. j. platnosť nejakého výroku aj jeho negácie.

K ďalším požiadavkám patrí **nezávislosť** – jej splnenie značí, že žiadnu z axióm nemožno odvodiť zo zvyšných axióm. Jej dôležitosť spočíva v tom, že umožňuje stanoviť vzájomnú hierarchiu výrokov danej teórie.

Často sa uvádza ako ďalšia požiadavka na axiomatické sústavy ich **úplnosť.** Zvyčajné vysvetlenie je nasledovné: axiomatická sústava je úplná, ak každý výrok, ktorý utvoríme zo základných pojmov vyskytujúcich sa v sústave, je buď dôsledkom axióm, alebo je s nimi v spore.

M. Katětov v [Katě46] upozorňuje na „*dva významy tohoto slova.* ***První význam*** *je tento: systém axiomů určitého oboru nazýváme úplným, když se z něho dá odvodit každý správný (pravdivý) výrok tohoto oboru. O úplnosti v tomto smyslu lze tedy mluvit* ***při obsahovém pojetí axiomů****, a to především tam, kde jde o axiomatické podložení* ***již vybudovaného oboru****.*” Predchádzajúce chápanie úplnosti je zrejme v tomto význame.

Katětov ďalej pokračuje: „***Jiný význam*** *má úplnost při formálním pojetí axiomatiky. Systém axiomů nazýváme v tomto smyslu úplným, když k němu nelze přidat žádný nový axiom aniž by vznikl spor.*”

Tak napríklad sústava axiom absolútnej geometrie nie je úplná, nevznikne spor ani pridaním axiómy o rovnobežkách ani pridaním jej negácie (dostaneme buď euklidovskú alebo Lobačevského rovinnú geometriu). Ďalším príkladom je práve sústava axiom projektívnej roviny, z ktorej nie je možné odvodiť platnosť Desargovho výroku. Záujemcov o pozadie tohto faktu a jeho súvis s Gödelovými vetami o neúplnosti axiomatických systémov odkazujeme napr. na monografiu [Zlat95], kap. 11.

K ďalším požiadavkám, menej podstatným, patria – minimálnosť (najmenší počet axióm), názornosť, príp.iné.

Náš výklad projektívnej geometrie (podobne ako počas štúdia matematiky výklad planimetrie – elementárnej geometrie euklidovskej roviny) budeme robiť **axiomatickou metódou**. Pomenujeme základné pojmy, uvedieme axiómy projektívnej roviny a budeme sa snažiť ukázať, čo z nich **možno a taktiež čo nemožno** odvodiť. Načo je to dobré? Napr. na to, aby sme vedeli posúdiť, ktoré výroky sú „silnejšie“, ktorý je dôsledkom iného, ale aj na to, aby sme vedeli porovnávať rôzne abstraktné systémy (modely), ktoré spĺňajú naše axiómy.

Niekoľko známych učebníc, kde sa dá o axiomatickom prístupe ku geometrii dočítať:

[Hej89] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky I, II. SPN Bratislava, 1989

[Hla49] Hlavatý, V.: Úvod do neeuklidovské geometrie. JČMF, Praha 1949.

[Pij85] Piják, V. a kol. : Konštrukčná geometria. SPN, Bratislava 1985

[SČ02] Sklenáriková, Z., Čižmár J.: Elementárna geometria Euklidovskej roviny. Vydavateľstvo UK Bratislava 2002.

[Šal78] Šalát, T. a kol.: Malá encyklopédia matematiky. Obzor, Bratislava, 1978, str.34-35, 67.

[Vyš59] Vyšín, J:. Axiomatická výstavba eukleidovské geometrie.

Niekoľko užitočných odkazov na internet:

1. http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fil/fil.html a v rámci neho http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fva/axioma_-_odkazy.html alebo http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fva/axioma-ei.html
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Axiom
3. http://mathworld.wolfram.com/Axiom.html
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Aristotle
5. http://sk.wikipedia.org/wiki/Aristoteles
6. http://www.britannica.com/eb/article-9011480/axiom

2.2 Definícia a príklady (modely) projektívnych rovín

Definícia 2.1 Projektívna rovina je systém pozostávajúci z množín $\mathbb{B}$ (množina „bodov“), $\mathbb{P}$ (množina „priamok“) a symetrickej relácie $\mathbb{I} \subset \mathbb{B} \times \mathbb{P}$ (relácia incidencie), ktorý spĺňa nasledovné axiómy existencie a incidencie:

P1. Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka, ktorá inciduje s oboma bodmi.

P2. Ku každým dvom rôznym priamkam existuje práve jeden bod, ktorý inciduje s oboma priamkami.

P3. Existujú také štyri body, z ktorých žiadne tri neincidujú s jednou priamkou.

Príklady (modely) projektívnych rovín

Modelom určitej axiomatizovanej teórie rozumieme množinu, ktorej prvky spĺňajú axiómy danej sústavy.

Príklad 2.2.1 Rozšírená euklidovská rovina $\overline{\boldsymbol{E}_2}$. Jej konštrukcia bola vysvetlená v časti 1. Bodmi tohto modelu sú tak vlastné (pôvodné), ako aj nevlastné body roviny (po rozšírení) a priamkami vlastné priamky (pôvodné priamky euklidovskej roviny doplnené – rozšírené o nový – tzv. nevlastný bod) a jediná nevlastná priamka, pozostávajúca práve zo všetkých nevlastných bodov roviny. K základným vlastnostiam tejto novej, rozšírenej roviny, patrí platnosť týchto výrokov:

c) Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka tak, že inciduje s oboma danými bodmi. (Dva rôzne body určia práve jednu priamku.)

d) Ku každým dvom rôznym priamkam existuje práve jeden bod tak, že inciduje s oboma danými priamkami. (Dve rôzne priamky určia práve jeden bod, t. j. každé dve rôzne priamky sa pretnú.)

Dôkaz platnosti týchto výrokov v $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ je podstatnou časťou dôkazu, že tento model spĺňa axiómy projektívnej roviny (že sú splnené axiómy P1 a P2).

Príklad 2.2.2 „Trsový" model. Množinu $\mathbb{B}$ tvoria všetky priamky *m* euklidovského priestoru $\boldsymbol{E}_3$, ktoré prechádzajú daným bodom *M* (trs priamok $\boldsymbol{T_p}(M)$ so stredom *M*), množinu $\mathbb{P}$ tvoria všetky roviny priestoru $\boldsymbol{E}_3$, ktoré prechádzajú daným bodom *M* (trs rovín $\boldsymbol{T_r}(M)$ so stredom *M*). Incidencia je daná množinovou inklúziou.

Príklad 2.2.3 „Vektorový" model:

$\mathbb{B} = \{V_1\}$, $\mathbb{P} = \{V_2\}$, V_i sú *i*-rozmerné podpriestory 3-rozmerného vektorového priestoru $V_3(\boldsymbol{R})$ (nad poľom reálnych čísel $\boldsymbol{R}$). Incidencia je zrejmá.

Príklad 2.2.4 „Guľový" model. množinu bodov tvoria dvojice bodov, v ktorých danú guľovú plochu G Euklidovho priestoru $\boldsymbol{E}_3$ pretínajú priamky prechádzajúce stredom guľovej plochy, množinu „priamok" kružnice guľovej plochy ležiace v rovinách prechádzajúcich stredom guľovej plochy (hlavné kružnice guľovej plochy). Incidencia je zrejmá.

Príklad 2.2.5 „Kotlíkový" model: Nech G′ je prienik guľovej plochy G Euklidovho priestoru $\boldsymbol{E}_3$ s (uzavretým) polpriestorom, ktorého hraničná rovina ρ prechádza stredom guľovej plochy G. Body v tomto modeli sú dvojakého druhu: sú to dvojice bodov (ako v modeli 4), ak ležia v rovine ρ alebo body prieniku guľovej plochy s priamkami trsu so stredom v strede guľovej plochy).

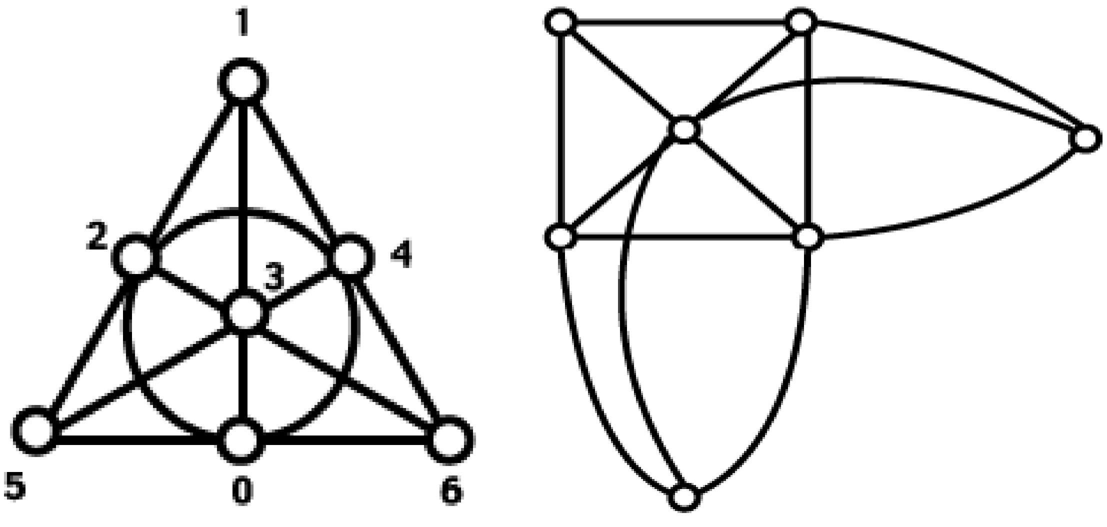
Príklad 2.2.6 $P_2(\boldsymbol{R})$ - projektívna rovina nad poľom reálnych čísel. Body sú triedy ekvivalencie $[(x_0, x_1, x_2)]$ rozkladu množiny usporiadaných trojíc (x_0, x_1, x_2) reálnych čísel, rôznych od (0, 0, 0) určeného reláciou ekvivalencie, v ktorej dve trojice sú ekvivalentné, ak jedna je (nenulovým) násobkom druhej. Priamky sú definované rovnako ako body, označme tieto triedy $[(a_0, a_1, a_2)]$. Incidencia bodov a priamok je daná nasledovne: bod $[(x_0, x_1, x_2)]$ inciduje s priamkou $[(a_0, a_1, a_2)]$ práve vtedy, keď $\sum_{i=0}^{2} a_i x_i = 0$.

Definícia 2.2 Nech ***P***, ***P′*** sú projektívne roviny. Bodové zobrazenie $\mathcal{F}$ z ***P*** na ***P′*** nazývame **izomorfizmom *P*** na ***P′***, ak $\mathcal{F}$ je bijekcia a každú trojicu po dvojiciach rôznych kolineárnych bodov *A*, *B*, *C* zobrazí na trojicu $\mathcal{F}$ (*A*), $\mathcal{F}$ (*B*), $\mathcal{F}$ (*C*) po dvojiciach rôznych a kolineárnych bodov. Dané roviny ***P***, ***P′*** nazveme **izomorfnými.**

V časti 1.4 „Súradnice v rozšírenej euklidovskej rovine” sme chápali usporiadané trojice (x_0, x_1, x_2) ako **súradnice** bodov. V časti 2.2 „Príklady projektívnych rovín” sme zistili, že trojice (x_0, x_1, x_2), resp. triedu ich všetkých nenulových násobkov, môžeme chápať priamo ako **bod** projektívnej roviny. Takto určený model sa volá *reálna projektívna rovina* alebo *projektívna rovina nad poľom reálnych čísel*. Priradenie bodov rozšírenej euklidovskej roviny a ich súradníc (chápaných ako bodov iného modelu rozšírenej euklidovskej roviny) môžeme chápať ako „zlepenie“ dvoch modelov tej istej projektívnej roviny, ich izomorfizmus. Koordinatizácia je teda v tomto prípade izomorfizmus rozšírenej euklidovskej roviny a s ňou izomorfného tzv. aritmetického modelu tejto roviny (daného *n*-ticami čísel).

Veta 2.3. Projektívne roviny z príkladov 1 až 6 sú navzájom izomorfné.

Príklad 2.2.7 Sedembodová projektívna rovina pozostávajúca zo siedmich bodov a siedmich priamok (niekedy označovaná symbolom $\mathbf{7_3}$). Získame ju napr. postupným použitím axióm P3 (existujú 4 body *A*, *B*, *C*, *D*), P1 (existuje 6 priamok *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*) a P2 (priamky *AB* a *CD* sa pretnú v bode *E*, priamky *AC* a *BD* sa pretnú v bode *F*, priamky *AD* a *BC* sa pretnú v bode *G*) a prijatím ďalšieho tvrdenia za axiómu: body *E*, *F*, *G* sú kolineárne. Incidencia je zrejmá – bod *A* inciduje s priamkou *AB*, *AC*, *AD*, ..., bod *G* inciduje s priamkami *AD*, *BC* a *EF*. Iné spôsoby určenia tejto roviny uvedieme v časti 4.2.



a) b)

Obr. 2.1 Grafické znázornenie roviny $\mathbf{7_3}$

Obrázok a) schematicky znázorňuje incidenciu v rovine $\mathbf{7_3}$: body *A*, *B*, *C*, *D* môžu byť napr.: 1, 5, 6, 3 z obrázku, ... ale možno ich zvoliť aj inak. Body 0,2,4 v tomto modeli sú kolineárne a je to v obrázku nutné zakresliť „krivou“ čiarou, pretože tento model sa nedá vnoriť do rozšírenej euklidovskej roviny, do ktorej kreslíme. Iný spôsob zobrazenia vidíme na obr. b).

Projektívna rovina z príkladu 2.2.7 zrejme nie je izomorfná so žiadnou z predchádzajúcich rovín. Neskôr ukážeme aj príklady rovín s nekonečným počtom bodov, ktoré nebudú navzájom izomorfné a budú mať značne odlišné vlastnosti.

Veľmi dôležitý je model 2.2.2 – „trsový model“, pretože v rámci neho je zrejmá rovnocennosť všetkých bodov (a priamok). Aj keď je izomorfný s rozšírenou euklidovskou rovinou, v trsovom modeli neexistuje a priori niečo také ako nevlastný bod a nevlastná priamka.

Príklad 2.2.8 Projektívna rovina *P*₂(*F*) nad telesom *F* – je zovšeobecnením príkladu 2.2.6. Namiesto poľa reálnych čísel budeme uvažovať o telese ***F*** a trojiciach (x_0, x_1, x_2), resp. (a_0, a_1, a_2) prvkov telesa ***F***.

Body: Množina všetkých bodov $\mathbb{B}$ = $\{[(x_0, x_1, x_2)] \in$ ***F*** x ***F*** x ***F*** $\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ / ~ , kde relácia ~ je daná nasledovne:

$(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2)$ práve vtedy, keď existuje nenulový prvok $\lambda \in$ ***F*** tak, že $x_i = y_i.\lambda$ (prvkom λ násobíme sprava), t. j. bodom je trieda nenulových usporiadaných trojíc nenulových násobkov sprava nenulovej trojice prvkov telesa ***F*** . Dve trojice určia ten istý bod, t. j. patria tej istej triede, ak jedna trojica je násobkom druhej.

Priamky : Množina všetkých priamok $\mathbb{P}$ = $\{[(a_0, a_1, a_2)] \in$ ***F*** x ***F*** x ***F*** $\} \setminus \{(0, 0, 0)$ / ~ , kde relácia ekvivalencie ~ je daná nasledovne: $(a_0, a_1, a_2) \sim (b_0, b_1, b_2)$ práve vtedy, keď existuje nenulový prvok $\lambda \in$ ***F*** tak, že $a_i = \lambda.b_i$ (prvkom λ násobíme zľava).

Incidencia je daná takto: Priamka (a) = (a_0, a_1, a_2) a bod (x) = (x_0, x_1, x_2) incidujú práve vtedy, ak $\sum_{i=0}^{2} a_i x_i = 0$.

Poznámka. Teleso ***F*** môže byť komutatívne, t. j. byť poľom, potom sa však môžu zmeniť niektoré vlastnosti projektívnej roviny.

2.3 Vlastnosti projektívnych rovín a dualita

Uveďme niekoľko vlastností spoločných všetkým projektívnym rovinám:

Veta 2.4. V projektívnej rovine platí:

a) Ku každej priamke existuje bod tak, že priamka a bod spolu neincidujú.
b) Ku každému bodu existuje priamka tak, že bod a priamka spolu neincidujú.
c) Ku každým dvom rôznym priamkam existuje bod tak, že neinciduje so žiadnou z daných priamok.
d) Ku každým dvom rôznym bodom existuje priamka tak, že neinciduje so žiadnym z daných bodov.
e) Ku každej priamke existujú aspoň tri po dvojiciach rôzne body tak, že incidujú s danou priamkou.
f) Ku každému bodu existujú aspoň tri po dvojiciach rôzne priamky tak, že incidujú s daným bodom.

Veta 2.5 (Tvrdenie P.3*). V projektívnej rovine existujú štyri priamky tak, že žiadne tri z nich neincidujú s jedným bodom.

Dôkaz – že tvrdenie P.3* je dôsledkom axióm P1, P2, P3 projektívnej roviny – urobte v cvičení.

Veta 2.6. Nech *p, q* sú dve priamky projektívnej roviny ***P***; označme *R*(*p*), *R*(*q*) množiny všetkých ich bodov. Existuje bijektívne zobrazenie *f* množiny *R*(*p*) na *R*(*q*).

Poznámka. Symbolom *R*(*p*) označujeme množinu všetkých bodov incidujúcich s priamkou *p* (niekedy v literatúre aj termín *rad bodov* priamky *p*). Symbolom *Z*(*P*) označujeme množinu všetkých priamok incidujúcich s bodom *P*.

V projektívnej geometrii hrá významnú úlohu tzv. **princíp duality**. Ak sa obmedzíme na prípad roviny (rozmer 2), môžeme jednoduchou zámenou pojmov bod a priamka, pričom ich incidenciu zachováme, z platnej vety (pravdivého výroku) získať opäť platnú vetu (pravdivý výrok). Túto zámenu možno aplikovať aj na definície a konštrukcie a k danej definícii (konštrukcii) získame definíciu (konštrukciu) duálnu k pôvodnej. Presnejšia formulácia:

Nech V je výrok týkajúci sa bodov a priamok projektívnej roviny (napr. aj rozšírenej euklidovskej roviny) a ich incidencie. Ak vo výroku V zameníme pojmy bod a priamka, pričom ich incidenciu zachováme, dostaneme nový výrok V , ktorý nazývame* ***výrokom duálnym*** *k výroku V. Obdobne dostaneme k definícii D definíciu D* duálnu k D.*

Princíp duality: *Ak výrok V je pravdivý, je pravdivý aj výrok V* duálny k výroku V.*

Dôsledok. Výroky a), b) z vety 2.4 sú navzájom duálne. Obdobne sú navzájom duálne aj výroky c) a d), alebo e) a f). Ak sa vrátime k axiómam projektívnej roviny a poslednú z nich porovnáme s tvrdením vety 2.5, zistíme, že dané výroky sú opäť navzájom duálne.

Poznámka. Ak pridáme tvrdenie vety 2.5 (výrok P.3*) k axiómam projektívnej roviny ako ďalšiu axiómu, budú určovať tie isté objekty – projektívne roviny – a z nich ako dôsledky dostaneme teóriu projektívnych rovín. Systém axióm projektívnej roviny doplnený o výrok P.3* nie je síce už minimálny, ale je opäť neprotirečivý. Navyše je „samoduálny“, t. j. ku každej axióme existuje axióma k nej duálna. Ak budeme teda odvodzovať nejaké tvrdenie ako dôsledok týchto axióm a tvrdenie aj každý krok dôkazu zdualizujeme, dostaneme výroky tej istej pravdivostnej hodnoty. Ak je teda výrok z axióm dokázateľný, t. j. je ich dôsledkom, je dôsledkom axióm aj výrok k nemu duálny.

Tvrdenie. V projektívnej rovine platí princíp duality.

Príklad dualizácie výroku. (Označme symbolom $AB \cap CD$ taký bod, ktorý inciduje súčasne s priamkami AB a CD a symbolom $K \cup L$, alebo aj KL priamku určenú bodmi K, L.)
Znenie výroku: Nech $E = AB \cap CD$, $F = AC \cap BD$, $G = AD \cap BC$. Potom body E, F, G sú kolineárne.

Nech	$E = AB \cap CD$	$F = AC \cap BD$	$G = AD \cap BC$	potom $EF = FG$
	Bod E je určený priamkami AB a CD	Bod F je určený priamkami AC a BD	Bod G je určený priamkami AD, BC	Body E, F, G sú kolineárne (ležia na jednej priamke)
Duálne				
	$e = (a \cap b) \cup (c \cap d)$	$f = (a \cap c) \cup (b \cap d)$	$g = (a \cap d) \cup (b \cap c)$	Potom $e \cap f = f \cap g$
Alebo				
	e je určená bodmi $(a \cap b)$ a $(c \cap d)$	f je určená bodmi $(a \cap c)$ a $(b \cap d)$	g je určená bodmi $(a \cap d)$ a $(b \cap c)$	Priamky e, f, g prechádzajú jedným bodom

Iné znenie prvej časti výroku:

Nech E, F, G sú body, v ktorých sa pretínajú dvojice priamok AB a CD, AC a BD, AD a BC

Nech E, F, G	sú **body**	v ktorých sa pretínajú dvojice	**priamok**	AB a CD	AC a BD	AD a BC
Nech e, f, g	sú **priamky**	ktoré sú „spojnicami“dvojíc	**bodov**	$(a \cap b)$ a $(c \cap d)$	$(a \cap c)$ a $(b \cap d)$	$(a \cap d)$ a $(b \cap c)$
Nech e, f, g	sú **priamky**	ktoré sú určené dvojicami	**bodov**	$(a \cap b)$ a $(c \cap d)$	$(a \cap c)$ a $(b \cap d)$	$(a \cap d)$ a $(b \cap c)$

Poznámka. Pretože obdobné pravidlo platí aj v projektívnych priestoroch vyšších rozmerov než 2 (rozmer projektívnej roviny), hovoríme niekedy o **princípe duality v rovine**, alebo o tzv. **malom princípe duality**.

V projektívnych priestoroch rozmerov 3, 4, …, *n*. zamieňame pri dualite navzájom objekty – lineárne podpriestory, ktorých súčet rozmerov je n - 1. Bod má rozmer nula, priamka jeden a nadrovina rozmer n - 1. Napríklad v 3-rozmernom projektívnom priestore sa získa duálny výrok zámenou pojmov bod a rovina, pojmy priamka aj incidencia zostávajú nezmenené.

2.4 Afinné roviny. Vzťah afinných a projektívnych štruktúr.

Teória afinných rovín je v univerzitnom štúdiu najčastejšie budovaná ako štruktúra spätá s istým vektorovým priestorom (definovaným nad poľom $\boldsymbol{F}$). Podobne ako v prípade projektívnych rovín axiomatický prístup umožňuje študovať aj roviny odvodené od všeobecnejších (napr. nekomutatívnych) štruktúr; pozri príklad 8 časti 2.2 *Príklady projektívnych rovín*. ([Kar76].)

Definícia 2.7. Afinná rovina je systém pozostávajúci z množín $\mathbb{B}$ (množina „bodov“), $\mathbb{P}$ (množina „priamok“) a symetrickej relácie $\mathbb{I} \subset \mathbb{B} \times \mathbb{P}$ (relácia incidencie), ktorý spĺňa nasledovné axiómy existencie a incidencie:

A1. Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka, ktorá inciduje s oboma bodmi.

A2. Ku každej priamke m a bodu P, ktoré neincidujú, existuje práve jedna priamka m' tak, že m' inciduje s bodom P a priamky m, m' neincidujú súčasne s tým istým bodom.

A3. Existujú také tri body A, B, C, že neincidujú s jednou priamkou.

Definícia 2.8. Priamky m, m' z axiómy A2 nazývame **rovnobežnými priamkami**. Body A, B, C z axiómy A3 nazývame **nekolineárnymi bodmi**. Množinu bodov, ktoré incidujú s nejakou priamkou, nazývame kolineárnymi bodmi.

Poznámka. K relácii incidencie bodov a priamok tu pribudla aj relácia rovnobežnosti na množine priamok. Dá sa ukázať, že (po rozšírení tejto relácie na dve rovnajúce sa priamky) táto relácia je reláciou ekvivalencie.

Príklady afinných rovín.

Príklad 2.4.1. „Klasická“ euklidovská rovina.

Príklad 2.4.2. Afinná rovina nad poľom reálnych čísel $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{R}) = (\mathbb{B}, \mathbb{P}, \mathbb{I})$, kde

$\mathbb{B} = \{[x, y] \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}\}$, $\mathbb{P} = \{[(a,b,c)] \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}\} \setminus \{(0, 0, 0)\}/\sim\}$, kde ~ je relácia definovaná v príklade projektívnej roviny nad telesom $\boldsymbol{F}$. Incidencia je daná nasledovne: bod $[x, y]$ inciduje s priamkou $[(a,b,c)]$ práve vtedy, keď $ax + by + c = 0$.

Príklad 2.4.3. Množina bodov guľovej plochy v $\boldsymbol{E}_3$ bez jedného bodu N; priamkami sú kružnice tejto guľovej plochy prechádzajúce bodom N, ale bez tohto bodu. Incidencia je zrejmá.

Príklad 2.4.4. Štvorbodová (minimálna) afinná rovina pozostávajúca zo štyroch bodov *A, B, C, D* a zo šiestich priamok *AB, AC, AD, BC, BD, CD*, pričom dvojice priamok (*AB, CD*), (*BC, AD*), a (*AC, BD*) sú rovnobežné.

Príklad 2.4.5. Deväťbodová afinná rovina, ktorá vznikne „doplnením“ štvorbodovej afinnej roviny o ďalšie body *E, F, G, H, J*. Priamky a incidenciu pozri na obr. 2.3.

Príklad 2.4.6. Moultonova afinná rovina. Pozri časť 4 – Desargov a Pappov výrok.

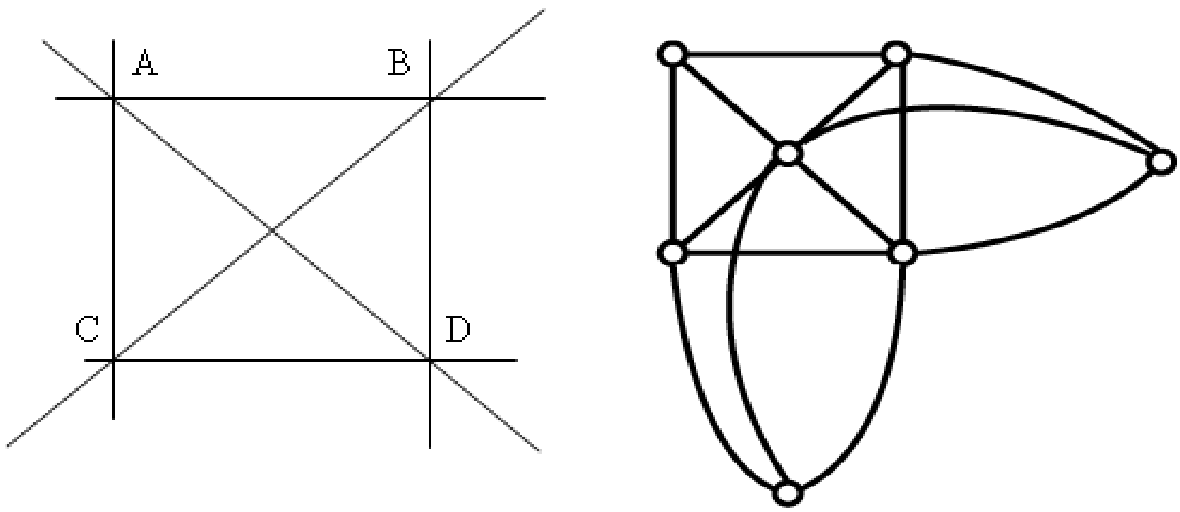
Afinné a projektívne roviny sú úzko zviazané; ku každej afinnej rovine existuje projektívna rovina, ktorú získame jej rozšírením a obrátene ku každej projektívnej rovine existuje afinná rovina, ktorej rozšírením by tá projektívna rovina mohla vzniknúť.

Veta 2.9.

a) Ak z projektívnej roviny „odoberieme" priamku *u* aj s bodmi, s ktorými inciduje, dostaneme afinnú rovinu.

b) Ak k bodom a priamkam afinnej roviny pridáme nové (ideálne, nevlastné) body a jednu novú (ideálnu, nevlastnú) priamku incidujúcu práve s pridanými ideálnymi bodmi, dostaneme projektívnu rovinu. Incidencia je definovaná analogicky ako v prípade rozšírenia euklidovskej roviny (t. j. každým dvom rovnobežným priamkam pridáme ten istý nový bod ...).

Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z porovnania definícií projektívnej a afinnej roviny.



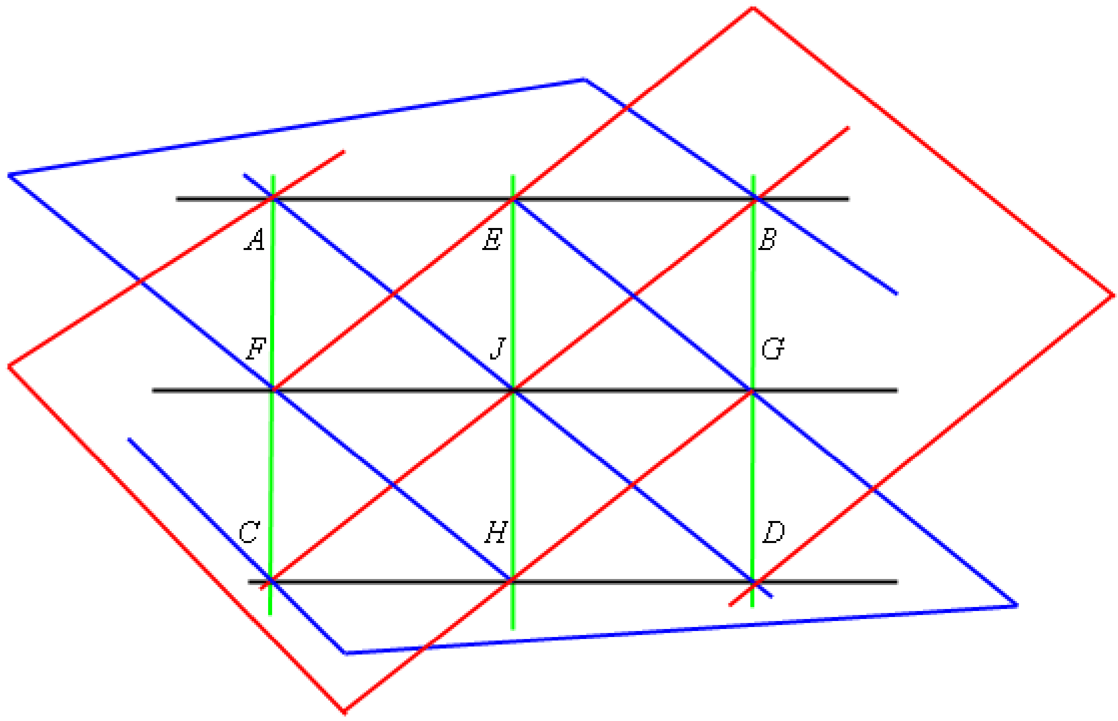
Obr. 2.2 Štvorbodová afinná rovina a sedembodová projektívna rovina, získaná rozšírením štvorbodovej afinnej roviny

Poznámka. Na obr. 2.2 vľavo sú bodmi štvorbodovej afinnej roviny body *A*, *B*, *C*, *D*, a jej priamkami sú (ako dvojice bodov) *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*.

(*AB*, *CD*), (*AC*, *BD*), (*AD*, *BC*) – tri dvojice nepretínajúcich sa priamok (rovnobežiek).

Na obr. 2.2 vpravo sú tri „nové" body, získané ich pridaním ku dvojiciam priamok, ktoré v afinnej rovine nemali spoločný bod – boli rovnobežné.

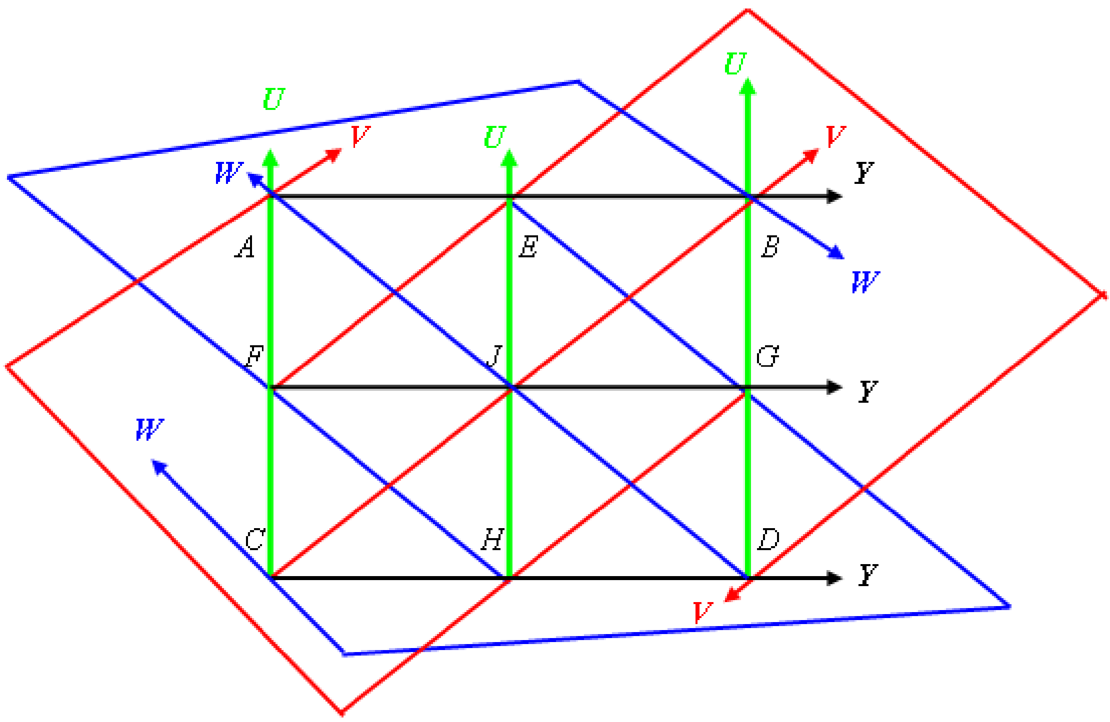
Na nasledujúcich obr. 2.3 a obr. 2.4 sú schémy znázorňujúce deväťbodovú afinnú rovinu a trinásť bodovú projektívnu rovinu, ktorú dostaneme rozšírením deväťbodovej afinnej roviny.



Obr 2.3 Deväťbodová afinná rovina

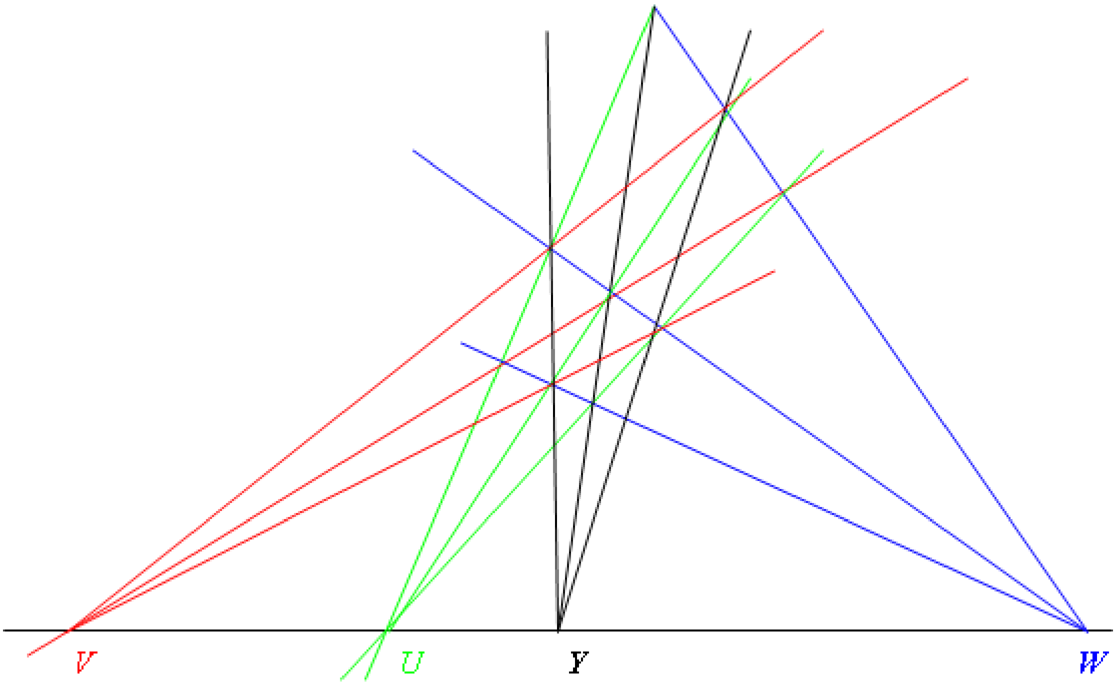
Priamky, ktoré sú na obr. 2.3 navzájom rovnobežné, sú vyfarbené tou istou farbou. Tak napr. modrá lomená čiara obsahujúca body *B, F, H* je v danom modeli priamka, ktorá je rovnobežná s priamkou obsahujúcou body *A, J, D* a taktiež rovnobežná s priamkou obsahujúcou body *E, G, C*.

Teraz urobíme proces rozšírenia – ku každej priamke pridáme jeden nový bod tak, aby dve rovnobežné priamky mali ten istý nový bod, bude to ich „nevlastný“ bod.



Obr. 2.4 Schéma trinásťbodovej projektívnej roviny

Ak to trochu graficky upravíme, môže to byť takto:



Obr. 2.4a (body *V*, *U*, *Y*, *W* sú “nevlastné” body 9-bodovej afinnej roviny z obr. 2.3)

Úloha 2

a) Pokúste sa zdôvodniť, prečo platí v projektívnej rovine (t. j. v systéme spĺňajúcom axiómy P1, P2 a P3) výrok P.3*, t. j. naznačte dôkaz vety 2.5. Uvedomte si, že pri dôkaze môžete použiť len axiómy projektívnej roviny a ich prípadné dôsledky.

b) Skúste nájsť príklad zobrazenia spomínaného vo vete 2.6.

c) Prečo princíp duality neplatí v euklidovskej rovine?

d) Štvroroh je geometrický útvar v projektívnej rovine, ktorý pozostáva zo štyroch bodov, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne a zo šiestich priamok,, ktoré sú týmito bodmi určené. Geometrický útvar duálny k štvorrohu je štvorstran; sformulujte jeho definíciu.

Literatúra k časti 2

[Har67] Hartshorne, R.: *Foundations of projective geometry*. Lecture notes Harvard University. W. A. Banjamin Inc., New York 1967 (ruský preklad: Izdateľstvo Mir, Moskva 1970)

[Kar76] Karteszi, F.: *Introduction to Finite Geometries*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1976

[Katě46] Katětov, M.*: Jaká je logická výstavba matematiky? (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1946. pp. 85–95. (8. Axiomy)*
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403140

[Sol95] Solčan, Š.: *Projektívna geometria*. 2. vyd. Vydavateľstvo UK, Bratislava 1995

[Zlat95] Zlatoš, P.: *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou*. IRIS Bratislava 1995

3. Konečné projektívne roviny (a s nimi súvisiace štruktúry)

3.1 Konečné polia (a konečné projektívne roviny)

Tak ako sme skonštruovali projektívne roviny v príklade 2.2.8 (projektívne roviny nad telesom), možno vytvoriť aj **niektoré konečné projektívne roviny**. Pripomeňme si niektoré poznatky z algebry (pozri napr. [Kat85]).

Veta 3.1

a) Každé konečné teleso je komutatívne, t. j. je poľom.

b) Každé konečné pole je konečným rozšírením poľa $\mathbf{Z}_p$, kde p je prvočíslo.

c) Každé konečné pole má $q = p^k$ prvkov, kde p je prvočíslo.

d) Ak konečné pole má n prvkov, tak existuje prvočíslo p a prirodzené číslo m tak, že $n = p^m$.

Tu si budeme všímať objekty spĺňajúce definíciu projektívnej roviny, ktorých priamky incidujú „len" s konečným počtom bodov. Taká projektívna rovina bola uvedená v príklade 2.2.7. V dôsledku vety 2.6 incidujú s každou priamkou projektívnej roviny z príkladu 2.2.7 práve tri body (a s každým jej bodom incidujú práve tri priamky).

Definícia 3.2. Konečnou projektívnou rovinou rádu *q* nazveme projektívnu rovinu, ktorá spĺňa nasledovnú axiómu:

P4. Existuje priamka, s ktorou inciduje práve q + 1 bodov, kde $q \geq 2$ je prirodzené číslo.

Lema 3.3. Ak v projektívnej rovine existuje priamka, s ktorou inciduje (práve) $q+1$ bodov, tak každá priamka tejto roviny má túto vlastnosť.
Tvrdenie lemy 3.3 vyplýva z existencie bodu mimo dvoch ľubovoľných priamok (Veta 2.4 c), z ktorého „premietneme" body jednej priamky na druhú. Toto zobrazenie je bijektívne.

Poznámka. Dôvod, prečo má rovina rád q, keď jej priamky incidujú s práve $q+1$ bodmi, sa dozvieme neskôr (pri časti o afinných rovinách).

Veta 3.4 V konečnej projektívnej rovine rádu q platí:

a) S každou priamkou inciduje práve $q+1$ bodov.

b) S každým bodom inciduje práve $q+1$ priamok.

c) Rovina má práve q^2+q+1 bodov.

d) Rovina má práve q^2+q+1 priamok.

Dôkaz tvrdenia a) vyplýva z definície 3.2 a lemy 3.3. Tvrdenia b) a d) vyplývajú z tvrdení a) a c) na základe princípu duality (dajú sa však dokázať aj priamo). Ostáva zistiť počet bodov konečnej projektívnej roviny rádu q, t. j. dokázať tvrdenie c). Nech m je priamka s práve $q+1$ bodmi. Opäť využijeme tvrdenie lemy 2.4; podľa nej existuje bod P neincidujúci s m. Bod P a body priamky m určia práve $q+1$ priamok, na každej z nich je $q+1$ bodov. Spolu je to q^2+2q+1 bodov, ale jeden z nich bol „započítaný" viackrát. Po „odčítaní" tejto „násobnosti" dostaneme uvedených q^2+q+1 bodov.

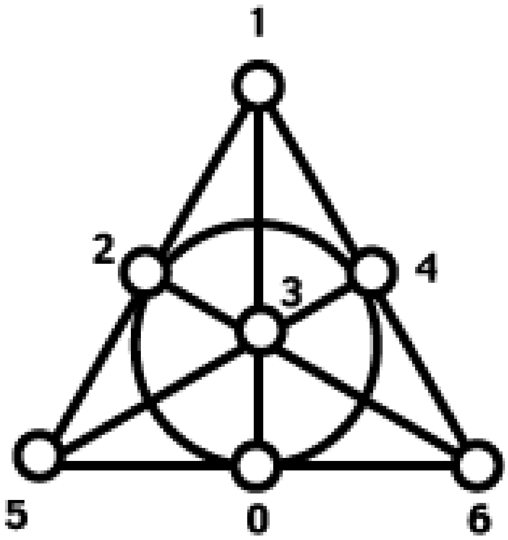
Definícia 3.5 Galoisovskou (projektívnou) rovinou sa nazýva projektívna rovina $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{F})$ nad konečným poľom $\boldsymbol{F}$ **.**

Poznámka. Z existencie projektívnej roviny nad poľom $\boldsymbol{F}$ s $q = p^m$ prvkami vyplýva aj existencia projektívnej roviny rádu $q = p^m$. Pre n = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 existujú teda projektívne roviny rádu n. Počet bodov týchto rovín určíme podľa vety 3.4.

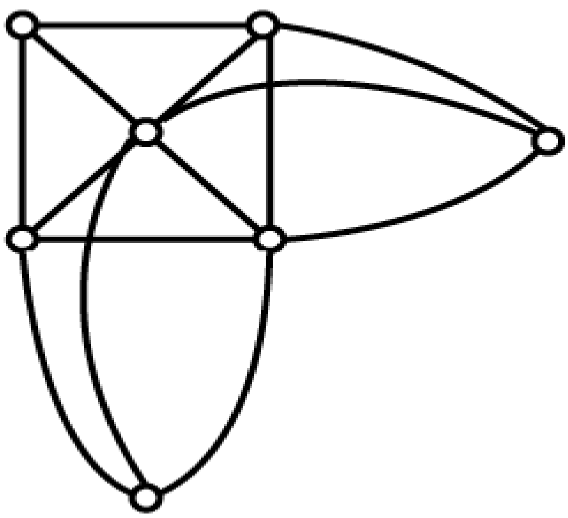
Pretože všetky „sedembodové“ projektívne roviny sú vzájomne izomorfné, platí pre $\boldsymbol{F} = \mathbf{Z}_2$ tento izomorfizmus: $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{F}) \cong \mathbf{7}_3$.

Poznámka. Určenie sedembodovej konečnej projektívnej roviny
(Ako možno študovať konečné projektívne roviny, napr. sedembodovú konečnú projektívnu rovinu)

a) Graficky.



3.1. a)



3.1. b)

Obrázok 3.1 a) schematicky znázorňuje incidenciu v rovine $\mathbf{7}_3$. body A, B, C, D z axiómy P3 z definície sedembodovej roviny (po troch nekolineárne body) môžu byť napr. 1, 5, 6, 3 z obrázku, ... ale možno ich zvoliť aj inak. Body 0, 2, 4 v tomto modeli sú kolineárne a je to v obrázku nutné zakresliť „krivou“ čiarou, pretože tento model sa nedá vnoriť do rozšírenej euklidovskej roviny, do ktorej kreslíme.
Iný spôsob znázornenia tej istej roviny vidíme na obr. 3.1 b).

b) **Iný spôsob opisu relácie incidencie** bodov a priamok v konečnej projektívnej rovine je možný pomocou tzv. **incidenčnej tabuľky**. V prvom riadku sú označenia priamok a v prvom stĺpci označenia bodov. Ak je v príslušnom stĺpci a riadku prázdny štvorček, bod a priamka neincidujú, ak je tam symbol ☻, tak incidujú (daný bod „leží“ na danej priamke).
Ukážme si to na sedembodovej rovine.

Označme priamky sedembodovej roviny m_0, m_1, ..., m_6, body nech majú označenie P_0, ..., P_6. Pre možnosť kontroly s vyššie uvedeným obrázkom – schémou a) – budeme stotožňovať bod 0 z obrázku s bodom P_0 atď. Incidenciu sedembodovej roviny potom opisuje nasledovná incidenčná tabuľka.

	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
P_0	☻		☻			☻	
P_1	☻	☻		☻			
P_2		☻				☻	☻
P_3	☻				☻		☻
P_4				☻	☻	☻	
P_5		☻	☻		☻		
P_6			☻	☻			☻

Vlastnosť projektívnej roviny, že s každou priamkou incidujú práve tri body (a s každým bodom práve tri priamky), je tu transformovaná do faktu, že v každom riadku (a v každom stĺpci) sú práve tri znaky ☻ značiace incidenciu. Nemôže nastať situácia, keď by tento symbol bol v *i*-tom a *j*-tom riadku zároveň v stĺpci *r* a *s*. Značilo by to, že dva body určujú dve rôzne priamky. Graficky by to vyzeralo nasledovne :

		r		s
i		☻		☻
j		☻		☻

Je zrejmé, že výmena dvoch stĺpcov alebo dvoch riadkov nenaruší incidenciu bodov a priamok, preto môže incidenčná tabuľka vyzerať inak ako sme uviedli vyššie. Niekedy je ťažké povedať na prvý pohľad, či dve takéto tabuľky sú incidenčnými tabuľkami tej istej projektívnej roviny, aj keď v prípade sedembodovej roviny to až tak ťažké preveriť nie je. Stačí vhodne použiť metódu výmeny riadkov a stĺpcov.

b´) Iný tvar incidenčnej tabuľky može byť nasledovný: V prvom riadku tabuľky sú označenia priamok a pod ne zapíšeme označenia tých bodov, s ktorými príslušná priamka inciduje.

m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
P_0	P_1	P_0	P_1	P_3	P_0	P_2
P_1	P_2	P_5	P_4	P_4	P_2	P_3
P_3	P_5	P_6	P_6	P_5	P_4	P_6

c) Ďalší spôsob, ako „pracovať" s touto rovinou, je využitie faktu, že je izomorfná s rovinou $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{F})$, $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{F}) \cong \mathbf{7}_3$. Body roviny $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{F})$ sú tieto: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1). Ďalej pracujeme ako v projektívnej rovine nad poľom reálnych čísel, ale namiesto reálnych čísel s prvkami poľa $\mathbf{Z}_2$.

Úloha. Pokúste sa doplniť túto tabuľku tak, aby bola incidenčnou tabuľkou 7-bodovej projektívnej roviny. Skúste tiež či by sa to nedalo tak, aby tabuľka bola súmerná podľa hlavnej diagonály (keď použijeme slovník z teórie matíc).

	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
P_0	☻	☻	☻				
P_1	☻						
P_2	☻						
P_3							
P_4							
P_5							
P_6							

3.2 Projektívne roviny a úplné rozdielové množiny

V predchádzajúcom odseku sme si ukázali dva druhy incidenčných tabuliek – prvá :

	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
P_0	☻		☻			☻	
P_1	☻	☻		☻			
P_2		☻				☻	☻
P_3	☻				☻		☻
P_4				☻	☻	☻	
P_5		☻	☻		☻		
P_6			☻	☻			☻

A druhá:

m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
P_0	P_1	P_0	P_1	P_3	P_0	P_2
P_1	P_2	P_5	P_4	P_4	P_2	P_3
P_3	P_5	P_6	P_6	P_5	P_4	P_6

Túto druhú možno ešte trochu zjednodušiť – namiesto m_0, m_1, ... budeme písať len indexy 0,1,...,6, obdobne v stĺpcoch pod nimi. Tabuľka bude potom vyzerať takto:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	0	1	3	0	2
1	2	5	4	4	2	3
3	5	6	6	5	4	6

Čísla v riadkoch sú umiestnené akosi „nerovnomerne“; pri konečných rovinách s väčším počtom bodov, ktoré je aj ťažšie „zakresliť“, t. j. graficky znázorniť, bude ťažšie aj zostavenie jej incidenčnej tabuľky. Po istom čase hrania sa s touto tabuľkou možno dospieť k nasledovnému jej tvaru:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2

Táto tabuľka sa dá ľahko zapamätať, ak si zapamätáme napr. čísla v druhom stĺpci – 1, 2, 4. Množina {1,2,4} je tzv. **úplnou rozdielovou množinou** (*perfect difference set*) modulo 7.

Definícia 3.6 Úplná rozdielová množina *D* modulo q^2+q+1 je taká množina prirodzených čísel $D = \{n_1,\ldots,n_{q+1}\}$, kde $n_i \in \{1,2,\ldots,\ q^2+q\}$, že každé číslo $n \in \boldsymbol{D}$ sa dá získať (vyjadriť) jediným spôsobom ako rozdiel $n_i - n_j$ modulo (q^2+q+1).

Príklady.

a) $D = \{1, 2, 4\}$ pre $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (pre $q = 2$),

b) $D = \{1, 2, 4, 10\}$, alebo $D' = \{1, 2, 5, 7\}$ pre $M = \{1, 2, 3, \ldots ,12\}$ a $q = 3$,

c) $D = \{1, 2, 7, 9, 19\}$, alebo $D' = \{1, 2, 5, 15, 17\}$ pre $M = \{1, 2, 3, \ldots ,20\}$, $q = 4$,

d) $D = \{1, 2, 4, 9, 13, 19\}$ pre $M = \{1, 2, 3, ... , 30\}$. (pre $q = 5$),

e) $D = \{1, 2, 4, 14, 33, 37, 44, 53\}$ pre $M = \{1, 2, 3, \ldots ,56\}$ a $q = 7$,

f) $D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 55, 64\}$ pre $M = \{1, 2, 3, \ldots ,72\}$, pre $q = 2^3 = 8$,

g) $D = \{1, 2, 4, 10, 28, 50, 57, 62, 78, 82\}$ pre $M = \{1, 2, 3, \ldots ,90\}$ pre $q = 3^2 = 9$.

Poznámky.

1. Ak je úplnou rozdielovou množinou $\{n_1,\ldots,n_{q+1}\}$, tak je úplnou rozdielovou množinou aj $\{n_1+a,\ldots,\ n_{q+1}+a\}$, ak príslušný súčet uvažujeme modulo q^2+q+1.
   Tak napr. pre $q = 2$ je ňou aj $\{2, 3, 5\}$ atď.
2. Ďalej platí: **Ak existuje úplná rozdielová množina *D* modulo (q^2 + *q* + 1), tak existuje konečná projektívna rovina rádu *q*.** (Skúsme preveriť platnosť napr. axiómy P2 projektívnych rovín. Nech body tohto modelu projektívnej roviny sú čísla od 0 po q^2+q a priamky sú také $(q+1)$-tice, ktoré tvoria úplnú rozdielovú množinu modulo q^2+q+1. Nech priamka a inciduje s bodmi $\{n_1+a,\ldots,n_{q+1}+a\}$ a priamka b s bodmi $\{n_1+b,\ldots,$ $n_{q+1}+b\}$. Uvažujme o možnosti, že dané množiny majú spoločný prvok, t. j. že $n_i+a = n_j+b$. Táto rovnosť je ekvivalentná s kongruenciou $n_i-n_j \equiv b-a$ mod q^2+q+1. Z vlastností úplnej rozdielovej množiny vyplýva existencia takých n_i, n_j, ktoré to spĺňajú a teda aj existencia spoločného "bodu" daných "priamok" *a, b.*)
3. Z vyššie uvedeného vyplýva, že ak neexistuje projektívna rovina rádu *q*, neexistuje ani úplná rozdielová množina rádu *q*. Pozri aj časť 4.3 o neexistencii niektorých konečných projektívnych rovín.
4. Zaujímavé je aj prepojenie úplných rozdielových množín na iné teórie a aplikácie, napr. na úplné rozdielové siete (*perfect different networks*), pozri článok z roku 2005 [PR05].

Už sme spoznali tieto spôsoby, ako "vyrobiť" konečné projektívne roviny

a) Grafickým znázornením bodov, priamok a incidencie.

b) Pomocou incidenčnej tabuľky.

c) Incidenčnou tabuľkou s využitím tzv. **úplných rozdielových množín**.

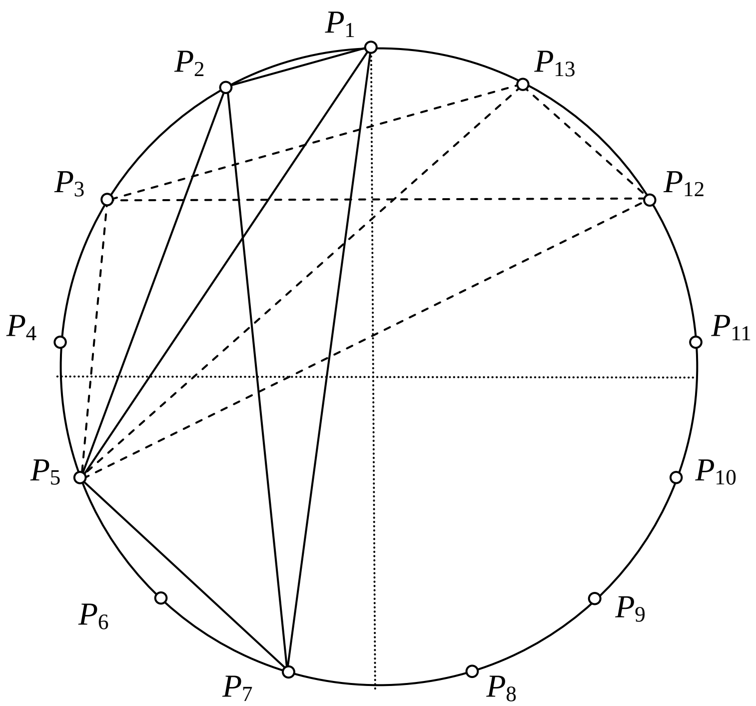
d) Opisom modelu roviny, izomorfnej s danou (napr. tzv. aritmetického modelu – modelu projektívnej roviny nad telesom alebo poľom).

Ukážeme teraz jeden model projektívnej roviny, t. j. systém ($\mathbb{B}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{I}$), ktorý spĺňa axiómy projektívnej roviny a ktorý vychádza z geometrie euklidovskej roviny $\boldsymbol{E}_2$.

Príklad. Nech k je kružnica v euklidovskej rovine. Nech $n = q^2 + q + 1$, kde q je prirodzené číslo. Nech $P_1,...,P_n$ sú vrcholy pravidelného (konvexného) n-uholníka vpísaného do kružnice k. Hľadáme taký (q+1)-uholník, ktorý bude vpísaný do k a ktorý bude mať túto vlastnosť: ***vzdialenosti každých dvoch jeho vrcholovsú po dvojiciach rôzne***. Číslo n je nepárne a preto bude toto číslo menšie než $\frac{n}{2}$, presnejšie - počet takýchto úsečiek P_iP_j je $\frac{q^2+q}{2}$, rovnako ako počet rôznych dvojíc zostrojených z $(q+1)$ bodov. Nie pre každé q existuje $(q+1)$- uholník, ktorý toto spĺňa. Ukážeme, že pre q = 4 existuje. Pre malé čísla q to nie je ťažké preveriť, napr. pre q = 2, 3, 4, 5. Pre q = 6 taký n-uholník neexistuje.

Kam smerujeme? Ku konečnej projektívnej rovine, ktorej bodmi budú vrcholy vpísaného n-uholníka a ktorého priamkami budú také $(q+1)$-uholníky vpísané do kružnice, ktorých strany aj uhlopriečky majú rôznu dĺžku. Incidencia bude zrejmá – bod bude incidovať s priamkou práve vtedy, ak bude vrcholom príslušného $(q+1)$-uholníka.

Priamky v tomto modeli musíme definovať trochu presnejšie – vezmime jeden taký (q+1)-uholník, ktorý spĺňa naše požiadavky a označme ho L_1. Zvoľme jednu z možných orientácií a otáčajme postupne $(q+1)$-uholník okolo stredu kružnice o uhol veľkosti $\varphi = \frac{2\pi}{q^2+q+1}$ tak , aby prvý z vrcholov postupne prešiel všetky vrcholy vpísaného n-uholníka. Práve tieto $(q+1)$-uholníky, označme ich L_1, L_2, ..., L_n, $n = q^2 + q + 1$, získané otočením z jedného zvoleného $(q+1)$-uholníka a teda s ním súhlasne zhodné, budú priamkami nášho modelu. Pripomeňme, že ich je práve toľko ako bodov nášho modelu.



Obr. 3.2

Pre q = 3 je n = 13 a „priamkami" sú štvoruholníky, napr. $P_1P_2P_5P_7$ alebo $P_{12}P_{13}P_3P_5$

Platí:

1. Pre ľubovoľné $j \neq k$ existuje práve jeden $(q+1)$-uholník L_r, pre ktorý sú body P_j a P_k jeho vrcholmi.

2. Pre ľubovoľné $j \neq k$ existuje práve jeden bod P_s, ktorý je vrcholom L_j a L_k súčasne.

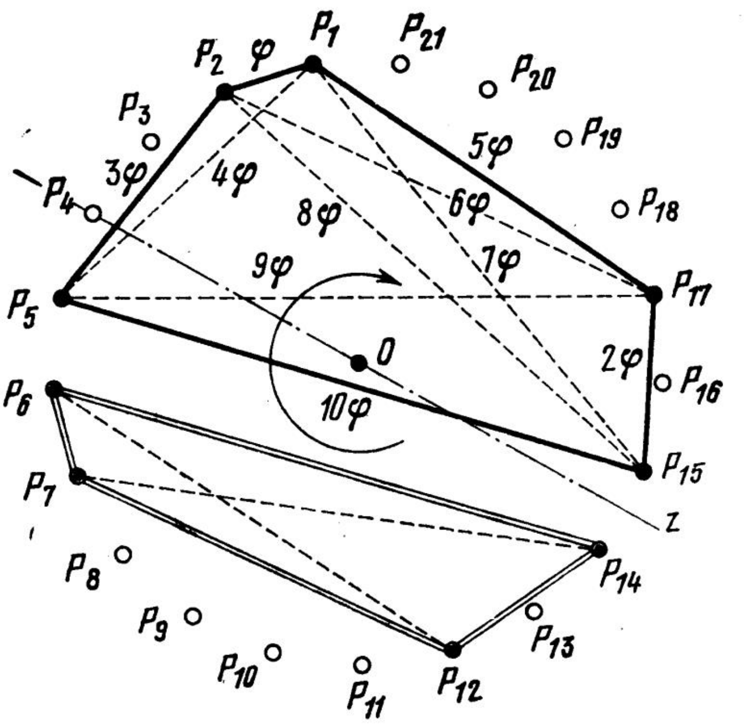
3. Existuje taký štvoruholník $L = P_iP_jP_kP_m$ (q^2+q+1)-uholníka, že každý z $(q+1)$-uholníkov $L_1, \dots, L_n$, $n = q^2+q+1$, má s ním spoločné najviac dva vrcholy.

Dôsledok. Systém ($\mathbb{B} = \{P_i\}$, $\mathbb{P} = \{L_j\}$, $\mathbb{I}$) je projektívna rovina. Spomenuté tvrdenia sú len prepisom axióm projektívnej roviny do "reči" tohto modelu.

Dôkaz platnosti axióm, založený na geometrických vzťahoch daných útvarov je detailne opísaný v [Kar76].

Poznámka. Pre sedembodovú, ale aj pre trinásťbodovú (projektívnu) rovinu sa toto kreslí a dokazuje relatívne ľahko – stačí aj tzv.metódou pokusov a omylov. Je zaujímavé sledovať indexy prvého $(q+1)$-uholníka (tu troj- resp. štvor-uholníka) – $P_1P_2P_4$, resp. $P_1P_2P_5P_7$, a porovnať ich s tabuľkami úplných rozdielových množín (Pozri príklady za definíciou 3.6.)

Pre $q = 4$ je $n = 21$. Na obr.3.3 je vyznačený 5-uholník $P_1P_2P_5P_{15}P_{17}$. Pri 10 „tetivách" rôznej dĺžky je vyznačená ich dĺžka pomocou príslušného stredového uhla φ.



Obr. 3.3

3.3 Latinské štvorce (pozri aj poznámku o sudoku na konci tohto dokumentu)

Nasledujúce riadky je vhodné začať historickým poohliadnutím; jednu z hlavných úloh v tom hrá švajčiarsky matematik Leonard Euler (1707 – 1783). Zo 76 rokov svojho života prežil Euler 25 rokov v Berlíne a 41 v Sankt Peterburgu, kde prijal ruské občianstvo. V roku 1782 v petrohradskej akadémii spomenul nasledovný problém (problém 36 oficierov) :

Na vojenskej prehliadke bolo treba zoradiť 36 vojenských oficierov (zo 6 druhov vojska a 6 rôznych hodností) do útvaru tvaru štvorca po 6 radoch a 6 zástupoch tak, aby v každom rade (a v každom zástupe) bol práve jeden vojak z každého druhu vojska a práve jeden vojak príslušnej hodnosti.

Euler vyslovil predpoklad, že úloha nemá riešenie. Dôkaz o neriešiteľnosti tejto úlohy podal až v r.1901 G. Tarry. Uvedený problém súvisí s pojmom latinských štvorcov. Zároveň uvedieme, ako tieto objekty súvisia s projektívnymi rovinami.

Definícia 3.7. Latinským štvorcom rádu n (z prvkov množiny M = $\{a_1, \dots, a_n\}$) sa nazýva schéma s n riadkami a n stĺpcami, pre ktorú platí: v každom riadku a každom stĺpci sa každý prvok a_i objaví práve raz. Množina M býva často nahradená množinou $\{1,\dots, n\}$.

Príklad. Latinské štvorce rádu 2 sú dva : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, latinských štvorcov rádu 3 je už 12 a jeden je tu: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, a latinských štvorcov rádu 4 je až 576; viac o tom sa možno dočítať napr. na stránke http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html.

V Eulerovej úlohe sa však spomínajú dve množiny – hodnosti a vojenské útvary. Každý oficier má dve "nálepky"; možno to chápať ako (neusporiadanú) dvojicu. Nech množina hodností je množina {A, B, C, D, E, F} a množina útvarov {P, Q, R, S, T, U}. Každý oficier môže byť identifikovaný ako prvok karteziánskeho súčinu týchto množín, napr. (A, R), … či (D, U). Takýto "zdvojený" latinský štvorec sa niekedy nazýva *Eulerov štvorec*.

Množiny, z ktorých sa dané prvky vyberajú, môžu byť napr. {**J, Q, K, A**} resp. {♣,♦,♥,♠}a úloha dostane nádych logickej hádanky, ktorú možno dať priateľom pri hre v karty. Proces "zdvojenia" sa zvykne definovať a študovať samostatne.

Definícia 3.8. Dva latinské štvorce sa nazývajú (navzájom) **ortogonálne**, ak po ich "prekrytí" sa každá dvojica (a_i, a_j) objaví v "spojenom" štvorci práve raz.

Poznámka. Nie ku každému latinskému štvorcu existuje latinský štvorec s ním ortogonálny;

napr. k štvorcu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ taký štvorec neexistuje. Obrátene, k štvorcu obsahujúcemu všetky možné dvojice nemusia existovať dva také latinské štvorce, aby ich prekrytím daný štvorec vznikol, napr.

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{pmatrix}.$$

Latinské štvorce rádu 6 existujú, žiadne dva však nie sú vzájomne ortogonálne (*Eulerova-Tarryho veta*).

Veta 3.9. Každá množina (po dvojiciach) navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n má najviac n -1 prvkov. (Existuje najviac n -1 latinských štvorcov rádu n tak, že každé dva z nich sú navzájom ortogonálne). K dôkazu pozri napr. [Kar76].

Takúto množinu nazveme **úplným ortogonálnym systémom latinských štvorcov** (rádu n).

Nasledujúce vety dávajú do súvisu existenciu konečných projektívnych rovín a ortogonálnych systémov latinských štvorcov .

Veta 3.10. Ak $q = p^k$, kde p je prvočíslo a k kladné celé číslo, tak existuje úplný ortogonálny systém latinských štvorcov rádu q .

Dôkaz. Jeden z možných je napr. v knižke [Kar76], str. 81.

Veta 3.11. Ak existuje úplný ortogonálny systém latinských štvorcov rádu q (t. j. keď existuje q-1 po dvojiciach ortogonálnych latinských štvorcov rádu q), tak existuje (dá sa skonštruovať) aj projektívna rovina rádu q .

Idea dôkazu :

Nech $L_1,...,L_{q-1}$ je úplný ortogonálny systém latinských štvorcov rádu q s prvkami z množiny Q = {0,1,…, q-1}. Príklad takejto množiny pre q = 5 je tu:

(1)					(2)					(3)					(4)				
0	1	2	3	4	0	2	4	1	3	0	3	1	4	2	0	4	3	2	1
1	2	3	4	0	1	3	0	2	4	1	4	2	0	3	1	0	4	3	2
2	3	4	0	1	2	4	1	3	0	2	0	3	1	4	2	1	0	4	3
3	4	0	1	2	3	0	2	4	1	3	1	4	2	0	3	2	1	0	4
4	0	1	2	3	4	1	3	0	2	4	2	0	3	1	4	3	2	1	0

Namiesto v tvare matíc tu znázorňujeme latinské štvorce v tvare tabuliek, každá z nich je ohraničená hrubšou čiarou a všetky sú tu spojené do jednej tabuľky. Jednotlivé tabuľky systému $\{L_1,...,L_{q-1}\}$ označíme symbolom (k) , kde k je prvok množiny Q* = {1,…., q-1}.

Body budú dvojakého typu :

– tzv. obyčajné - usporiadané dvojice (x, y) prvkov množiny Q,

– tzv. ideálne – prvky množiny Q označené (k), doplnené o (∞), kde

∞ je nový symbol.

Spolu je teda $q.q + q + 1 = q^2 + q + 1$ bodov.

Priamky budú dané ako množiny určitých bodov, ich opisom teda bude opísaná aj relácia incidencie:

– tzv. ideálna priamka = množina všetkých ideálnych bodov,

- priamky 1. typu = množiny bodov typu (x, b), kde x prebieha množinu Q a b je pevný prvok množiny Q (množina bodov (x, y), pre ktoré je $y = b$),

- priamky 2. typu = množiny bodov typu (a, y), kde y prebieha množinu Q a a je pevný prvok množiny Q (množina bodov (x, y), pre ktoré je $x = a$),

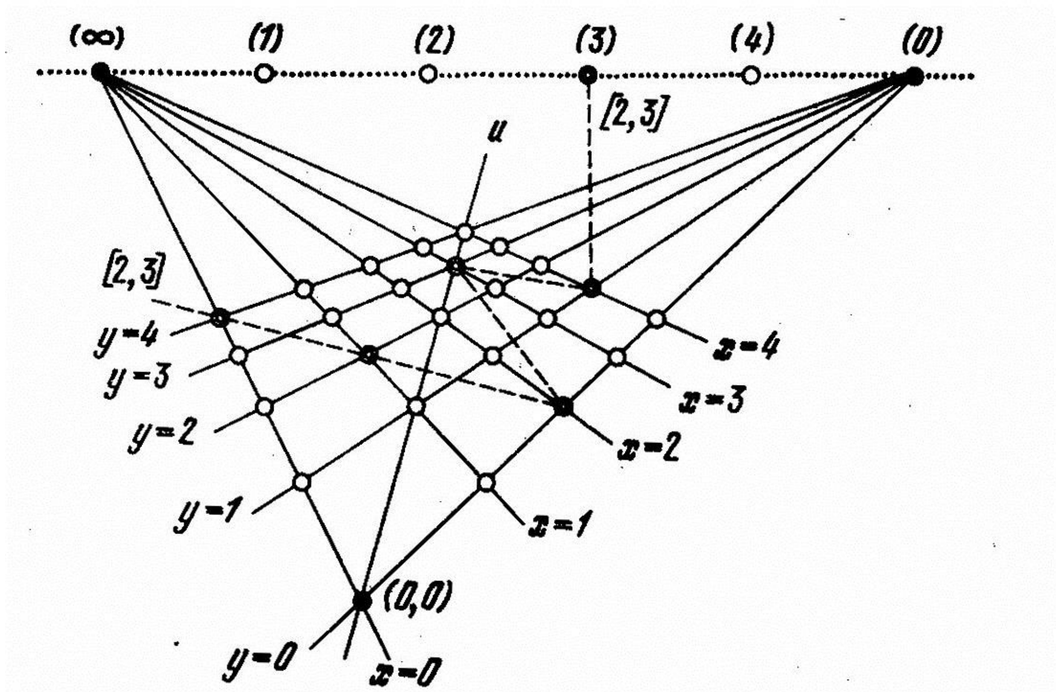
- tzv. diagonálne priamky $[j, k]$ = množiny bodov definované nasledovne : priamka $[j, k]$ inciduje s ideálnym bodom (k) a s takými obyčajnými bodmi (x, y), že na mieste (x, y) v latinskom štvorci L_k je prvok j (j je z množiny Q a k z množiny Q*).

Spolu je teda $1 + q + q + q.(q - 1) = q^2 + q + 1$ priamok.

Dôkaz vety spočíva v overení platnosti axióm (konečnej) projektívnej roviny a využíva vzájomnú ortogonálnosť latinských štvorcov daného systému; detaily pozri napr. [Kar76].

Pre $q = 5$ diagonálna priamka [2,3] teda inciduje s ideálnym bodom (3) a „obyčajnými“ bodmi (x, y) získanými z tabuľky L_3 určenými “polohou“ čísla 2 v tejto tabuľke: (0,4), (1,2), (2,0), (3,3), (4,1) – pozri tabuľku aj schému na obr.3.4 za touto tabuľkou.

	(1)					(2)					(3)					(4)				
x=0	0	1	2	3	4	0	2	4	1	3	0	3	1	4	**2**	0	4	3	2	1
x=1	1	2	3	4	0	1	3	0	2	4	1	4	**2**	0	3	1	0	4	3	2
x=2	2	3	4	0	1	2	4	1	3	0	**2**	0	3	1	4	2	1	0	4	3
x=3	3	4	0	1	2	3	0	2	4	1	3	1	4	**2**	0	3	2	1	0	4
x=4	4	0	1	2	3	4	1	3	0	2	4	**2**	0	3	1	4	3	2	1	0
	L_1					L_2					L_3					L_4				
y :	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4



Obr. 3.4

Ako súvisí populárna hra SUDOKU s projektívnymi rovinami?

V lete r. 2005 nastal (na Slovensku) boom SUDOKU. Slovenské denníky, aj ďalšie časopisy začali uverejňovať sudoku, dostať knižky so „zadaniami“ sudoku, internetisti si ho radšej stiahnu zo známej stránky . Čo je **SUDOKU** ? Hra s nasledovnými pravidlami:

Pravidlá SUDOKU: Vyplňte prázdne políčka štvorca 9 x 9 číslami od 1 do 9. Každý riadok, každý stĺpec ako aj každý z deviatich čiastkových štvorčekov o rozmeroch 3 x 3 políčka môže každé z čísel 1 až 9 obsahovať iba raz. (pozri http://www.sudoku.unidata.sk/)
Na stránke http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku možno čítať nasledovnú charakteristiku: sudoku sú latinskými štvorcami s dodatočnými požiadavkami … (požaduje sa, aby aj „ *každý z deviatich malých štvorčekov o rozmeroch 3 x 3 políčka každé z čísel 1 až 9 obsahoval iba raz“).*

Na internete sa dajú stiahnuť programy na riešenie sudoku, šikovný programátor si taký program urobí sám a už ho viac sudoku nezaujíma, už ho „vyriešil“, raz a navždy … Pre množstvo ľudí je to istý druh „krížovky“ bez slov, druh logickej zábavy, prinášajúci satisfakciu po zvládnutí čoraz vyššej (= ťažšej) úrovne tejto hry. Niekto hrá šach, niekto GO, niekto lúšti krížovky a niekto sa venuje SUDOKU …

3.4 Niektoré existenčné vety o konečných projektívnych rovinách

Známa **hypotéza** (hypotéza mocniny prvočísla, angl. The prime power conjecture) hovorí, **že úplné rozdielové množiny existujú len pre čísla *q*, kde *q* je mocnina prvočísla.** Táto hypotéza bola dokázaná **pre viacero špeciálnych prípadov** (pozri napr. Johan Andersson: On the solutions to the power sum problem. arXiv:math.NT/0609621 v1 21 Sep. 2006) :

a) Ak $q \equiv 1, 2 \pmod 4$ a nedá sa napísať ako súčet dvoch štvorcov, tak neexistuje úplná rozdielová množina rádu q. (R. H. Bruck and H. J. Ryser: *The nonexistence of certain finite projective planes.* Canadian J. Math., 1:88–93, 1949.)

b) Obdobný výsledok platí pre $q \geq 6$ and $q \equiv 3, 6 \pmod 9$, pozri: H. A. Wilbrink. *A note on planar difference sets*. J. Combin. Theory Ser.A, 38(1):94–95, 1985.

c) Hypotéza bola dokázaná aj pre $q < 2\cdot 10^9$ (Leonard D. Baumert and Daniel M. Gordon. *On the existence of cyclic difference sets with small parameters*. In: High primes and misdemeanours. Lectures in honour of the 60th birthday of Hugh Cowie Williams, volume 41 of Fields Inst. Commun., pages 61–68. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004).

d) Z malých čísel je známa neexistencia projektívnej roviny rádu 6, nedávno bola dokázaná za masívneho nasadenia počítačov aj pre projektívne roviny rádu 10. Presnejšie: Neexistujú (ani dva) ortogonálne latinské štvorce rádu 6 (Euler – Tarry) a neexistuje úplný ortogonálny system latinských štvorcov rádu 10; maximálny počet vzájomne ortogonálnych latinských štvorcov rádu 10 sa rovná 2.

   (pozri http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lam/index.html alebo http://www.faqs.org/faqs/sci-math-faq/proyectiveplane/).

   Otázka (ne)existencie projektívnej roviny rádu 12 (a niektorých ďalších) ostáva otvorená.

Problém, či všeobecná (konečná) projektívna rovina môže mať za rád len mocninu prvočísla, je širší – a ťažší. K projektívnej rovine rádu q sa napr. nemusí dať zostrojiť úplná rozdielová množina rádu q. Také roviny je prípadne možné zostrojiť inými metódami. Poznamenajme, že existujú štyri projektívne roviny rádu 9, ktoré sú **nie izomorfné** (tri z nich sú nedesargovské). Všetky roviny nižších rádov (3, 4, 5, 7, 8) sú až na izomorfizmus jediné, t. j. každé dve roviny spomenutých rádov sú navzájom izomorfné. Pre prípad sedembodovej, príp. aj trinásťbodovej roviny sa to dá preveriť aj „ručným“ spôsobom. (Pozri k tomu napr. [Kar76].)

K pojmu izomorfizmus projektívnych rovín pozri časť 3.2 *Definícia projektívnej roviny a príklady (modely) projektívnych rovín*.

Pretože existujú projektívne roviny rádu 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, existujú roviny so 7, 13, 21, 31, ... bodmi. (Tu je skrytá odpoveď na „praktickú úlohu" či problém zo záveru časti 1.1.)

Úloha 3

a) Zostrojte incidenčné tabuľky pre trinásť- a dvadsaťbodové projektívne roviny (roviny rádu 3 a 4). Použite k tomu príslušné úplné rozdielové množiny.

b) Dokážte bez použitia princípu duality tvrdenie vety 3.4 d), t. j. že konečná projektívna rovina rádu q má práve $q^2 + q + 1$ priamok.

c) Vypíšte všetkých 13 trojíc – bodov – projektívnej roviny $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{F})$, kde $\boldsymbol{F}$ je pole $\mathbf{Z}_3$.

d) Zostrojte aspoň dva latinské štvorce rádu 5. Viete zostrojiť latinský štvorec rádu 6?

e) Zostrojte dva ortogonálne latinské štvorce rádu 4. Skúste zostrojiť dva ortogonálne latinské štvorce rádu 6.

f) Pozrite dôkaz vety 3.10 a pre $q = 5$ vypíšte body diagonálnej priamky [4, 2].

Literatúra k časti 3:

[Dem68] Dembowski, P.: *Finite Geometries*. Springer-Verlag, Berlin 1968

[Kar76] Karteszi, F.: *Introduction to Finite Geometries*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1976

[Kat85] Katriňák, T. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika* 1. ALFA, Bratislava 1985

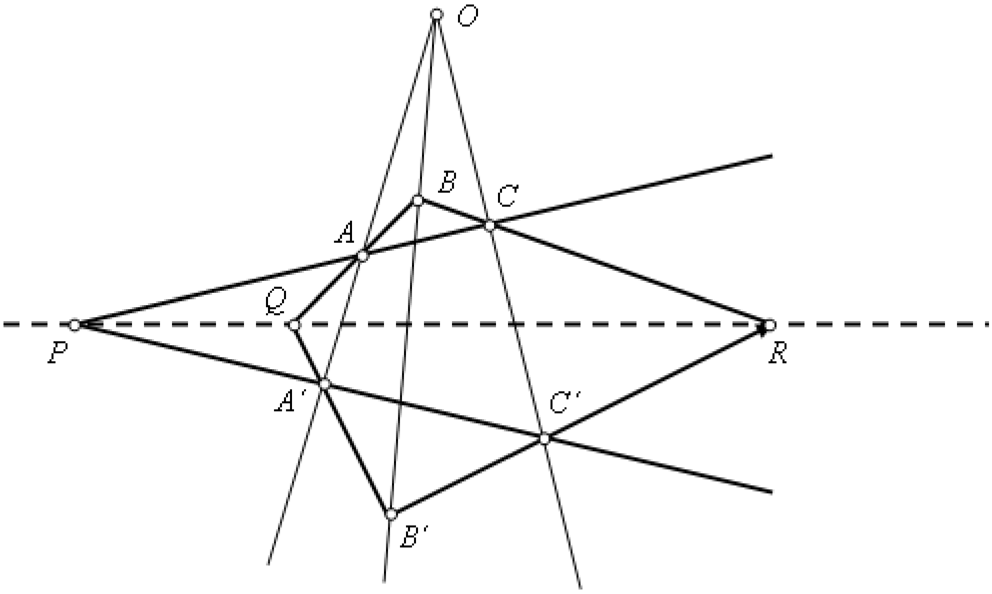
[PR05] Parhami, B., Rakov, M.: *Perfect Difference Networks and Related Interconnection Structures for Parallel and Distributed Systems*. Journal IEEE Transaction and Parallel and Distributed Systems, Vol.16, Issue 8, August 2005

4. Desargov a Pappov výrok

4.1 Desargov výrok, výrok k nemu obrátený a výrok k nemu duálny

Girard Desargues (1591 – 1661) bol účastníkom matematického krúžku, ktorý viedol *Marin Mersenne* (1588 – 1648) a do ktorého patrili aj *René Descartes* (1597 – 1650), *Étienne Pascal* (1588 – 1651) a jeho syn *Blaise Pascal* (1623 – 1662). Desargove práce boli o praktických veciach ako bola perspektíva, kameňorez – náuka o spracovaní kameňov v staviteľstve a navrhovanie stavebných objektov z tesaného kameňa alebo slnečné hodiny (1640). Jeho najvýznamnejšia práca bola o kužeľosečkách, ale známa je aj Desargova veta *o dvoch perspektívnych trojuholníkoch*. Pretože v tejto časti sa budeme venovať diskusii, či je toto tvrdenie vždy pravdivé, t. j. či je vetou, a ak áno, tak za akých predpokladov, budeme hovoriť o *Desargovom výroku*.
Pozri napr. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Desargues.html

Desargov výrok. Nech ABC a $A'B'C'$ sú dva trojuholníky. Ak existuje bod O, ktorý inciduje (súčasne) s priamkami AA', BB', CC' , tak body $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$, $R = BC \cap B'C'$ sú kolineárne.



Obr. 4.1

Poznámka. Ak si takýto obrázok chceme nakresliť sami (a tak, aby všetky zvolené a získané body boli zobrazené v nákresni), je vhodné začať výberom bodu O, potom zvoliť tri priamky, na ktorých budú ležať vrcholy trojuholníkov a zvoliť si priamku na ktorú umiestnime body P, Q, R. Potom „umiestnime“ body A, B, C tak, aby bola splnená požiadavka incidencie bodov P, Q, R a priamok AB, BC a CA, zvolíme bod A′ na priamke OA a ostatné už ľahko dokreslíme. Budeme vidieť, že posledná dokreslená priamka naozaj obsahuje body, povedzme B', C' a R. Je to preto, lebo Desargov výrok v rozšírenej euklidovskej rovine, do ktorej kreslíme (resp. do istej podmnožiny spomenutej roviny), je pravdivý. Platí teda veta:

Veta 4.1. V rozšírenej euklidovskej rovine Desargov výrok je pravdivý, t. j. je vetou.

Dôkaz vety 4.1 pozri nižšie. Platí aj trochu všeobecnejšie tvrdenie:

Veta 4.1a. Desargov výrok platí v každej projektívnej rovine, ktorú možno vnoriť do trojrozmerného *projektívneho priestoru*.

Tu treba vysvetliť, čo ten projektívny priestor je.

Definícia. Projektívny (trojrozmerný) priestor $\boldsymbol{P}_3 = (\mathbb{B}, \mathbb{P}, \mathbb{R}, \mathbb{I})$ je systém pozostávajúci z množín $\mathbb{B}$ (množina „bodov“), $\mathbb{P}$ (množina „priamok“), $\mathbb{R}$ (množina „rovín“) a symetrickej relácie $\mathbb{I}$ (relácia incidencie), $\mathbb{I} \subset (\mathbb{B} \times \mathbb{P}) \cup (\mathbb{B} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{P} \times R)$, ktorý spĺňa nasledovné axiómy existencie a incidencie:

P1. Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka, ktorá inciduje s oboma bodmi.

P2. Ku každým dvom rôznym rovinám existuje práve jedna priamka, ktorá inciduje s oboma rovinami.

P3. Ku každej priamke m a bodu A, $A \notin m$, existuje práve jedna rovina, ktorá inciduje s bodom A a priamkou m.

P4. Ku každej priamke m a rovine α existuje aspoň jeden bod R, ktorý inciduje s priamkou m a rovinou α.

P5. Existujú také štyri body, ktoré neincidujú s jednou rovinou.

Príklady projektívnych priestorov

Niektoré priestory sa dajú získať formálnym zovšeobecnením – rozšírením rozmeru o číslo 1 - z príkladov projektívnych rovín. Uveďme aspoň dva príklady.

1**. Rozšírený euklidovský priestor** $\overline{\boldsymbol{E}_3}$. Euklidovský priestor $\boldsymbol{E}_3$ rozšírime analogicky ako sme to urobili s rovinou:

- Ku každej priamke pridáme práve jeden nový bod (*nevlastný bod* danej priamky).

- K dvom rovnobežným priamkam pridáme ten istý bod, k dvom rôznobežným alebo mimobežným priamkam pridáme rôzne „nové“ body.

- Množinu všetkých nevlastných bodov priamok roviny α nazveme *nevlastnou priamkou roviny* $\overline{\alpha}$ **.**

- Množinu pozostávajúcu zo všetkých nevlastných bodov a z nevlastných priamok všetkých rozšírených rovín nazveme *nevlastnou rovinou* novovytváraného – rozšíreného priestoru.

Množina všetkých pôvodných (vlastných) bodov, nevlastných bodov, všetkých rozšírených (vlastných) priamok, všetkých nevlastných priamok rovín, všetkých rozšírených (vlastných) rovín a jednej nevlastnej roviny spolu s vyššie opísanou incidenciou sa nazýva **rozšírený euklidovský priestor**.

Niektoré vlastnosti rozšíreného euklidovského priestoru:

- Každá priamka, ktorá neleží v rovine, pretína túto rovinu práve v jednom bode, buď vo vlastnom (ak bola v E_3 pred rozšírením s ňou rôznobežná) alebo v nevlastnom (ak bola s ňou v E_3 rovnobežná).

- Každé dve roviny sa pretnú v priamke – buď vo vlastnej, alebo v nevlastnej (ak boli pred rozšírením v E_3 rovnobežné)

2. **Reálny projektívny priestor** $\boldsymbol{P}_3(\mathbf{R})$ (projektívny priestor nad poľom reálnych čísel).
Body sú triedy ekvivalencie $[(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ rozkladu množiny usporiadaných štvoríc (x_0, x_1, x_2, x_3) reálnych čísel, rôznych od (0,0,0,0), určeného reláciou ekvivalencie, v ktorej dve štvorice sú ekvivalentné, ak jedna je (nenulovým) násobkom druhej.

Roviny sú aritmeticky definované rovnako ako body, označme tieto triedy $[(a_0, a_1, a_2, a_3)]$. Incidencia bodov a rovín je daná nasledovne: bod $[(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ inciduje s rovinou $[(a_0, a_1, a_2, a_3)]$, ak $\sum_{i=0}^{3} a_i x_i = 0$. Skúste navrhnúť, ako definovať priamky .

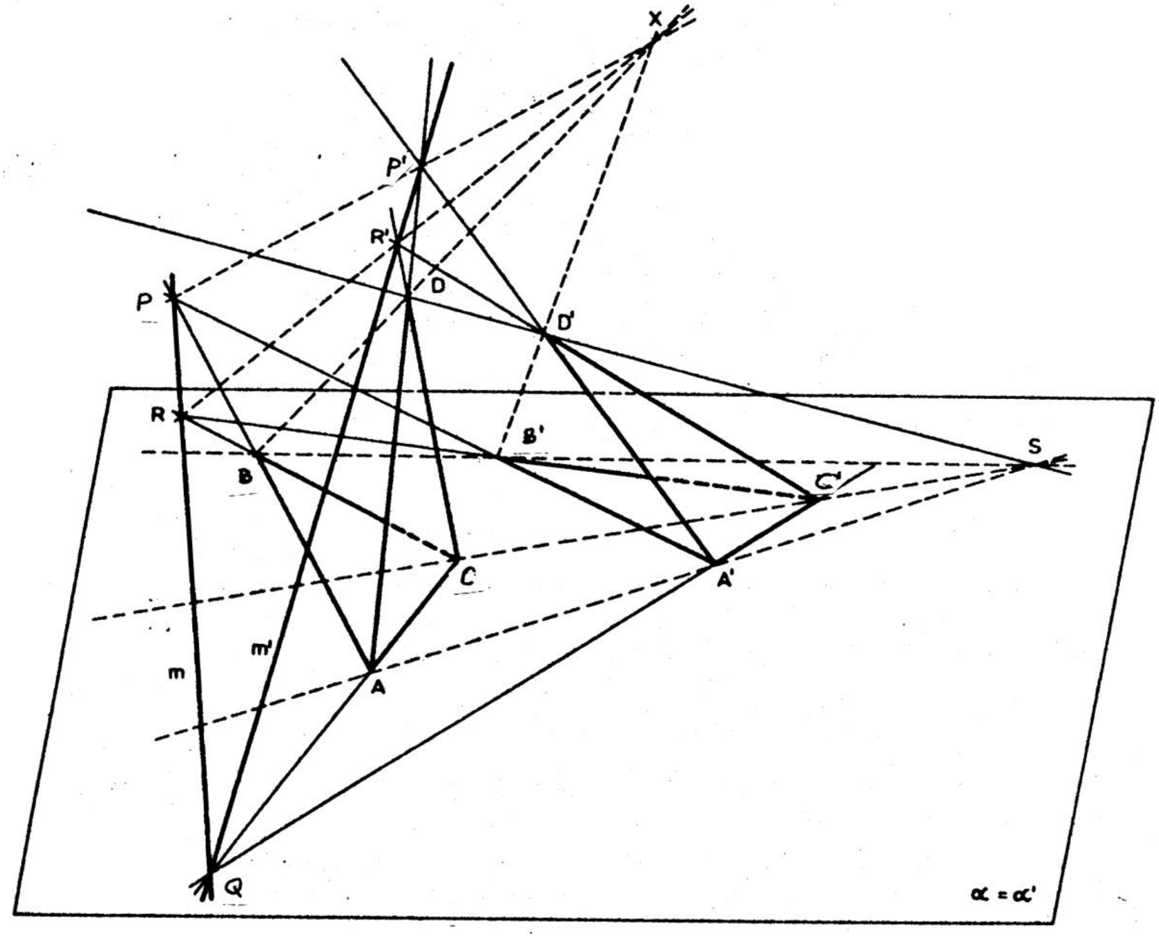
Poznámka. Vnorenie reálnej projektívnej roviny do reálneho projektívneho priestoru si možno predstaviť ako pripísanie nuly ako štvrtej „súradnice“ k daným trojiciam. Dá sa to chápať jako injektívne zobrazenie z dvojrozmerného do trojrozmerného priestoru, ktoré zachováva kolineárnosť bodov.

Dôkaz vety 4.1 (Platnosť Desargovho výroku v $\overline{\boldsymbol{E}_2}$).

Nech α je rovina určená bodmi *A*, *B*, *C* a α' rovina určená bodmi *A*′, *B*′, *C*′. Dôkaz urobíme v dvoch krokoch.

a) Nech sú najskôr roviny α, α' rôzne. Pretože priamky *AA*′ a *BB*′ sa pretínajú, musia sa preťať aj priamky *AB* a *A*′*B*′ – ležia v tej istej rovine a ich spoločný bod *P* zároveň musí ležať na priamke *r*, $r = \alpha \cap \alpha'$. Obdobne ukážeme, že aj body *Q* a *R* ležia na priamke *r*. Pretože sú dané dve roviny rôzne a sú v projektívnom priestore, priamka *r* existuje.

b) Nech teraz trojuholníky *ABC* a *A*′*B*′*C*′ ležia v jednej rovine α. Mimo tejto roviny existuje bod *X*. Na priamke *XB* si zvolíme bod *D* a na priamke *XB*′ nájdeme bod $D' = XB' \cap OD$.



Obr. 4.2

Trojuholníky *ADC* a *A*′*D*′*C*′ ležia v rôznych rovinách a je na ne možné použiť už dokázané tvrdenie z časti a) tohto dôkazu. Existuje teda priamka, na ktorej sa pretnú odpovedajúce si strany *AD* a *A*′*D*′, *AC* a *A*′*C*′, *DC* a *D*′*C*′ – sú to body *P*′, *Q*′ = *Q* a *R*′. Dá sa ukázať, že body *X*, *P*′a *P* sú kolineárne, rovnako body X, R' a R. Rovina určená priamkou $P'R' = R'Q$ pretne rovinu α v priamke m. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že na nej ležia aj body P, Q a R.

Poznámka. Desargov výrok v konkrétnom modeli – rozšírenej euklidovskej rovine – je pravdivý a je tam teda *vetou* (Desargova veta), ktorú treba dokazovať. O jeho platnosti vo všeobecnej projektívnej rovine si povieme o trochu neskôr. Už teraz môžeme prezradiť, že nemusí platiť.

Roviny, v ktorých Desargov výrok platí, sa nazývajú **desargovské**, tie, v ktorých Desargov výrok neplatí, sa volajú **nedesargovské**. Rozšírená euklidovská rovina je teda desargovskou rovinou.

Ako výrok je Desargov výrok implikáciou a je zaujímavé, že **ak platí**, tak platí aj implikácia obrátená.

Veta 4.2. Ak v projektívnej rovine platí Desargov výrok, tak platí v nej aj výrok obrátený (obrátený k Desargovmu výroku):

Ak body $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$, $R = BC \cap B'C'$ sú kolineárne, tak priamky AA', BB', CC' incidujú s jedným bodom O.

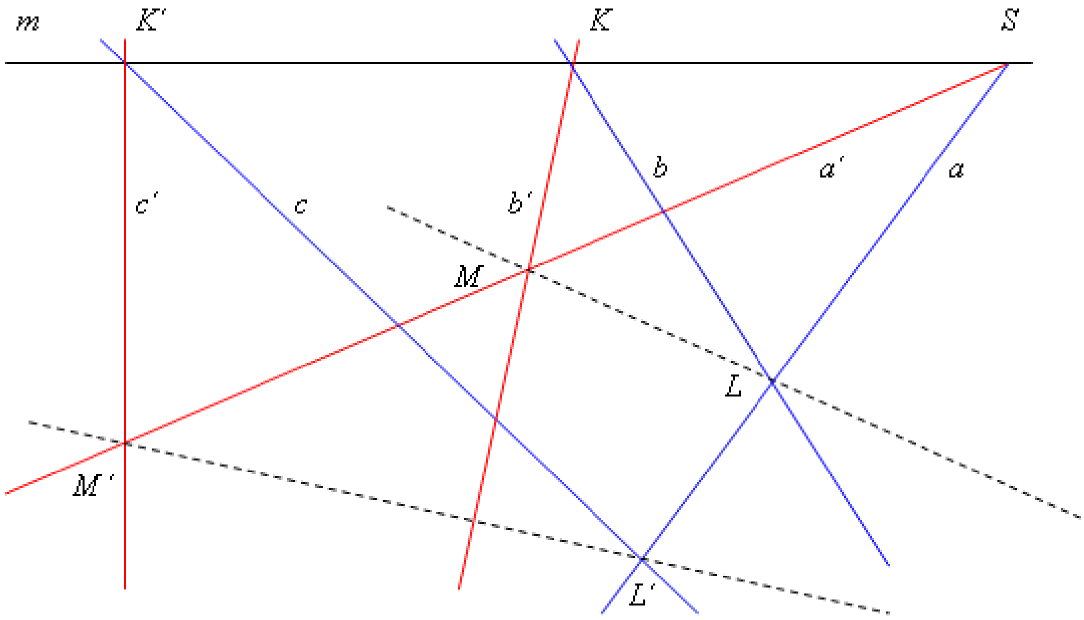
Dôkaz. Označme $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a' = B'C'$, $b' = A'C'$, $c' = A'B'$. Znenie **výroku obráteného k Desargovmu výroku** teraz môžme napísať takto:

Dané sú dva trojuholníky abc, $a'b'c'$. Ak body $P = c \cap c'$, $Q = b \cap b'$, $R = a \cap a'$ sú kolineárne, tak priamky $p = (a \cap b) \cup (a' \cap b') = CC'$, $q = (a \cap c) \cup (a' \cap c') = BB'$, $r = (b \cap c) \cup (b' \cap c') = AA'$ incidujú s jedným bodom.

Je to zároveň výrok **duálny** k Desargovmu výroku, dokážeme ho však (musíme ho takto dokazovať – pozri poznámku za nasledujúcim dôsledkom) ako dôsledok

- axióm P1, P2, P3 projektívnej roviny (a v projektívnej rovine platného výroku P3*) a
- Desargovho výroku, ktorého platnosť je predpokladom tvrdenia.

Označme $S = a \cap a'$, $K = b \cap b'$, $K' = c \cap c'$, $L = a \cap b$, $L' = a \cap c$, $M = a' \cap b'$, $M' = a' \cap c'$. (Pozri obr. 4.3.) Teraz aplikujeme tvrdenie Desargovho výroku na trojuholníky KLM a $K'L'M'$. Vyplýva z neho, že priamky p, q, r prechádzajú jedným bodom.



Obr. 4.3

Dôsledok. V rozšírenej euklidovskej rovine platí tzv. obrátená Desargova veta.

Poznámka. Obrátená Desargova veta je vetou duálnou k Desargovej vete (pozri časť 2.3 – dualita). Pretože sa táto obrátená veta (= duálna veta k vete Desargovej) dá dokázať z axióm projektívnej roviny za predpokladu, že platí aj Desargov výrok, môžeme urobiť nasledovné:

K axiómam projektívnej roviny P1, P2, P3 a aj P3* pridáme Desargov výrok DV. Pretože vieme z daných axióm dokázať aj výrok DV* duálny k Desargovmu, môžme systém axióm znova doplniť do systému, ktorý bude neprotirečivý a samoduálny. Ak z neho nejaký výrok o priamkach a bodoch a ich incidencii vieme dokázať, vieme dokázať aj výrok k nemu duálny.

Z týchto dôvodov platí princíp duality aj v desargovských rovinách. Nie je to teda automatické, musíme sa o tom presvedčiť práve dôkazom vety duálnej k DV len ako dôsledok axióm projektívnej roviny a Desargovho výroku DV.

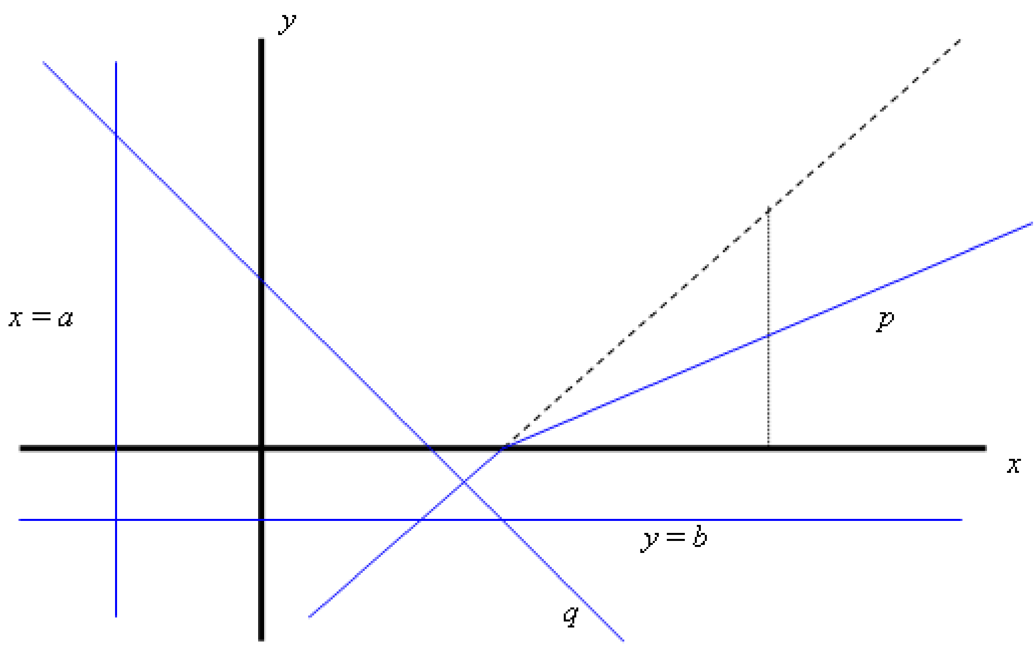
4.2 Desargovské a nedesargovské roviny

Teraz upresníme, ako to je s Desargovou vetou (výrokom) – raz platí a inokedy neplatí. Presnejšie povedané – platí nasledovné tvrdenie.

Veta 4.3. Existujú projektívne roviny, v ktorých Desargov výrok je pravdivý (je tam vetou) a existujú projektívne roviny, v ktorých Desargov výrok nie je pravdivý.

Dôkaz. V rozšírenej euklidovskej rovine Desargov výrok platí (pozri vetu 4.1), tým je dokázaná prvá časť vety. Aj druhú časť vety dokážeme tak, že uvedieme príklad projektívnej roviny, v ktorej Desargov výrok neplatí. Je na to vhodné pribrať pojem (známy zo štúdia matematiky na FMFI UK) **afinnej roviny** (tu definovaný synteticky axiómami) a takisto jej súvis s projektívnymi rovinami.

Príklad 2.4.6 Moultonova afinná rovina $\boldsymbol{E}_2^M$.



Obr. 4.4

Bodmi tejto roviny budú body euklidovskej roviny $\boldsymbol{E}_2$.

Priamkami tejto roviny bodú tzv. L-krivky, ktoré sú (v pevne zvolenej karteziánskej súradnicovej sústave roviny $\boldsymbol{E}_2$) definované nasledovne:

$y = m.f(y, m) \,.\, (x - a)$,

kde m, a sú reálne čísla a funkcia f(y,m) je definovaná nasledovne

$f(y, m) = 1$ ak $m \le 0$

$f(y, m) = 1$ ak $m > 0$ a súčasne $y < 0$

$f(y, m) = \frac{1}{2}$ ak $m > 0$ a súčasne $y \ge 0$.

Aj keď to vyzerá „divoko“, treba si všimnúť, že funkcia f je „po častiach“ konštantná , t. j. jej graf je buď priamkou (prípad m ≤ 0) alebo zložením dvoch polpriamok (prípad m > 0). Celé to bude ešte jasnejšie, ak si uvedomíme, že číslo $m.f(y, m)$ v rovnici L-krivky je smernicou priamky y = k.(x – a) , kde $k = m$.f(y,m) je jej smernica.

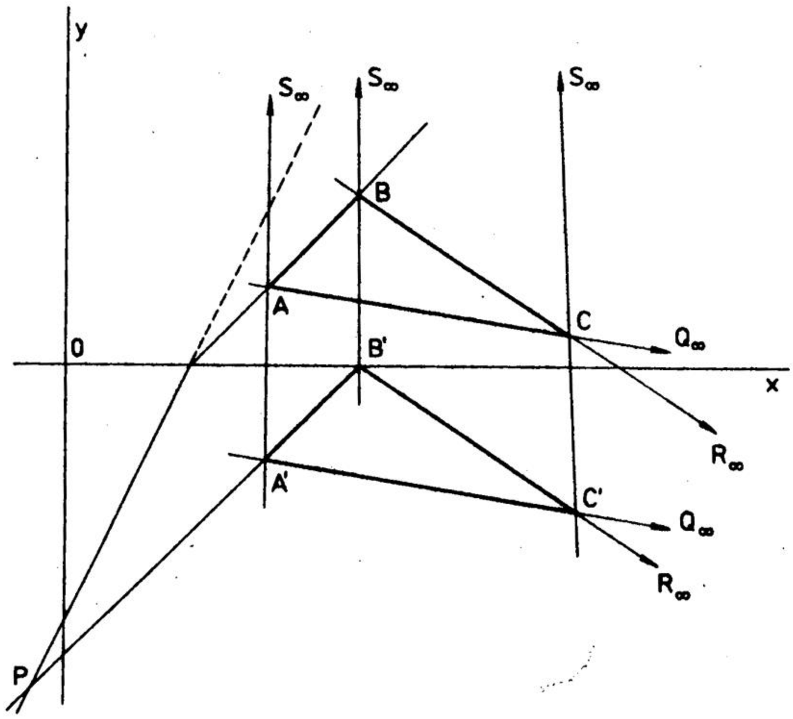
L-krivkami sú teda aj euklidovské priamky rovnobežné s osami x a y a priamky, ktorých smernica je záporná. Priamky s kladnou smernicou (na obrázku označené ako p) sa „zalomia“(L-krivky sú na obrázku vyznačené modrou farbou.).

Na dôkaz toho, že vyššie definovaná Moultonova rovina $\boldsymbol{E}_2^M$ je afinnou rovinou, treba preveriť, že spĺňa axiómy afinnej roviny (každé dva body určia práve jednu „priamku“ = práve jednu L-krivku, ku každej L-krivke existuje cez bod mimo nej práve jedna „rovnobežka“, t.j. L-krivka, ktorá s danou L-krivkou nemá spoločný bod, existujú 3 nekolineárne body).

Dôsledok. Rozšírením afinnej Moultonovej roviny $\boldsymbol{E}_2^M$ dostaneme projektívnu rovinu, ktorá sa volá Moultonova (projektívna) rovina; označme ju $\overline{\boldsymbol{E}}_2^M$.

Celá táto konštrukcia je kvôli odpovedi na otázku, či musí Desargov výrok v projektívnej rovine platiť vždy, teda akosi „automaticky“. Odpoveď je, že nie. Platí nasledovná veta.

Veta 4.4. V Moultonovej (projektívnej) rovine Desargov výrok nie je pravdivý.
Dôkaz. Pozri obr. 4.5:



Obr. 4.5

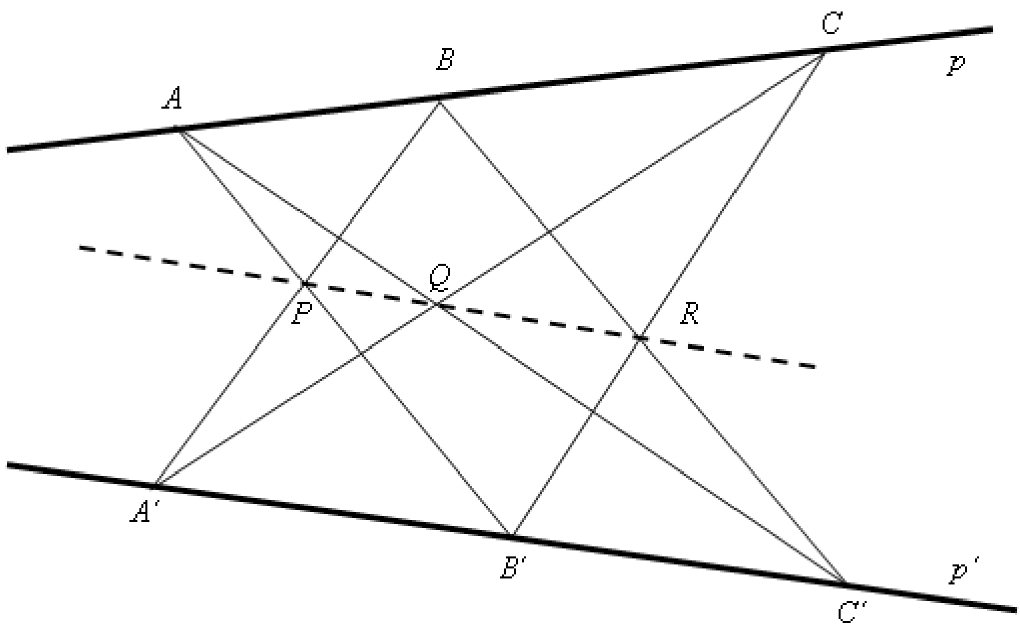
Stačí zostrojiť dva také trojuholníky v tejto rovine, ktoré spĺňajú predpoklady Desargovej vety a nespĺňajú jej tvrdenie. Príklad dvoch takých trojuholníkov možno nájsť napr. v [Sol95, str. 177], pozri obr. 4.5. Bod *O* z Desargovej vety je na obrázku nevlastný (nevlastný bod S_∞ osi *y*), dva z bodov *P, Q, R* sú nevlastné a jeden evidentne vlastný, teda body *P, Q, R* nie sú kolineárne.

Poznámka. Na stránke http://en.wikipedia.org/wiki/Moulton_plane je uvedený príklad amerického astronóma menom Forest Ray Moulton , kde tu uvedenú úlohu osi *x* hrá os *y*.

4.3 Pappov výrok a jeho platnosť v projektívnej rovine

Pappos (nem. a angl. Pappus), je autorom nasledovného krásneho tvrdenia, ktoré si všíma len vzájomnú incidenciu (konečného počtu) bodov a priamok:

Pappov výrok. Nech *p, p´* sú dve rôzne priamky v projektívnej rovine, nech *A, B, C* sú tri po dvojiciach rôzne body priamky *p, A´, B´, C´* tri po dvojiciach rôzne body priamky *p´*, všetky rôzne od bodu $p \cap p'$. Potom body $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$, $R = BC' \cap B'C$ sú kolineárne.



Obr. 4.6

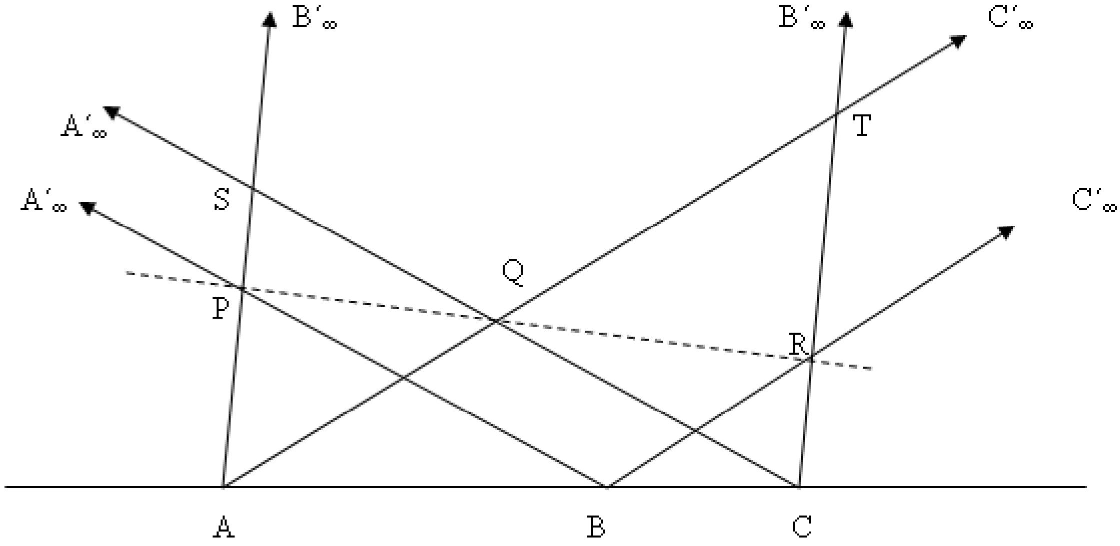
Veta 4.6. Existujú projektívne roviny, v ktorých Pappov výrok je pravdivý (je tam vetou) a existujú projektívne roviny, v ktorých Pappov výrok nie je pravdivý.

Dôkaz. Pozri nasledujúce tri tvrdenia.

Lema 4.6a. V rozšírenej euklidovskej rovine Pappov výrok je pravdivý.

Dôkaz (platnosti Pappovho výroku v rozšírenej euklidovskej rovine)**.** Detaily pozri: [Har67].

Zvolíme priamku $A'B' = B'C'$ za nevlastnú priamku. Všetky ostatné body sú potom už vlastné a môžeme použiť tvrdenia euklidovskej roviny – napr. vety o podobnosti trojuholníkov.



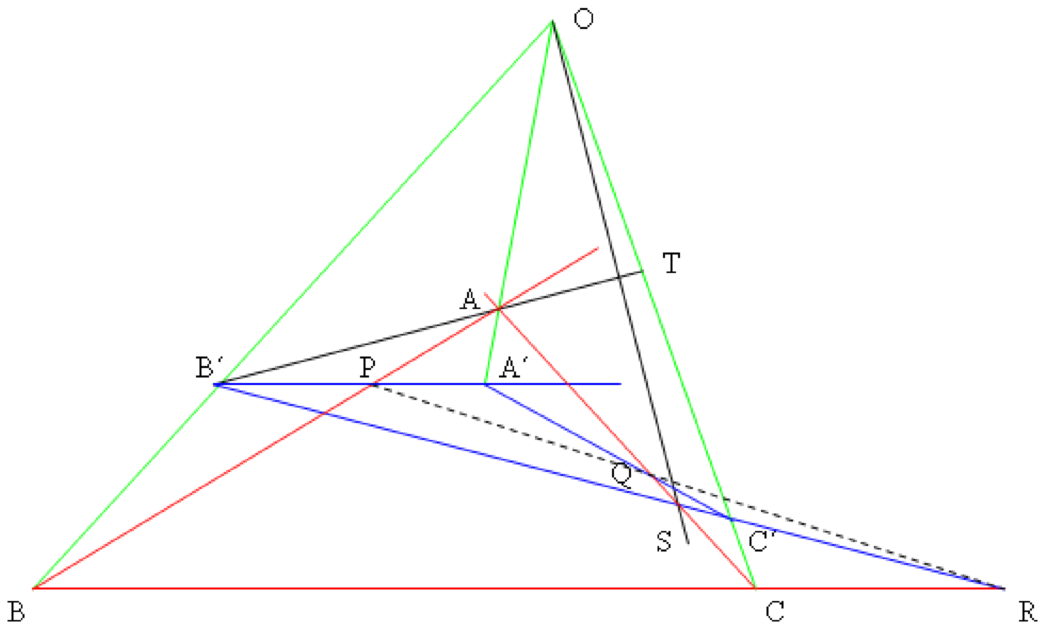
Obr. 4.7

Z podobnosti trojuholníkov *BCR* a *ACT*, ako aj z podobnosti trojuholníkov *PAB* a *SAC* dostaneme úmery, ktoré spolu s faktom podobnosti trojuholníkov *TQC* a *AQS* implikujú, že aj trojuholníky *TQR* a *AQP* sú podobné. Preto platí, že uhol *AQP* je zhodný s uhlom *TQR* a priamky *PQ* a *QR* sú rovnobežné. Pretože majú spoločný bod, musia sa rovnať, teda body *P*, *Q*, *R* sú kolineárne.

Aby bol dôkaz úplný, treba ukázať, že ak Pappov výrok platí pre špeciálnu dvojicu priamok, platí pre ľubovoľné dve priamky. V rozšírenej euklidovskej (a každej desargovskej) rovine toto platí ako dôsledok existencie istých transformácií roviny (projektívnych kolineácií) a ich vlastností.

Poznámka. Iný dôkaz Pappovej vety v rovine, kde výrok platí, je tu :
http://www.mathpages.com/home/kmath542/kmath542.htm .

Veta 4.7. (Hessenberg). Ak v projektívnej rovine platí Pappov výrok, tak platí aj Desargov výrok. (Každá pappovská projektívna rovina je aj desargovská.)



Obr. 4.8

Červená farba je farba strán trojuholníka *ABC*, modrá trojuholníka *A′B′C′* a zelenou sú označené spojnice odpovedajúcich si vrcholov daných trojuholníkov.

Dôkaz Hessenbergovej vety (Ekvivalentná formulácia: Pappov výrok v projektívnej rovine implikuje Desargov výrok.) urobíme v troch krokoch.

Nech trojuholníky ABC a $A'B'C'$ spĺňajú predpoklady Desargovej vety v projektívnej rovine, v ktorej platí Pappov výrok. Nech $S = AC \cap B'C'$, $T = AB' \cap CC'$, $U = AB \cap OS$, $V = A'B' \cap OS$ (na obr. 4.8 nie sú všetky body vyznačené).

1. Pappov výrok aplikovaný na (kolineárne) trojice B, B', O a S, C, A implikuje kolineárnosť bodov R, T, U.

2. Obdobne z trojíc A', O, A a S, B',C' a platnosti Pappovho výroku vyplýva kolineárnosť bodov Q, T, V.

3. Nakoniec aplikácia Pappovho výroku na trojice B', A, T a U, V, S má za následok, že body P, Q, R sú kolineárne, čo bolo treba dokázať.

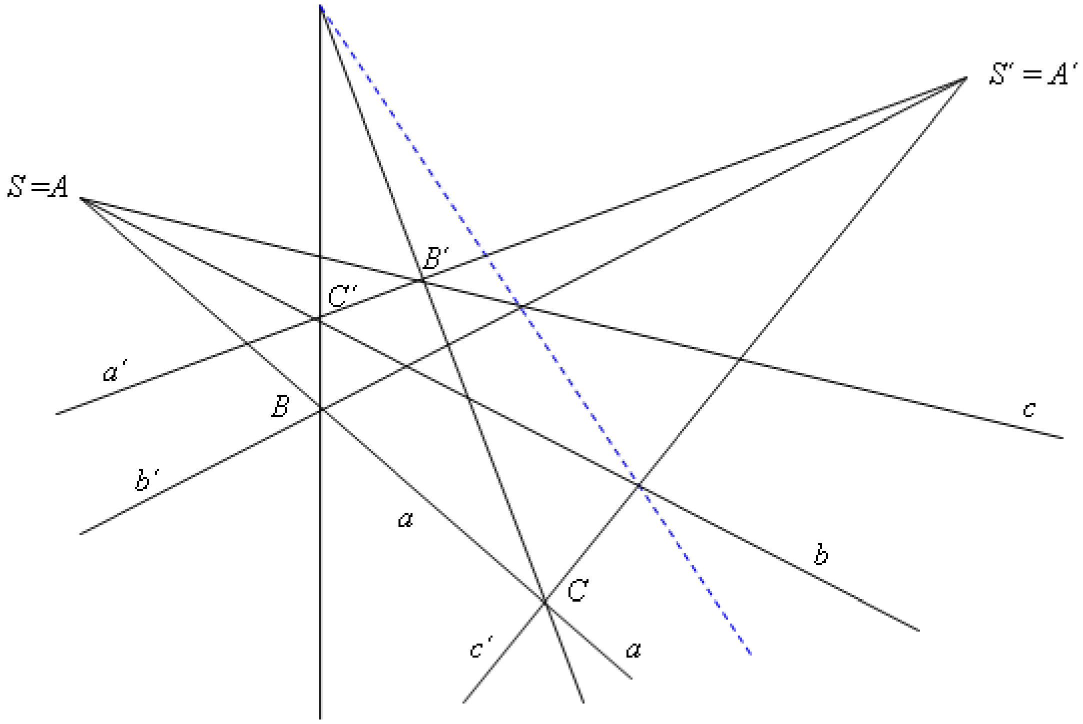
Dôsledok. Ak v projektívnej rovine Desargov výrok neplatí, neplatí ani Pappov výrok. V Moultonovej (projektívnej) rovine teda okrem Desargovho výroku neplatí ani Pappov výrok.

Poznámka. Dá sa teda povedať, že Pappov výrok je „silnejší“ než Desargov. O „koľko“ ? To sa bude dať porovnať, keď si uvedieme výroky (týkajúce sa vlastností istých projektívnych zobrazení), ktoré sú ekvivalentné Pappovmu, resp. Desargovmu výroku.

A teraz trochu úvah o tom, **či a prečo princíp duality platí aj v pappovských rovinách.**

Veta 4.8. V projektívnej rovine, v ktorej platí Pappov výrok, platí aj výrok k nemu duálny.

Dôkaz. Uvedený je aj v [Sol95], str. 52, kde je dokázaný pre rozšírenú euklidovskú rovinu, ale dôkaz je platný pre ľubovoľnú projektívnu rovinu. Pozri aj tento obr. 4.9:



Obr. 4.9

Idea dôkazu: Ak označíme $A = S$, $B = b' \cap a$, $C = c' \cap a$, $A' = S'$, $B' = a' \cap c$, $C' = a' \cap b$, tvrdenie vety dostaneme použitím Pappovej vety na trojice bodov A, B, C a A', B', C'.

Defnícia 4.9. Projektívne roviny, v ktorých je Pappov výrok pravdivý, nazývame **pappovskými**, roviny, v ktorých Pappov výrok neplatí, **nepappovskými.**

Rozšírená euklidovská rovina je teda pappovskou rovinou.

Poznámka. Princíp duality platí aj v projektívnych rovinách, v ktorých je k axiómam P1 – P3 pridaný aj Pappov výrok ako ďalšia axióma (pappovské roviny). Je to preto, lebo z axióm P1 – P3 a Pappovho výroku ako ďalšej axiómy je možné dokázať výrok duálny k Pappovmu výroku (pozri aj poznámku o platnosti princípu duality v desargovských rovinách).

Úloha 4

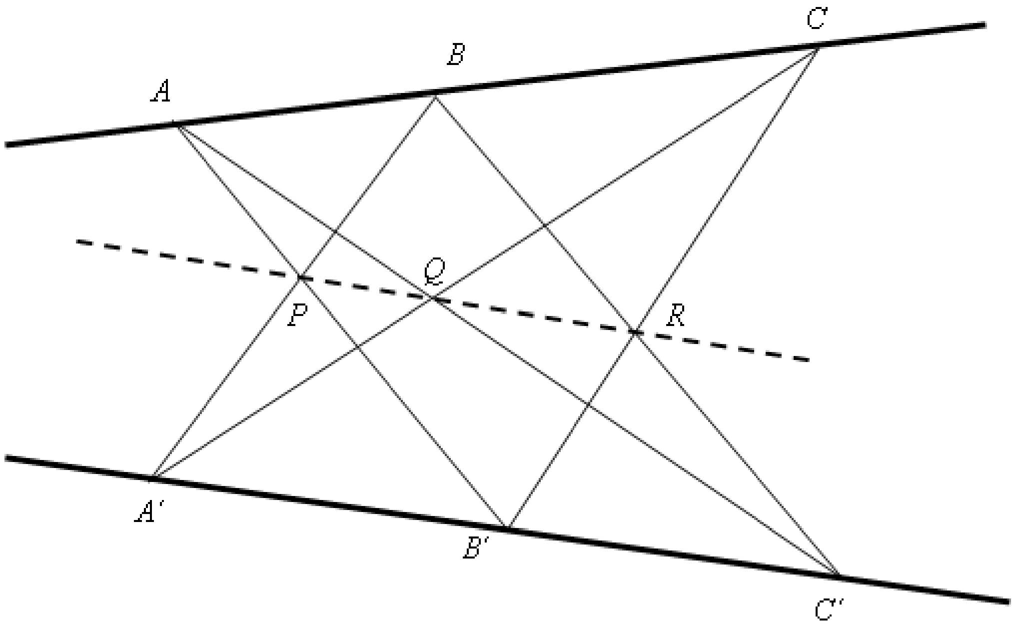
a) V rozšírenej euklidovskej rovine sú dané štyri body A, B, P, Q, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne. Nech $C = AB \cap PQ$, $R = AQ \cap PB$, $S = AP \cap BQ$, $D = RS \cap AB$, $T = RS \cap PQ$, $U = AT \cap PD$. Dokážte, že body R, U, C sú kolineárne. (Pri dôkaze využite Desargovu vetu.)

b) Nech A, B, C sú tri rôzne kolineárne body rozšírenej euklidovskej roviny a P, Q, P' a Q' sú také body, že priamky AB, PQ a $P'Q'$ sú rôzne a pretínajú sa v bode C. Nech $R = AQ \cap PB$, $S = AP \cap BQ$, $D = RS \cap AB$, $R' = AQ' \cap P'B$, $S' = AP' \cap BQ'$ a $D' = R'S' \cap AB$. Dokážte, že $D = D'$. (Pri dôkaze využite Desargovu vetu.)

c) Sformulujte výrok duálny k Pappovmu výroku.

d) V dôkaze lemy 4.6a zdôvodnite z predpokladov tvrdenia podobnosť trojuholníkov TQR a AQP (v pojmoch euklidovskej roviny).

e) Na nasledujúcom obrázku je 9 bodov a 9 priamok; každým bodom prechádzajú tri priamky (tejto množiny) a každá priamka inciduje s tromi bodmi (tejto množiny). Táto množina sa nazýva Pappovou konfiguráciou (porovnajte s množinou bodov a priamok – Desargovou konfiguráciou, ktorá sa spomína v Desargovom výroku – je tam 10 bodov a 10 priamok). Ak použijeme Pappov výrok na body A, B, C a R, Q, P (v tomto poradí), dostaneme výrok o kolineárnosti troch bodov. (Ktoré sú to body?) Nájdite ďalšie možnosti na uplatnenie Pappovho výroku. (Namiesto bodov A, B, C vezmite napr. A, P, B' a ešte jednu trojicu kolineárnych bodov spĺňajúcich predpoklady Pappovho výroku a sformulujte znenie Pappovho výroku pre dané trojice bodov).



Obr. 5.7

Literatúra k časti 4

[Berg87] Berger M.: *Géométrie* I, II. Editions Nathan, Paris 1977, angl. preklad Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987

[Cox89] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry*. J. Wiley, 2nd edition, London 1989

[Har67] Hartshorne, R.: *Foundations of projective geometry*. Lecture notes Harvard University. W. A. Benjamin Inc., New York 1967 (ruský preklad: Izdateľstvo Mir, Moskva 1970)

[Kar76] Karteszi, F.: *Introduction to Finite Geometries*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1976

[Sol95] Solčan, Š.: *Projektívna geometria*. 2. vyd. Vydavateľstvo UK, Bratislava 1995

[Sol11a] Solčan, Š. : *O kolineárnosti bodov a zbiehavosti (konkurentnosti) priamok*. Acta Mathematica 14, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2011. S. 3-18

[Sol11b] Solčan, Š. : *O Pappovom dôkaze Pappovej vety*. Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG' 2011, Vol. 20, Bratislava : Slovenská technická univerzita, 2011. S. 111-117

Odkazy na webovské stránky:

1. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Desargues.html)
2. http://mathworld.wolfram.com/DesarguesTheorem.html
3. http://www.oxfordreference.com/
4. http://www.mathpages.com/home/kmath542/kmath542.htm
5. http://mathworld.wolfram.com/PappussHexagonTheorem.html
6. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Desargues.html
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Moulton_plane

5. Kolineácie projektívnej roviny a projektívne zobrazenia

5.1 Kolineácie projektívnej roviny

V časti 2.2. *Definícia a príklady projektívnych rovín* sme mali nasledovnú definíciu (na „porovnanie“ projektívnych rovín).

Definícia 2.2. Nech ***P***, ***P*′** sú projektívne roviny. Bodové zobrazenie $\mathcal{F}$ z ***P*** do ***P*′** nazývame **izomorfizmom *P* na *P*′**, ak $\mathcal{F}$ je bijekcia a každú trojicu rôznych kolineárnych bodov *A*, *B*, *C* zobrazí na trojicu $\mathcal{F}$ (*A*), $\mathcal{F}$ (*B*), $\mathcal{F}$ (*C*) rôznych a kolineárnych bodov. Dané roviny ***P***, ***P*′** nazveme **izomorfnými.**

Poznámka. Ak ***P*** = ***P*′**, dané zobrazenie $\mathcal{F}$ sa zvykne nazývať *automorfizmom*, alebo častejšie *kolineáciou* tejto roviny, pojem *kolineácia* budeme používať aj my.

Definícia 5.1. Nech ***P*** je projektívna rovina, $\mathcal{K}$ bijektívne zobrazenie ***P*** → ***P***. Zobrazenie $\mathcal{K}$ nazývame **kolineáciou** roviny ***P***, ak každú trojicu *A*, *B*, *C*, po dvojiciach rôznych a kolineár-nych bodov zobrazí do trojice *A*′, *B*′, *C*′, po dvojiciach rôznych a kolineárnych bodov.

Poznámka. Z predchádzajúcej definície vyplýva, že $\mathcal{K}$ zobrazuje body roviny ***P*** opäť na body tejto roviny a priamky roviny ***P*** na priamky roviny ***P*** , zachováva pritom incidenciu bodov a priamok.

Definícia 5.2. Bod *M* sa nazýva **samodružným (invariantným) bodom** kolineácie $\mathcal{K}$, ak $\mathcal{K}$ (*M*) = *M*, priamka *m* sa nazýva **samodružnou priamkou** kolineácie $\mathcal{K}$, ak $\mathcal{K}$ (*m*) = *m*.

Bod *S* sa nazýva **stredom** (silne samodružným bodom, priamkovo samodružným bodom) kolineácie $\mathcal{K}$, ak $\mathcal{K}$ (*S*) = *S* a navyše $\mathcal{K}$ (*m*) = *m* pre každú priamku zväzku Z(*S*).

Priamka o sa nazýva **osou** (silne samodružnou priamkou, bodovo samodružnou priamkou) kolineácie $\mathcal{K}$, ak $\mathcal{K}$ (*o*) = *o* a $\mathcal{K}$ (*X*) = *X* pre každý bod *X* priamky *o*.

Kolineácia, pre ktorú existuje stred, sa nazýva **stredovou kolineáciou,** kolineácia, pre ktorú existuje os, sa nazýva **osovou kolineáciou.**

Príklady.

1. Nech $\boldsymbol{E}_2$ je euklidovská rovina, *R*(*M*, *α*) je otočenie okolo bodu *M* o uhol veľkosti *α*. Rozšírme zobrazenie *R* roviny $\boldsymbol{E}_2$ do zobrazenia $\overline{R}$ roviny $\overline{E_2}$ nasledovne: na množine vlastných bodov nech $\overline{R}$ = *R*, na množine nevlastných bodov roviny $\overline{E_2}$ definujme $\overline{R}$ tak, aby nevlastný bod *U* priamky *m* sa zobrazil do nevlastného bodu *U*′ priamky $R(m)$. Nie je ťažké preveriť, že zobrazenie $\overline{R}$ je kolineáciou roviny $\overline{E_2}$. Ak je $\alpha \neq k\pi$, *k* celé číslo, jediným samodružným bodom tejto kolineácie je bod *M*. Ak $\alpha = k\pi$, pre *k* párne je $\overline{R}$ identitou na $\overline{E_2}$ a pre *k* nepárne je bod *M* silne samodružným bodom kolineácie $\overline{R}$, teda $\overline{R}$ je stredovou kolineáciou.

2. Obdobne ako v príklade 1 rozšírme rovnoľahlosť *R* so stredom *S* do kolineácie $\overline{R}$ rozšírenej euklidovskej roviny. Ľahko sa overí, že *S* je silne samodružným bodom kolineácie $\overline{R}$.

3. Obdobne ako v príklade 1 rozšírme aj osovú súmernosť S euklidovskej roviny do kolineácie $\overline{S}$ rozšírenej euklidovskej roviny. Zistite, či má $\overline{S}$ silne samodružné body a (alebo) priamky.

Poznámka. Identické zobrazenie projektívnej roviny na seba je zrejme kolineáciou; nazývame ju **identickou kolineáciou**. Kolineáciu, ktorá nie je identitou, voláme neidentickou kolineáciou.

Lema 5.3.

a) Ak má kolineácia $\mathcal{K}$ dva rôzne stredy, tak je identitou.

b) Ak má kolineácia $\mathcal{K}$ dve rôzne osi, tak je identitou.

Dôsledok. Neidentická kolineácia môže mať najviac jeden stred (jednu os). Ako je to so vzťahom stredu a osi, hovorí nasledujúca veta.

Veta 5.4. Ak kolineácia má stred, má aj os a obrátene.

Dôkaz. Pozri [Sol95] alebo [Bla74].

Stačí dokázať tvrdenie: Ak má kolineácia stred, má aj os. Obrátené tvrdenie (*Ak má kolineácia os, má aj stred*) je tvrdenie duálne k pôvodnému a v ľubovoľnej projektívnej rovine platí, ak platí tvrdenie prvé.

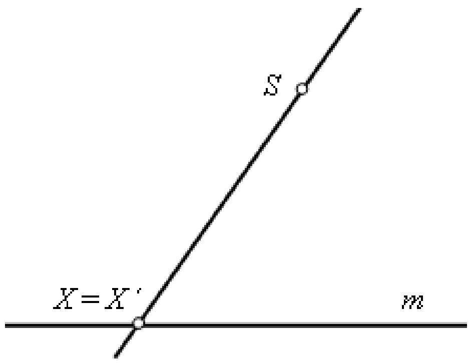
Ak má kolineácia stred *S*, všetky priamky s ním incidujúce sú samodružné. Potom môžu nastať dve navzájom sa vylučujúce možnosti

a) existuje ešte aspoň jedna priamka *m*, ktorá je samodružná a neinciduje s bodom *S*,

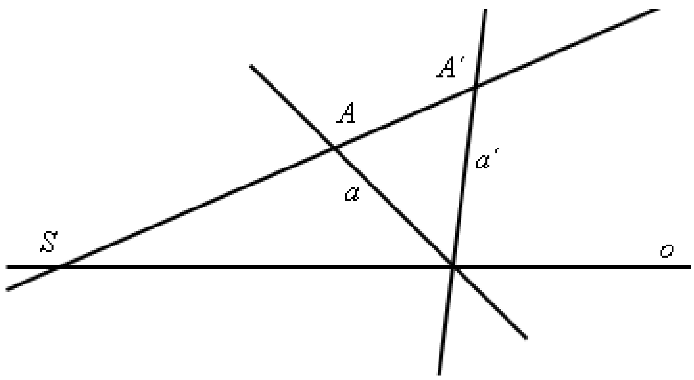
b) všetky samodružné priamky incidujú s bodom *S*.

V prípade a) je táto priamka horúcim kandidátom na os. Treba dokázať, že každý jej bod *X* je samodružným bodom (danej kolineácie $\mathcal{K}$). Pretože je však priesečníkom dvoch samodružných priamok – priamky *m* a priamky *SX*, je bod *X* samodružným bodom tejto kolineácie. (Obr. 5.1a.)

V prípade b) sa kandidát na os hľadá trochu ťažšie. Ak *a* je priamka neincidujúca s bodom *S*, nie je samodružná podľa predpokladu a jej obraz $a' = \mathcal{K}(a)$ je od nej rôzny, existuje preto jediný bod $X = a \cap a'$. Sporom sa dá dokázať, že všetky takéto body $m \cap m'$ ležia už na priamke *SX* a každý z nich je samodružný. Táto priamka je hľadanou osou. (Pozri obr. 5.1b.)



Obr. 5.1a



Obr. 5.1b

Poznámky.

1. V predchádzajúcej vete sa potichu predpokladalo, že ide o neidentickú kolineáciu. V prípade identickej kolineácie môžeme každý bod roviny považovať za jej stred a každú priamku za jej os.

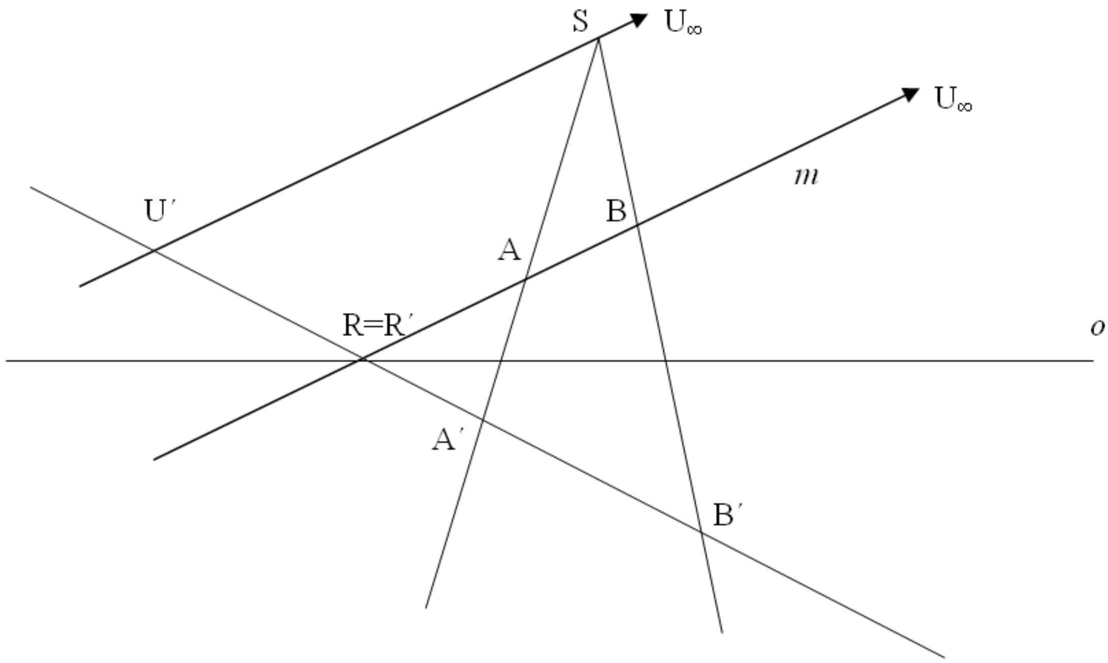
2. Pretože každá stredová kolineácia je aj osovou a obrátene, stačí používať jeden z týchto názvov. (Častejší je názov stredová kolineácia.)

Definícia 5.5. Stredová kolineácia, ktorej stred neinciduje s osou, sa nazýva **homológia**, stredová kolineácia, ktorej stred s osou inciduje, sa nazýva **elácia.**

V rozšírenej euklidovskej rovine sa pre homológie používa aj názov **perspektívna kolineácia** (presnejšie pre homológie s vlastným stredom a vlastnou osou).

Príklady kolineácií v rozšírenej euklidovskej rovine dostaneme (vhodným) rozšírením niektorých (afinných) zobrazení euklidovskej roviny. (Pozri predchádzajúce príklady.) Obrátene, zúžením kolineácií $\mathcal{K}$, ktoré zachovávajú nevlastnú priamku (je samodružnou priamkou kolineácie $\mathcal{K}$) , dostaneme afinné transformácie euklidovskej roviny, napr. **zúžením homológie s nevlastným stredom a vlastnou osou je afinné zobrazenie, tzv. základná afinita.** (Iný názov: perspektívna afinita alebo osová afinita.)

Nasledujúci obrázok znázorňuje homológiu $\mathcal{H}$ rozšírenej euklidovskej roviny s vlastným stredom S, vlastnou osou o, ktorá zobrazí bod A do A', bod B do B', priamku m do priamky m', a nevlastný bod U_∞ priamky m do bodu U', ktorý je vlastný. Pri konštrukcii (tu v rozšírenej euklidovskej rovine) sa využije fakt, že priamky prechádzajúce stredom sú samodružné, a teda body S, A, A', ďalej body S, B, B' a takisto body S, U_∞ , U' sú kolineárne.



Obr. 5.2

Uvedieme tvrdenie, ktoré ukáže, že ak môžeme využiť Desargovu vetu, homológie (aj elácie) sa dajú jednoznačne určiť malou množinou prvkov. Je to teda tvrdenie platné pre desargovské roviny.

Veta 5.6. (Určenosť homológií v desargovskej rovine ***P***)

Nech ***P*** je projektívna rovina, v ktorej platí Desargov výrok. Nech sú S, A, A' sú tri rôzne kolineárne body , nech o je priamka neprechádzajúca žiadnym z daných bodov. Potom existuje jediná homológia $\mathcal{H}$ tak, že S je jej stred, o jej os a $A' = \mathcal{H}(A)$.

Dôkaz vety 5.6 pre rozšírenú euklidovskú rovinu je napr. v [Sol95], ale tam uvedený postup je platný pre ľubovoľnú desargovskú rovinu. Dôkaz je dosť dlhý a nebudeme ho tu uvádzať. Jeho hlavná myšlienka spočíva v definícii zobrazenia h – kandidáta na hľadané zobrazenie najskôr na množine bodov desargovskej roviny, ktoré neležia na priamke SA a potom jeho rozšírení $\mathcal{H}$ aj na body tejto priamky.

Obraz bodu X v zobrazení h: $h(X) = X' = RA' \cap SX$, kde $R = XA \cap o$.

Treba tu potom dokázať, že dané zobrazenie je kolineáciou a že je jediné (v oboch týchto častiach dôkazu pomocou Desargovej vety).

Poznámka. V desargovskej rovine platí obdobná veta aj pre elácie. Stredové kolineácie v desargovskej rovine, teda aj v $\overline{E_2}$) sú teda určené svojím stredom S, osou a dvojicou bodov A, A'(vzor-obraz). Body S, A, A' však musia byť kolineárne.

Príklad. *Stredové kolineácie sedembodovej roviny* (*roviny* 7_3)

a) Homológie $\mathcal{H}$: Pretože každá priamka tejto roviny a teda aj každá priamka prechádzajúca stredom homológie má len tri body a z nich dva sú samodružné – bod S a bod na osi homológie – musí sa aj tretí bod zobraziť do seba. Toto zobrazenie je teda identitou, neidentická homológia v rovine 7_3 neexistuje.

b) Elácie $\mathcal{E}$: Pretože stred leží na osi a okrem samodružného bodu – priesečníka R osi s ľubovoľnou priamkou m rôznou od osi – existujú na tejto osi ešte dva ďalšie body, povedzme P, Q, sú tu dve možnosti: buď sa P zobrazí do seba a máme tu opäť identitu, alebo P sa zobrazí do Q a nutne Q do P. Pretože to platí na každej priamke rôznej od osi, je zložením zobrazenia $\mathcal{E}$ so sebou identita, $\mathcal{E} \circ \mathcal{E} = id$. (Hovoríme, že $\mathcal{E}$ je involutórne zobrazenie.) Konkrétnu eláciu si môžete preskúmať na modeli roviny 7_3 danom buď tabuľkou alebo graficky.

Veta 5.6 (o určenosti homológií v desargovskej rovine $\boldsymbol{P}$) sa dá obrátiť.

Veta 5.7. Nech $\boldsymbol{P}$ je projektívna rovina. Nech pre každú trojicu S, A, A' troch rôznych kolineárnych bodov a priamku o neprechádzajúcu žiadnym z daných bodov existuje jediná homológia $\mathcal{H}$ tak, že S je jej stred, o jej os a $A' = \mathcal{H}(A)$. Potom v $\boldsymbol{P}$ platí Desargov výrok.

Dôkaz je pomerne jednoduchý, prenecháme ho čitateľovi.

Platí teda nasledujúci zaujímavý dôsledok.

Veta 5.8. V projektívnej rovine sú nasledujúce dva výroky ekvivalentné:

a) Desargov výrok.

b) Pre každú trojicu S, A, A' troch rôznych kolineárnych bodov a priamku o neprechádzajúcu žiadnym z daných bodov existuje (aspoň jedna) homológia $\mathcal{H}$ tak, že S je jej stred, o jej os a $A' = \mathcal{H}(A)$.

Poznámky.

1. V implikácii bod a) implikuje bod b) platí silnejšie tvrdenie ...*práve jedna* homológia, v obrátenej implikácii stačí *existencia* takej homológie...

2. Veta 5.8 je ukážkou, ako vlastnosti určitej množiny bodov a priamok ovplyvňujú existenciu zobrazení tej roviny s danými vlastnosťami.

3. Pretože v „pekných“ projektívnych rovinách (napr. rozšírená euklidovská rovina) Desargov výrok platí, existujú v nich rozumne definované stredové kolineácie (homológie a následne aj elácie).

5.2 Projektívne zobrazenia

Nasledovné úvahy sa budú týkať každej projektívnej roviny. Ak budeme požadovať aj platnosť ďalších axióm (Desargova, resp. Pappova axióma), výslovne to uvedieme.

Definícia 5.9. Geometrickým útvarom budeme nazývať ľubovoľnú množinu bodov a priamok. (V ďalších úvahách bude táto množina vždy neprázdna.)

Tu sú dva útvary dôležité pre nasledujúcu časť nášho výkladu:

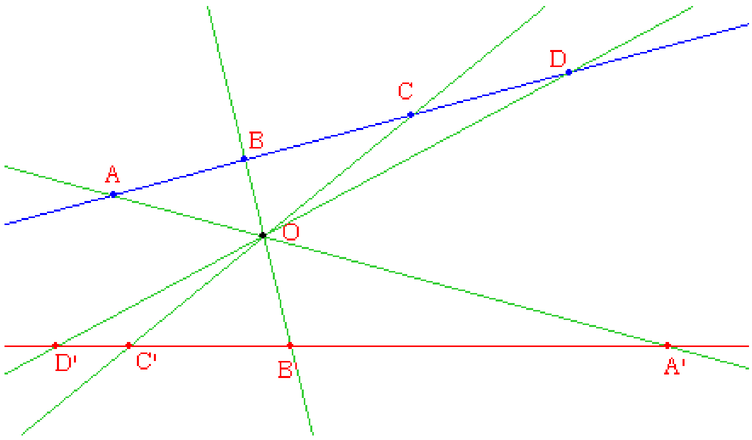
R(p) – množina všetkých bodov priamky p (incidujúcich s priamkou p) – nazývame ju **rad bodov** priamky p,

Z(A) – množina všetkých priamok prechádzajúcich bodom A (incidujúcich s bodom A) – nazývame ju **zväzok priamok**; bod A sa nazýva stred zväzku.

To, čo budeme teraz definovať a skúmať, sa dá nazvať aj izomorfizmami „jednorozmerných“ projektívnych priestorov , aj keď sme pojem priestor a ani rozmer nedefinovali. Pojem kolineácia používame pre zobrazenie, ktoré je definované na (celej) projektívnej rovine, tu uvedené pojmy budú definované na určitých podmnožinách (množine všetkých bodov priamky, alebo množine všetkých priamok zväzku) projektívnej roviny.

Definícia 5.10. Nech p, q sú dve rôzne priamky, S bod neincidujúci s priamkami p, q. Zobrazenie f: R(p) $\to$ R(q) , ktoré bodu $X \in p$ priradí bod $X' = XS \cap q$, sa nazýva **perspektívnosťou** (perspektívnym zobrazením) množiny bodov R(p) priamky p na množinu bodov R(q) priamky q. Bod S sa nazýva **stredom perspektívnosti** f.

V podstate ide len o nové pomenovanie tzv. stredového premietania bodov jednej priamky na body priamky druhej; pozri napr. nasledujúci obr. 5.3.



Obr. 5.3

Definícia 5.10a (duálna k 5.10). Nech P, Q sú dva rôzne body, o priamka neincidujúca s bodmi P, Q. Zobrazenie $f\,'$: Z(P) $\to$ Z(Q), ktoré priamke m priradí priamku $m' = (m \cap o) \cup Q$ sa nazýva **perspektívnosťou** zväzku priamok Z(P) na zväzok priamok Z(Q) . Priamka o sa nazýva **osou perspektívnosti** $f\,'$.

Definícia 5.11. Projektívnosťou (projektívnym zobrazením) sa nazýva zloženie konečného počtu perspektívností.

Táto definícia je dosť konštruktívna, dá sa predstaviť, ako asi také zobrazenie funguje, ale je „nepraktické“, lebo nevieme aký veľký počet je ten „konečný“ počet ... V každej teórii sa potom pátra po praktickejšom určení takýchto dôležitých zobrazení. V **rozšírenej euklidovskej rovine** platí takéto tvrdenie:

Veta 5.12. (Základná veta projektívnej geometrie v $\overline{E_2}$ – o určenosti projektívnosti)

Nech p, q sú dve priamky **v rozšírenej euklidovskej rovine** $\overline{E_2}$, A, B, C tri rôzne body priamky p, A',B',C' tri rôzne body priamky q. Existuje jediná projektívnosť π: R(p) → R(q) tak, že $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$, $\pi(C) = C'$.

Dôkaz využíva fakt, že v $\overline{E_2}$ platí Pappov výrok; dôkaz obsahuje postupne niekoľko pomocných tvrdení, ktoré môžeme chápať ako časti (kroky) dôkazu. Ich postupnosť je nasledovná:

Krok 1. Ukáže sa, že stačí uvažovať $p \neq q$

Krok 2. Dokáže sa, že zloženie n perspektívností sa dá nahradiť zložením $n - 1$ perspektívností, pre $n \geq 3$. Ako dôsledok sa získa tvrdenie, že projektívnosť sa dá zložiť z dvoch perspektívností. (Pripomíname, že sa predpokladá $p \neq q$.)

Krok 3. Dokáže sa, že stred S prvej perspektívnosti možno umiestniť na priamku q a stred S' druhej perspektívnosti na priamku p.

Krok 4. Ukáže sa, že pri vhodnom premenovaní bodov A, B, C a bodov A', B', C' sa dá umiestniť bod S do bodu A' a bod S' do bodu A, a že všetky ostatné projektívnosti zobrazujúce body A, B, C do bodov A', B', C' (v tomto poradí) sa rovnajú (ako zobrazenia) takto skonštruovanej projektívnosti.

Detaily pozri v [Sol95].

V projektívnych rovinách platí nasledovný výrok.

Veta 5.13. (**Základná veta projektívnej geometrie** – o určenosti projektívnosti)
Nech p, q sú dve priamky v pappovskej rovine ***P*** (t. j. v projektívnej rovine, v ktorej platí Pappov výrok), A, B, C tri rôzne body priamky p, A', B', C' tri rôzne body priamky q. Potom existuje jediná projektívnosť π: R(p) → R(q) tak, že $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$, $\pi(C) = C'$.

Táto veta sa dá formulovať nasledovne:

Veta 5.14. Nech ***P*** je projektívna rovina. Ak v ***P*** platí Pappov výrok, tak v nej platí *základná veta*.

(Pappov výrok implikuje základnú vetu.)

Dôkaz uvedený pre rozšírenú euklidovskú rovinu je v tomto prípade platný aj pre všetky papovské roviny.

Pod pojmom *základná veta* sa niekedy uvádzajú aj iné tvrdenia, najčastejšie tvrdenia uvedené v nasledujúcej vete, ktoré sú s našou formuláciou ekvivalentné.

Veta 5.15. V projektívnej rovine sú nasledujúce výroky ekvivalentné:

a) Ak π: R(p) → R(p) je projektívnosť, ktorá má tri rôzne samodružné body, tak π je identitou na R(p) , t.j. $\pi = id$.

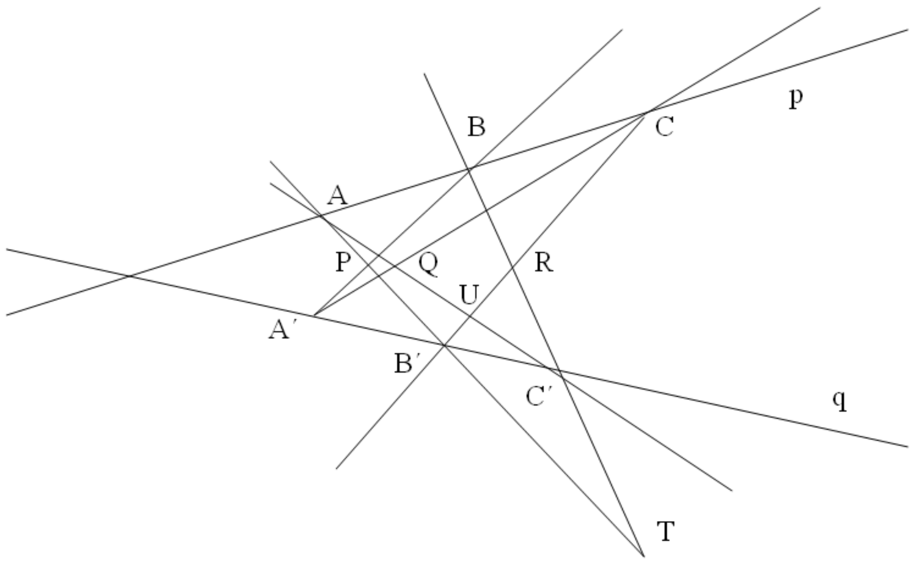
b) Nech p, q sú dve priamky, A, B, C tri rôzne body priamky p, A', B', C' tri rôzne body priamky q. Existuje jediná projektívnosť π: R(p) → R(q) tak, že $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$, $\pi(C) = C'$.

c) Ak $p \neq q$, a π je projektívnosť z R(p) na R(q), pričom $\pi(p \cap q) = p \cap q$, tak π je perspektívnosť.

Platí aj tvrdenie obrátené k tvrdeniu vety 5.14:

Veta 5.16. Nech ***P*** je projektívna rovina. Ak v ***P*** platí *základná veta*, tak v nej platí Pappov výrok .

Dôkaz. Nech v ***P*** platí základná veta, resp. výrok c) predchádzajúcej vety s ňou ekvivalentný.



Obr. 5.4

Nech $A, B, C \in p, A', B', C' \in q$, kde p, q sú rôzne priamky, $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$, $R = BC' \cap B'C$, $U = B'C \cap AC'$, $T = BC' \cap AB'$. Nech f je perspektívnosť z AB' na priamku q so stredom B, g perspektívnosť z priamky q na priamku AC' so stredom C. Nech $\pi = g \circ f$ je projektívnosť , ktorá je zložením f a g (v tomto poradí).

Pretože bod $A = AB' \cap AC'$ sa zobrazí sám do seba, je zobrazenie π podľa výroku c) perspektívnosťou, jej stred je bod $B'U \cap TC' = B'C \cap BC' = R$. Pretože bod P sa v perspektívnosti π zobrazí do bodu Q, sú body P, Q, R kolineárne, teda platí Pappov výrok.

Platí teda nasledovná ekvivalencia.

Veta 5.17. Nech ***P*** je projektívna rovina. Potom sú nasledovné výroky ekvivalentné:

a) Pappov výrok.

b) Ak $\pi : \mathrm{R}(p) \to \mathrm{R}(p)$ je projektívnosť, ktorá má tri rôzne samodružné body, tak π je identitou na $\mathrm{R}(p)$, t. j. $\pi = id$.

c) Nech A, B, C sú tri rôzne body priamky p, A', B', C' tri rôzne body priamky q. Existuje jediná projektívnosť $\pi : \mathrm{R}(p) \to \mathrm{R}(q)$ tak, že $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$, $\pi(C) = C'$.

d) Ak $p \neq q$ a π je projektívnosť z $\mathrm{R}(p)$ na $\mathrm{R}(q)$, pričom $\pi(p \cap q) = p \cap q$, tak π je perspektívnosť.

Platí aj veta duálna k základnej vete; jej znenie si čitateľ sformuluje ako výrok duálny k výroku predchádzajúcej vety.

Veta 5.18 (o direkčnej osi projektívnosti).
Nech p, q sú dve rôzne priamky v pappovskej rovine ***P***. Nech $A, B, C, \dots, X, Y, \dots$ sú body priamky p, $A', B', C', \dots, X', Y', \dots$ ich obrazy v projektívnosti π: $\mathrm{R}(p) \to \mathrm{R}(q)$.
Potom body $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$, $BC' \cap B'C$, ..., $XY' \cap X'Y$, ... sú kolineárne, ležia na jednej priamke d.

(Priamku d nazývame **direkčnou osou** projektívnosti π.)

Poznámka. Predchádzajúca veta má praktický konštrukčný význam pri riešení úloh v rozšírenej euklidovskej rovine. Jej dôkaz sa urobí s využitím výroku duálneho k výroku c) vyššie uvedenej vety. (Pozri skriptá [Sol95].)

Veta duálna k predchádzajúcej vete potvrdzuje existenciu špeciálneho bodu, tzv. **direkčného stredu** projektívnosti zväzku priamok Z(P) na zväzok Z(Q), $P \neq Q$.

5.3 Kolineácie a projektívnosti

Definícia 5.19. Kolineácia projektívnej roviny, ktorej zúženie na ľubovoľnú priamku tejto roviny (ekvivalentne, ak zúženie na ľubovoľný zväzok priamok) je projektívnosť, sa nazýva **projektívna kolineácia.**

Príklad. Každá stredová kolineácia (homológia, či elácia) desargovskej roviny je projektívnou kolineáciou, navyše v rozšírenej euklidovskej rovine je každá kolineácia už projektívnou kolineáciou.

Štvorrohom nazývame štyri body A, B, C, D (vrcholy štvorrohu), z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne, spolu so 6 priamkami (AB, AC, AD, BC, BD, CD – strany štvorrohu), ktoré tieto body určujú. Označujeme ho pomocou jeho vrcholov – štvorroh $ABCD$.

Veta 5.20 (o určenosti projektívnych kolineácií).

Nech $ABCD$ a $A'B'C'D'$ sú dva štvorrohy v projektívnej rovine $\boldsymbol{P}$.

a) Nech $\boldsymbol{P}$ je desargovská rovina. Potom existuje taká projektívna kolineácia $\mathcal{K}$, že $\mathcal{K}(A) = A'$, $\mathcal{K}(B) = B'$, $\mathcal{K}(C) = C'$, $\mathcal{K}(D) = D'$.

b) Ak $\boldsymbol{P}$ je pappovská rovina, projektívna kolineácia z bodu a) je jediná.

Dôkaz. a) Pretože zloženie stredových kolineácií je projektívnou kolineáciou, budeme konštruovať stredové kolineácie (ich existencia v desargovskej rovine je zaručená, pozri časť 5.1 *Kolineácie*), ktorých zložením bude hladaná projektívna kolineácia.

1.krok: Zostrojíme stredovú kolineáciu $\mathcal{K}_1$, ktorej stred bude na priamke AA', os nebude prechádzať žiadnym z bodov A, A' a ktorá zobrazí bod A do bodu A'. Ak sú na priamke len tri body, musí to byť elácia, pre ostatné roviny to môže byť aj homológia. Nech obraz bodu B je $B_1 = \mathcal{K}_1(B)$.

2. krok: Zostrojíme druhú stredovú kolineáciu $\mathcal{K}_2$, ktorej stred bude na priamke B_1B'. Pretože bod $A_1 = A'$ je už „na mieste", os $\mathcal{K}_2$ pôjde bodom A' a bod B_1 necháme zobraziť do B' (už dva body „sú na mieste", skúsime nimi už nehýbať).

3. krok: Os tretej stredovej kolineácia $\mathcal{K}_3$ bude určená bodmi A', B', ostanú teda samodružné v tomto kroku; stred dáme tak, aby bolo možné bod $C_2 = \mathcal{K}_2(\mathcal{K}_1(C))$ zobraziť do bodu C'.

4. a 5. krok slúžia na to, aby sa aj bod D dostal po týchto krokoch do bodu D'. Stredové kolineácie $\mathcal{K}_4$, $\mathcal{K}_5$ zvolíme tak, aby jeden z bodov A', B', C' bol stredom a ďalšie dva určovali os príslušnej stredovej kolineácie, tu už nutne homológie.

Zložením týchto zobrazení dostaneme, čo sme chceli, projektívnu kolineáciu, zobrazujúcu body A, B, C, D do bodov A', B', C', D' (v tomto poradí).

b) Ak existujú takéto zobrazenia dve $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$, tak skúmame zobrazenie $\mathcal{F} = \mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{G}$, ktoré je opäť projektívnou kolineáciou. Pretože zúženie projektívnej kolineácie $\mathcal{F}$ v pappovskej rovine na priamku AB má tri samodružné body: A, B a bod $AB \cap CD$, obdobne je to so zúžením na priamku CD, je toto zúženie na priamku AB (analogicky na priamku CD) identitou podľa výroku ekvivalentného s Pappovou vetou (a so základnou vetou).
Projektívna kolineácia $\mathcal{F}$ má priamku AB za os, priamku CD tiež, a pretože má dve rôzne osi, je identitou. Z toho už vyplýva, že $\mathcal{G} = \mathcal{H}$.

Príklady a úlohy 5.20a Pretože rozšírená euklidovská rovina $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ je pappovská, projektívne kolineácie roviny $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ sú určené vrcholmi štvorrohu a jeho obrazmi. Pozri k tomu aj obr. 5.7.

a) Nech A, B, C, D sú vrcholy štvorca v euklidovskej rovine, nech $A' = B$, $B' = C$, $C' = D$ a $D' = A$. V rozšírenej euklidovskej rovine je podľa predchádzajúcej vety týmito bodmi definovaná jediná projektívna kolineácia $\mathcal{K}_1$, ktorá zobrazí body A, B, C, D po poriadku na body A', B', C', D'. Je $\mathcal{K}_1$ stredovou kolineáciou? Čo je jej zúžením na euklidovskú rovinu?

b) Nech A, B, C, D sú opäť vrcholy štvorca v euklidovskej rovine, nech $A' = C$, $B' = D$, $C' = A$, $D' = B$. Nech $\mathcal{K}_2$ je projektívna kolineácia v rozšírenej euklidovskej rovine, ktorá zobrazí body A, B, C, D po rade na body A', B', C', D'. Je $\mathcal{K}_2$ stredovou kolineáciou? Čo je jej zúžením na euklidovskú rovinu?

5.4 Kolineácie; Pappov a Desargov výrok

Teraz uvedieme dve zaujímavé navzájom obrátené vety, pre lepšie porovnanie ich znenia ich uvedieme ako dve formulácie jednej vety.

Veta 5.21. Nech $\boldsymbol{P}$ je desargovská rovina.

a) Nech S je bod, o priamka neincidujúca s bodom S. Nech v $\boldsymbol{P}$ platí Pappov výrok. Potom grupa homológií s osou o a stredom S je komutatívna.

b) Nech pre každú voľbu bodu S, priamky o, $S \notin o$, je grupa homológií so stredom S a osou o komutatívna. Potom v rovine $\boldsymbol{P}$ platí Pappov výrok.

Dôsledok. V desargovskej (projektívnej) rovine sú nasledujúce výroky ekvivalentné:

a) Pappov výrok

b) Pre každú voľbu bodu S a priamky o, $S \notin o$, je grupa homológií so stredom S a osou o komutatívna.

Dôkaz vety 5.21. (Obr. 5.5)

a) Nech S je bod, o priamka neincidujúca s bodom S. Nech v desargovskej rovine $\boldsymbol{P}$ platí Pappov výrok. Podľa vety 5.6 (o určenosti homológií v desargovskej rovine $\boldsymbol{P}$) existuje pre každú dvojicu bodov A, A' kolineárnu s bodom S jediná homológia, zobrazujúca A na A'. Je jasné, že tieto homológie tvoria grupu. Treba dokázať, že ak vezmeme dve takéto homológie $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, platí $\mathcal{G} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$.

Nech $\mathcal{G}$ je homológia zobrazujúca A na A' a B na B', $\mathcal{H}$ homológia zobrazujúca A' na A'' a B' na B''. Potom priamky AB, $A'B'$ a $A''B''$ sa pretínajú na osi o v bode P.

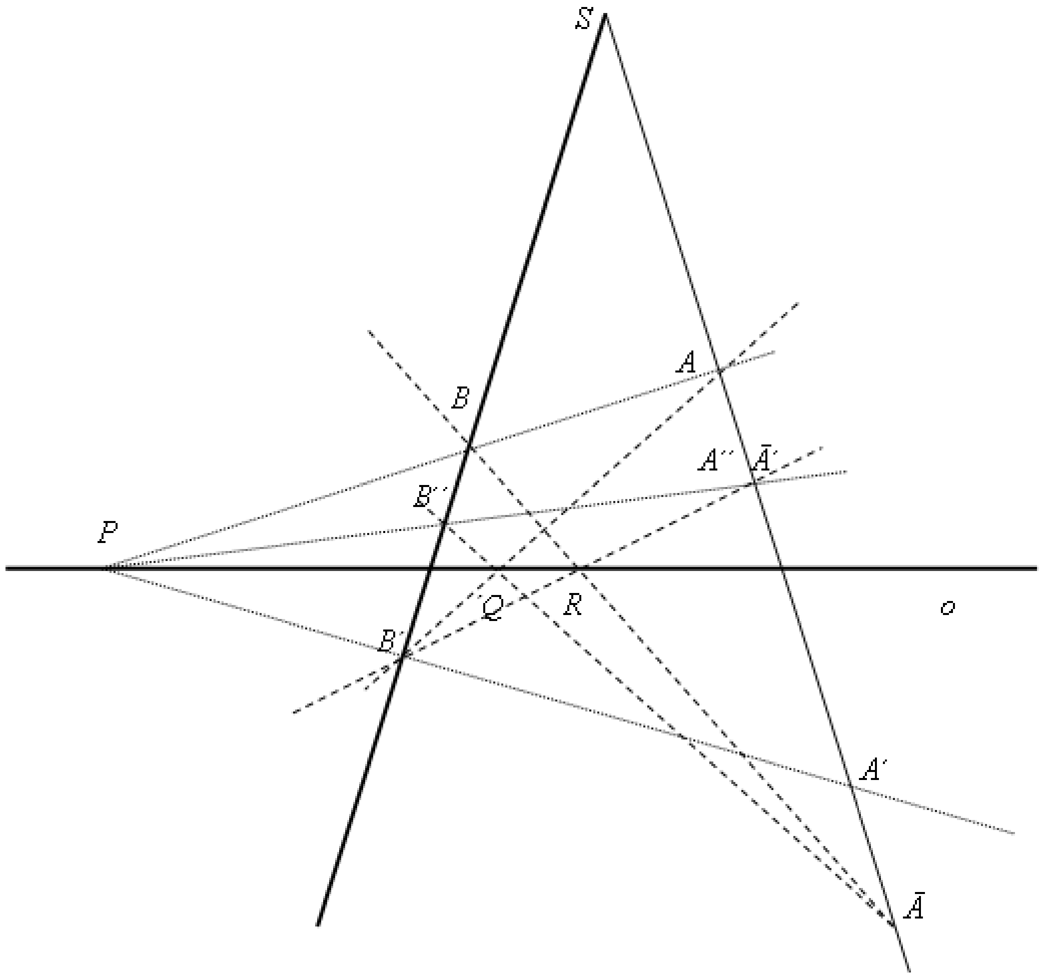
Nech $\mathcal{H}$ zobrazuje bod A na bod $\bar{A}$, potom priamky AB' a $\bar{A}B''$ sa pretínajú na osi o homológie v bode Q. Nech homológia $\mathcal{G}$ zobrazí bod $\bar{A}$ na $\bar{A}'$. Potom $\bar{A}B$ sa pretína s $\bar{A}'B'$ v bode R osi o.

Teraz použijeme Pappovu vetu na trojice kolineárnych bodov B, B', B'' a Q, P, R. Potom body $BP \cap B'Q = A$, $BR \cap B''Q = \bar{A}$, $B'R \cap B''P = W$ sú kolineárne.

Pretože $\bar{A}B \cap \bar{A}'B' = R$, sú body B', R a W kolineárne.

Z toho vyplýva, že $W = B'R \cap A\bar{A} \cap B''A'' = \bar{A}'$ a $\bar{A}' = A''$.

Platí teda $\mathcal{G} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$; dané homológie komutujú.



Obr. 5.5

b) Nech sú splnené predpoklady vety 5.21, časť b). (Pozri obr. 5.6.)

Nech K, L, M sú po dvojiciach rôzne body priamky p a K', L', M' po dvojiciach rôzne body priamky q, všetky rôzne od spoločného bodu priamok p, q. Chceme dokázať, že body $KL' \cap K'L$, $KM' \cap K'M$, a $M'L \cap ML'$ sú kolineárne.

Nech $A = KL' \cap K'L$, $\bar{A} = KM' \cap K'M$, $S = A\bar{A} \cap p$. To značí, že trojice bodov A, K, L', ako aj A, K', L sú kolineárne, obdobne trojica $\bar{A}$, K, M' a trojica $\bar{A}$, K', M, ale aj trojica bodov S, A, $\bar{A}$.

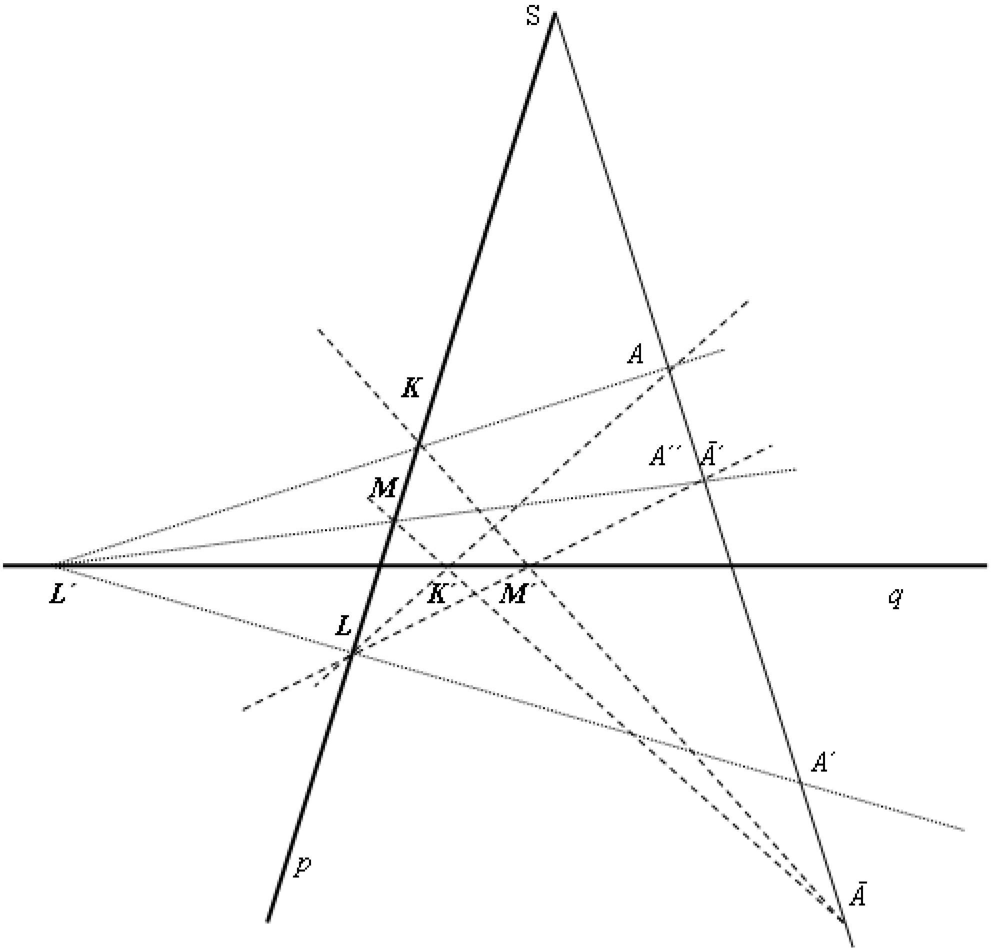
Nech $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sú homológie so stredom $S = A\bar{A} \cap p$, osou $o = q$, pričom homológia $\mathcal{H}_1$ zobrazuje bod K do bodu L, $\mathcal{H}_1(K) = L$, a $\mathcal{H}_2$ bod L do bodu M, $\mathcal{H}_2(L) = M$. Tým sú tieto zobrazenia jednoznačne (v danej desargovskej rovine) určené.

Skúmajme, kam sa zobrazí bod A v zobrazeniach $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ resp. $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$, t. j. hľadajme body $\mathcal{H}_2(\mathcal{H}_1(A))$, resp. $\mathcal{H}_1(\mathcal{H}_2(A))$.

Označme $(\mathcal{H}_1(A) = A' = [(AK \cap q) \cup L] \cap SA = L'L \cap SA$, a

$$(\mathcal{H}_2(A') = A'' = [(A'L \cap q) \cup M] \cap SA = L'M \cap SA.$$

Ďalej platí $\mathcal{H}_2(A) = \bar{A} = [(AL \cap q) \cup M] \cap SA$, lebo $AL \cap q = K'$ a $K'M \cap SA = \bar{A}$. Označme $\mathcal{H}_1(\bar{A}) = \bar{A}'$. Potom $\bar{A}' = LM' \cap SA$, lebo $K\bar{A} \cap q = M'$.



Obr. 5.6

Podľa predpokladov vety (grupa je komutatívna) je $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$, z čoho máme

$A'' = \mathcal{H}_2(\mathcal{H}_1(A)) = \mathcal{H}_1(\mathcal{H}_2(A)) = \bar{A}'$, teda $ML' \cap SA = LM' \cap SA$.

Pretože priamky LM' a ML' sa pretínajú na priamke $SA = A\bar{A}$, body $A = KL' \cap K'L$, $\bar{A} = KM' \cap K'M$, $A'' = M'L \cap ML'$ sú kolineárne, čo bolo treba dokázať.

Poznámka (či skôr pomôcka). To ako sa zobrazujú body, sa dá dobre sledovať pomocou nasledovnej tabuľky.

	$\mathcal{H}_1$		$\mathcal{H}_2$	
K	$\mapsto$	L	$\mapsto$	M
L'	$\mapsto$	L'	$\mapsto$	L'
M'	$\mapsto$	M'	$\mapsto$	M'
KL'	$\mapsto$	LL'	$\mapsto$	ML'
SA	$\mapsto$	SA	$\mapsto$	SA
A	$\mapsto$	A'	$\mapsto$	A''
$\bar{A}$	$\mapsto$	$\bar{A}'$		
		A	$\mapsto$	$\bar{A}$

Dôsledok. Ak teda Pappov výrok v desargovskej rovine neplatí, vyššie uvedená grupa homológií nie je komutatívna.

Záverom si pripomeňme nasledovné tvrdenie:

Veta 5.9. V projektívnej rovine sú nasledujúce dva výroky ekvivalentné:

c) Desargov výrok.

d) Pre každú trojicu S, A, A' troch rôznych kolineárnych bodov a priamku o neprechádzajúcu žiadnym z daných bodov existuje (aspoň jedna) homológia $\mathcal{H}$ tak, že bod S je jej stred, priamka o jej os a $A' = \mathcal{H}(A)$.

Poznámka. V časti 4 sme uviedli Hessenbergovu vetu (veta 4.7) : V projektívnej rovine Pappov výrok implikuje Desargov výrok. **Pappov výrok je teda „silnejší“ než Desargov výrok**. Na základe vyššie uvedených tvrdení práve vlastnosťou, že spomínaná grupa homológií je komutatívna, čo platnosť Desargovho výroku nezaručuje.

5.4a Poznámka – dvojpomer jako projektívny invariant

Javí sa nám dôležité aspoň stručne spomenúť jeden dôležitý pojem – *dvojpomer*. Nasledovné úvahy budú vychádzať z pojmov euklidovskej roviny, neskôr sa budú naše úvahy týkať bodov a priamok rozšírenej euklidovskej roviny.

Rovnobežné premietanie síce nezobrazí úsečku do úsečky zhodnej s pôvodnou úsečkou, ale zachová pomer veľkostí dvoch úsečiek. Pretože vnútorné body úsečky zobrazí do vnútorných bodov obrazu úsečky, rovnobežné premietanie zachováva *deliaci pomer* troch rôznych kolineárnych bodov A, B, C euklidovskej roviny (za predpokladu, že smer premietania nie je rovnobežný s priamkou určenou bodmi AB).

Pripomeňme, že číslo $\lambda(ABC)$ nazývame *deliacim pomerom* bodov A, B, C (v tomto poradí) alebo deliacim pomerom bodu C vzhľadom na základné body $A, B,$ ak pre vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BC}$ platí: $\overrightarrow{AC} = \lambda(ABC) . \overrightarrow{BC}$ (Niekedy deliaci pomer $\lambda(ABC)$ označujeme aj symbolom (ABC).)

Dôsledok (Závislosť deliaceho pomeru od poradia bodov)**.**
Nech $(ABC) = \lambda$. Potom $(BAC) = \lambda^{-1}$, $(ACB) = 1-\lambda$, $(BCA) = (\lambda-1).\lambda^{-1}$, $(CAB) = (1-\lambda)^{-1}$, $(CBA) = \lambda.(\lambda-1)^{-1}$.

Stredové premietanie bodov priamky m do bodov priamky m' vo všeobecnosti nezachováva deliaci pomer (keď priamky m, m' nie sú – v $\boldsymbol{E}_2$ – rovnobežné), napríklad stred úsečky sa nezobrazí do stredu obrazu tejto úsečky. Ukážeme, že aj keď sa pri stredovom premietaní nezachováva pomer veľkostí úsečiek, zachováva sa pomer istých deliacich pomerov.

Definícia 5.10. Nech A, B, C, D sú štyri rôzne vlastné body rozšírenej euklidovskej roviny. *Dvojpomerom* štvorice bodov A, B, C, D (v tomto poradí) nazývame číslo $\delta = \dfrac{\lambda(ABC)}{\lambda(ABD)}$.

V ďalšom texte budeme používať označenie $\delta = (ABCD)$. Ako vidieť z nasledovného tvrdenia, dvojpomer štvorice bodov závisí od poradia bodov v danej štvorici.

Veta 5.11. Nech $\delta = (ABCD)$ je dvojpomerom štvorice bodov A, B, C, D. Potom platí:

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = \delta\ ,\ (BACD) = \frac{1}{\delta},\ (ACBD) = 1 - \delta,$$

$$(ADBC) = 1 - \frac{1}{\delta} = \frac{\delta - 1}{\delta},\ (ACDB) = \frac{1}{1-\delta},\ (ADCB) = \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Veta 5.12. Nech *A, B, C* sú tri rôzne kolineárne body a δ je reálne číslo rôzne od 0 a $\lambda(ABC)$. Potom existuje jediný bod D_δ, pre ktorý $(ABCD_\delta) = \delta$.

Dôsledok 5.13. Ak $(ABCD_1) = (ABCD_2)$, tak $D_1 = D_2$.

Dvojpomer $(ABCD)$ štvorice bodov *A, B, C, D* je kladný, ak sa dvojice bodov *A, B* a *C, D* neoddeľujú; dvojpomer $(ABCD)$ je záporné číslo, ak sa dvojice bodov *A, B* a *C, D* oddeľujú.

Veta 5.14. Nech *A, B, C, D* sú štyri rôzne vlastné kolineárne body rozšírenej euklidovskej roviny, S vlastný bod neležiaci na priamke *AB*. Potom

$$|(ABCD)| = \frac{\sin\angle(a,c).\sin\angle(b,d)}{\sin\angle(a,d).\sin\angle(b,c)} \qquad (*)$$

kde *a = SA, b = SB, c = SC, d = SD* sú priamky určené bodom *S* a bodmi *A, B, C, D*.

Dôsledok 5.15. Nech *A, B, C, D* sú štyri rôzne vlastné body priamky *p, A´, B´, C´, D´* sú štyri rôzne vlastné body priamky *p´*, *S* je vlastný bod, ktorým prechádzajú priamky *AA´*, *BB´*, *CC´* a *DD´*. Potom platí $|(ABCD)| = |(A'B'C'D')|$.

Poznámka. Predchádzajúci dôsledok platí, aj keď je bod *S* nevlastným bodom roviny, aj keď nie ako dôsledok predchádzajúcej vety. Rozšírime naše úvahy aj na štvorice bodov, z ktorých jeden je nevlastný. Pretože limita deliaceho pomeru bodov *A, B, D* pre bod *D* limitne sa „blížiaci“ k nevlastnému bodu U_∞ priamky *AB* sa rovná 1, môžme rozšíriť definíciu deliaceho pomeru aj pre takúto trojicu bodov: $(ABU_\infty) = 1$. Dostaneme tak vyjadrenie dvojpomeru $(ABCU_\infty) = (ABC)$. Ak je C = S stredom úsečky AB, tak $(ABSU_\infty) = -1$.

Pretože body *A´, B´, C´, D´* sú obrazmi bodov *A, B, C, D* v perspektívnosti so stredom *S* , perspektívnosti zachovávajú oddeľovanie sa dvojíc bodov a zložením perspektívností dostaneme projektívnosť, platí nasledovné tvrdenie.

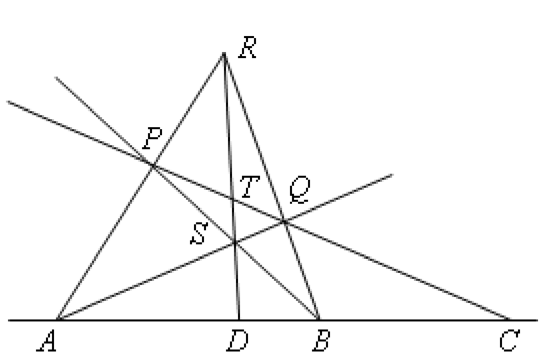
Veta 5.16. Každá projektívnosť zachováva dvojpomer štvoríc bodov.

Dá sa dokázať, že dvojpomer je vlastnosť charakterizujúca projektívne zobrazenia:

Veta 5.17. Nech π je (bijektívne) zobrazenie z množiny bodov priamky *p* do množiny bodov priamky *p´*, ktoré zachováva dvojpomer štvoríc bodov. Potom π je projektívnosť.

Zobrazenie **π je teda projektívnosť práve vtedy, keď zachováva dvojpomer**. Hovoríme, že dvojpomer je *projektívnym invariantom*.

Definícia. Štvoricu *A, B, C, D* rôznych kolineárnych bodov nazveme *harmonickou štvoricou*, ak existujú také body *P, Q*, ktoré neležia na priamke *AB*, pričom priamka *PQ* prechádza bodom *C* a bod *D* je priesečníkom priamok *AB* a *RS,* kde R = $AP \cap BQ$ a $S = AQ \cap BP$. (pozri obr. 5.7)



Obr. 5.7 Harmonická štvorica bodov

Veta. Štvorica *A, B, C, D* rôznych kolineárnych bodov je harmonickou štvoricou bodov práve vtedy, keď jej dvojpomer sa rovná číslu –1, $(ABCD) = -1$.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že projektívne zobrazenia zachovávajú (aj) harmonické štvorice (bodov a priamok).

Vyššie spomenuté pojmy a tvrdenia o bodoch sa ľahko preformulujú do tvrdení o priamkach patriacich jednému zväzku. K dualizácii vyššie uvedených pojmov a tvrdení ako aj k ich dôkazom pozri napr. [Hav56], [Sol95] alebo [Šed87].

5.5 Rovnice kolineácie v rozšírenej euklidovskej rovine

V rozšírenej euklidovskej rovine $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ nech je daná súradnicová sústava viazaná na pevne zvolenú súradnicovú sústavu pôvodnej Euklidovej roviny. Pôvodné nehomogénne súradnice [*x*, *y*] a homogénne súradnice (x_0, x_1, x_2) vlastných bodov sú viazané vzťahom $x = x_1 x_0^{-1}$, $y = x_2 x_0^{-1}$. (Pozri k tomu časť 1.4.) Rovnica nevlastnej priamky u_∞ je $x_0 = 0$, rovnica priamky určenej dvoma bodmi $P = (p_0, p_1, p_2)$, $Q = (q_0, q_1, q_2)$ je

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} x_0 - \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ q_0 & q_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} x_2 = 0 . \tag{1}$$

Súradnice nevlastného bodu priamky *m*: $m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$ sú $(0, -m_2, m_1)$.

Body $P = (p_0, p_1, p_2)$, $Q = (q_0, q_1, q_2)$, $R = (r_0, r_1, r_2)$ **sú kolineárne** práve vtedy, keď determinant matice utvorenej z ich súradníc sa rovná nule :

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{2}$$

Poznámka. K rovnici (1) ako aj k podmienke (2) sa možno dopracovať nasledovnými úvahami: Ak majú body *P*, *Q* ležať na priamke danej rovnicou $m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$, musia ich súradnice vyhovovať rovnici priamky, ktorej homogénne súradnice sú (m_0, m_1, m_2). Riešime teda sústavu rovníc

$$\begin{aligned} m_0 p_0 + m_1 p_1 + m_2 p_2 &= 0 \\ m_0 q_0 + m_1 q_1 + m_2 q_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

pre neznáme m_0, m_1, m_2. Táto sústava má nenulové riešenie práve vtedy, ak matica

$$\mathrm{M}(P,Q) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

utvorená zo súradníc bodov *P*, *Q* má hodnosť 2, t. j. keď aspoň jeden z determinantov 2.stupňa matice M(*P*,*Q*) je rôzny od nuly. Určitou úpravou Cramerovej vety pre riešenie sústavy lineárnych rovníc dostaneme riešenie

$$(m_0, m_1, m_2) = \left(\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_2 & p_0 \\ q_2 & q_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} \right).$$

Aby body *P*, *Q*, *R* ležali na jednej priamke, t. j. aby taká priamka existovala, musí existovať nenulový koreň sústavy rovníc

$$m_0 p_0 + m_1 p_1 + m_2 p_2 = 0$$
$$m_0 q_0 + m_1 q_1 + m_2 q_2 = 0 \qquad (4)$$
$$m_0 r_0 + m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$$

Ak by determinant tejto sústavy lineárnych rovníc bol rôzny od nuly, existovalo by jediné riešenie, a to je pri homogénnom systéme rovníc riešenie (0,0,0). Táto trojica však neurčuje priamku. (Vyhovoval by jej každý bod roviny.) Sústava musí byť teda lineárne závislá, jej determinant sa musí rovnať nule.

Nech C = (c_{ij}) je regulárna matica stupňa 3. Pre body roviny $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ definujeme zobrazenie T_c , ktoré bude „pracovať" nie priamo na bodoch , ale na ich súradniciach: T_c (P) = Q, ak

$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

kde matica (c_{ij}) je regulárna matica.

Budeme teda skúmať zobrazenie, ktoré bude zobrazovať trojice reálnych čísel na trojice reálnych čísel, teda zobrazenie T_c : R x R x R $\rightarrow$ R x R x R , definované rovnosťou (*) .

Zobrazenie T_c má nasledovné vlastnosti

a) Ak $(p_0, p_1, p_2) \neq (0{,}0{,}0)$, tak $T_c(p_0, p_1, p_2) = (q_0, q_1, q_2) \neq (0{,}0{,}0)$

b) $T_c(\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2) = (\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2) = \lambda(q_0, q_1, q_2)$, t. j. ak $P = (p_0, p_1, p_2)$, $Q = (q_0, q_1, q_2)$, tak trojici homogénnych súradníc bodu P priradí trojicu homogénnych súradníc bodu istého bodu Q,

c) Lineárnu kombináciu usporiadaných trojíc zobrazí opäť na ich lineárnu kombináciu, t. j. trojicu (m_0, m_1, m_2) homogénnych súradníc bodu M priamky AB (pričom $A = (a_0, a_1, a_2)$, $B = (b_0, b_1, b_2)$) zobrazí na trojicu $(m_0^{'}, m_1^{'}, m_2^{'})$ reprezentujúcu homogénne súradnice bodu M' priamky určenej bodmi s homogénnymi súradnicami $T_c(a_0, a_1, a_2) = (a_0^{'}, a_1^{'}, a_2^{'})$, $T_c(b_0, b_1, b_2) = (b_0^{'}, b_1^{'}, b_2^{'})$, t. j. ak platí (m_0, m_1, m_2) = $\lambda_0(a_0, a_1, a_2) + \lambda_1(b_0, b_1, b_2)$, tak $\rho(m_0^{'}, m_1^{'}, m_2^{'}) = \lambda_0(a_0^{'}, a_1^{'}, a_2^{'}) + \lambda_1(b_0^{'}, b_1^{'}, b_2^{'})$ pre nenulové číslo ρ .

Hovoríme, že **zobrazenie T_c je analytickým vyjadrením kolineácie** a daná **kolineácia je určená maticou (c_{ij}).**

Poznámky. 1. Lineárna transformácia (kolineácia) $\mathcal{K}$ roviny $\overline{\boldsymbol{E}_2}$ je teda určená regulárnou maticou (c_{ij})=: ($\mathcal{K}$) (maticou zobrazenia $\mathcal{K}$), maticová rovnica zobrazenia je

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$ alebo skrátene $(x')^T$ = (c_{ij}) $(x)^T$, kde

$(x)^T$, $(x')^T$ sú matice transponované k maticiam $(x) = (x_0, x_1, x_2)$, $(x') = (x'_0, x'_1, x'_2)$.

2. Dve matice (b_{ij}), (c_{ij}) určujú tú istú kolineáciu práve vtedy, ak $(b_{ij}) = \lambda(c_{ij})$, $\lambda \neq 0$.

3. Matica kolineácie $\mathcal{K}^{-1}$ je $(d_{ij}) = (c_{ij})^{-1}$.

4. Matica identickej kolineácie je $\lambda \boldsymbol{I}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matica typu 3 x 3.

Príklady a úlohy

Príklady a úlohy budeme riešiť v rozšírenej euklidovskej rovine.

Napríklad, ak sú dané body *A*, *B*, *C*, *D*, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne a ich karteziánske (nehomogénne) súradnice sú *A*[0, –1], *B* [1, 0], *C* [0, 1], *D* [–1, 0], ich homogénne súradnice sú *A*(1, 0, –1), *B*(1, 1, 0), *C*(1, 0, 1), *D*(1, –1, 0). Nevlastný bod U_∞^x osi *x* má homogénne súradnice (0, 1, 0) a nevlastný bod U_∞^y osi *y* súradnice (0, 0, 1).

Tieto (a ďalšie) body môžme použiť na určenie projektívnej kolineácie podľa vety 5.20 (veta o určenosti projektívnych kolineácií), pozri aj príklady a úlohy 5.20a v závere časti 5.3.

Príklad 5.1. Nájdite maticu ($\mathcal{K}$) kolineácie $\mathcal{K}$, ktorá body s homogénnymi súradnicami (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) a (1, 1, 1) zobrazí po rade na body (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 2) a (4, 5, 4).

Riešenie. Rovnice (a teda aj maticu) kolineácie $\mathcal{K}$ budeme poznať, ak vypočítame koeficienty c_{ij} matice C = ($\mathcal{K}$) zobrazenia $\mathcal{K}$. Zo zadania vyplýva, že existujú nenulové reálne čísla λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 tak, že

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

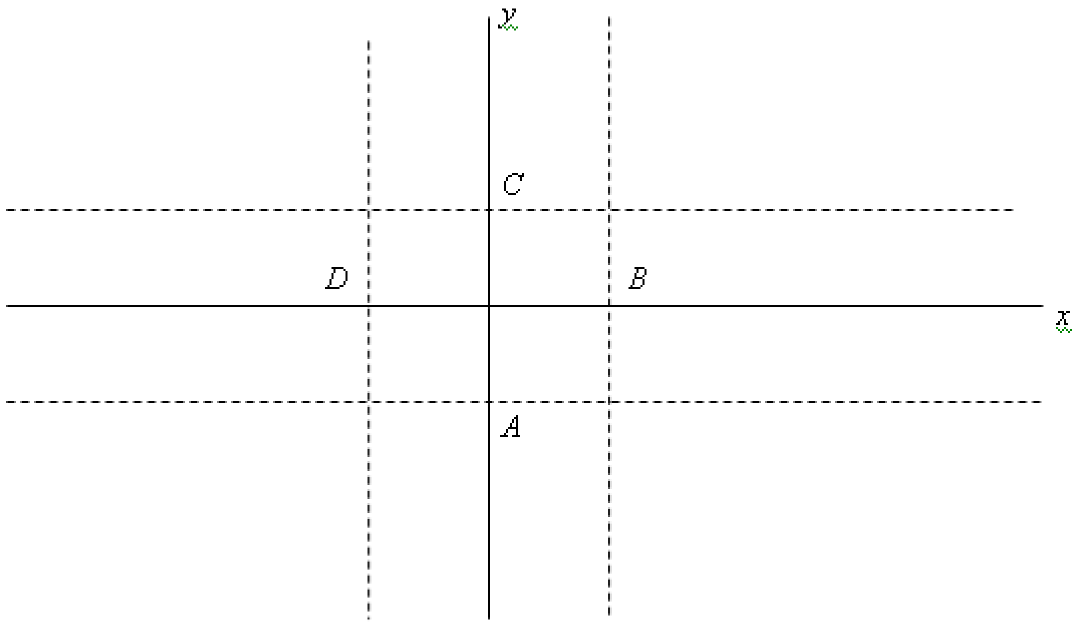
Z týchto štyroch maticových rovníc dostaneme 12 homogénnych lineárnych rovníc s 13 neznámymi c_{ij} a λ_s. Nenulové riešenie za daných predpokladov existuje a každé iné je jeho násobkom.

Po krátkom výpočte sa dá ukázať, že $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ a matica kolineácie má tvar

$$(\mathcal{K}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5.2. Dané sú (po troch nekolineárne) body *A*, *B*, *C*, *D*, ktorých homogénne súradnice sú *A* = (1, 0, –1), *B* = (1, 1, 0), *C* = (1, 0, 1), *D* = (1, –1, 0).
Nájdite rovnice kolineácie, ktorá zobrazí bod *A* na bod *B*, *B* na *C*, *C* na D a *D* na *A*.

(Po vypočítaní porovnajte s obr.5.7 a zistite, čo zúžením tejto kolineácie na $\boldsymbol{E}_2$.)



Obr. 5.7

Príklad 5.3. Daná je kolineácia $\mathcal{K}$ svojou maticou ($\mathcal{K}$), ($\mathcal{K}$) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nájdite samodružné body zobrazenia $\mathcal{K}$.

Riešenie. Ak $X = (x_0, x_1, x_2)$ je samodružný bod, jeho súradnice spĺňajú maticovú rovnicu

$$\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

alebo sústavu lineárnych rovníc $\lambda x_0 = x_0$, $\lambda x_1 = -x_2$, $\lambda x_2 = x_1$.

Matica tejto sústavy rovníc je $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ a sústava má nenulový koreň, ak jej determinant $D = 0$. Z toho dostaneme $D = (\lambda^2 + 1)(1 - \lambda) = 0$.

Po dosadení jediného (reálneho) riešenia $\lambda = 1$ do vyššie uvedenej sústavy rovníc dostaneme $x_0 = x_0$, $x_1 = -x_2$, $x_2 = x_1$. Z toho vyplýva $x_2 = x_1 = 0$ a x_0 je ľubovoľné. Riešením je trojica (1, 0, 0) a všetky jej nenulové násobky, teda bod s homogénnymi súradnicami (1, 0, 0).

Úloha 5.4. Nech *A*, *B*, *C*, *D* sú body z úlohy 5.2. Nájdite rovnice kolineácie, ktorá zobrazí bod *A* na bod *C*, *B* na *D*, *C* na *A* a *D* na *B*.
(Po vypočítaní porovnajte s obr.5.7 a zistite, čo je zúžením tejto kolineácie na $\boldsymbol{E}_2$.)

Úloha 5.5. Nech *A*, *B*, *C*, *D* sú body z úlohy 5.2. Nájdite rovnice kolineácie, ktorá zobrazí bod *A* na bod *C*, *C* na *A* a body *B* a *D* sú samodružnými bodmi tejto kolineácie.
(Po vypočítaní porovnajte s obr.5.7 a zistite, čo je zúžením tejto kolineácie na $\boldsymbol{E}_2$.)

Úloha 5.6. Nech A, B sú body z úlohy 5.2. Nájdite rovnice kolineácie, ktorá zobrazí bod A na bod $A' = (1, 0, -2)$, B na $B' = (1,1, -1)$, a pre ktorú nevlastné body U_∞^x a U_∞^y osí x a y sú samodružnými bodmi.
Zistite tiež, čo je zúžením tejto kolineácie na $\boldsymbol{E}_2$.

Úloha 5.7. Nech A, B sú body z úlohy 5.2 , U_∞^x a U_∞^y nevlastné body osí x a y.

a) Nájdite rovnice kolineácie, ktorá zobrazí bod A na bod B, B na A, bod U_∞^x na U_∞^y a bod U_∞^y na U_∞^x.

b) Nájdite samodružné body tejto kolineácie.

c) Zistite, čo je zúžením tejto kolineácie na $\boldsymbol{E}_2$.

Literatúra k časti 5

[Bla74] Blattner, J.: *Projective Plane Geometry*. Holden-Day, Inc. San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 1974

[Har67] Hartshorne, R.: *Foundations of projective geometry*. Lecture notes Harvard University. W. A. Benjamin Inc., New York 1967 (ruský preklad: Izdateľstvo Mir, Moskva 1970)

[Hav56] Havlíček, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, ČNTL, Praha 1956

[Sol95] Solčan, Š.: *Projektívna geometria*. 2. vyd. Vydavateľstvo UK, Bratislava 1995

[Šed87] Šedivý O. a kol.: *Geometria* 2. SPN Bratislava 1987

Literatúra a odkazy na internet

[Berg87] Berger M.: *Geometrie* I, II. Editions Nathan, Paris 1977, angl. preklad Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987

[BR98] Beutelspacher, A., Rosenbaum, U. : *Projective Geometry: from foundations to applications*. Cambridge University Press 1998.
Dostupné na http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/beutel.pdf

[Bla74] Blattner, J.: *Projective Plane Geometry*. Holden-Day, Inc. San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 1974

[BK53] Buseman H., Kelly P. J.: *Projective geometry and projective metrics*. Academic Press Inc., Publishers New York 1953 (ruský preklad Moskva 1957)

[Cox89] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry*. J. Wiley, 2nd edition, London 1989

[Čet53] Četveruchin, N. F.: *Projektivnaja geometrija*. Vyd.Učpedgiz, Moskva 1953.

[Dem68] Dembowski, P.: *Finite Geometries*. Springer-Verlag, Berlin 1968

[GH73] Gatial, Hejný: *Stavba planimetrie*. SPN, Bratislava 1973

[Gur60] Gurevič, G.B.: *Projektivnaja geometrija*. Gosudarstvennoje izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva 1960

[Har67] Hartshorne, R.: *Foundations of projective geometry*. Lecture notes Harvard University. W. A. Banjamin Inc., New York 1967 (ruský preklad: Izdateľstvo Mir, Moskva 1970)

[Hav56] Havlíček, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, ČNTL, Praha 1956

[Hej89] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky* I, II. SPN Bratislava, 1989

[Hla49] Hlavatý, V.: *Úvod do neeuklidovské geometrie*. JČMF, Praha 1949.

[Kar76] Karteszi, F.: *Introduction to Finite Geometries*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1976

[Kat85] Katriňák, T. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika* 1. ALFA, Bratislava 1985

[Katě46] Katětov, M.*: Jaká je logická výstavba matematiky? (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1946. pp. 85–95. (8. Axiomy)
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403140*

[OKe93] O'Keefe, Christine M. : *Applications of finite geometries to information security.* Australasian J. Combinatorics 7, 1993, 195-212
Dostupné na http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/7/ocr-ajc-v7-p195.pdf

[PR05] Parhami, B., Rakov, M.: *Perfect Difference Networks and Related Interconnection Structures for Parallel and Distributed Systems*. Journal IEEE Transaction and Parallel and Distributed Systems, Vol.16, Issue 8, August 2005

[Pij85] Piják, V. a kol.: *Konštrukčná geometria*. SPN, Bratislava 1985

[ScS15] Scriba, Christoph J., Schreiber, P.: 5000 Years of geometry. Mathematics in history and culture. Springer 2015

[SČ02] Sklenáriková, Z., Čižmár J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Vydavateľstvo UK Bratislava 2002.

[Sol95] Solčan, Š.: *Projektívna geometria*. 2. vyd. Vydavateľstvo UK, Bratislava 1995

[Sol11a] Solčan, Š. : *O kolineárnosti bodov a zbiehavosti (konkurentnosti) priamok*. Acta Mathematica 14, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2011. S. 3-18

[Sol11b] Solčan, Š. : *O Pappovom dôkaze Pappovej vety*. Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG' 2011, Vol. 20, Bratislava : Slovenská technická univerzita, 2011. S. 111-117

[Str54] Struik, Dirk J.: *A Concise History of Mathematics*. G. Bell & Sons Ltd. 1954

[Šal78] Šalát, T. a kol.: *Malá encyklopédia matematiky*. Obzor, Bratislava, 1978, str.34-35, 67.

[Šed87] Šedivý O. a kol.: *Geometria* 2. SPN Bratislava 1987

[Vyš59] Vyšín, J:. *Soustava axiomů eukleidovské geometrie*. Nakl. ČSAV Praha 1959

[Zlat95] Zlatoš, P.: *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou*. IRIS Bratislava 1995

Niekoľko odkazov na internet (boli uvedené aj v príslušnej časti, ktorej sa týkali):

1. http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fil/fil.html a v rámci neho http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fva/axioma_-_odkazy.html alebo http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fva/axioma-ei.html
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Axiom
3. http://mathworld.wolfram.com/Axiom.html
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Aristotle
5. http://sk.wikipedia.org/wiki/Aristoteles
6. http://www.britannica.com/eb/article-9011480/axiom
7. http://mathworld.wolfram.com/PerfectDifferenceSet.html
8. http://mathworld.wolfram.com/36OfficerProblem.html
9. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Desargues.html
10. http://mathworld.wolfram.com/DesarguesTheorem.html
11. http://www.math.utah.edu/~treiberg/Perspect/Perspect.htm
12. http://www.oxfordreference.com/pages/samplep-17
13. http://www.mathpages.com/home/kmath542/kmath542.htm
14. http://mathworld.wolfram.com/PappussHexagonTheorem.html
15. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Desargues.html
16. http://en.wikipedia.org/wiki/Moulton_plane