

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

**Minkowského priestor a jeho základné
vlastnosti**

Bratislava 2010

Matúš Ždanský

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Minkowského priestor a jeho základné vlastnosti

Bakalárska práca

Študijný odbor: 9.1.1 Matematika

Vedúci bakalárskej práce:
RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Autor:
Matúš Ždanský

Bratislava 2010

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som predloženú bakalársku prácu vypracoval samostatne, s použitím uvedenej literatúry a informačných zdrojov.

Bratislava 31.5.2010

.....

Matuš Ždanský

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za cenné rady a pripomienky.

Názov práce: Minkowského priestor a jeho základné vlastnosti

Pracovisko: Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

Autor: Matúš Ždanský

Vedúci BP: RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Dátum: 31.5.2010

Kľúčové slová: Minkowského priestor, hyperbolická geometria, pseudo-euklidovský priestor, pseudo-euklidovská metrika, Lorentzove transformácie, špeciálna teória relativity.

Abstrakt: Práca sa zaoberá pseudo-euklidovskými priestormi, špeciálne Minkowského priestorom. Je rozdelená na štyri hlavné časti. V prvej časti je zavedený euklidovský priestor, definuje sa na ňom euklidovská metrika a skalárny súčin. Druhá časť rozoberá pseudo-euklidovský priestor, najprv všeobecne, potom jeho špeciálny prípad, Minkowského časopriestor. Je ukázané plynutie času v Minkowského priestore, svetočiary častíc, ako aj vlastný subjektívny čas pohybujúceho sa pozorovateľa v časopriestore. Tretia časť je zameraná na Lorentzove transformácie, ktoré sú základom javov špeciálnej teórie relativity, ako je skracovanie dĺžky, dilatácia času, konštantnosť a maximálnosť rýchlosti svetla a relativita simultánnosti. Štvrtá časť hovorí o geometrii Minkowského priestoru – hyperbolickej geometrii.

Predhovor

V práci sa venujem problematike Minkowského priestoru. Hlavnou úlohou práce je spracovať túto tému, predstaviť ju čitateľovi a prezentovať mu jej základné vlastnosti. Minkowského priestor si najprv matematicky zadefinujeme, ukážeme si jeho vzťah ku euklidovskému priestoru. Ďalej bude ukázaná jeho aplikácia v špeciálnej teórii relativity, čitateľ sa dozvie, že práve Minkowského priestor je tým časopriestorom, ktorý si väčšina ľudí predstaví pri zmienke o relativite. Dokážeme, že takto definovaná štruktúra má skutočne za následok tie všeobecne známe dôsledky teórie relativity, ako napríklad, že rýchlosť svetla je konštantná a najvyššia možná. V nasledujúcej časti si uvedieme hyperbolickú geometriu. Dozvieme sa, že táto geometria sa taktiež odohráva v Minkowského priestore. Cieľom tejto časti bude širší úvod do hyperbolickej geometrie a geometrie samotnej, aby boli čitateľovi objasnené nielen jej základné vlastnosti, ale aj okolnosti jej vzniku a jej vzťah ku euklidovskej geometrii.

Dúfam, že čitateľ v tejto práci nájde to, čo hľadá, a práca preňho bude prínosom.

Obsah

1	Úvod	3
2	Euklidovský priestor, kvadratická forma	4
2.1	Základné pojmy	4
2.2	Riemannova a euklidovská metrika	6
3	Pseudo-euklidovský priestor	8
3.1	Pseudo-riemannovská a pseudo-euklidovská metrika	8
3.2	Minkowského časopriestor	9
3.2.1	Plynutie času	10
3.2.2	Svetočíara častice	12
3.2.3	Vlastný čas	13
4	Lorentzove transformácie	15
4.1	Odvodenie Lorentzových transformácií	15
4.2	Galileiho limita	19
4.3	Skracovanie dĺžky	20
4.4	Dilatácia času	21
4.5	Relativita simultánnosti	22
4.6	Rýchlosť svetla	23
5	Hyperbolická geometria	24
5.1	Axiómy geometrie	24
5.2	História hyperbolickej geometrie	27
5.3	Modely hyperbolického priestoru	28
5.3.1	Kleinov projektívny model	30
5.3.2	Poincarého konformný model	31
5.4	Uhly v hyperbolickej geometrii	32
5.5	Trojuholníková nerovnosť	34

5.6	Obsah a uhlový defekt trojuholníka	35
5.7	Pseudo-sférické súradnice	36
6	Záver	38
	Zoznam použitej literatúry	39

Kapitola 1

Úvod

Minkowského priestor je matematická štruktúra navrhnutá a vytvorená nemeckým matematikom židovského pôvodu, Hermannom Minkowskim. V čase formulovania fyzikálnej teórie relativity na začiatku dvadsiateho storočia bol Hermann Minkowski profesorom na univerzite v nemeckom meste Göttingen. Do roku 1908 bol známy hlavne svojim prínosom do teórie čísel. Počas svojho pôsobenia v Göttingene sa taktiež zaujímal o prácu svojich kolegov, jedným z ktorých bol aj jeho bývalý študent Albert Einstein. Ním motivovaný sa Minkowski začal zaoberať problémom relativity, čoho vyvrcholením bola jeho známa prednáška v Cologni, na ktorej uviedol koncept štvorrozmerného časopriestoru. V tejto prednáške spojil dva dovtedy nezávislé pojmy, čas a priestor, do jednej štruktúry.

„Čas sám osebe a priestor sám osebe sú odsúdené na zánik a jedine ich zjednotenie si môže zachovať nezávislú existenciu.“

Hermann Minkowski, 1908

Cieľom bakalárskej práce je čitateľovi priblížiť túto štruktúru. Minkowského priestor bude porovnaný s klasickým euklidovským priestorom, neskôr na ňom budú ilustrované a matematicky odvodené javy špeciálnej teórie relativity. Podstatná časť bakalárskej práce je taktiež venovaná hyperbolickej geometrii, ktorej matematickým základom je Minkowského priestor.

Kapitola 2

Euklidovský priestor, kvadratická forma

2.1 Základné pojmy

Priestor, na ktorom budeme v tejto kapitole pracovať je n -rozmerný euklidovský vektorový priestor nad poľom reálnych čísel. Označovať ho budeme \mathbb{R}^n (tiež sa označuje ako E^n). Definujeme ho ako:

Definícia 1. *Euklidovský vektorový priestor* je priestor \mathbb{R}^n vektorov x , n -tíc $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, nad poľom reálnych čísel. Na vektorovom priestore máme definovanú binárnu operáciu $+$, *súčet vektorov*, ako ich súčet po zložkách.

$$x + x' = (x^1, \dots, x^n) + (x^{1'}, \dots, x^{n'}) = (x^1 + x^{1'}, \dots, x^n + x^{n'}).$$

Nech je ďalej definované zobrazenie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ktoré nazývame *násobenie skalárom*. Pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ a skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\alpha x = \alpha(x^1, \dots, x^n) = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n).$$

\mathbb{R}^n je vektorovým priestorom, ak pre všetky vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spĺňa:

- (i) $(\mathbb{R}^n, +)$ je abelovská grupa,
- (ii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(iii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$

(iv) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$

(v) $1x = x.$

Definícia 2. Euklidovský skalárny súčin dvoch vektorov $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ a $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ definujeme ako

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i. \quad (2.1)$$

Jeho základné vlastnosti pre $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^n$ sú:

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$

(ii) $\langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle,$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, pričom rovnosť $\langle x, x \rangle = 0$ nastáva práve vtedy, keď $x = (0, \dots, 0)$.

Definícia 3. Kvadratická forma. Nech z^1, \dots, z^n sú súradnice pre nejakú časť priestoru. Kvadratická forma v bode $P = (z_0^1, \dots, z_0^n)$ relatívne k týmto súradniciam je skupina funkcií $g_{ij}(P)$, $i, j = 1, \dots, n$ takých, pre ktoré platí $g_{ij}(P) = g_{ji}(P)$ (túto vlastnosť nazývame symetrickosťou), a prevod do súradníc y^1, \dots, y^n , kde $z = z(y)$ a $z_0^i = (y_0^1, \dots, y_0^n)$ spĺňa

$$h_{kl} = \frac{\partial z^i}{\partial y^k} \Big|_{y^s=y_0^s} g_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial y^l} \Big|_{y^s=y_0^s},$$

h_{kl} , $k, l = 1, \dots, n$, $h_{kl} = h_{lk}$ sú koeficienty kvadratickej formy vzhľadom na súradnice y^1, \dots, y^n .

Kvadratickú formu môžeme teda zapisovať maticovým zápisom $Q(z) = z^T G z$, kde G je symetrická matica typu $n \times n$. Matica G ju navyše jednoznačne reprezentuje.

Napríklad, pre euklidovský vektorový priestor \mathbb{R}^2 je $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, pre reálne čísla a, b, c .

Všimnime si tiež, že euklidovský skalárny súčin $\langle z, z \rangle$ vektora $z = (z^1, \dots, z^n)$ so sebou samým je jeho kvadratickou formou pre jednotkovú maticu:

$$(z^1, \dots, z^n) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = (z^1)^2 + \dots + (z^n)^2.$$

Definícia 4. *Dĺžkou časti krivky* $V(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq I$ nazývame reálne číslo

$$l = \int_a^b |v(t)| dt, \quad (2.2)$$

kde $v(t)$ je dotykový vektor krivky v čase t a $|v(t)|$ je jeho veľkosťou.

Definícia 5. Krivku, ktorú opisuje bod v priestore svojim pohybom, nazývame jeho *svetočiara*.

2.2 Riemannova a euklidovská metrika

Definícia 6. *Riemannova metrika* je pozitívne definitná kvadratická forma definovaná na oblasti $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Je to teda skupina funkcií $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$, $z = (z^1, \dots, z^n)$, $i, j = 1, \dots, n$, pre ktoré platia dve nasledujúce podmienky:

- (i) matica g_{ij} je pozitívne definitná pre všetky $z = (z^1, \dots, z^n) \in A$,
- (ii) ak zoberieme nové súradnice $y = (y^1, \dots, y^n)$, $z^i = z^i(y^1, \dots, y^n)$, potom môžeme Riemannovu metriku reprezentovať skupinou funkcií $g'_{ij} = g_{ij}(y^1, \dots, y^n)$, pre ktoré platí $g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}$.

Pre Riemannovu metriku musíme tiež definovať jej skalárny súčin.

Definícia 7. *Skalárny súčin*. Pre danú Riemannovu metriku g_{ij} rozumieme pod skalárnym súčinom vektorov v, u , začínajúcich sa v bode $P = (z^1, \dots, z^n)$

$$\langle v, u \rangle = g_{ij}(P) v_i u_j. \quad (2.3)$$

Pomocou skalárneho súčinu je definovaná aj dĺžka vektora v ako druhá odmocnina skalárneho súčinu vektora samého so sebou, $\sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Definícia 8. Metriku $g_{ij}(z)$ nazývame *euklidovskou*, ak existujú súradnice x^1, \dots, x^n , $x^i = x^i(z)$ také, že platí

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^i}\right) \neq 0, \quad g_{ij} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} \quad (2.4)$$

Maticový zápis euklidovskej metriky, je v tom prípade n -rozmerná jednotková matica

$$G = G(z) = (g_{ij}(z)) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ucelený a podrobnejší prehľad kvadratických foriem, Riemannovej a euklidovskej metriky možno nájsť v [1].

Kapitola 3

Pseudo-euklidovský priestor

V tejto kapitole si upravením definície Riemannovej metriky zavedieme pseudo-riemannovskú, a na jej základe pseudo-euklidovskú. Prejdeme teda do pseudo-euklidovského priestoru. Obsah kapitoly je čerpaný prevažne z [1], okrem časti 3.2.1, ktorá je založená na [2].

3.1 Pseudo-riemannovská a pseudo-euklidovská metrika

V definícii Riemannovej metriky sme mali podmienku pozitívnej definitnosti kvadratickej formy g_{ij} . Ak túto podmienku nahradíme podmienkou, že je indefinitná, inak povedané, že nadobúda aj pozitívne aj negatívne hodnoty, dostávame definíciu pseudo-riemannovskej metriky. Z tejto definície už môžeme odvodiť definíciu pseudo-euklidovskej, ktorú budeme aj neskôr používať.

Definícia 9. Majme pseudo-riemannovskú metriku $g_{ij}(z)$. Túto metriku nazývame *pseudo-euklidovskou metriku*, ak existujú súradnice x^1, \dots, x^n závislé od vektora z , $\det(\partial x^i / \partial z^i) \neq 0$ také, že platí

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i} \frac{\partial x^1}{\partial z^j} + \dots + \frac{\partial x^p}{\partial z^i} \frac{\partial x^p}{\partial z^j} - \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i} \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j} - \dots - \frac{\partial x^n}{\partial z^i} \frac{\partial x^n}{\partial z^j}.$$

Podobne, ako pri euklidovskej metrike, môžeme aj pseudo-euklidovskú reprezentovať maticovým zápisom. Matica G v tomto prípade vyzerá

$$G = (g_{ij}(z)) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix},$$

kde I_k označuje k -rozmernú jednotkovú maticu.

Vidíme, že pseudo-euklidovskú metriku je možné jednoznačne definovať rozmerom matice I_p , teda číslom p , a rozmerom matice I_{n-p} , teda číslom $n-p$. Dvojicu $(p, n-p)$ nazývame *signatúra kvadratickej formy* G . Hovorí nám nielen o rozmere matíc I_k, I_{n-k} , ale aj o rozmere priestoru, v ktorom sa nachádzame. Signatúru tiež označujeme ako $(+, \dots, +, -, \dots, -)$ (respektíve $(-, \dots, -, +, \dots, +)$), kde počet znakov „+“ je p a počet znakov „-“ je $n-p$.

3.2 Minkowského časopriestor

Ako Minkowského priestor nazývame špeciálny prípad pseudo-euklidovského priestoru, vo všeobecnosti n -rozmerného $\mathbb{R}_{p,q}^n$, v ktorom $p=1$, teda priestoru $\mathbb{R}_{1,n-1}^n$. Používame aj skrátené označenie \mathbb{R}_1^n . Metriku v Minkowského priestore pre daný vektor x budeme tiež označovať $q(x)$.

Body v Minkowského priestore nazývame *udalosti*.

Špeciálnym prípadom Minkowského priestoru je priestor \mathbb{R}_1^4 , ktorý nám je známy zo špeciálnej teórie relativity, a nazývame ho *časopriestor*.

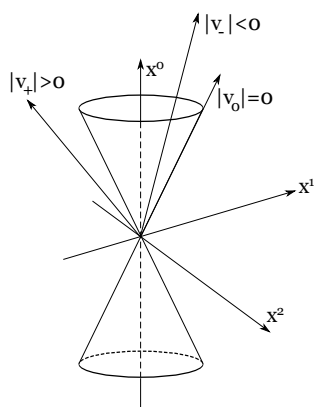
Bod (udalosť) v časopriestore má pseudo-euklidovské súradnice $x = (ct, x^1, x^2, x^3)$, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu. Číslo ct budeme označovať aj ako x^0 . Špeciálna teória relativity nám hovorí, že rýchlosť c je konštantná a najvyššia možná. Berieme ju do úvahy preto, aby všetky súradnice boli rovnakého typu, a síce typu dĺžky.

Tým pádom pre dĺžku (pseudo-veľkosť) l vektora x platí

$$l^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Definícia 10. Ako *separáciu dvoch bodov* $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ a $b = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ v časopriestore definujeme dĺžku vektora, ktorý ich spája. Teda

$$l^2 = |a - b| = (a^0 - b^0)^2 - (a^1 - b^1)^2 - (a^2 - b^2)^2 - (a^3 - b^3)^2.$$



Obrázok 3.1: Svetelný (izotropický) kužeľ.

Vidíme, že separácia v časopriestore pre dva body a , b nadobúda kladné, nulové aj záporné hodnoty.

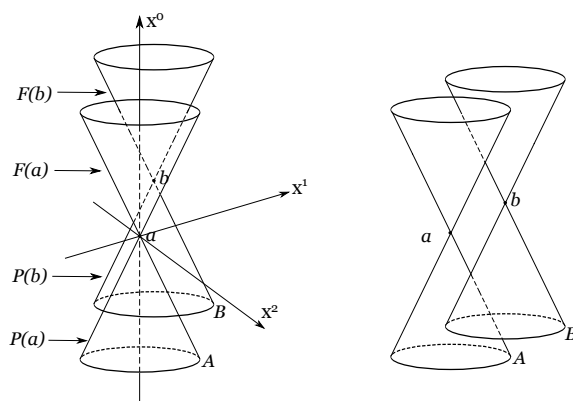
Množinu všetkých vektorov v_0 s nulovými veľkosťami, $|v_0|^2 = 0$, a teda množinu všetkých bodov b , ktoré tvoria so zadaným bodom a nulový vektor, nazývame izotropický alebo *svetelný kužeľ* (obr. 3.1). Taktiež tieto vektory nazývame izotropické, alebo aj *svetelné*.

Vektory v_+ , $|v_+|^2 > 0$ ležia vnútri tohoto kužeľa a nazývame ich *časové*. Nazývame ich tak preto, lebo $|v_+|^2 > 0$ znamená vlastne $(ct)^2 > \sum_{i=1}^n x^i$, časová súradnica má väčšiu veľkosť ako priestorové. Podobne, vektory ležiace mimo, v_- , $|v_-|^2 < 0$, nazývame *priestorové*.

3.2.1 Plynutie času

Podobným spôsobom môžeme uvažovať bod (udalosť) a a môžeme hovoriť o bode b ako o časovom, nulovom alebo priestorovom vzhladom ku a , ak vektor (a, b) je časový, nulový alebo priestorový.

Predpokladajme, že bod b je časový vzhladom ku a . Všimnime si, že v tomto prípade môže b ležať v jednej z dvoch otvorených množín, častí vnútra svetelného kužeľa bodu a . Označme si ich spoločne ako A , a podobne, ako B si označme dve nespojité, otvorené časti svetelného kužeľa bodu b . Ďalej si označme jednotlivé časti ako A_1, A_2 a B_1, B_2 . Zdefinujme si teraz reláciu R , A a B ležia na príslušných stranách a a b , ak prienik A a B obsahuje aspoň jednu celú časť



Obrázok 3.2: Bod b ležiaci (vľavo) a neležiaci (vpravo) v budúcnosti bodu a .

niektorého z vnútier svetelných kužeľov. Teda ak pre $C = A \cap B$ platí

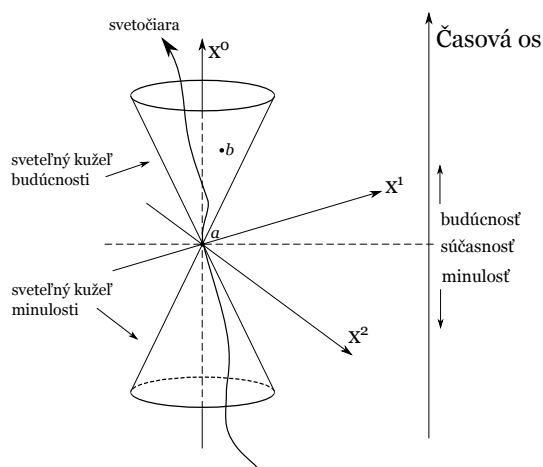
$$aRb \iff (A_1 \subset C) \vee (A_2 \subset C) \vee (B_1 \subset C) \vee (B_2 \subset C).$$

Dá sa overiť, že táto relácia je reláciou ekvivalencie (splňa podmienky reflexívnosti, symetrickosti a tranzitívnosti). Tiež je zrejmé, že A a B sú v relácii R práve vtedy keď vektor (a, b) je časový.

Relácia R navyše obsahuje iba dve triedy ekvivalencie. Z relativistického hľadiska nevieme tieto dve triedy rozlíšiť jednu od druhej, ale kvôli praktickému použitiu si jednu z nich označíme ako *minulosť* (P) a druhú ako *budúcnosť* (F). Budeme hovoriť, že a je v minulosti b , ak $a \in P(b)$. Podobne, $a \in F(b)$ bude znamenať, že a je v budúcnosti b .

Je zrejmé, že a je v minulosti b práve vtedy, keď b je v budúcnosti a , a tým pádom *byť v minulosti(budúcnosti)* je antisymetrická relácia. Je tiež jednoduché ukázať, že táto relácia je tranzitívna, a tým pádom vytvára čiastočné usporiadanie, ktoré nazývame *chronologickým usporiadaním*.

Z chronologického usporiadania by sme mohli opäť vytvoriť triedy ekvivalencie, nazývané aj „*okamihy*“. Dostali by sme tak skupinu paralelných trojrozmerných podpriestorov. Postupný prechod do budúcnosti, takej akú sme mali zadanú, vnímame v reálnom svete ako plynutie „času“ (obrázok 3.3), aj keď vieme, že čas ako samostatná entita nemá v špeciálnej teórii relativity zmysel. Náš nový, subjektívne vnímaný, „čas“ je jednoznačný až na škálovanie a nulový bod.



Obrázok 3.3: Svetelný kužeľ častice v danom momente. Kužeľ budúcnosti a minulosti.

3.2.2 Svetočiara častice

Vezmime si teraz časticu, pohybujúcu sa po svetočiare $x = (ct, x^1(t), x^2(t), x^3(t))$. Krivka $(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ zadáva pohyb častice v euklidovskom priestore \mathbb{R}^3 . Dotykový vektor v je vektorom rýchlosti častice v čase t a má tvar

$$v = (c, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3). \quad (3.1)$$

Pseudo-veľkosť tohoto vektora je

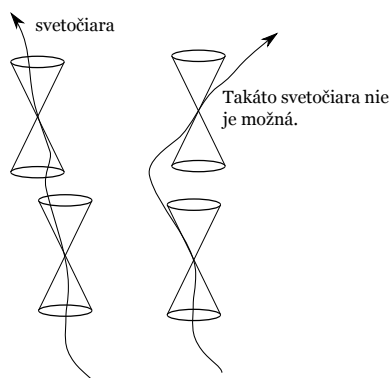
$$l^2 = c^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2. \quad (3.2)$$

Priemet pohybu častice do euklidovského priestoru nám v \mathbb{R}^3 dá dotykový vektor $v' = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$. Tento vektor je vektorom rýchlosti v euklidovskom priestore.

Z predpokladov teórie relativity vieme, že rýchlosť svetla je najvyššia dosiahnuteľná rýchlosť, teda platí $|v'| \leq c$. Z toho ale dostávame, že $0 \leq |v'| - c = l^2$. Dotykový vektor svetočiary častice teda musí byť buď *izotropický* alebo *časový*. Geometricky sa to dá predstaviť tak, že celá svetočiara leží vnútri svetelného kužeľa.

Vidno to aj na obrázku 3.4, ktorý znázorňuje pohyb častice časopriestorom. V každom bode svetočiary častice si môžeme predstaviť ďalší svetelný kužeľ prinaliehajúci tomuto bodu. Pohyb častice je obmedzovaný jeho hranicou.

Vo fyzikálnom svete sa predpokladá, že jedine častice s nulovou hmotnosťou môžu mať izotropické dotykové vektory svetočiar. Častice s nenulovou hmot-



Obrázok 3.4: Svetočiara častice a jej svetelné kužele.

nosťou musia tým pádom mať časové vektory, teda ich svetočiary musia ležať vnútri ich svetelných kužeľov, nie na ich hraniciach.

3.2.3 Vlastný čas

Uvažujme časticu (udalosť) časopriestoru \mathbb{R}_1^4 , parametrizovanú krivkou s časovými dotykovými vektormi. Jej krivku môžeme opísať rovnicami

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Keďže je dotykový vektor ($v = v(t)$) časový, vieme že pre všetky t platí

$$|v(t)|^2 = (\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2 > 0.$$

Dĺžka krivky, ktorú častica prejde od $t = a$ do $t = b$ je potom

$$l = \int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2} dt. \quad (3.3)$$

Veľkosť $\frac{l}{c}$ nazývame *vlastný čas*, ktorý uplynul pre časticu. Je to subjektívny čas, ktorý samotná častica vníma.

Predpokladajme teraz, že by sa častica pohybovala konštantnou rýchlosťou $v = (v^1, v^2, v^3)$. Potom zo vzťahu (3.3) dostávame

$$dl = \sqrt{c^2 - |v|^2} dt = \sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}} dx^0,$$

a teda

$$l = x^0 \sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}.$$

Čo nám z tohoto vzťahu vyplýva? Keby bol vektor v nulový, dostali by sme $l = x^0$, teda $\frac{l}{c} = \frac{x^0}{c} = t$. Vlastný čas častice by bol rovný reálnemu času. Naopak, keby sme zobrali rýchlosť $v = c$ (čo môžeme urobiť iba pre častice s nulovou hmotnosťou), vlastný čas častice by bol nulový. Vlastný čas je teda nepriamo závislý na rýchlosti, akou sa častica pohybuje. Pri vysokej rýchlosti častica vníma plynutie času pomalšie. Dochádza ku *dilatácii času*. Tento jav si ešte spomenieme v nasledujúcej kapitole, kde si ho aj odvodíme z Lorentzových transformácií.

Kapitola 4

Lorentzove transformácie

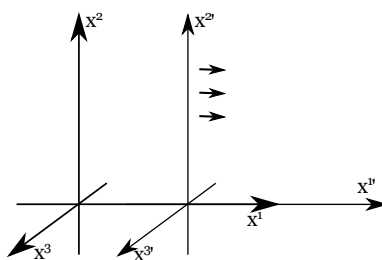
V Newtonovej klasickej mechanike platí, že čas má absolútny charakter. To znamená, že bez ohľadu na to, ako sa pohybujeme, časový úsek medzi dvoma po sebe idúcimi udalosťami bude stále ten istý. Na zmenu z jednej súradnicovej sústavy do druhej používame takzvané *Galileiho transformácie*. Ako už bolo spomenuté, tieto transformácie zachovávajú dĺžku časových intervalov. Navyše, zachovávajú tiež euklidovskú metriku, teda priestorovú dĺžku.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať takzvanými *Lorentzovými transformáciami*, ktoré v Minkowského priestore plnia úlohu Galileiho transformácií v euklidovskom priestore. Lorentzove transformácie teda opisujú zmenu z jednej sústavy súradníc (ct, x^1, \dots, x^n) do inej $(ct', x^{1'}, \dots, x^{n'})$, kde sústava X' sa vzhľadom ku X pohybuje konštantnou rýchlosťou. Pri Lorentzových transformáciách je podstatné, že podobne ako Galileiho, aj oni musia zachovať metriku, v tomto prípade Minkowského metriku $l^2 = c^2t^2 - \sum_{i=1}^n (x^i)^2$. Transformácie metrických priestorov zachovávajúce metriku nazývame všeobecne aj *izometrie*. Od Lorentzových transformácií navyše požadujeme, aby zachovávali počiatok súradnicovej sústavy.

4.1 Odvodenie Lorentzových transformácií

Vezmime si na začiatok Minkowského priestor \mathbb{R}_1^2 . Chceme ukázať ako Lorentzove transformácie vyzerajú na ňom. Budeme skúmať grupu jeho izometrií.

Vieme, že metrika v \mathbb{R}_1^2 je daná $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.


 Obrázok 4.1: Pohyb sústavy X' vzhľadom ku sústave X .

Pohyb svetelného signálu v súradnicovej sústave X , ktorý sa pohybuje kladným smerom po osi x^1 -ovej, môžeme vyjadriť rovnicou

$$x^1 = x^0.$$

Podobne, pre svetelný signál zo súradnicovej sústavy X' platí $x^{1'} - x^{0'} = 0$.

Ak dáme tieto vzťahy do rovnosti, dostaneme

$$(x^1 - x^0) = \lambda(x^{1'} - x^{0'}),$$

pre nejaké reálne λ .

Obdobne, pre svetelné signály pohybujúce sa záporným smerom, by sme dostali:

$$(x^1 + x^0) = \mu(x^{1'} + x^{0'}),$$

pre nejaké reálne číslo μ .

Z toho vyjadrením x^0 a x^1 , pre určité reálne parametre a, b, c, d , dostaneme transformáciu

$$\begin{aligned} x^0 &= ax^{0'} + bx^{1'} \\ x^1 &= cx^{1'} + dx^{1'}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Keďže táto transformácia je izometria, vieme

$$G = A^T G A, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Z vlastností determinantov, $\det(A) = \det(A^T)$ a z toho, že determinant súčini je súčin determinantov, dostávame $(\det A)^2 = 1$, a teda $\det(A) = \pm 1$. Zo (4.2) tiež dostávame:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix},$$

a teda

$$a^2 - c^2 = 1, \quad ab - cd = 0, \quad b^2 - d^2 = -1. \quad (4.3)$$

Pripomíname, že a, b, c, d sú reálne čísla, a tým pádom z $a^2 - c^2 = 1$ je zrejmé, že $a \neq 0$. Môžeme si teda zvoliť substitúciu, $\beta = \frac{c}{a}$, a dostaneme

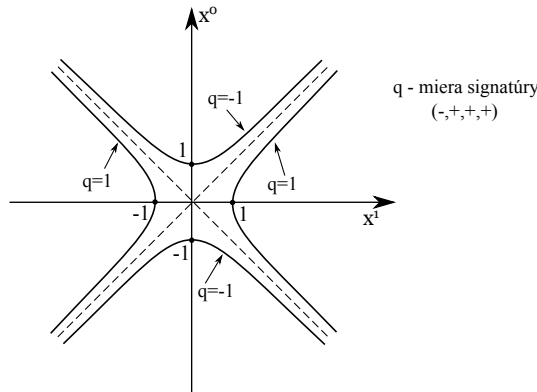
$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = d\beta, \quad c = a\beta, \quad d = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.4)$$

Zodpovedajúce matice Lorentzových transformácií majú tým pádom tvar:

$$A = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Ďalšou substitúciou, $\psi : \beta = \tanh \psi$, dostávame maticu *hyperbolických rotácií*, rotácii po hyperbolických pseudo-kružniciach (obr. 4.2).

$$A = \pm \begin{pmatrix} \cosh \psi & \pm \sinh \psi \\ \sinh \psi & \pm \cosh \psi \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$



Obrázok 4.2: Hyperbolické pseudo-kružnice. Jednotková a „mínus-jednotková“.

Grupa izometrií pseudo-euklidovskej roviny \mathbb{R}_1^2 je tým pádom tvorená štyrmi typmi izometrií. Každému typu zodpovedá jedna z matíc

$$\begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\cosh \psi & \sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ \sinh \psi & -\cosh \psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & -\cosh \psi \end{pmatrix}.$$

Môžeme si tiež vziať prvú maticu za základnú, a všetky štyri typy dostaneme jej vynásobením nasledujúcimi maticami:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že prvé dve matice, I, P , nemenia znamienko pri x^0 , teda nemenia smer času $t = x^0/c$. Transformácie k nim prislúchajúce nazývame *ortochrónne*.

Teraz budeme hľadať konkrétny tvar Lorentzovej transformácie. Prejdeme do časoprestoru \mathbb{R}_1^4 . Majme dva súradnicové systémy, (ct, x^1, x^2, x^3) a $(ct', x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$. Systém X' nech sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v smere osi x^1 vzhľadom ku systému X . Tvar transformácie je:

$$\begin{aligned} x^0 &= ct = \alpha(ct') + \beta(x^{1'}), \\ x^1 &= \gamma(ct') + \delta(x^{1'}), \\ x^2 &= x^{2'}, \quad x^3 = x^{3'}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

pre

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Momentálne chceme použiť ortochrónnu transformáciu, aby bol zachovaný smer plynutia času. Navyše chceme aby smer pohybu bol zachovaný relatívne ku smeru plynutia času, v tomto prípade, aby bol tiež kladný. Túto vlastnosť transformácie nazývame aj *normálnosť*. Je splnená, ak matica zo (4.8) prislúchajúca matici transformácie má kladný determinat. Obe vlastnosti spĺňa zo (4.8) jedine matica I . Matica transformácie A je potom

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}.$$

Tým pádom

$$\begin{aligned} ct &= (ct') \cosh \psi + (x^{1'}) \sinh \psi, \\ x^1 &= (ct') \sinh \psi + (x^{1'}) \cosh \psi. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Skúmame teraz pohyb začiatku systému $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$. V ňom platí, že $x^{1'} = 0$. Rovnice (4.10) sa potom zjednodušia na

$$\begin{aligned} ct &= ct' \cosh \psi, \\ x^1 &= ct' \sinh \psi, \end{aligned} \quad (4.11)$$

a predelením druhej rovnice prvou dostávame

$$\frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} \frac{ct'}{ct'} = \tanh \psi = \frac{x^1}{ct} = \frac{v}{c}, \quad (4.12)$$

keďže $v = \frac{x^1}{t}$ je rýchlosť.

Z toho vyplýva

$$\sinh \psi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Vyjadrené $\sinh \psi$ a $\cosh \psi$ môžeme dosadiť do (4.10), čím sa dostaneme ku

$$t = \frac{t' + (\frac{v}{c^2})x^{1'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.13)$$

a

$$x^1 = \frac{x^{1'} + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.14)$$

Transformáciu (4.14) je možné modifikovať pre prípady pohybu po osiach x^2, x^3 . Takéto transformácie nazývame *Lorentzovými transformáciami*.

4.2 Galileiho limita

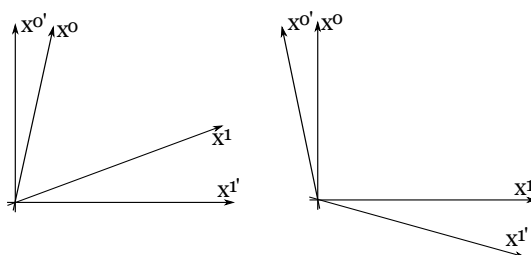
Skúsme si porovnať Lorentzove transformácie s *Galileiho transformáciami*. Galileiho transformácie sú v tvare

$$t = t', \quad x^i = x^{i'} + vt', \quad x^j = x^{j'}; \quad j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i\}. \quad (4.15)$$

Vidíme, že Galileiho a Lorentzove transformácie sú približne rovnaké v dvoch prípadoch. Po prvé, keď rýchlosť v je veľmi malá (alebo nulová) v porovnaní s rýchlosťou svetla. To vysvetľuje, prečo pri pohybe relatívne malými rýchlosťami, akými sa každodenne pohybujeme, vnímame svet, v ktorom sa nachádzame, ako 3-rozmerný Eulidovský priestor. Druhý hypotetický prípad by nastal, keby rýchlosť svetla bola nekonečne veľká, $c \rightarrow \infty$. Každá konečná rýchlosť by oproti nej bola zanedbateľne malá a dosiahli by sme ten istý efekt ako v prvom prípade.

4.3 Skracovanie dĺžky

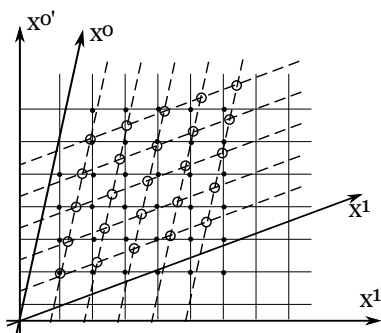
Jedným z následkov Lorentzových transformácií je skracovanie dĺžky pohybujúceho sa objektu. V nasledujúcej časti si tento jav odvodíme.



Obrázok 4.3: Transformácia súradnicových osí sústavy X pri pohybe vzhľadom ku X' . Pri pohľade z X' je X „stlačená“ (obrázok vľavo), a z pohľadu X je naopak X' „natiahnutá“ (obrázok vpravo).

Uvažujme dve súradnicové sústavy (ct, x^1, x^2, x^3) a $(ct', x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$. Predpokladajme že máme tyč (alebo podobný objekt s dvoma koncami), ktorá má v súradnicovej sústave X súradnice svojich koncov x_1^1, x_2^1 . Ostatné súradnice nech sa rovnajú pre oba konce. Dĺžku tyče zmeriame v tomto prípade ako $l = x_2^1 - x_1^1$. Skúsme ju zmerať z pohľadu pozorovateľa pohybujúceho sa konštantnou rýchlosťou spolu so súradnicovou sústavou X' . Z Lorentzových transformácií vieme, aké budú relatívne súradnice koncových bodov v X' :

$$x_1^{1'} = \frac{x_1^1 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_2^{1'} = \frac{x_2^1 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.16)$$



Obrázok 4.4: „Natiahnutie“ sústavy X vzhľadom ku X' . Časové aj priestorové.

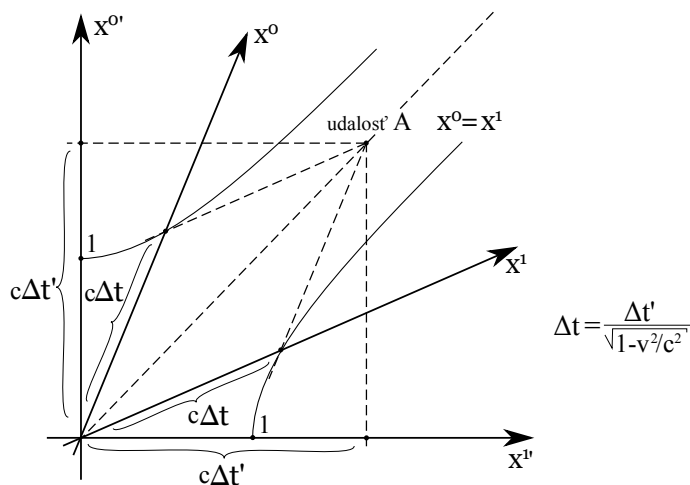
Označme si $l' = x_2^{1'} - x_1^{1'}$ dĺžku v súradnicovej sústave X' . Potom si môžeme dĺžku l vyjadriť ako:

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.17)$$

Vidíme, že vnímaná dĺžka je priamo úmerná dĺžke l' , v súradnicovej sústave, relatívne ku ktorej sa pohybuje, a, toto je dôležité, nepriamo úmerná rýchlosti vo svojej súradnicovej sústave. Konkrétne je dĺžka *skrátaná* koeficientom $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Tento jav tiež nazývame *Lorentzova kontrakcia*.

4.4 Dilatácia času

Keďže v časopriestore má časový rozmer rovnaký význam a postavenie ako priestorové rozmery, predpokladáme, že ku podobnému skracovaniu, aké sme si ukázali v prechádzajúcej časti, by malo dochádzať aj preňho. Ukážeme si, že niečo také skutočne platí.



Obrázok 4.5: Dilatácia času a skrátenie dĺžky v sústave X , pohybujúcej sa rovnomerne vzhľadom ku X' , s rovnakou zmenou x^0 a x^1 vzhľadom ku $x^{0'}$, $x^{1'}$. Všimnime si, že sústava X je „stlačená po hyperbole“ – priesečníky súradnicových osí x^0 , x^1 s ich rovnobežkami prechádzajúcimi bodom (udalosťou) A opisujú pre rôzne Lorentzove transformácie v X' hyperboly.

Predpokladajme, že máme hodiny, umiestnené v počiatku súradnicovej sústavy X' . Pre dva rôzne časy, t'_1, t'_2 máme ich polohu v časopriestore $(t'_1, 0, 0, 0)$

a $(t'_2, 0, 0, 0)$. V súradnicovej sústave X' nameriame časový interval dĺžky $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Opäť si ich Lorentzovou transformáciou prevedieme do súradnicovej sústavy X , ktorá sa pohybuje vzhľadom ku X' .

$$t_1 = \frac{t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

z čoho ľahko dostaneme

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.18)$$

Pre pozorovateľa v súradnicovej sústave X' , sa zdajú byť hodiny, pohybujúce sa vzhľadom k nemu, spomalené.

4.5 Relativita simultánnosti

Predpokladajme, že A_1, A_2 sú udalosti vnímané ako súbežne nastávajúce pre pozorovateľov z inerciálnej sústavy X' . Majú teda rovnaké časové súradnice, $t'_1 = t'_2 =: t'$, ale líšia sa v pozícií $x^{1'}$, $x_1^{1'} \neq x_2^{1'}$. Ostatné súradnice nech sú nulové. Ich polohy teda sú $(t', x_1^{1'}, 0, 0), (t', x_2^{1'}, 0, 0)$. Časové súradnice v X sú podľa Lorentzových transformácií

$$t_1 = \frac{t' + (v/c^2)x_1^{1'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t' + (v/c^2)x_2^{1'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.19)$$

Vieme, že $t'_1 - t'_2 = 0$. Z toho vyplýva

$$t_1 - t_2 = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x_1^{1'} - x_2^{1'}) \neq 0. \quad (4.20)$$

Tým pádom udalosti A_1, A_2 nebudú súčasné pre pozorovateľa zo súradnicovej sústavy X .

Skúsme sa teraz zamyslieť nad tým či je možné, aby sme vnímali dve udalosti v obrátenom poradí. Inak povedané, aby platilo

$$t'_1 - t'_2 > 0 \quad a \quad t_1 - t_2 = \frac{t'_1 - t'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x_2^{1'} - x_1^{1'}) < 0.$$

Skutočne to možné je. Stačí, aby bola splnená nerovnosť

$$(t_1 - t_2) \frac{c^2}{v} < (x_2^{1'} - x_1^{1'}),$$

teda stačí, aby bol dostatočne veľký rozdiel súradníc $x_2^{1'}, x_1^{1'}$.

4.6 Rýchlosť svetla

V tejto časti chceme dokázať, že rýchlosť svetla je konštantná a maximálna. Najprv si preto musíme odvodiť *sčítavanie paralelných rýchlostí*, respektíve sčítavanie rýchlosti bodu a rýchlosti súradnicovej sústavy, v ktorej sa pohybuje.

Vezmime si bod B , pohybujúci sa v X' rýchlosťou w' súbežne s osou x^1 . X nech sa pohybuje rýchlosťou v vzhľadom ku X' . Aká je rýchlosť bodu B relatívne ku X ? Pre rýchlosti platí $w' = dx^{1'}/dt'$ a $w = dx^1/dt$. Z Lorentzových transformácií dostávame

$$dt = \frac{dt' + (v/c^2)dx^{1'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad a \quad dx^1 = \frac{vdt' + dx^{1'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.21)$$

Dosadením do $w = dx^1/dt$ dostaneme

$$w = \frac{v + w'}{1 + vw'/c^2}. \quad (4.22)$$

Opäť vidíme, že pri rýchlostiach pomerne malých vzhľadom na rýchlosť svetla, je menovateľ o málo väčší než 1, a súčet dvoch paralelných rýchlostí je približne rovný tradičnému $w = v + w'$.

Skúsme prípad, keď $w' = c$. Dostávame

$$w = \frac{v + c}{1 + vc/c^2} = c.$$

Ukázali sme teda, že ak sa bod pohybuje rýchlosťou svetla relatívne ku X' , bude sa ňou pohybovať aj relatívne ku X . Rýchlosť svetla je konštantná pre všetky sústavy.

Teraz si ukážme jej maximálnosť. Budeme vychádzať zo vzťahu (4.12), ktorý nám hovorí, že $\tanh \psi = \frac{v}{c}$, teda pokúsime sa ohraničiť $|\tanh \psi| \leq 1$. Vieme, že platí

$$\tanh \psi = \frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{e^\psi + e^{-\psi}} \leq 1,$$

z čoho je už jasné, že menovateľ je väčší ako čitateľ a teda platí

$$\frac{|e^\psi - e^{-\psi}|}{e^\psi + e^{-\psi}} \leq 1.$$

To vlastne znamená, že

$$\frac{v}{c} \leq 1,$$

a tým pádom

$$v \leq c. \quad (4.23)$$

Kapitola 5

Hyperbolická geometria

V tejto kapitole sa budeme zaoberať geometriou, najprv všeobecne, zadefinujeme si základné objekty, s ktorými budeme pracovať, spomenieme axiómy geometrie, krátky historický úvod do hyperbolickej geometrie, a hlavne hyperbolickú geometriu samotnú.

Kapitola je založená prevažne na [5], hlavne podkapitoly 5.3 a 5.5, obsah 5.7 je čerpaný z [1] a časť 5.1 prezentuje axiómy geometrie tak, ako sú uvedené v anglickom preklade knihy profesora Hilberta *Grundlagen der Geometrie*, v [7]. Podkapitola 5.6 je založená na [8] a podkapitola 5.4 na [9].

V geometrii budeme pracovať s tromi základnými objektami. Sú to *body*, ktore označujeme veľkými písmenami A, B, \dots , *priamky* označujeme malými písmenami a, b, \dots , a roviny budeme označovať Gréckymi písmenami α, β, \dots . Body nazývame základnými útvarmi *lineárnej geometrie*, priamky a body tvoria *rovinnú geometriu*, a body spolu s priamkami a rovinami sú základnými útvarmi *priestorovej geometrie*.

Medzi týmito útvarmi existujú rôzne základné relácie, ako *patriť* (bod A patrí priamke a), *ležať medzi*, *byť rovnobežný*, *rôznobežný*, \dots . Tieto relácie budeme v nasledujúcom texte považovať za intuitívne známe. Za intuitívne známe budeme považovať aj *polpriamky* a *polroviny*.

5.1 Axiómy geometrie

Na prelome 19. a 20. storočia sformuloval nemecký matematik David Hilbert, profesor Göttingenskej Univerzity, 20 axióm opisujúcich geometriu. Tieto axiómy rozdelil do piatich skupín. Sú to *axiómy incidencie*, ktoré opisujú vzťahy

medzi bodmi, úsečkami a rovinami. *Axiómy usporiadania* zavádzajú reláciu *ležať medzi*, a tým padom dávajú bodom poradie. *Axióma rovnobežnosti* je ekvivalentná s Euklidovým postulátom o rovnobežnosti a hovorí o počte rovnobežných priamok. *Axiómy zhodnosti* definujú a opisujú reláciu *byť zhodný*. A nakoniec, *axióma spojitosti*, ktorá umožňuje meranie dĺžky úsečiek.

Axiómy incidencie : *I1.* Pre každé dva body A a B existuje priamka a , na ktorej ležia oba.

I2. Pre každé dva body A a B neexistuje viac než jedna priamka, ktorej oba patria.

I3. Pre každé tri body A, B, C , ktoré neležia na jednej priamke, existuje rovina α , ktorá ich všetky obsahuje. V každej rovine existuje prinajmenšom jeden bod.

I4. Pre každé tri body A, B, C , ktoré neležia na jednej priamke, neexistuje viac než jedna rovina, ktorej všetky tri patria.

I5. Ak dva body A a B priamky a patria rovine α , potom rovine α patrí každý bod ležiaci na priamke a .

I6. Ak dve roviny α a β majú spoločný bod A , potom majú spoločný najmenej jeden ďalší bod B .

I7. Na priamke existujú prinajmenšom dva body, v rovine existujú prinajmenšom tri body, neležiace na tej istej priamke. V priestore existujú najmenej štyri body, ktoré neležia v jednej rovine.

Axiómy usporiadania : *U1.* Ak leží bod B medzi bodmi A a C , tak A, B, C sú tri rôzne body tej istej priamky a bod B leží taktiež medzi bodmi C a A .

U2. Pre každé dva body A a B existuje najmenej jeden bod C na priamke AB taký, že bod B leží medzi bodmi A a C a aspoň jeden bod D ležiaci medzi A a B .

U3. Z každých troch rôznych bodov patriacich priamke leží iba jeden medzi zvyšnými dvoma.

U4. Každé štyri rôzne body A, B, C, D priamky je možné preusporiadať tak, aby B ležal medzi A a C a zároveň medzi A a D , a navyše aby C ležal medzi A a D a taktiež medzi B a D .

U5. Paschova axióma. Nech A, B, C sú body, ktoré neležia na jednej priamke a nech a je priamka, v rovine ABC , ktorej nepatrí ani jeden

z nich. Ak priamka a pretne úsečku AB , pretne aj úsečku AC alebo úsečku BC .

Axióma rovnobežnosti (Euklidov postulát o rovnobežnosti) : $R1$. Nech bod A nepatrí priamke a a nech A aj a ležia v rovine α . Potom v rovine α je práve jedna priamka obsahujúca bod A , ktorá sa nepretína s a . Túto priamku nazývame *rovnobežkou* priamky a .

Pri nasledujúcich axiómách, axiómách zhodnosti, budeme používať pojem *uhol*, ktorý si teraz zdefinujeme.

Definícia 11. Nech α je rovina a h, k sú dve rôzne polpriamky patriace α so spoločným začiatkom v bode O . Systém, ktorý sme takto vytvorili, nazývame *uhol* a označujeme $\angle(h, k)$, alebo jednoducho (h, k) .

Axiómy zhodnosti : $Z1$. Nech A a B sú dva body priamky a a nech A' je bod na priamke a' . Potom na ktorejkoľvek z polpriamok $A'a'$, polpriamok priamky a' , ktoré začínajú v bode A' , existuje práve jeden bod B' taký, že úsečka AB je zhodná s úsečkou $A'B'$.

$Z2$. Ak je úsečka AB zhodná s úsečkou $A'B'$ a zároveň s úsečkou $A''B''$, potom je $A'B'$ zhodná s úsečkou $A''B''$.

$Z3$. Nech AB a BC sú dve úsečky patriace priamke a , ktoré majú spoločný iba bod B . Podobne, nech $A'B'$ a $B'C'$ sú dve úsečky patriace priamke a' s jediným spoločným bodom B' . Potom, ak platí $AB \equiv A'B'$ a $BC \equiv B'C'$, platí aj $AC \equiv A'C'$.

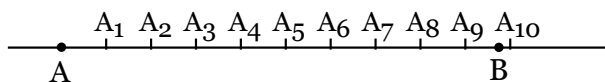
$Z4$. Nech je daný uhol (c, d) , polrovina $(k\alpha)$ s hranicou k a nech je v nej daná polpriamka a so začiatkom v bode O . Potom existuje práve jedna taká polpriamka b so začiatkom v bode O , ležiaca v polrovine $(k\alpha)$, že platí $\angle(a, b) \equiv \angle(c, d)$.

$Z5$. Ak je uhol (h, k) zhodný s uhlom (h', k') a s uhlom (h'', k'') . Potom je uhol (h', k') zhodný s uhlom (h'', k'') .

$Z6$. Ak v dvoch trojuholníkoch ABC a $A'B'C'$ sú zhodnosti $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, potom aj $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ a $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Axióma spojitosti (Archimedova axióma) : $S1$. Nech A_1 je ktorýkoľvek bod patriaci priamke a , ležiaci medzi bodmi A a B . Potom existujú body A_2, A_3, A_4, \dots , také, že A_1 leží medzi A a A_2 , A_2 leží medzi

A_1 a A_3 , A_3 leží medzi A_2 a A_4 , atď. Navyše, nech sú úsečky AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , ... rovnako dlhé. Potom existuje taký bod A_n , pre ktorý platí, že B sa nachádza medzi A a A_n .



Obrázok 5.1: Archimedova axióma. Jednotná vzdialenosť A_kA_{k+1} je jednotkou miery pri meraní dĺžky úsečky.

K týmto piatim kategóriam axióm a dokopy dvadsiatim axiómam je možné pridať nasledujúcu, ktorá nám dodáva možnosť pridať do nášho doterajšieho systému geometrie ďalšie objekty, pričom sa zachová pravdivosť axióm.

Axióma úplnosti : Ku bodom, priamkam a rovinám je možné pridať iné objekty tak, aby systém, ktorý tým vytvoríme, bol novou geometriou, tiež spĺňajúcou všetkých 5 skupín axióm.

5.2 História hyperbolickej geometrie

O sformulovanie axióm (postulátov) geometrie sa pred Hilbertom pokúšalo mnoho iných významných matematikov. Ako prvý to bol Euklides, ktorý okolo roku 300 pred našim letopočtom sformuloval päť postulátov, obsahujúcich aj už spomenutý *Euklidov postulát o rovnobežnosti*.

Jeho prvé štyri postuláty tvoria tzv. *absolútnu geometriu*. Postulát o rovnobežnosti bol po dlhý čas obrovským problémom pre matematikov. Pri obraze sveta, aký v minulosti panoval, sa piaty postulát zdal byť intuitívne pravdivý. Napriek tomu je geometricky nedokázateľný, pretože by si vyžadoval kresliť priamky nekonečne dlhé. Dokonca aj sám Euklides si uvedomoval problémy s týmto postulátom a narábal s ním iba veľmi zdráhavo.

Ako sa matematika a geometria postupne rozvíjala, mnoho matematikov sa snažilo dokázať tento postulát ako tvrdenie za pomoci prvých štyroch postulátov. Ich hľadanie dôkazu bolo márne. O jednom z nich, maďarskom matematikovi Farkašovi Bolyaiovi, je známe, že lamentoval nad neustálymi neúspechmi a svojmu synovi dokonca odporučil, aby „nechal vedu rovnobežiek na pokoji“. Jeho syn, János Bolyai, sa však rozhodol pokračovať v otcovej práci. Pokúsil sa dokázať piaty postulát sporom, rovnako ako sa v tom čase pokúšal ruský mate-

matik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, ale obaja čoskoro nezávisle od seba zistili že jeho negácia je tiež bezosporná.

To ich viedlo k vytvoreniu novej, hyperbolickej geometrie (tiež nazývanej Lobačevského-Bolyaiova-Gaussova geometria), v ktorej je piaty postulát nahradený postulátom:

Hyperbolický postulát o rovnobežnosti. Pre daný bod A a priamku r , neprechádzajúcu cez A , existuje viac než jedna priamka prechádzajúca cez A , ležiaca v rovine Ar , ktorá nepretína priamku r .

Jedným z problémov, ktoré sa hneď po jej vzniku objavili, bol problém, ktorá geometria je teda „pravdivá“. Obaja jej autori verili, že nová hyperbolická geometria je rovnako reálna, ako euklidovská. Aj keď nie je dokázané, že euklidovská geometria je bezosporná, dá sa dokázať, že za predpokladu jej bezospornosti bude rovnako bezosporná aj hyperbolická.

Ďalšou možnou geometriou je *eliptická geometria*, ktorá ma naopak postulát o rovnobežnosti nahradený postulátom, ktorý hovorí, že žiadna rovnobežná priamka neexistuje:

Postulát o rovnobežnosti eliptickej geometrie. Pre daný bod A a priamku r , neprechádzajúcu cez A , neexistuje žiadna taká priamka prechádzajúca cez A , ktorá by ležala v rovine Ar a nepretínala priamku r .

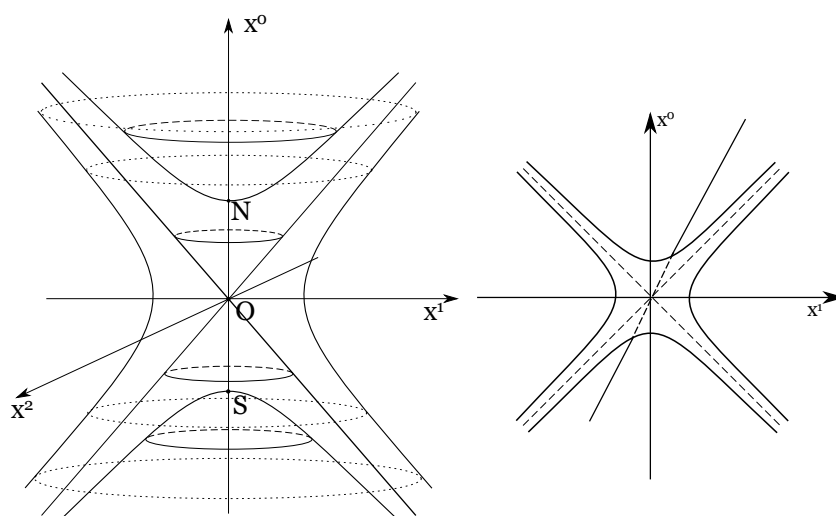
5.3 Modely hyperbolického priestoru

V nasledujúcej časti budeme uvažovať všeobecný n -rozmerný Minkowského priestor \mathbb{R}_1^n . Majme na ňom definovanú kvadratickú formu $G = G(x^0, \dots, x^{n-1})$ so signatúrou $(-, +, \dots, +)$, opačnou ako v predchádzajúcich kapitolách.

Vidíme, že vektory patriace dovnútra svetelného kužeľa, majú zápornú pseudonormu, a vonkajšie vektory majú pseudonormu kladnú. Svetelný kužeľ je v tomto prípade tým istým svetelným kužeľom, akým bol doteraz.

Pre kvadratickú formu rovnajúcu sa kladnej konštante dostávame spojitý jednodielny hyperboloid (hyperbolickú sféru s kladným polomerom), ktorý sa nachádza vonku od svetelného kužeľa (poz. jeho 3-rozmerný prípad na obrázku 5.2). Kvadratická forma rovná zápornej konštante nám, naopak, generuje dvojdielny hyperboloid v jeho vnútri, alias hyperboloid so záporným polomerom.

Priamky v hyperbolickej geometrii sú priesečníky hyperboloidu a euklidovskej roviny vedenej cez stred súradnicovej sústavy, bod O .



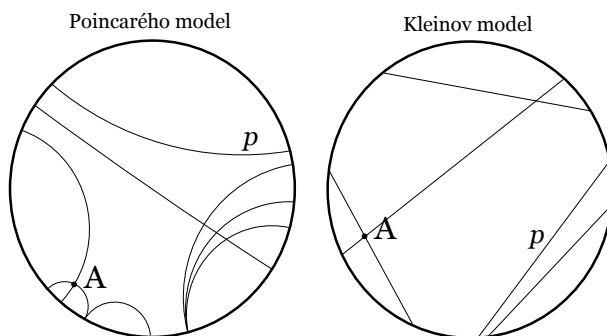
Obrázok 5.2: Na ľavom obrázku, jednodielny a dvojdielny hyperboloid. Na pravom je ich priemet do dvojrozmerného priestoru.

Črtá sa otázka, ako modelovať hyperbolické priamky, prípadne ako ich znázorniť pomocou nejakého 2-rozmerného modelu.

Dva z najznámejších modelov sú *Kleinov a Poincarého model*. Kleinov model je *projektívny*, čo znamená, že zachováva euklidovskú krivosť priamok, priamky sú v ňom reprezentované časťami euklidovských priamok. Naopak, nezachováva veľkosť uhlov. Tú zachováva Poincarého model, preto sa nazýva tiež *konformný model*.

Kleinov model vzniká pohľadom zo stredu súradnicovej sústavy na priemet hyperboloidu do euklidovskej roviny, rovnobežnej s rovinou x^1x^2 a obsahujúcej bod N , tiež nazývaný aj severný pól dvojdielneho hyperboloidu (poz. obrázok 5.2).

V Poincarého modeli, tiež nazývanom model *Poincarého hyperbolického kruhu*, sú priamky reprezentované ako časti kružníc vpísané do vnútra otvoreného kruhu tak, že ich konce sú kolmé na jeho hranicu. Tento model vzniká z pohľadu, ktorý by sa nám nasytol, keby sme sa pozerali nahor z bodu S (maxima spodnej časti dvojdielneho hyperboloidu) na priemet jeho vrchnej časti do roviny x^1x^2 . Kleinov, ako aj Poincarého model znázorňujú priamky vpísané do vnútra otvoreného kruhu – kruhu, ktorý neobsahuje svoju hranicu. Samotné jeho vnútro je v skutočnosti vnútrom vrchnej časti svetelného kužeľa, jeho hranica znázorňuje svetelný kužeľ. Všetky priamky sa ho dotýkajú až v nekonečne.



Obrázok 5.3: Poincarého konformný a Kleinov projektívny model hyperbolickéj geometrie.

V oboch modeloch je možné názorne vidieť platnosť hyperbolického postulu o rovnobežnosti, ku priamke p máme viacero priamok obsahujúcich bod A , ktoré sa s p nepretínajú.

5.3.1 Kleinov projektívny model

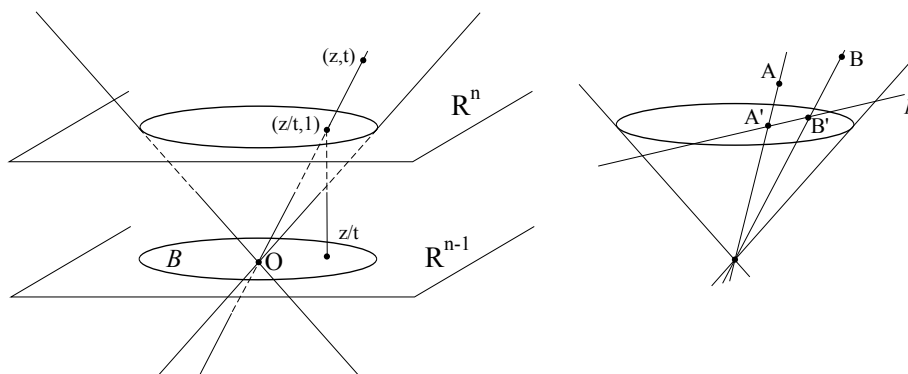
Predpokladajme všeobecný Minkowského priestor \mathbb{R}_1^n . Kleinov projektívny model je $(n-1)$ -rozmerný metrický priestor, ktorý vzniká projekciou do \mathbb{R}^{n-1} , $(n-1)$ -rozmerného euklidovského priestoru. Bodu (z, t) , kde $z = (z^1, \dots, z^{n-1})$ je vektor jeho priestorových súradníc, je priradený bod $\frac{z}{t} = (\frac{z^1}{t}, \dots, \frac{z^{n-1}}{t})$. Geometricky je to znázornené na obrázku 5.4 ako priemet bodu (z, t) najprv do $(z/t, 1)$, a potom do euklidovskej „roviny“ \mathbb{R}^{n-1} . Všetky body sa teda premietajú do $(n-1)$ -rozmerného jednotkového otvoreného keuhu, ktorý si budeme ďalej označovať ako B.

Tiež budeme v tejto časi používať funkciu $Q(x, x')$, ktorá je kvadratickou formou vektorov x a x' v \mathbb{R}_1^n .

$$Q(x, x') = Q((x^1, \dots, x^n), (x^{1'}, \dots, x^{n'})) = -x^1 x^{1'} + \sum_{i=2}^n x^i x^{i'}.$$

Podľa [5] môžeme Kleinov model a jeho príslušnú metriku definovať ako:

Definícia 12. *Kleinov model.* Nech P je priestor \mathbb{R}^n , obsahujúci všetky priamky s negatívnou pseudonormou, teda nech P je vnútro svetelného kužeľa. Ďalej nech a, a' sú dve rôzne primaky patriace priestoru P . Potom rovina nimi vytvorená má so svetelným kužeľom spoločné dve priamky. Označme si ich u, u' .



Obrázok 5.4: Priemet z pseudo-euklidovského priestoru \mathbb{R}_1^n do \mathbb{R}^{n-1} , ktorý je základom Kleinovho modelu. Vpravo, zobrazenie priamky v Kleinovom modeli.

Pre každý bod $Z \in a \setminus \{O\}$ a $Z' \in a' \setminus \{O\}$ platí

$$d(a, a') = \operatorname{arccosh} \frac{Q(Z, Z')}{\sqrt{q(Z)q(Z')}}.$$

Priestor (P, d) je metrickým priestorom. Nazývame ho *projektívny model* n -rozmerného hyperbolického priestoru. Metrický priestor (B, d) , kde d je metrika na B sa nazýva *Kleinov model* hyperbolického priestoru.

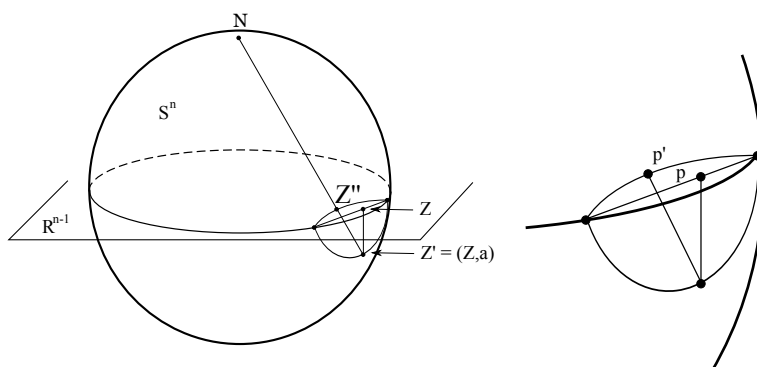
5.3.2 Poincarého konformný model

Poincarého model vzniká transformáciou $\alpha : B \rightarrow B$, kde $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je už spomenutý otvorený kruh z Kleinovho modelu. Uvažujme najprv projekciu $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}^n$, ktorá bodu $Z = (z^0, \dots, z^{n-2})$, zobrazeného Kleinovým modelom v otvorenom kruhu B priradí bod $Z' = (z^{0'}, \dots, z^{n-1'})$ na spodnej časti sféry S^n tak, že $Z' = (Z, a) = (z^0, \dots, z^{n-2}, a)$, pre reálne číslo a . Táto projekcia bodu pridá iba ďalšiu súradnicu, teda sa jedná o kolmé zobrazenie z B do spodnej časti S^n . Znázornené to je na obrázku 5.5.

Bod Z' teraz opäť zobrazíme na B , urobíme *stereografickú* projekciu $\chi : S^n \rightarrow B$, ktorá bodu Z' priradí priesečník priamky $Z'N$, priamky charakterizovanej bodom Z' a severným pólom N jednotkovej sféry S^n , a otvoreného kruhu B . Tento bod si označíme Z'' .

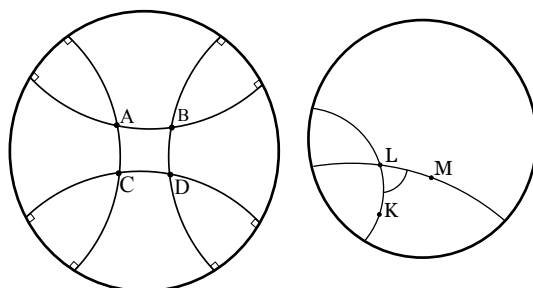
Zložené zobrazenie $\alpha(Z) = \chi(\psi(Z)) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ tým pádom zobrazuje bod Z do Z'' , a teda transformuje Kleinov model v B na Poincarého.

Poincarého model je tým pádom tak isto ako Kleinov $(n-1)$ -rozmerným modelom, v ktorom sú ale priamky reprezentované časťami kružníc. Špeciálnym



Obrázok 5.5: Projekcia, ktorou vzniká Poincarého konformný model z Kleinovho. Vpravo, zobrazenie priamky p z projektívneho modelu do p' v konformnom.

případom je tiež kružnica s nekonečným polomerom, teda priamka vedená cez stred Poincarého kruhu (poz. obrázok 5.3).



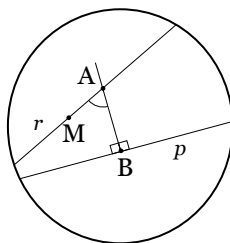
Obrázok 5.6: Vľavo, hyperbolický štvorec v Poincarého modeli. Vpravo je uhol $\angle(KLM)$ priamok LK a LM .

5.4 Uhly v hyperbolickej geometrii

Keďže v hyperbolickej geometrii existuje viac než jedna rovnobežná priamka ku zadanej priamke r , má zmysel uvažovať o tzv. *uhle rovnobežnosti*.

Definícia 13. Predpokladajme priamku p a na nej neležiaci bod A . Cez bod A budeme viesť rovnobežku r prechádzajúcu bodom M , tak ako je znázornené na obrázku 5.7.

Ďalej si vytvoríme kolmicu na p prechádzajúcu bodom A . Jej priesečník s r


 Obrázok 5.7: Uhol rovnobežnosti $\angle BAM$ priamok p a r .

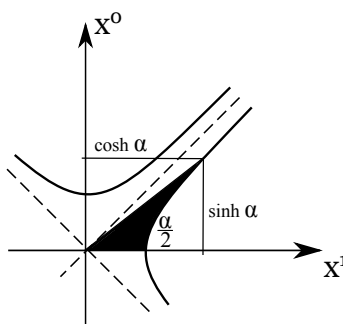
si označíme ako B . Uhol $\angle BAM$ nazývame *uhlom rovnobežnosti* priamok r a p .

Definícia 14. Uhol α polpriamok AB a AM začínajúcich v bode A , ktoré v ňom majú dotykové vektory u, v , je definovaný ako $\alpha \in (0, \pi)$, pre ktoré platí

$$\cos \alpha = -\frac{Q(u, v)}{\sqrt{q(u)q(v)}} = -\frac{-u^1 v^1 + \sum_{i=2}^n u^i v^i}{\sqrt{q(u)q(v)}}. \quad (5.1)$$

Podobne, ako sme mali v euklidovskej geometrii definovaný kosínus a sínus uhla, ktoré tvorili súradnice bodu na jednotkovej kružnici pre daný uhol, si môžeme tiež v hyperbolickej geometrii definovať *hyperbolický sínus* a *hyperbolický kosínus*. Sú definované funkciami

$$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \quad \cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}.$$


 Obrázok 5.8: Hyperbolický sínus a kosínus pre uhol α .

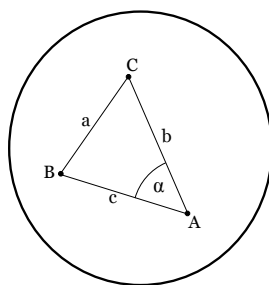
Vytvoríme si teraz polpriamku zo stredu súradnicovej sústavy. Polpriamka pretína hyperbolu v bode $(\sinh \alpha, \cosh \alpha)$, kde α je dvojnásobok obsahu plochy

ohraničenej hyperbolou, polpriamkou a súradnicovou osou x^1 , čo je aj znázornené na obrázku 5.8.

5.5 Trojuholníková nerovnosť

Veta 5.5.1. *Hyperbolická kosínusová veta.* Nech body $A, B, C \in B$, $A \neq B$, $A \neq C$. Označme si dĺžky strán trojuholníka ABC ako $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ a $c = d(A, B)$, a nech α je uhol v bode A medzi polpriamkami AB a AC (poz. obrázok 5.9). Potom platí

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha. \quad (5.2)$$



Obrázok 5.9: Trojuholník ABC v Kleinovom modeli.

Z tejto vety taktiež vyplýva hyperbolická *trojuholníková nerovnosť*. Je zrejmé, že $\cos \alpha \geq -1$, z čoho vyplýva

$$\cosh a \leq \cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c = \cosh(b + c), \quad (5.3)$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $\cos \alpha = -1$, respektíve $\alpha = \pi$. V tomto prípade ležia body A, B, C na jednej priamke a úsečku a delí bod A na dve časti – na úsečku b a c .

Veta 5.5.2. *Hyperbolická sínusová veta.* Pre hyperbolický trojuholník A, B, C so stranami a, b, c a príslušnými uhlami α, β, γ taktiež platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}. \quad (5.4)$$

Definícia 15. *Kružnica* s polomerom r a stredom Z_0 je množina bodov Z

$$Z \in B, \quad d(Z_0, Z) = r.$$

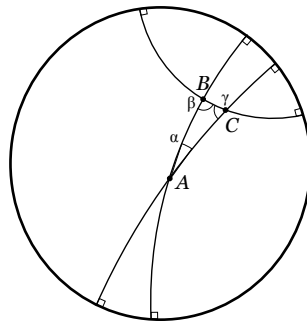
Pre jej obvod O podľa [5] navyše v hyperbolickej geometrii platí, že $O = 2\pi \sinh r$. Keďže Kleinov model nezachováva uhly, a tým pádom ani pomery strán, kružnice sú v ňom reprezentované elipsami.

5.6 Obsah a uhlový defekt trojuholníka

V hyperbolickej geometrii je súčet uhlov v trojuholníku menší ako π . Navyše, pre rôzne trojuholníky nadobúda rôzne hodnoty. V tejto časti si definujeme takzvaný *uhlový defekt* a ukážeme si ako je závislý od obsahu trojuholníka $\triangle ABC$. Hyperbolická geometria však nie je jedinou geometriou, v ktorej má zmysel uvažovať uhlový defekt. V euklidovskej geometrii tiež existuje, avšak je stále nulový, zatiaľ čo v eliptickej geometrii je vždy záporný.

Definícia 16. *Uhlový defekt* trojuholníka $\triangle ABC$ s príslušnými uhlami α, β, γ je definovaný a označovaný ako

$$\text{defekt}(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma. \quad (5.5)$$

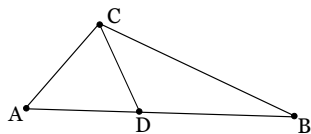


Obrázok 5.10: Hyperbolický trojuholník v Poincarého konformnom modeli s uhlovým defektom $\text{defekt}(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Veta 5.6.1. *Súčet uhlových defektov.* Nech $\triangle ABC$ je trojuholník a nech D je bod ležiaci na úsečke AB . Potom platí

$$\text{defekt}(\triangle ABC) = \text{defekt}(\triangle ACD) + \text{defekt}(\triangle BCD).$$

Dôkaz: Priamka CD rozdeľuje uhol $\angle ACB$ na dva uhly, teda platí

Obrázok 5.11: Trojuholník ABC rozdelený bodom D na ACD a BCD .

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD.$$

Ďalej, pre uhly $\angle ADC$ a $\angle BDC$ je zrejmé, že $\angle ADC + \angle BDC = \pi$. Potom

$$\text{defekt}(\triangle ABC) = \pi - \angle BAC - \angle ACB - \angle ABC,$$

za $\angle ACB$ dosadíme $\angle ACD + \angle BCD$,

$$\text{defekt}(\triangle ABC) = \pi - \angle BAC - \angle ACD - \angle BCD - \angle ABC,$$

a pripočítame $0 = \pi - \angle ADC - \angle BDC$. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} \text{defekt}(\triangle ABC) &= \pi - \angle BAC - \angle ACD - \angle ADC + \pi - \angle BCD - \angle ABC - \angle BDC = \\ &= \text{defekt}(\triangle ACD) + \text{defekt}(\triangle BCD). \end{aligned}$$

□

Veta 5.6.2. *Obsah trojuholníka ABC s príslušnými uhlami α, β, γ je násobkom jeho uhlového defektu*

$$S_{\Delta} = \sigma(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \quad (5.6)$$

pre nejaké kladné reálne číslo σ .

Na základe tejto vety si môžeme vziať takú mieru, môžeme merať takým spôsobom, aby $\sigma = 1$, teda obsah trojuholníka a jeho uhlový defekt môžeme stotožniť.

Taktiež si treba uvedomiť, že keďže uhlový defekt je v hyperbolickej geometrii kladné číslo patriace $(0, \pi)$, jeho konečný násobok môže byť tiež iba konečným číslom. Tým sa dostávame k dôsledku predchádzajúcej vety.

Dôsledok: Každý trojuholník v hyperbolickom priestore má konečný obsah.

5.7 Pseudo-sférické súradnice

V tejto časti si zadefinujeme takzvané pseudo-sférické súradnice v priestore R_1^3 . Tieto súradnice sú dôležité, pretože definujú polomer ρ hyperboloidu, konštantu, ktorou sú jednotlivé hyperboloidy jednoznačne určené. Majme súradnice

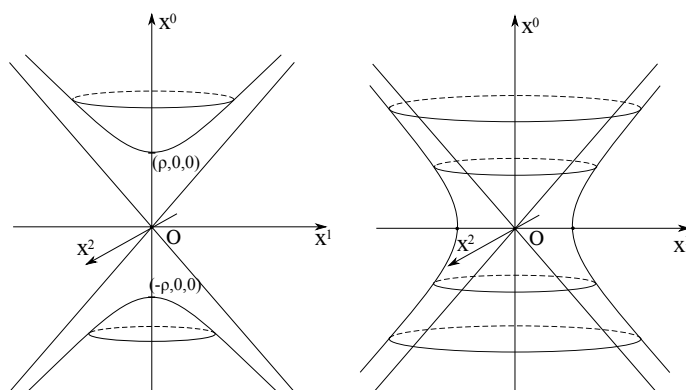
pseudo-euklidovského priestoru x^0, x^1, x^2 . Potom pseudo-sférické ρ, χ, φ sú definované ako

$$\begin{cases} x^0 = \rho \cosh \chi \\ x^1 = \rho \sinh \chi \cos \varphi \\ x^2 = \rho \sinh \chi \sin \varphi \end{cases} \begin{cases} -\infty < \rho < \infty, \\ 0 \leq \chi < \infty, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (5.7)$$

Potom platí

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -\rho^2 \leq 0,$$

kde ρ nazývame *polomer hyperboloidu*, jednotlivé hyperboloidy (respektíve ich časti) dostaneme tak, že ρ položíme rovné konštantе. Prípád $\rho = 0$ tvorí svetelný kužeľ. Inak je týmto rovnicami definovaný hyperboloid, ktorý sa skladá z dvoch častí, vrchnej a spodnej. Vrchná časť prislúcha $\rho > 0$ a spodná $\rho < 0$. Je zrejmé, že obidve takto vytvorené časti, ležia vnútri svetelného kužeľa.



Obrázok 5.12: Vľavo, vrchný hyperboloid vytvorený súradnicami typu (5.8) s kladným polomerom, spodný hyperboloid so záporným polomerom. Vpravo, hyperboloid zo súradníc typu (5.9).

Podobne máme aj pseudo-sférické súradnice bodov mimo svetelného kužeľa, takých, pre ktoré platí $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = \rho^2 > 0$. Sú zadané rovnicami:

$$\begin{cases} x^0 = \rho \sinh \chi \\ x^1 = \rho \cosh \chi \cos \varphi \\ x^2 = \rho \cosh \chi \sin \varphi \end{cases} \begin{cases} 0 < \rho < \infty, \\ 0 \leq \chi < \infty, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (5.8)$$

Všimnime si, že sú definované iba pre kladný polomer, a tým pádom generujú jeden spojitý „vonkajší“ hyperboloid.

Kapitola 6

Záver

Neeuklidovská geometria a Minkowského priestor boli významným skokom vo vývoji nielen matematiky a geometrie, ale taktiež fyziky, a tým pádom celkového pohľadu ľudí na svet, v ktorom žijeme. Prechod od euklidovskej geometrie, ktorá bola považovaná za jedinú správnu geometriu, ku zakriveným geometriám, rozšíril obzor filozofov, matematikov a fyzikov 19. a 20. storočia, čoho vyvrcholením bolo sformulovanie Einsteinovej špeciálnej teórie relativity. Táto teória vysvetlila niektoré z vtedajších fyzikálnych problémov, ako je konštantnosť rýchlosti svetla, a ukázala, že model rovného euklidovského sveta je, aj keď vo väčšine aspektov každodenného života dostatočne presnou, ale predsa len aproximáciou reálneho štvorrozmerného Minkowského časopriestoru.

V tejto bakalárskej práci sme skúmali Minkowského priestor, jeho spojitosť s euklidovským priestorom a pseudo-euklidovskými priestormi. Cez Lorentzove transformácie sme si na ňom ilustrovali základné javy špeciálnej teórie relativity a v neposlednom rade sme pomocou neho odvodili zakrivenú hyperbolickú geometriu, ktorá sama osebe je zaujímavou a pomerne rozsiahlou témou.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Dubrovin. B.A., Fomenko. A.T., Novikov S.P. *Modern Geometry - Methods and Applications*, Springer, 1992
- [2] Stein. H. *On Einstein-Minkowski Space-Time*, Journal of Philosophy, 1968
- [3] Brown. H.R., Pooley.O. *Minkowski space-time: a glorious non-entity*, Journal of Philosophy, 2004
- [4] Einstein. A. *Relativity: The Special and General Theory*, Methuen & Co Ltd, 1920
- [5] Berger. M. *Geometry 2*, Springer, 1987
- [6] Wolfram MathWorld, elektronický učebný text dostupný na <http://mathworld.wolfram.com>
- [7] Hilbert. D. *Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1950
- [8] Ryoster. D.C., elektronický učebný text dostupný na <http://education.uncc.edu/droyster/courses/spring02/classnotes/Chapter04.pdf>
- [9] Coxeter, H.M.S. *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., 1969