

# Štruktúra rovinnej a priestorovej algebraickej krivky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Peter Danko

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA ALGEBRY, GEOMETRIE A DIDAKTIKY  
MATEMATIKY

Študijný odbor: 9.1.1 MATEMATIKA

Vedúci diplomovej práce:  
RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

BRATISLAVA 2009

**TU VLOZ ZADANIE**

## ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Vyhlasujem na svoju česť, že predloženú diplomovú prácu som vypracoval samostatne s využitím uvedenej literatúry a informačných zdrojov

V Bratislave, 30. apríla 2009

Peter Danko

## **POĎAKOVANIE**

Za pomoc, usmernenie, podnetné rady a konzultácie pri tvorbe tejto práce ďakujem môjmu školiteľovi RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD.

## Abstrakt

DANKO, Peter. *Štruktúra rovinnej a priestorovej algebraickej krivky* [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Školiteľ: RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD. Stupeň odbornej kvalifikácie: Magister. Bratislava: FMFI UK, 2009. 40s.

Práca oboznamuje čitateľa s implicitným vyjadrením rovinnej algebraickej krivky. Zaoberá sa počítaním významných bodov implicitne definovanej krivky a problému počítania topologického grafu tejto krivky. Súčasťou práce je aj metóda na aproximáciu rovinnej algebraickej krivky.

Priložený program vykonáva symbolické a numerický výpočty, ktoré sú potrebné na zostavenie grafu a aproximácie krivky. Používateľovi umožňuje zadať rovnicu krivky alebo vybrať si jednu z preddefinovaných rovníc a v dodatočných možnostiach si môže používateľ zvoliť objekty, ktoré sa majú vykresľovať.

**Kľúčové slová:** algebraická krivka, významné body, počítanie topológie, aproximácia.

## Predhovor

Práca sa venuje algebraickým krivkám, ktoré sú neoddeliteľnou súčasťou matematiky a geometrie. Keďže táto práca nemôže obsahovať všetky vlastnosti a súvislosti spojené s týmito krivkami, zamerali sme sa na určovanie topológie týchto kriviek, ktorú sme následne využili k počítaniu aproximácie.

Touto problematikou sa zaoberá viacero autorov, ale naša práca prevažne čerpá z článku [7] a z článku [12]. V prvom článku autori implementovali algoritmus, ktorý využíva trojitú projekciu významných bodov. V druhom článku je prezentovaný rýchly algoritmus, ale môže viesť k nekorektným výsledkom. V práci využívame symbolické rovnako aj numerické metódy, a to prevažne rezultanty, Sturmovu postupnosť a Newtonovu metódu.

Keďže názornosť pri práci s krivkami je dôležitá, bolo potrebné okrem obrázkov obsiahnutých v texte, priložiť k práci program, v ktorom sme skombinovali postupy zo spomenutých článkov do jedného algoritmu. Používateľ nami vytvoreného programu má možnosť si vybrať z niekoľkých preddefinovaných rovníc kriviek alebo zadať rovnicu krivky do vstupného poľa. V konzolovom okne môže používateľ sledovať postup algoritmu a pomocou základných ovládacích prvkov si môže zvoliť vykresľované objekty.

# Obsah

Úvod	10
<b>1 Algebrická krivka</b>	<b>11</b>
1.1 Implicitne definovaná funkcia . . . . .	11
1.2 Reprézntácia rovinnej krivky . . . . .	13
1.3 Geometria implicitne definovaných kriviek . . . . .	14
<b>2 Významné body</b>	<b>17</b>
2.1 Polynómy . . . . .	17
2.2 Prienik priamky a krivky . . . . .	18
2.3 Významné, singulárne a regulárne body . . . . .	19
<b>3 Určovanie topológie algebraických kriviek</b>	<b>22</b>
3.1 Pomocné nástroje . . . . .	22
3.2 Základné kroky . . . . .	24
3.3 Metóda počítania topológie algebraickej krivky podľa autorov Raimund Seidel a Nicola Wolpert . . . . .	25
3.4 Metóda počítania topológie algebraickej krivky podľa autorov Laureano Gonzalez-Vega a Ioana Necula . . . . .	27
3.5 Aproximácia implicitne definovanej krivky . . . . .	29
<b>4 Implementácia</b>	<b>30</b>
4.1 Aproximácia regulárnych oblúkov . . . . .	30
4.2 O programe . . . . .	31
4.3 Detailný príklad . . . . .	35
<b>Záver</b>	<b>38</b>
<b>Literatúra</b>	<b>39</b>

## Zoznam obrázkov

1	Kružnica daná rovnicou $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ na ktorej sú dva rôzne body $(a, b_0)$ a $(a, b_1)$ , pre ktoré existujú dve diferencovateľné funkcie $g_0(x) = \sqrt{1 - x^2}$ a $g_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ . (Zdroj: [9].) . . . . .	12
2	Kvadratické krivky - (a) elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , $(a, b \in \mathbb{R}_+)$ ; (b) hyperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , $(a, b \in \mathbb{R}_+)$ ; (c) parabola: $y = ax^2$ , $(a \in \mathbb{R}_+)$ ; (d) dve priamky: $x^2 - y^2 = 0$ . (Zdroj: [5].) . . . . .	13
3	Kubické krivky s dvojnásobnými bodmi - (a) Descartov list (angl. folium of Descartes): $x^3 - x^2 + y^2 = 0$ ; (b) semikubická parabola: $x^3 - y^2 = 0$ . (Zdroj: [16].) . . . . .	14
4	Krivky tretieho a vyššieho stupňa - (a) $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$ (zdroj: [16]), (b) lemniskáta: $x^2(1 - x^2) - y^2 = 0$ , (c) kardioida: $(x^2 + y^2 + 4y)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$ , (d) zjednotenie dvoch kružníc: $(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 9)^2 + 2(x^2 + 4)(y^2 - 9) = 0$ , (e) trojlístok: $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$ , (f) štvorlístok: $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ . (Zdroj obrázkov (b)–(f): [5].) . . . . .	15
5	Priamky prechádzajúce bodom krivky s násobnosťou aspoň 1, v tomto bode je jedna dotyčnica $L_{(\lambda, \mu)}$ a všetky ostatné priamky (napr. $L_1$ a $L_2$ ) majú prienik s krivkou jednoduchý. . . . .	19
6	Rôzne priamky prechádzajúce bodom krivky s násobnosťou aspoň 2. Krivka má v tomto bode práve dve rôzne dotyčnice $L_{(\lambda_1, \mu_1)}$ a $L_{(\lambda_2, \mu_2)}$ , všetky ďalšie priamky (napr. $L_1$ a $L_2$ ) prechádzajúce týmto bodom majú s krivkou prienik s násobnosťou práve 2 . . . . .	20
7	Na obrázku (a) je krivka, ktorá nie je vo všeobecnej polohe. Na obrázku (b) je krivka po skosení a spĺňa podmienky všeobecnej polohy. . . . .	25
8	Hore – projekcia významných bodov v dvoch smeroch. Dole – trojitá projekcia významných bodov. . . . .	27
9	(a) – určujúci obdĺžnik $B$ , (b) – prechodný obdĺžnik $B'$ , (c) – izolujúci obdĺžnik $B''$ . . . . .	28
10	Graf medzi regulárnymi a singulárnymi bodmi na priamkach $x = \alpha_i$ a $x = \alpha_{i+1}$ . . . . .	29
11	Kvadratická transformácia krivky s rovnicou $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ na krivku s rovnicou $g(u, v) = v^2 - 1 - u$ . (Zdroj: [2].) . . . . .	30



12	Obrázok (a) – oblúk prisluchajúci k hrane $AB$ . Obrázok (b) – body $d_1, \dots, d_9$ , ktoré tvoria lomenú čiaru aproximujúcu oblúk medzi $AB$ , získali sme ich ako prieniky priamok $x = c_i$ s oblúkom. . . . .	31
13	Dve rôzne situácie, keď k jednej hrane $AB$ prislúchajú dva oblúky krivky. A teda k hrane $AB$ hľadáme pomocou priamok $x = c_i$ dve rôzne lomené čiary. . . . .	32
14	Okno <i>ACV controls</i> . . . . .	34
15	Lemniskáta s rovnicou $f(x, y) = -x^4 - y^2 + x^2$ . . . . .	35
16	(a) – algebraická krivka $\Gamma$ s rovnicou $\bar{f}(x, y) = -\frac{1}{16}(3y - 2x)^4 + \frac{1}{4}(3y - 2x)^2 - y^2$ , (b)-(e) – postup tvorby grafu krivky $\Gamma$ , (f) – topologický graf krivky $\Gamma$ . . . . .	37

## Zoznam tabuliek

1	Významné body $p_i$ a počet vetiev vstupujúcich do týchto bodov zľava $l(p_i)$ a sprava $r(p_i)$ . . . . .	37
---	--	----

# Úvod

Hlavným cieľom práce je štúdium a analýza rovinných algebraických kriviek za účelom ich vizualizácie. Zamerali sme sa na skúmanie významných a singularných bodov a dotyčníc v týchto bodoch. V práci vypočítame topologický graf rovinatej krivky a aproximáciu lomenou čiarou.

Práca sa skladá zo štyroch kapitol.

Prvá kapitola zhŕňa teoretické podklady a uvádza definície potrebné pre pochopenie implicitného vyjadrenia krivky, o ktorom hovoríme vo väčšine textu. Začína podkapitolou, ktorá obsahuje vetu o implicitnej funkcii. Práve táto veta je podkladom pre pochopenie implicitného vyjadrenia krivky, ktoré je definované v druhej podkapitole. V tretej podkapitole definujeme základné pojmy ako napríklad dotyčnica, normála, krivosť alebo dĺžka.

Na začiatku druhej kapitoly sa venujeme koreňom polynomickej rovnice  $f(x, y) = 0$  a ich násobnosti. Definujeme v nej pojem významného, singularného a regulárneho bodu krivky, ktoré potrebujeme v tretej kapitole na zostavenie grafu krivky.

Cieľom tretej kapitoly je získanie topologického grafu krivky. V prvej podkapitole sú uvedené symbolické a numerické nástroje. Druhá podkapitola nám poskytuje všeobecné kroky tvorby grafu a aj predspracovanie vo forme skosenia krivky. Ďalšie dve podkapitoly sú venované dvom rôznym prístupom tvorby grafu krivky, ktoré sa držia schémy popísanej v druhej podkapitole. Postup zhrnutý v poslednej podkapitole využíva iteratívne prechádzanie po krivke a kvadratickú transformáciu singularného bodu.

Posledná štvrtá kapitola je venovaná programu, ktorý je priložený k tejto práci. Najprv uvedieme aproximáciu regulárnych oblúkov krivky, z ktorých vytvoríme aproximáciu celej krivky. Objasníme aj funkčnosť jednotlivých ovládacích prvkov a technické detaily programu. V poslednej časti uvedieme detailný príklad určenia grafu konkrétnej algebraickej krivky.

# 1 Algebrická krivka

V tejto kapitole sa oboznámime s vetou o implicitnej funkcii a s niekoľkými reprezentáciami krivky. Jednou z nich implicitné vyjadrenie, ktoré nás bude sprevádzať touto prácou. Zhrnieme aj potrebné definície a pojmy, ktoré čerpáme z [5], [8] a [9].

## 1.1 Implicitne definovaná funkcia

Definíciu spojitej a inverznej funkcie nájdeme v [6] a dôkaz k nasledujúcej vete nájdeme v [9].

### Veta 1.1 (Veta o inverznej funkcii.)

Predpokladajme, že funkcia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojito diferencovateľná na otvorenej množine obsahujúcej bod  $a$ . Ďalej predpokladajme, že  $\det f'(a) \neq 0$ . Potom existuje otvorená množina  $V$ ,  $a \in V$ , a otvorená množina  $W$ ,  $f(a) \in W$ , pre ktorú platí, že k funkcii  $f: V \rightarrow W$  existuje spojitá inverzná funkcia  $f^{-1}: W \rightarrow V$ , ktorá je diferencovateľná a pre všetky  $y$  platí

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}. \quad (1)$$

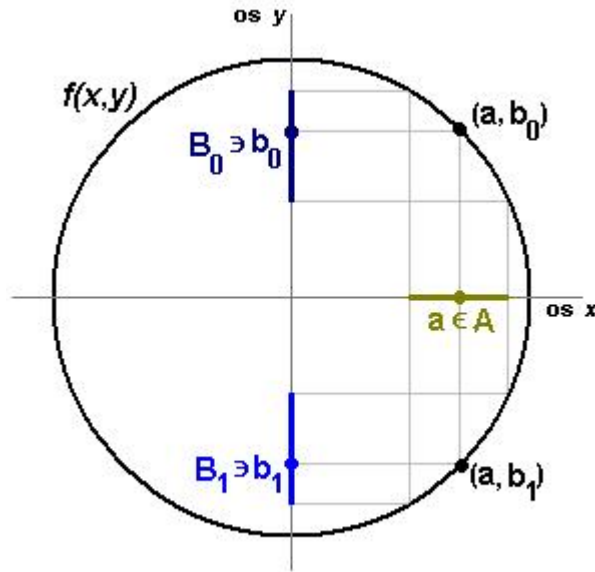
### Veta 1.2 (Veta o implicitne definovanej funkcii.)

Predpokladajme, že funkcia  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kde  $f = (f^1, \dots, f^{n+m})$ , je spojito diferencovateľná na otvorenej množine obsahujúcej bod  $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  a  $f(a, b) = 0$ . Nech

$$M = (Df)(a, b)_{1 \leq i, j \leq m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1(a, b)}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial f^1(a, b)}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m(a, b)}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial f^m(a, b)}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

je matica hodnôt parciálnych derivácií funkcie  $f$  v bode  $(a, b)$ . Ak  $\det M \neq 0$ , potom existuje otvorená množina  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in A$ , a otvorená množina  $B \subset \mathbb{R}^m$ ,  $b \in B$ , kde pre každé  $x \in A$  existuje práve jedno  $g(x) \in B$  také, že  $f(x, g(x)) = 0$ . Navyše funkcia  $g(x)$  je diferencovateľná.

**Dôkaz.** Definujme funkciu  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , pre ktorú platí  $F(x, y) = (x, f(x, y))$ . Potom  $\det F'(a, b) = \det M \neq 0$ . Aplikovaním vety o inverznej funkcii na  $F$  dostávame, že k funkcii  $F$  existuje inverzná funkcia  $G$  v otvorenom okolí bodu  $(a, 0) = F(a, b)$  o ktorom môžeme predpokladať, že je to množina tvaru  $A \times B$ . Ľahko môžeme ukázať, že pre funkciu  $G: W \rightarrow A \times B$  platí, že  $G(x, y) = (x, k(x, y))$  pre nejakú diferencovateľnú funkciu  $k$ . Nech



Obrázok 1: Kružnica daná rovnicou  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  na ktorej sú dva rôzne body  $(a, b_0)$  a  $(a, b_1)$ , pre ktoré existujú dve diferencovateľné funkcie  $g_0(x) = \sqrt{1 - x^2}$  a  $g_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ . (Zdroj: [9].)

$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  je projekcia  $\pi(x, y) = y$ . Potom  $\pi \circ F = f$ . Po dosadení dostávame

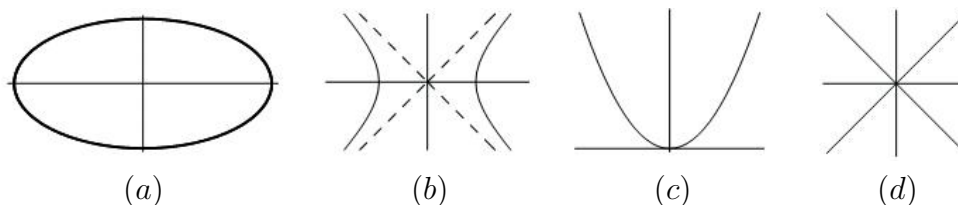
$$\begin{aligned} f(x, k(x, y)) &= f \circ h(x, y) = (\pi \circ F) \circ h(x, y) = \\ &= \pi \circ (F \circ h)(x, y) = \pi(x, y) = y. \end{aligned} \quad (3)$$

Preto  $f(x, k(x, 0)) = 0$ , t.j. môžeme definovať funkciu  $g(x) = k(x, 0)$ . ■

### Príklad 1.3

Uvažujme funkciu  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovanú polynómom  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  (obrázok 1). Ak zoberieme bod  $(a, b_0)$  taký, že  $f(a, b_0) = 0$  a zároveň  $a \notin \{1, -1\}$ , tak pre tento bod existuje otvorený interval  $A$ ,  $a \in A$ , a otvorený interval  $B_0$ ,  $b_0 \in B_0$ , s nasledujúcou vlastnosťou: ak  $x \in A$ , potom existuje práve jedno  $y \in B_0$  také, že  $f(x, y) = 0$ .

Vidíme, že pre interval  $B_0$  môžeme definovať funkciu  $g_0 : A \rightarrow \mathbb{R}$  kde,  $g_0(x) \in B_0$  a  $f(x, g_0(x)) = 0$ . V našom prípade je teda funkcia  $g_0(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Ďalej vidíme, že pre funkciu  $f$  môžeme nájsť aj iné  $b_1$  také, že  $f(a, b_1) = 0$ . A teda existuje interval  $B_1$ ,  $b_1 \in B_1$ , pre ktorý platí že, ak  $x \in A$ , potom  $f(x, g_1(x)) = 0$  pre práve jedno  $g_1(x) \in B_1$ , v našom prípade  $g_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ .



Obrázok 2: Kvadratické krivky - (a) elipsa:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $a, b \in \mathbb{R}_+$ ); (b) hyperbola:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $a, b \in \mathbb{R}_+$ ); (c) parabola:  $y = ax^2$ , ( $a \in \mathbb{R}_+$ ); (d) dve priamky:  $x^2 - y^2 = 0$ . (Zdroj: [5].)

Na tomto príklade sme ukázali, že kružnicu, ktorú nevieme napísať ako funkciu jednej premennej, vieme popísať dvoma funkciami  $g_0$  a  $g_1$ . Veta o implicitnej diferencovateľnej funkcii nám hovorí o existencii funkcií ako sú  $g_0$  a  $g_1$  a navyše zaručuje to, že tieto funkcie sú diferencovateľné, ak sú na to vhodné vstupné funkcie.

Pomocou vety o implicitnej funkcii vieme definovať krivky. Ak  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spĺňa predpoklady vety, tak lokálne vieme definovať krivku ako funkciu.

## 1.2 Reprezentácia rovinnej krivky

**Definícia 1.4** (*Implicitne definovaná krivka v  $\mathbb{E}^2$* )

Nech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencovateľná funkcia. Potom množinu bodov

$$\Gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) : f(\mathbf{x}) = 0 \} \quad (4)$$

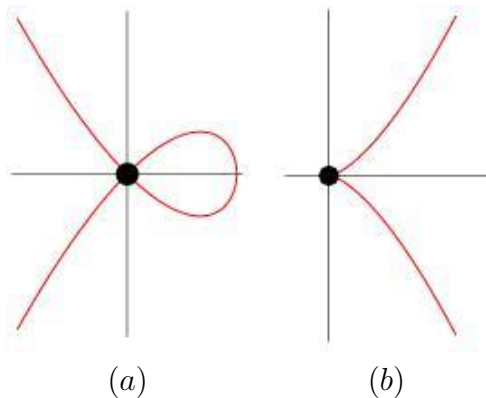
nazývame implicitne definovanou (rovinnou) krivkou. Ak  $f(x, y)$  je nekonštantný polynóm stupňa  $n$  v premenných  $x$  a  $y$ , tak krivku  $\Gamma$  nazývame algebraická krivka. Rovnicu  $f(x, y) = 0$  nazývame aj rovnicou krivky  $\Gamma$ .

**Príklad 1.5** V tomto príklade uvedieme niekoľko rôznych implicitne definovaných kriviek.

- Krivku danú kvadratickým polynómom

$$f(x, y) = (ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g) \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \quad (5)$$

nazývame kuželosečka (kvadratická krivka). Príklady kuželosečiek definovaných polynómom druhého stupňa nad polom  $\mathbb{R}$  sú na obrázku 2. Sú to krivky, ktoré dostaneme ako prienik kužela s rovinou.



Obrázok 3: Kubické krivky s dvojnásobnými bodmi - (a) Descartov list (angl. folium of Descartes):  $x^3 - x^2 + y^2 = 0$ ; (b) semikubická parabola:  $x^3 - y^2 = 0$ . (Zdroj: [16].)

- *Krivky dané polynómom tretieho stupňa nazývame kubiky. Dve z nich sú načrtnuté na obrázku 3, obe sú definované nad poľom  $\mathbb{R}$ .*
- *Niekoľko kriviek, ktorých rovnice sú polynómy vyššieho stupňa, sú na obrázku 4.*
- *Príklad rovnice ako je  $x^2 + y^2 = 0$  alebo  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  nám naznačujú, že množina koreňov môže byť konečná alebo prázdna. Ale ak pracujeme nad algebrickým uzavretým poľom, potom množina  $\Gamma$  je nekonečná.*

**Definícia 1.6 (Parametricky zadaná krivka)**

Rovinnú krivku môžeme zadať parametricky pomocou bodovej funkcie jednej (číselnej) premennej, teda pomocou zobrazenia

$$P : I \rightarrow \mathbb{E}^2, \tag{6}$$

kde  $I$  je ľubovoľný interval na číselnej osi  $\mathbb{R}$ .

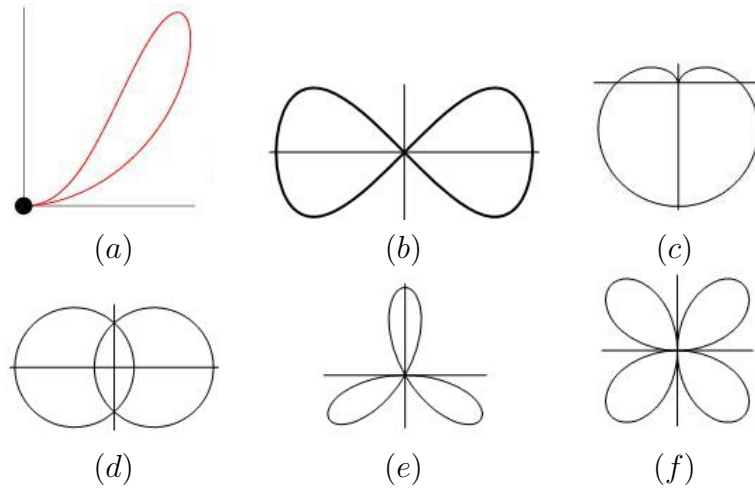
Klasický zápis:  $P = P(t), t \in I$ . Zápis v súradniciach:  $P(t) = (x(t), y(t)), t \in I$ , kde  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  sú číselné funkcie premennej  $t \in I$ . Premennú  $t$  nazývame parametrom bodu  $P(t)$ .

### 1.3 Geometria implicitne definovaných kriviek

Pojem regulárneho a singulárneho bodu definujeme v kapitole 2.3.

**Definícia 1.7 (Dotyčnica)**

Dotyčnica krivky danej parametrizáciou  $P(t), t \in I$  v regulárnom bode  $P(t_0)$



Obrázok 4: Krivky tretieho a vyššieho stupňa -

(a)  $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$  (zdroj: [16]),

(b) lemniskáta:  $x^2(1 - x^2) - y^2 = 0$ ,

(c) kardioida:  $(x^2 + y^2 + 4y)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$ ,

(d) zjednotenie dvoch kružníc:  $(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 9)^2 + 2(x^2 + 4)(y^2 - 9) = 0$ ,

(e) trojlístok:  $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$ ,

(f) štvorlístok:  $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ .

(Zdroj obrázkov (b)–(f): [5].)

je priamka určená bodom  $P(t_0)$  a vektorom  $P'(t_0)$ , ktorý sa nazýva dotykový vektor krivky. Vektor

$$P'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \quad (7)$$

je derivácia bodovej funkcie  $P(t) = (x(t), y(t))$  v parametri  $t_0 \in I$ .

### Definícia 1.8 (Normála)

Normála krivky v regulárnom bode krivky je každá priamka idúca bodom krivky kolmo na dotyčnicu. V rovine má krivka v regulárnom bode práve jednu normálu.

### Definícia 1.9 (Gradient)

Gradient funkcie  $F(x, y)$  je vektor, presnejšie vektorová funkcia dvoch premenných

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right). \quad (8)$$

### Veta 1.10 (Normála vs. gradient)

Nech  $(x_0, y_0)$  je regulárny bod krivky danej rovnicou  $f(x, y) = 0$ . Potom je vektor  $\nabla F(x_0, y_0)$  kolmý na dotyčnicu ku krivke v bode  $(x_0, y_0)$ .

**Dôkaz.** Nech  $P(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$  je nejaká parametrizácia uvažovanej krivky, kde  $P(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ . Potom  $F(x(t), y(t)) = 0$  pre všetky  $t$ . Po zderivovaní pre  $t = t_0$  dostaneme

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} y'(t_0) = 0. \quad (9)$$

Ľavá strana je skalárny súčin vektorov  $\nabla F(x_0, y_0)$  a  $P'(t_0)$ , preto  $\nabla F(x_0, y_0) \perp P'(t_0)$ . ■

**Definícia 1.11** (*Regulárna krivka.*)

Rovinnú krivku bez singulárnych bodov nazývame regulárna rovinná krivka.

**Definícia 1.12** (*Krivosť parametricky zadanej krivky*)

Krivosť regulárnej rovinnnej krivky zadanej parametricky je daná vzťahom

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

**Definícia 1.13** (*Krivosť implicitne definovanej krivky*)

Krivosť regulárnej rovinnnej krivky zadanej polynómom  $f(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ , je daná vzťahom

$$\kappa = \frac{f_y^2(\mathbf{x})f_{xx}(\mathbf{x}) - 2f_x(\mathbf{x})f_y(\mathbf{x})f_{xy}(\mathbf{x}) + f_x^2(\mathbf{x})f_{yy}(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|^3} \quad (11)$$

**Definícia 1.14** (*Dĺžka krivky*)

Dĺžka parametricky zadanej krivky  $p(t) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je daná vzťahom

$$l = \int_a^b |p'(t)| dt. \quad (12)$$



## 2 Významné body

Táto kapitola nás oboznámuje s pojmom významného a singulárneho bodu a s násobnosťou týchto bodov, ktoré využívame v nasledujúcich kapitolách. Literatúru k tvorbe tejto kapitoly preberáme z [1], [4], [5], [10] a [12].

### 2.1 Polynómy

V tejto podkapitole budeme uvažovať polynómy nad okruhom  $\mathbb{R}[x]$ . Dôkazy k vetám, ktoré sú uvedené v tejto podkapitole, môžeme nájsť v [10].

#### Definícia 2.1 *Koreň polynómu.*

*Bod  $a$  sa nazýva koreň polynómu  $f(x)$  ak  $f(a) = 0$ , kde  $f(a)$  je hodnota polynómu  $f(x)$  v bode  $a$ . Tiež môžeme povedať, že  $a$  je koreň rovnice  $f(x) = 0$ .*

Základné vlastnosti koreňov polynómu vychádzajú z nasledujúcej vety.

#### Veta 2.2 *Veta o zvyšku polynómu.*

*Zvyšok po delení polynómu  $p(x)$  lineárnym polynómom  $(x - a)$  sa rovná  $p(a)$ . Polynóm  $p(x)$  je deliteľný polynómom  $(x - a)$  práve vtedy, keď číslo  $a$  je koreňom  $p(x)$ .*

Z predchádzajúcej vety získame dva dôsledky.

**Dôsledok 2.3** *Bod  $a$  je koreň polynómu  $f(x)$  práve vtedy, keď  $(x - a)$  delí  $f(x)$  bezo zvyšku. Teda, ak existuje polynóm  $g$  taký, že  $f(x) = (x - a)g(x)$ .*

**Dôsledok 2.4** *Polynóm stupňa  $n$  má najviac  $n$  koreňov.*

#### Definícia 2.5 *Násobnosť koreňa polynómu.*

*Nech  $a$  je koreň polynómu  $f(x)$ . Násobnosťou koreňa nazývame číslo  $k \in \mathbb{N}$  také, že  $(x - a)^k$  delí  $f(x)$  a zároveň  $(x - a)^{k+1}$  nedelí  $f(x)$ . Ak koreň  $a$  má násobnosť  $k$ , tak hovoríme, že  $a$  je  $k$ -násobný koreň.*

**Veta 2.6** *Nech  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  a nech  $a$  je  $k$ -násobný koreň polynómu  $f(x)$ . Ak  $k = 1$ , tak  $a$  nie je koreňom  $f'(x)$ . Ak  $k > 1$ , tak  $a$  je  $(k - 1)$ -násobný koreň  $f'(x)$ .*

**Veta 2.7** *Nech  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  a nech  $a$  je koreň polynómu  $f(x)$ . Potom  $a$  je  $k$ -násobný koreň práve vtedy, keď  $f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0 \wedge \dots \wedge f^{k-1}(a) = 0 \wedge f^k(a) \neq 0$ .*

## 2.2 Prienik priamky a krivky

**Definícia 2.8** Nech  $\Gamma$  je krivka s rovnicou  $f(x, y) = 0$  a

$$\begin{aligned}x &= a + \lambda t \\y &= b + \mu t\end{aligned}\tag{13}$$

sú parametrické rovnice ľubovoľnej priamky  $L$  prechádzajúcej bodom krivky  $p = (a, b)$  pre ktorú platí, že prienik  $L \cap \Gamma$  pozostáva z konečného počtu bodov. Násobnosť prieniku priamky  $L$  určenej vektorom  $(\lambda, \mu)$  a krivky  $\Gamma$  je rovná násobnosti koreňa polynómu

$$g(t) = f(a + \lambda t, b + \mu t)\tag{14}$$

v premennej  $t = 0$ .

Rozpísaním  $g(t)$  na Taylorov rad máme

$$g(t) = g(0) + g(0)'t + \frac{1}{2!}g(0)''t^2 + \dots\tag{15}$$

To nás vedie k rozpísaniu  $f(x, y)$  na

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(a, b) + (f_x(a, b)\lambda + f_y(a, b)\mu)t + \\&+ \frac{1}{2!}(f_{xx}(a, b)\lambda^2 + 2f_{xy}(a, b)\lambda\mu + f_{yy}(a, b)\mu^2)t^2 + \dots\end{aligned}$$

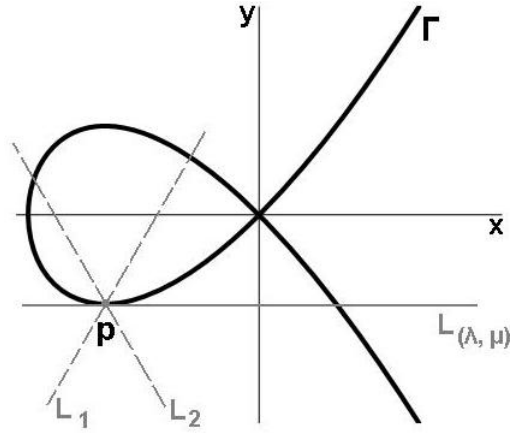
Keďže  $f(a, b) = 0$  dostávame

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_k^{i=0} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(a, b)(x-a)^i(x-b)^{k-i}\tag{16}$$

**Príklad 2.9** Ak násobnosť krivky  $\Gamma$  v bode  $p$  je 1, potom až na jednu výnimku majú všetky priamky prechádzajúce bodom  $p$  s krivkou  $\Gamma$  jednoduchý prienik. Túto výnimku tvorí práve dotyčnica ku krivke v bode  $p$ , ktorej smerový vektor je  $(\lambda, \mu)$ , pozri obrázok 5.

Ak násobnosť krivky  $\Gamma$  v bode  $p$  je 2, potom všetky priamky prechádzajúce bodom  $p$  majú s krivkou aspoň dva prieniky (nie nutne rôzne) a najviac dve z nich majú počet prienikov viac ako 2, pozri obrázok 6. Sú to dotyčnice, ktorých smerové vektory určujú korene rovnice

$$f_{xx}(a, b)\lambda^2 + 2f_{xy}(a, b)\lambda\mu + f_{yy}(a, b)\mu^2 = 0.\tag{17}$$



Obrázok 5: Priamky prechádzajúce bodom krivky s násobnosťou aspoň 1, v tomto bode je jedna dotyčnica  $L_{(\lambda, \mu)}$  a všetky ostatné priamky (napr.  $L_1$  a  $L_2$ ) majú prienik s krivkou jednoduchý.

Takto sa dostaneme k všeobecnému prípadu, keď násobnosť krivky v bode  $p$  je  $r$ . Potom pre presne  $r$  priamok je násobnosť prieniku  $p$  väčšia ako  $r$ . Týchto  $r$  priamok, dotyčníc krivky  $\Gamma$  v bode  $p$ , nám určujú korene rovnice

$$\sum_r^{i=0} \binom{r}{i} \frac{\partial^r f}{\partial x^i \partial y^{r-i}}(a, b) \lambda^i \mu^{r-i} = 0. \quad (18)$$

Násobnosť dotyčníc je daná násobnosťou jednotlivých koreňov predchádzajúcej rovnice.

## 2.3 Významné, singulárne a regulárne body

### Definícia 2.10

Nech  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  a  $\Gamma$  je reálna rovinná algebrická krivka definovaná polynómom  $f$ :

$$\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : f(\alpha, \beta) = 0\}. \quad (19)$$

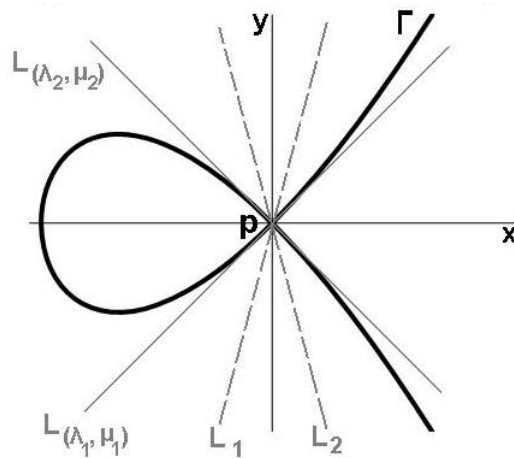
Bod  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  nazývame:

- významný bod krivky  $\Gamma$  v smere  $x$  ak

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0, \quad (20)$$

- singulárny bod krivky  $\Gamma$  ak

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = 0, \quad (21)$$



Obrázok 6: Rôzne priamky prechádzajúce bodom krivky s násobnosťou aspoň 2. Krivka má v tomto bode práve dve rôzne dotyčnice  $L_{(\lambda_1, \mu_1)}$  a  $L_{(\lambda_2, \mu_2)}$ , všetky ďalšie priamky (napr.  $L_1$  a  $L_2$ ) prechádzajúce týmto bodom majú s krivkou prienik s násobnosťou práve 2

- regulárny bod krivky  $\Gamma$  ak  $f(\alpha, \beta) = 0$  a nie je významným bodom.

**Poznámka 2.11** Singulárny bod  $(\alpha, \beta)$  krivky charakterizuje aj to, že gradient  $\nabla f(\alpha, \beta) = (0, 0)$ .

**Definícia 2.12 (Viacnásobný bod.)**

Nech  $k > 0$  je prirodzené číslo, ktoré nám označuje  $k$ -tú deriváciu krivky  $f(x, y) = 0$  v bode  $P$ . Potom bod  $P$  je  $k$ -násobný bod krivky  $f(x, y) = 0$  práve vtedy, keď všetky  $k - 1$  derivácie funkcie  $f$  sú nulové a  $k$ -ta derivácia je nenulová.

Všetky body s násobnosťou väčšou ako dva nazývame singulárnymi bodmi. V singulárnom bode má krivka špecifické správanie, napríklad môže byť krivka v tomto bode zlomená, vtedy hovoríme o singulárnom bode aj ako o bode vratu, alebo sa krivka sama pretína, vytvára uzol. V singulárnom bode má krivka viacero dotyčníc, kde niektoré z nich môžu byť viacnásobné (totožné). Vo významných bodoch má krivka zvislé dotyčnice. V regulárnom bode má krivka práve jednu dotyčnicu kvôli tomu, že v ňom existuje nenulová prvá derivácia, ktorá určuje smerový vektor tejto dotyčnice. Násobnosť regulárneho bodu je samozrejme 1. Významné a singulárne body budeme potrebovať na vizualizáciu algebraickej krivky. Pomocou týchto bodov si krivku rozdelíme na regulárne oblúky, ktoré budeme neskôr parametrizovať.

V nasledujúcich bodoch uvedieme zopár príkladov kriviek s rôznymi typmi singulárnych bodov, ktoré sú umiestnené do počiatku súradnicovej sústavy. Opíšeme aj násobnosť týchto bodov a dotyčnice ku krivke  $\Gamma$  v týchto bodoch:

- uzol (resp. uzlový bod) – krivka daná polynómom  $x^3 - x^2 + y^2 = 0$  (obrázok 3 (a)) má jeden uzlový bod, jeho násobnosť je 2. V tomto bode má táto krivka dve rozdielne dotyčnice s rovnicami  $x - y = 0$  a  $x + y = 0$ ,
- body vratu môžeme rozdeliť na dva druhy podľa toho, či krivka prechádza v danom bode z jednej polroviny určenej dotyčnicou v tomto bode do druhej alebo či sa krivka nachádza celá v jednej polrovine,
  - bod vratu prvého druhu (angl. cusp) – je znázornený na obrázku 3 (b), nachádza sa na krivke s rovnicou  $x^3 - y^2 = 0$ , jeho násobnosť je 2 a krivka má v tomto bode dvojnásobnú dotyčnicu  $y = 0$ ,
  - bod vratu druhého druhu (angl. ramphoid cusp) - je dvojnásobný singulárny bod, nájdeme ho napr. na krivke  $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$  (obrázok 4 (a)) a dotyčnica je rovnaká ako v predchádzajúcom prípade,
- bod s násobnosťou 3 je na krivke s názvom trojlístok (angl. trifolium), je daná polynómom  $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$  a má vo svojom singulárnom bode tri rôzne dotyčnice dané rovnicami  $y = 0$ ,  $\sqrt{3}x - y = 0$  a  $\sqrt{3}x + y = 0$ , pozri obrázok 4 (e),
- bod s násobnosťou 4 môžeme vidieť na štvorlístku  $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ , ktorá má v singulárnom bode dve dvojnásobné dotyčnice, ktorých rovnice sú  $x = 0$  a  $y = 0$ , , pozri obrázok 4 (f).

### 3 Určovanie topológie algebraických kriviek

Symbolické a numerické nástroje, ktoré potrebujeme na vypočítanie topológie krivky, sú vysvetlené v tejto kapitole, literatúru preberáme z [3]. Opíšeme aj dva rôzne postupy určovania topológie implicitne definovaných kriviek podľa [7] a [12], ktorých sme sa pridržovali pri tvorbe aplikácie. Na porovnanie uvedieme aj iteratívny prístup prezentovaný v [2].

#### 3.1 Pomocné nástroje

**Definícia 3.1** *Nech  $f, g \in \mathbb{R}[x]$  sú polynómy stupňov  $m$  a  $n$ :*

$$\begin{aligned} f &= f_m x^m + \cdots + f_1 x + f_0, & f_m &\neq 0, \\ g &= g_n x^n + \cdots + g_1 x + g_0, & g_n &\neq 0. \end{aligned}$$

*Štvorcová matica*

$$Syl(f, g) = \left( \begin{array}{cccccc} f_m & f_{m-1} & \cdots & f_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_m & \cdots & f_1 & f_0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & f_m & \cdots & f_1 & f_0 \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_m & \cdots & g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & g_m & \cdots & g_1 & g_0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left( \right)} \\ \vphantom{\left( \right)} \\ \vphantom{\left( \right)} \\ \vphantom{\left( \right)} \\ \vphantom{\left( \right)} \\ \vphantom{\left( \right)} \\ \vphantom{\left( \right)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n - \text{krát} \\ m - \text{krát} \end{array} \quad (22)$$

*sa nazýva Sylvestrova matica polynómov  $f$  a  $g$ .*

*Rezultant polynómov  $f$  a  $g$  je determinant  $\text{res}(f, g) = \det Syl(f, g)$ .*

**Veta 3.2** *(Cauchy)*

*Nech  $f \in \mathbb{R}[x]$ ,  $f = f_m x^m + \cdots + f_1 x + f_0$ ,  $f_m \neq 0$ . Nech  $a$  je reálny koreň rovnice  $f(x)$ ,  $f(a) = 0$ . Potom*

$$|a| \leq \sum_{i=0}^m \frac{f_i}{f_m}. \quad (23)$$

**Dôsledok 3.3** *Všetky reálne korene rovnice  $f_m x^m + \cdots + f_1 x + f_0 = 0$  ( $f_m \neq 0$ ) sa nachádzajú v intervale*

$$\left( -\sum_{i=0}^m \frac{f_i}{f_m}, \sum_{i=0}^m \frac{f_i}{f_m} \right). \quad (24)$$

**Veta 3.4** (*Sturmova postupnosť*)

Sturmova postupnosť polynómu  $p$  je postupnosť  $(p_0, p_1, \dots, p_k)$  polynómov, kde

$$\begin{aligned} p_0 &= p, \\ p_1 &= p', \\ p_i &= -\text{rem}(p_{i-2}, p_{i-1}), \quad \text{pre } i \geq 2, \end{aligned}$$

kde  $p_k$  je posledný nenulový člen (t.j.  $p_k \neq 0, p_{k+1} = 0$ ).

**Definícia 3.5** Nech  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_k)$  je postupnosť nenulových reálnych čísel. Počet znamienkových zmien  $\text{Var}(\mathbf{a})$  v postupnosti  $\mathbf{a}$  je definovaný

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_0) &= 0 \\ \text{Var}(a_0, \dots, a_k) &= \begin{cases} \text{Var}(a_1, \dots, a_k) + 1, & \text{ak } a_0 a_1 < 0 \\ \text{Var}(a_1, \dots, a_k), & \text{ak } a_0 a_1 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Definícia 3.6** Nech  $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_k)$  je postupnosť polynómov v  $\mathbb{R}[x]$  a nech  $a$  je reálne číslo. Potom

$$\text{Var}_{\mathbf{p}}(a) = \text{Var}(p_0(a), \dots, p_k(a)). \quad (25)$$

**Veta 3.7** (*Sturm*)

Nech  $p \in \mathbb{R}[x]$  a nech  $\mathbf{p} = (p_i)_{i=0}^k$  je Sturmova postupnosť polynómu  $p$ . Nech  $a, b \in \mathbb{R}$  sú reálne čísla pre ktoré platí, že  $a < b, p(a) \neq 0, p(b) \neq 0$ . Potom číslo

$$\text{Var}_{\mathbf{p}}(a) - \text{Var}_{\mathbf{p}}(b) \quad (26)$$

určuje počet reálnych koreňov polynómu  $p$  na intervale  $(a, b)$ .

### Newtonova metóda

Algoritmus hľadania koreňov diferencovateľnej funkcie  $f$  pomocou Newtonovej metódy začína počiatočným odhadom koreňa  $t_0$ . Potom v každej ďalšej iterácii vypočítame novú aproximáciu koreňa  $t_i$  na základe vzťahu

$$t_i = t_{i-1} - \frac{f(t_{i-1})}{f'(t_{i-1})} \quad (27)$$

Takto dostaneme postupnosť hodnôt  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , ktorá konverguje k jednému z koreňov danej funkcie. Výpočet ukončíme, ak dva po sebe idúce vypočítané aproximácie koreňa sa líšia o nejakú nami zvolenú konštantu. Môže sa stať, že funkcia nebude mať v danom intervale žiadny reálny koreň a v takom prípade by sme iterovali donekonečna a preto v implementácii obmedzíme počet iterácií nejakou konštantou.

### Polynóm bez násobných koreňov

Nech  $g \in \mathbb{Q}[x]$  je polynóm. Označme

$$\tilde{g} = \frac{g}{\gcd(g, g_x)}, \quad (28)$$

kde  $\gcd(g, g_x)$  je najväčší spoločný deliteľ polynómov  $g$  a  $g_x$ . Potom polynóm  $\tilde{g}$  má rovnaké korene ako  $g$ , ale všetky sú jednoduché, t.j.  $\tilde{g}$  je separabilný.

### Syntetické delenie (Ruffiniho pravidlo)

Nech  $f(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  je polynóm s reálnymi koeficientami a  $g(y) = y - c$  je lineárny polynóm. Potom

$$f(y) = g(y)q(y) + r(y), \quad (29)$$

kde  $q(y) = b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} y^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$  je podiel polynómov  $f(y)$  a  $g(y)$  so zvyškom  $r(y)$ . Koeficienty polynómu  $q(x)$  vypočítame nasledovne

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1}c \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + b_1c \end{aligned}$$

a zvyšok  $r = a_0 + b_0 c$ .

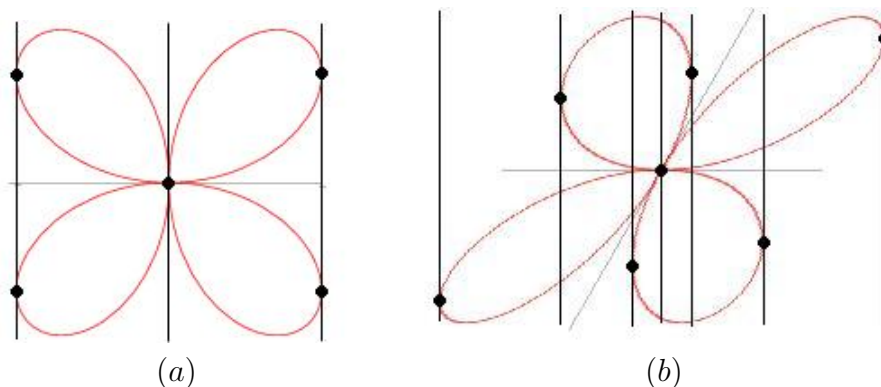
## 3.2 Základné kroky

V článkoch [7] a [12] sa autori držia týchto troch všeobecných krokov, ktoré nám poskytnú dostatočné informácie na určenie topologického grafu krivky  $\Gamma$  zadanej polynómom  $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$

1. počítanie rezultantu  $R(x)$  z  $f$  podľa  $y$  a určenie jeho reálnych koreňov  $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$ , teda množinu  $x$ -ových súradníc významných bodov,
2. pre každé  $\alpha_i$  počítanie reálnych koreňov polynómu  $g_i(y) = f(\alpha_i, y)$ , teda  $y$ -ové súradnice významných bodov na priamkach daných rovnicami  $x = \alpha_i$ , označme ich  $\beta_{i,j}$ ,
3. pre každý významný bod  $(\alpha_i, \beta_{i,j})$  určenie počtu vetiev krivky vstupujúcich do tohto bodu zľava a sprava.

Tento prístup vychádza z predpokladu, že krivka je vo všeobecnej polohe. To znamená, že neobsahuje vertikálnu priamku a že žiadne dva významné





Obrázok 7: Na obrázku (a) je krivka, ktorá nie je vo všeobecnej polohe. Na obrázku (b) je krivka po skosení a spĺňa podmienky všeobecnej polohy.

body nemajú rovnakú  $x$ -ovú súradnicu. Krivku danú rovnicou  $f(x, y) = 0$  dostaneme do všeobecnej polohy napríklad skosením

$$\begin{aligned}x &= x - \lambda y, \\y &= y,\end{aligned}$$

kde  $\lambda$  je vhodne zvolené racionálne číslo. Toto skosenie roviny nemení topologickú štruktúru krivky. Na obrázku 7 (a) vidíme, že krivka nie je vo všeobecnej polohe, keďže sú tam dvojice bodov, ktoré ležia na rovnakej vertikálnej priamke. Druhá krivka, obrázok 7 (b), je vo všeobecnej polohe a získali sme ju skosením ľavej krivky.

**Poznámka 3.8** *Existujú aj deterministické algoritmy na transformovanie krivky do všeobecnej polohy, napríklad [11], ale počet pre nás nesprávnych transformácií, ktoré netransformujú krivku do všeobecnej polohy, je ohraničený číslom  $\binom{c}{2}$ , kde  $c$  je počet rozdielnych významných bodov (kapitola 2.3). A preto ak zistíme, že sme použili nesprávnu transformáciu, zopakujeme náš postup s novou transformáciou. Napríklad, ak v druhom kroku vypočítame na priamke  $x = \alpha_i$  viacero rôznych významných bodov  $\beta_{i,j}$ , potom sme nesprávne zvolili hodnotu  $\lambda$ .*

### 3.3 Metóda počítania topológie algebraickej krivky podľa autorov Raimund Seidel a Nicola Wolpert

V článku [7] prezentujú metódu, ktorá využíva trojitú projekciu a vyhýba sa počítaniu koreňov polynómov s reálnymi koeficientami. Vychádzajú z pred-

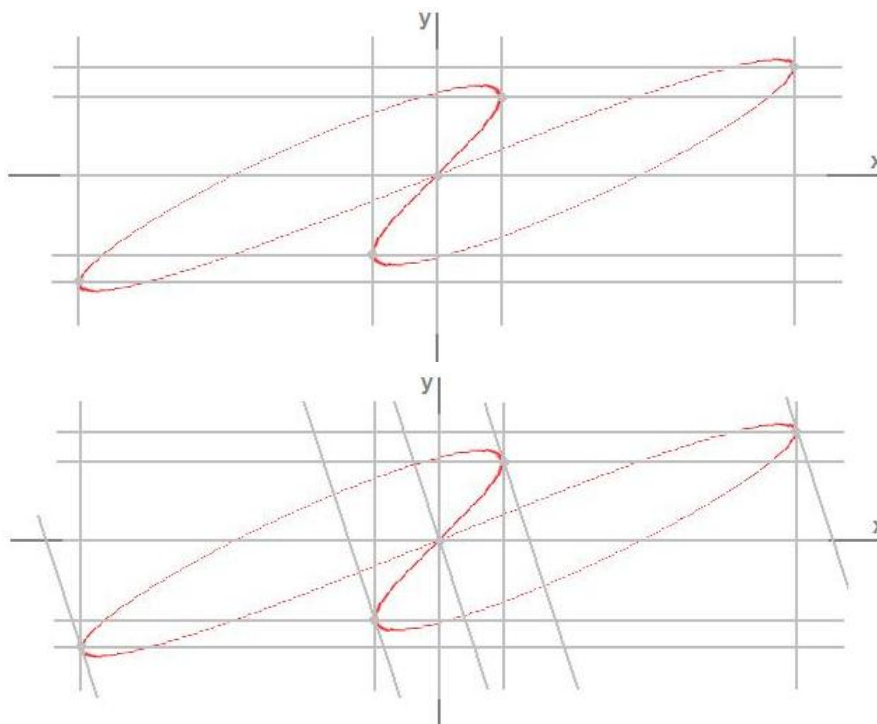
pokladu, že krivka  $\Gamma$  zadaná polynómom  $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$  je vo všeobecnej polohe. V prvom kroku určia množinu koreňov  $A$  resultantu  $R(x) = \text{res}(f, f_y, y)$ . Keďže sa tento prvý krok dá reprezentovať ako projekcia významných bodov na  $x$ -ovú os, potom množina koreňov  $B$  resultantu  $S(y) = \text{res}(f, f_y, x)$  tvorí projekciu významných bodov na  $y$ -ovú os. Ale na vytvorenie množiny významných bodov  $K \subset A \times B$  nám nestačí poznať iba množiny  $A, B$ , pretože tie tvoria  $m$  vodorovných a  $n$  zvislých priamok (obrázok 8 hore). Preto autori zaviedli projekciu významných bodov na  $x$ -ovú os v treťom smere, pre ktorý platí, že žiadne dva významné body nemajú rovnakú projekciu v tomto smere. Táto tretia projekcia nám z  $mn$  prienikov vyberie práve  $m$  a tým určí množinu významných bodov (obrázok 8 dole). Tretí smer je určený vektorom  $(-\lambda_2, 1)$ , kde  $\lambda_2$  je opäť náhodne zvolené racionálne číslo tak, aby sme dostali presne  $m$  rôznych koreňov. V tejto trojitej projekcii máme zahrnutý prvý a druhý všeobecný krok.

Autori v tomto článku reprezentujú koreň polynómu  $g$  pomocou dvojice  $([a, b], \tilde{g})$ , kde  $I_\alpha = [a, b]$  je interval, ktorý obsahuje práve jeden koreň  $\alpha$  polynómu  $g$  a jeho koncové body  $a, b$  sú racionálne,  $\tilde{g}$  je polynóm  $g$  bez násobných koreňov. S touto reprezentáciou koreňov získame po tretej projekcii  $m$  určujúcich obdĺžnikov  $I_\alpha \times I_\beta$  (angl. identifying boxes) pre všetky významné body.

V poslednom kroku autori aplikujú metódu na zmenšenie určujúceho obdĺžnika významného bodu na izolujúci obdĺžnik (angl. isolating box). Je to obdĺžnik, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

- jeho strany sú rovnobežné so súradnicovými osami,
- obsahuje práve jeden významný bod,
- vertikálne strany pretínajú tie vetvy krivky  $\Gamma$ , ktoré prechádzajú významným bodom, ktorý sa nachádza v jeho vnútri,
- horizontálne strany sa s krivkou  $\Gamma$  nepretínajú.

Postup zmenšenia určujúceho obdĺžnika na izolujúci je nasledovný. Nech  $q$  je významný bod krivky  $\Gamma$  a nech  $B$  je jeho určujúci obdĺžnik, napríklad obrázok 9 (a). Nech  $l$  je vertikálna priamka obsahujúca bod  $q$ . Predpokladajme, že máme k dispozícii krivku  $\Gamma_h$  určenú polynómom  $h$ , ktorá neobsahuje bod  $q$ . Táto krivka  $\Gamma_h$  oddeľuje  $q$  od ostatných prienikov krivky  $\Gamma$  s obdĺžnikom  $B$  tak, že ak sa vyberieme z bodu  $q$  v smere priamky  $l$ , narazíme najprv na krivku  $\Gamma_h$  skôr ako na prienik obdĺžnika  $B$  s krivkou  $\Gamma$ . Ak teraz zmenšíme  $B$  na  $B'$  tak, aby  $B'$  nepretínal krivku  $\Gamma_h$  dostaneme obdĺžnik (obrázok 9 (b)), ktorý následne zmenšíme na obdĺžnik  $B''$ , ktorého horné a dolné strany

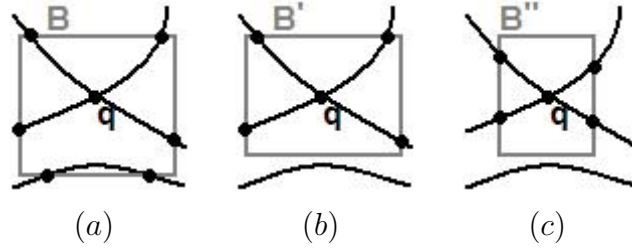


Obrázok 8: Hore – projekcia významných bodov v dvoch smeroch. Dole – trojitá projekcia významných bodov.

nepretínajú krivku  $\Gamma$ , obrázok 9 (c). Týmto spôsobom dostaneme požadovaný izolujúci obdĺžnik  $B''$ . Polynóm  $h = f_y^k$ , t.j.  $k$ -ta derivácia krivky  $\Gamma$  podľa  $y$ , kde  $k$  je násobnosť významného bodu  $q$ .

### 3.4 Metóda počítania topológie algebraickej krivky podľa autorov Laureano Gonzalez-Vega a Ioana Necula

Článok [12] sa taktiež zaoberá počítaním topológie implicitne definovanej algebraickej krivky. Autori využívajú symbolické predspracovanie, po ktorom aplikujú numerické výpočty. Algoritmus implementovali v softvéri Maple. Využívajú Sturm-Habichtovú postupnosť, z ktorej získali množstvo informácií potrebných na zostavenie topologického grafu. Taktiež predpokladajú, že krivka  $\Gamma$  je vo všeobecnej polohe. Okrem počítania významných bodov, počítajú aj regulárne body krivky. Ak bod  $(\alpha_i, \beta_i)$  je významným bodom krivky (pozri kapitolu 2.3), potom môžeme určiť regulárne body krivky na priamke



Obrázok 9: (a) – určujúci obdĺžnik  $B$ , (b) – prechodný obdĺžnik  $B'$ , (c) – izolujúci obdĺžnik  $B''$

$x = \alpha_i$  ako korene polynómu

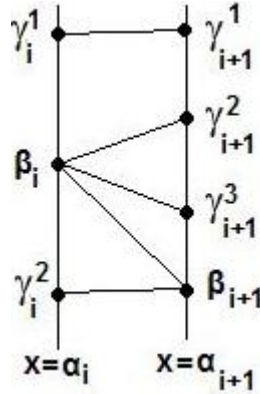
$$F(\alpha_i, \beta_i, y) = \frac{f(\alpha_i, y)}{y - \beta_i}. \quad (30)$$

Uvedomme si, že čitateľ aj menovateľ predošlého zlomku sú polynómy s reálnymi koeficientami. Avšak menovateľ je lineárny polynóm a preto tento podiel vypočítame pomocou syntetického delenia založeného na Ruffiniho pravidle (kapitola 3.1). Zoznam regulárnych bodov potrebujeme na určenie počtu vetiev vchádzajúcich do významného bodu sprava a zľava.

Majme významné body krivky usporiadané podľa  $x$ -ovej súradnice. Pre významný bod  $(\alpha_i, \beta_i)$  uvažujme dve zvislé priamky  $x = \delta_i$  a  $x = \delta_{i+1}$  pre ktoré platí, že  $\alpha_{i-1} < \delta_i < \alpha_i < \delta_{i+1} < \alpha_{i+1}$ . Nech  $v(\delta_i), v(\alpha_i), v(\delta_{i+1})$  označujú počet regulárnych bodov na priamkach  $x = \delta_i$ ,  $x = \alpha_i$ ,  $x = \delta_{i+1}$ . Potom počet vetiev vstupujúcich do bodu  $(\alpha_i, \beta_i)$  zľava je rovný  $v(\delta_i) - v(\alpha_i)$  a počet vetiev vstupujúcich do bodu  $(\alpha_i, \beta_i)$  sprava je rovný  $v(\delta_{i+1}) - v(\alpha_i)$ . Pre regulárny bod platí, že počet vetiev vstupujúcich zľava a sprava je rovný 1.

Graf krivky medzi dvoma významnými bodmi  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$  vytvoríme tak, že vhodne pospájame regulárne a významné body na priamkach  $x = \alpha_i$ ,  $x = \alpha_{i+1}$ . Presnejšie, pospájame ich tak, aby sa hrany grafu pretínali iba vo významných bodoch, pozri obrázok 10.

Algoritmus prezentovaný v tomto článku pracuje prevažne s numerickými metódami. A teda ak chceme korektný výsledok, potrebujeme vysokú presnosť. Algoritmus pracuje s najmenšou presnosťou 10 miest, ktorá ak nestačí je postupne zvyšovaná. Vo výsledkoch uvedených v tomto článku môžeme vidieť, že pri istej špecifickej krivke potrebovali presnosť až 40 miest na to, aby dosiahli jej správny topologický opis.



Obrázok 10: Graf medzi regulárnymi a singulárnymi bodmi na priamkach  $x = \alpha_i$  a  $x = \alpha_{i+1}$ .

### 3.5 Aproximácia implicitne definovanej krivky

Uvedieme inkrementálny prístup, ktorý je podrobne popísaný v [2]. Majme krivku  $\Gamma_f$  zadanú polynómom  $f(x, y) = 0$ . Základná idea pozostáva v dvoch krokoch:

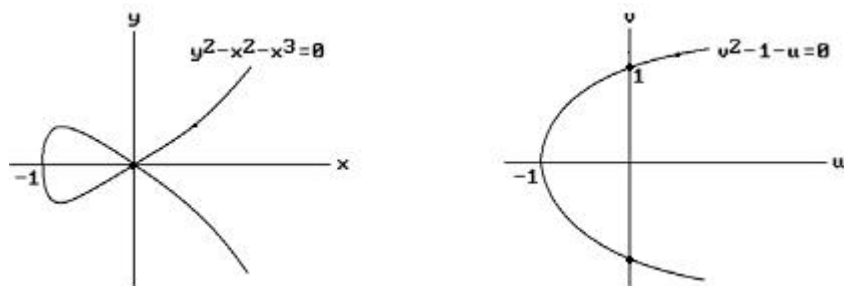
1. ak sa nachádzame v regulárnom bode krivky, potom sa iteratívne pohybujeme po krivke v smere dotyčnice ku krivke v danom regulárnom bode pomocou jednej zo štandardných metód hľadania koreňov,
2. ak sme v singulárnom bode, potom použijeme kvadratickú transformáciu (upresníme neskôr) a prejdeme cez singulárny bod. Keď sme za singulárnym bodom, transformáciu vrátime a pokračujeme v prechádzaní po regulárnych bodoch podľa prvého kroku.

Kvadratickú transformáciu definujeme týmto predpisom:

$$\begin{aligned} T_1 : \quad u &= x & \text{alebo} & & T_2 : \quad u &= x/y \\ v &= y/x & & & v &= y. \end{aligned} \tag{31}$$

Ak krivka neobsahuje vertikálnu dotyčnicu, potom použijeme  $T_1$ , inak  $T_2$ . Tieto transformácie aplikujeme iba na singulárne body, ktoré sú v počiatku súradnicovej sústavy a preto ak singulárny bod v ňom nie je, musíme ho do počiatku dostať ďalšou transformáciou.

**Príklad 3.9** Na obrázku 11 vidíme, že krivku  $\Gamma_f$  s rovnicou  $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$  transformujeme na krivku  $\Gamma_g$  s rovnicou  $g(u, v) = v^2 - 1 - u$ . Dvojnásobný singulárny bod krivky  $\Gamma_f$ , ktorý sa nachádza v počiatku, sme kvadratickou transformáciou rozložili na dve regulárne body  $(0, 1), (0, -1)$  krivky  $\Gamma_g$ .



Obrázok 11: Kvadratická transformácia krivky s rovnicou  $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$  na krivku s rovnicou  $g(u, v) = v^2 - 1 - u$ . (Zdroj: [2].)

## 4 Implementácia

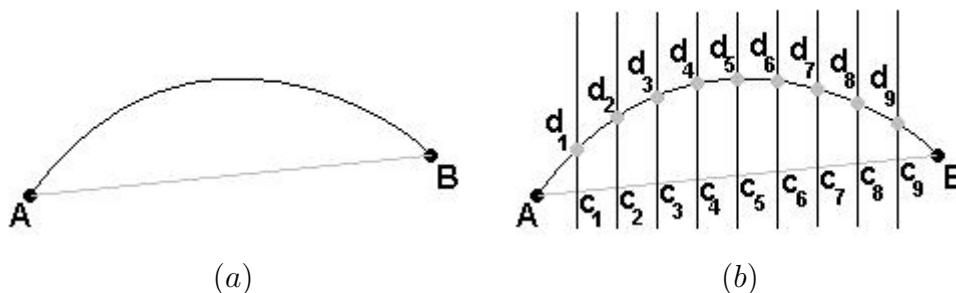
Program *Algebraic curve visualization* priložený k tejto práci nám slúži ako vizualizačná pomôcka na prezentovanie predchádzajúcich postupov. V tejto kapitole uvádzame aj základnú metódu na aproximovanie regulárnych oblúkov, ktoré korešpondujú s hranami grafu vytvoreného v kapitole 3.4. Túto metódu sme implementovali v našom programe. *ACV* je skratka od *Algebraic curve visualization*.

### 4.1 Aproximácia regulárnych oblúkov

V predchádzajúcich kapitolách sme sa dozvedeli ako získame topologický graf implicitne definovanej krivky  $\Gamma$ . Vrcholy grafu sú významné body krivky a hrany sme vhodne vytvorili tak, aby sa nepretínali (pozri kapitolu 3.4). Vieme, že významné body nám rozdeľujú krivku na regulárne oblúky, ktoré budeme aproximovať. Ak spojíme čiastočné aproximácie oblúkov, získame aproximáciu krivky. Regulárny oblúk krivky budeme aproximovať lomenou čiarou, ktorej vrcholy získame nasledujúcim spôsobom.

Nech číslo  $n$  určuje počet úsečiek lomenej čiary, a teda úroveň vzorkovania. Nech body  $a, b$  sú koncové body hrany topologického grafu krivky  $\Gamma$ , napríklad obrázok 12 (a). Túto hranu rozdelíme na  $n$  úsečiek rovnakej dĺžky tak, aby sa pretínali iba v koncových bodoch, označme ich  $c_0 = a, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b$ . Teraz použijeme postup z kapitoly 3.4 a určíme množinu priekop  $C_i$  priamky  $x = c_i$  s krivkou  $\Gamma$ . Vzhľadom na to, že  $c_0 = a$  a  $c_n = b$ , potom stačí, keď  $i = 1, \dots, n - 1$ . Vieme, že medzi bodmi  $a, b$  sa nenachádza žiaden významný bod a teda v množinách  $C_i$  sú iba regulárne body. Z množín  $C_i$  určíme body  $d_i \in C_i$ , pre ktoré platí

$$|d_i, c_i| = \min \{|e, c_i|, e \in C_i\}, \quad (32)$$



Obrázok 12: Obrázok (a) – oblúk prisluchajúci k hrane  $AB$ . Obrázok (b) – body  $d_1, \dots, d_9$ , ktoré tvoria lomenú čiaru aproximujúcu oblúk medzi  $AB$ , získali sme ich ako prieniky priamok  $x = c_i$  s oblúkom.

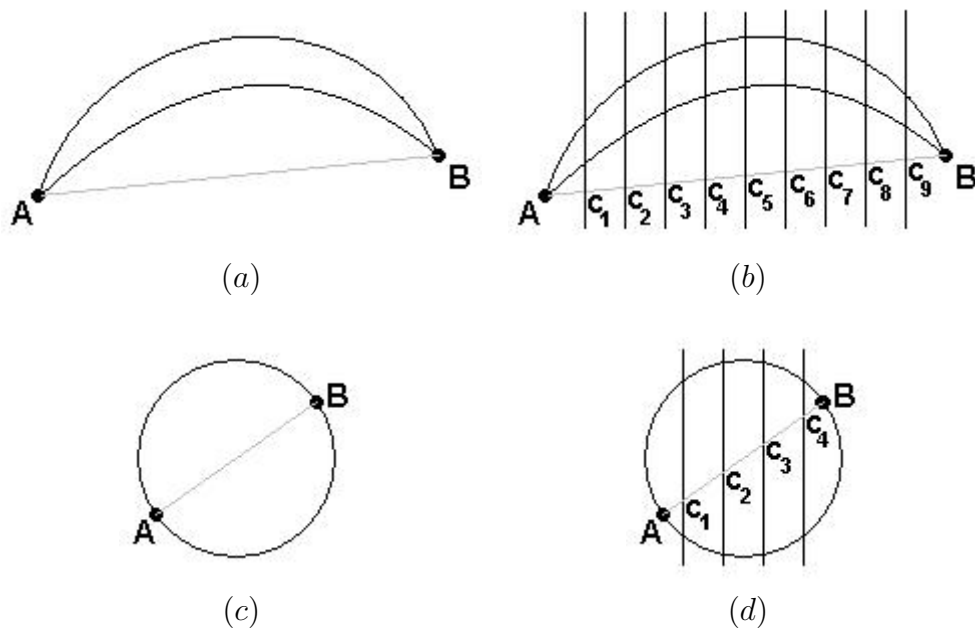
čiže bod  $d_i$  je k bodu  $c_i$  najbližšie, napríklad obrázok 12 (b). Potom body  $a, d_1, \dots, d_{n-1}, b$  tvoria vrcholy lomenej čiary, ktorá aproximuje oblúk krivky  $\Gamma$  medzi bodmi  $a, b$  s rovnomerným vzorkovaním.

**Poznámka 4.1** *Tento postup nám dá nekompletný výsledok v situáciách, keď k jednej hrane grafu prislúcha viacero oblúkov, napríklad obrázok 13.*

**Poznámka 4.2** *V našej implementácii používame pre každý oblúk rovnaké rovnomerné vzorkovanie, ktoré je vhodné pre väčšinu kriviek, ale určite nie pre všetky. Vhodnejšie by bolo adaptívne vzorkovanie pre každý oblúk zvlášť, ktoré by bralo do úvahy dĺžku a krivosť oblúku tak, že na kratšie alebo viac zakrivené oblúky by sme použili hustejšie vzorkovanie a naopak na dlhšie alebo menej zakrivené oblúky by sme poučili vzorkovanie s menšou úrovňou.*

## 4.2 O programe

Algoritmus sme implementovali v jazyku C++ v prostredí CodeBlocks na platforme MS Windows XP. Ako kompilátor sme použili GNU GCC Compiler. V implementácii sme použili knižnice GLUT (verzia 3.7), GLUI (verzia 2.36) a GiNaC (verzia 1.5.1). Knižnicu GLUT [13] sme použili na vykresľovanie bodov a čiar. Knižnica GLUI [14] nám poskytuje ovládacie prvky. Táto knižnica nevie spracovávať diakritiku a preto sme pre celú aplikáciu zvolili anglický jazyk. Symbolické výpočty robíme pomocou knižnice GiNaC [15]. Vstupom do nášho algoritmu je rovnica algebraickej krivky a výstupom je topologický graf a vizualizácia krivky.



Obrázok 13: Dve rôzne situácie, keď k jednej hrane  $AB$  prislúchajú dva oblúky krivky. A teda k hrane  $AB$  hľadáme pomocou priamok  $x = c_i$  dve rôzne lomené čiary.

Po spustení programu sa nám otvoria tri okná. Prvé okno má názov *ACV controls*, obrázok 14. Druhé okno má názov *ACV sketch*. Tretie okno je takzvané *konzolové okno*. Pripomenieme, že *ACV* je skratka od *Algebraic curve visualization*.

Ovládacie prvky v okne *ACV controls* sú rozdelené do štyroch hlavných panelov.

Prvý panel *Enter curve equation* obsahuje vstupné pole na zadávanie rovnice krivky.

Druhý panel zahŕňa základné prvky. Tlačidlo *Enter* spúšťa celý algoritmus. Pod týmto tlačidlom je zaškrŕavacie políčko *LaTeX output*, ktoré keď je zaškrŕnuté, potom všetky výpisy v konzolovom okne budú v LaTeX formáte. Napríklad zlomok  $\frac{1}{2}$  je v LaTeX formáte `\frac{1}{2}`. Pomocou ovládacích prvkov *Translation XY* a *Scale* posúvame a škálujeme všetky objekty zobrazené v okne *ACV sketch*. Toto posunutie a škálovanie resetujeme tlačidlom *Center curve*. Zo zoznamového poľa (angl. list box) *Pre-defined curve* si môžeme vybrať jednu algebraickú krivku, ktorej rovnica sa nastaví ako vstupná rovnica.

Tretí panel má názov *Additional settings*. Jeho podpanel *Render* obsa-



huje niekoľko zaškrtávacích políčok, pomocou ktorých si volíme, čo sa má vykresľovať v okne *ACV sketch*:

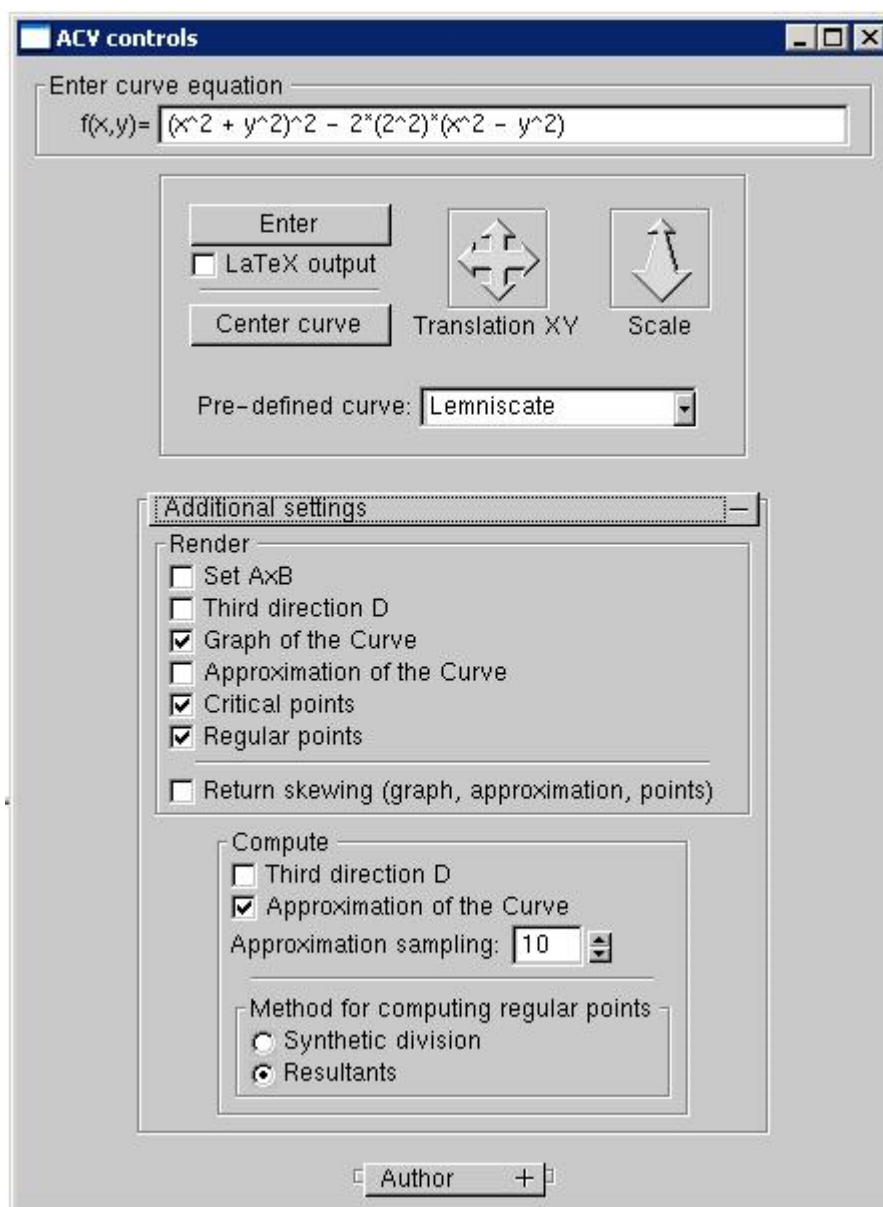
- *Set  $A \times B$*  – množina  $A$  je množina  $x$ -ových súradníc významných bodov a množina  $B$  je množina  $y$ -ových súradníc významných bodov, pozri kapitolu 3.3,
- *Third direction  $D$*  – priamky zodpovedajúce koreňom rezultantu  $R_\lambda(x)$  (pozri poznámku 4.3 v kapitole 4.4), ktoré nám z množiny  $A \times B$  určujú významné body, vykresľovanie tohto tretieho smeru závisí od zaškrtávacieho políčka *Third direction  $D$*  z podpanelu *Compute* (pozri ďalší odstavec),
- *Graph of the curve* – topologický graf krivky,
- *Approximation of the curve* – aproximácia krivky vytvorená postupom z kapitoly 4.1, vykresľovanie aproximácie závisí od zaškrtávacieho políčka *Approximation of the curve* z podpanelu *Compute* (pozri ďalší odstavec),
- *Critical points* – významné body krivky, pozri kapitolu 2.3,
- *Regular points* – regulárne body krivky, pozri kapitolu 2.3.

Ak je zaškrtávacie políčko *Return skewing (graph, approximation, points)* zaškrtnuté, potom na graf krivky, aproximáciu krivky, významné a regulárne body krivky použije inverzné skosenie k skoseniu, ktoré sme opísali v kapitole 3.2. Podpanel *Compute* má tieto ovládacie prvky:

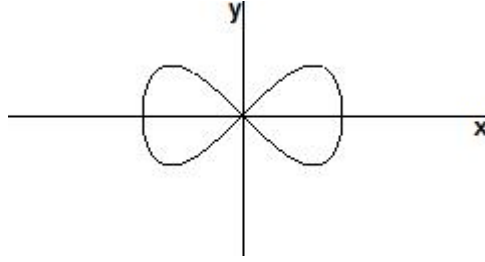
- *Third direction  $D$*  – počítanie koreňov rezultantu  $R(x)_\lambda$ , pozri poznámku 4.3 v kapitole 4.4,
- *Approximation of the curve* – počítanie aproximácie monotónnych oblúkov krivky, pozri kapitolu 4.1,
- *Approximation sampling* – počet úsečiek použitých na aproximovanie monotónneho oblúku krivky,
- *Synthetic division* – na vypočítanie regulárnych bodov použijeme syntetické delenie, pozri kapitolu 3.4,
- *Resultants* – na vypočítanie regulárnych bodov použijeme rezultanty, pozri poznámku 4.4 v kapitole 4.4.

Ak chceme pozorovať zmenu vykonanú pomocou jedného z ovládacích prvkov z podpanelu *Compute*, musíme stlačiť tlačidlo *Enter*.

V poslednom štvrtom hlavnom paneli *Author* sú uvedené informácie o autorovi a rok vytvorenia aplikácie.



Obrázok 14: Okno *ACV controls*.



Obrázok 15: Lemniskáta s rovnicou  $f(x, y) = -x^4 - y^2 + x^2$ .

### 4.3 Detailný príklad

Nech krivka  $\Gamma$  je určená polynómom  $f(x, y) = -x^4 - y^2 + x^2$ , obrázok 15. Náhodne zvolíme hodnotu  $\lambda = \frac{3}{2}$ . S touto hodnotou urobíme transformáciu  $x = x - \lambda y$ ,  $y = y$ . Potom nová rovnica krivky je

$$\bar{f}(x, y) = -\frac{1}{16}(3y - 2x)^4 + \frac{1}{4}(3y - 2x)^2 - y^2, \quad (33)$$

obrázok 16 (a). Vypočítame rezultant  $g_1(x) = R(x) = \frac{1108809}{32}x^4 - \frac{59049}{4}x^6 - \frac{820125}{1024}x^2$ . Z polynómu  $g_1$  vypočítame polynóm bez násobných koreňov  $\tilde{g}_1 = -2304x^5 - 125x + 5408x^3$ . Pomocou Newtonovej metódy určíme všetky reálne korene polynómu  $\tilde{g}_1$ :

$$\alpha_1 = -1.524426 \quad \alpha_2 = -0.152794 \quad \alpha_3 = 0 \quad \alpha_4 = 0.152794 \quad \alpha_5 = 1.524426.$$

Teraz vypočítame rezultant  $g_2 = S(y) = -1296y^6 + 488y^4 - 45y^2$  a rovnako z neho polynóm bez násobných koreňov  $\tilde{g}_2 = -1296y^5 + 488y^3 - 45y$ . Reálne korene polynómu  $\tilde{g}_2$  sú:

$$\beta_1 = -0.463873 \quad \beta_2 = -0.401702 \quad \beta_3 = 0 \quad \beta_4 = 0.401702 \quad \beta_5 = 0.463873.$$

Takto sme dostali množinu  $P$  pozostávajúcu z 25 bodov (obrázok 16 (b)), z ktorých práve 5 bodov patrí krivke  $\Gamma$ . Keďže počet prvkov množiny  $P$  je malý, stačí ak pre každý bod zistíme či patrí krivke, t.j. či vyhovuje rovnici  $\bar{f}(x, y)$ . Získame tieto významné body (obrázok 16 (c)) krivky  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \beta_1) &= (-1.524426, -0.463873) \\ (\alpha_2, \beta_2) &= (-0.152794, -0.401702) \\ (\alpha_3, \beta_3) &= (0, 0) \\ (\alpha_4, \beta_4) &= (0.152794, 0.401702) \\ (\alpha_5, \beta_5) &= (1.524426, 0.463873) \end{aligned} \quad (34)$$

**Poznámka 4.3** Na získanie významných bodov z množiny  $P$  môžeme použiť tretiu projekciu v smere  $(-\lambda_2, 1)$ , tak ako je to v článku [7]. To znamená vypočítanie rezultantu  $R^{(\lambda_2)}(x) = \text{res}(\bar{f}^{(\lambda_2)}, \bar{f}_y^{(\lambda_2)}, y)$ , kde  $\bar{f}^{(\lambda_2)} = \bar{f}(x - \lambda_2 y, y)$ . Korene rezultantu  $R^{(\lambda_2)}$  tvoria projekciu množiny prienikov krivky  $f$  s krivkou  $f_y$  pozdĺž priamky  $x + \lambda_2 y$  na  $x$ -ovú os. A teda ak rezultant  $R^{(\lambda_2)}$  má  $m$  koreňov, potom tieto korene určujú  $m$  paralelných priamok so smerovým vektorom  $(-\lambda_2, 1)$ . Napríklad, ak si zvolíme  $\lambda_2 = 1$ , potom  $g_3(x) = R^{(\lambda_2)}(x) = \frac{341015625}{32}x^4 - \frac{9765625}{4}x^6 - \frac{3617578125}{1024}x^2$  a následne separabilný polynóm  $\tilde{g}_3(x) = -6400x^5 - 9261x + 27936x^3$ . Korene polynómu  $\tilde{g}_3$  sú:

$$\sigma_1 = -2.000890 \quad \sigma_2 = -0.601195 \quad \sigma_3 = 0 \quad \sigma_4 = 0.601195 \quad \sigma_5 = 2.000890.$$

a podľa obrázka 16 (d) vidíme, že týmto spôsobom sme získali rovnakú množinu významných bodov. Počítanie tretieho rezultantu je vhodné pri polynómoch s vyšším stupňom.

Ďalším krokom je určenie počtu vetiev vstupujúcich do významného bodu  $(\lambda_i, \beta_i)$  a počítanie regulárnych bodov krivky na priamkach  $x_i = \delta_i$ ,  $x_i = \lambda_i$ ,  $x_i = \delta_{i+1}$ . Budeme postupovať podľa [12] a určíme korene polynómov

$$F(\alpha_i, \beta_i, y) = \frac{f(\alpha_i, y)}{y - \beta_i}, \quad (35)$$

a počet vetiev prechádzajúcich cez priamky  $x = \delta_i$ ,  $x = \delta_{i+1}$  určíme pomocou Sturmovej postupnosti a Cauchyho hranice na počet koreňov polynomickej rovnice o jednej neznámej. A teda množina regulárnych bodov (obrázok 16 (e)) je

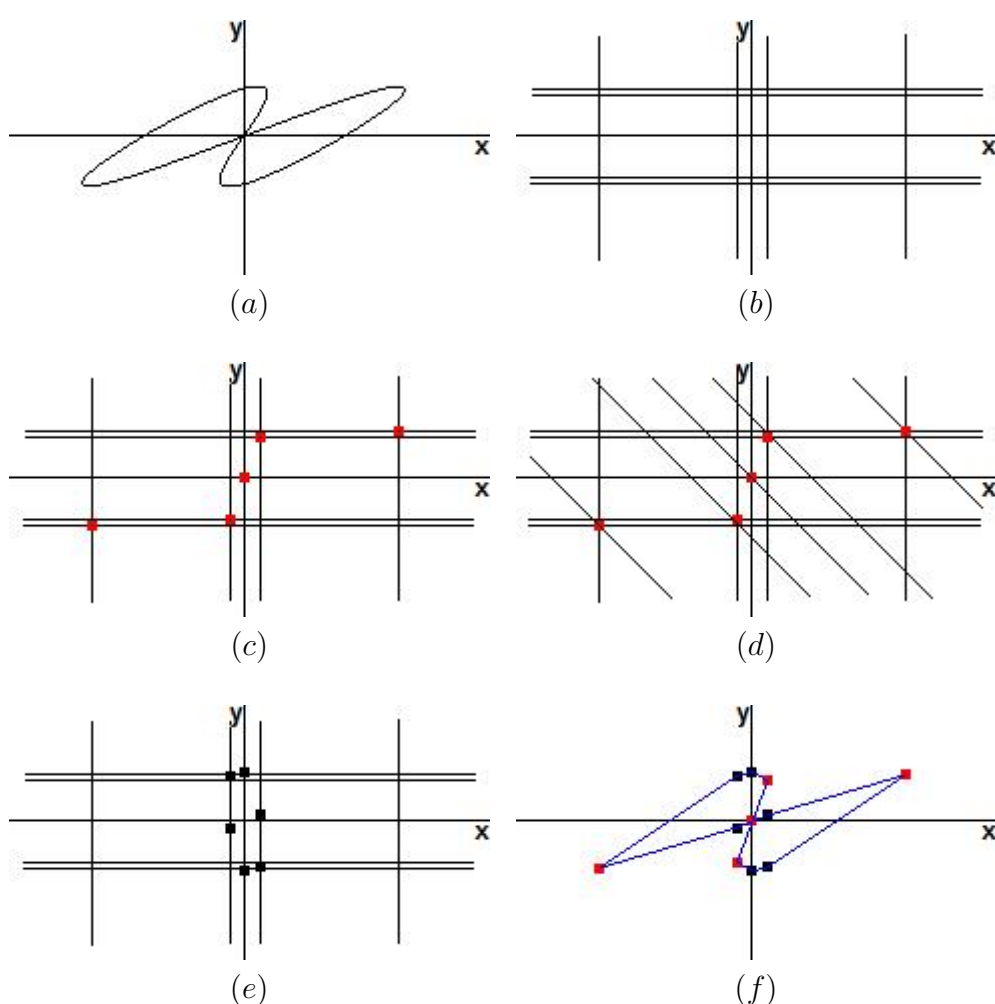
$$\{(-0.152794, -0.061071), (-0.152794, 0.457024), (0, -0.496903), (0, 0.496903), (0.152794, -0.457024), (0.152794, 0.061071)\}. \quad (36)$$

Počet vetiev vstupujúcich zľava  $l(p_i)$  a sprava  $r(p_i)$  do významných bodov  $p_i = (\alpha_i, \beta_i)$  je v tabuľke 1. Výsledný topologický opis krivky  $\Gamma$  s rovnicou  $\bar{f}(x, y) = -\frac{1}{16}(3y - 2x)^4 + \frac{1}{4}(3y - 2x)^2 - y^2$  je na obrázku 16 (f).

**Poznámka 4.4** Množinu regulárnych bodov krivky  $\Gamma$  na priamke  $x = \alpha_i$  môžeme získať aj z množiny koreňov rezultantu  $\text{res}(f, (x - \alpha_i), x)$ . Korene tohto rezultantu sú  $y$ -ové súradnice prienikov krivky  $\Gamma$  s priamkou  $x = \alpha_i$ , ale jedným z týchto koreňov je aj  $\beta_i$ , t.j.  $y$ -ová súradnica významného bodu  $(\alpha_i, \beta_i)$ . Preto ak vynecháme  $\beta_i$  z množiny koreňov rezultantu, získame  $y$ -ové súradnice regulárnych bodov na priamke  $x = \alpha_i$ , a teda aj regulárne body.

	$l(p_i)$	$r(p_i)$
$p_1 = (\alpha_1, \beta_1)$	0	2
$p_2 = (\alpha_2, \beta_2)$	0	2
$p_3 = (\alpha_3, \beta_3)$	2	2
$p_4 = (\alpha_4, \beta_4)$	2	0
$p_5 = (\alpha_5, \beta_5)$	2	0

Tabuľka 1: Významné body  $p_i$  a počet vetiev vstupujúcich do týchto bodov zľava  $l(p_i)$  a sprava  $r(p_i)$ .



Obrázok 16: (a) – algebraická krivka  $\Gamma$  s rovnicou  $\bar{f}(x, y) = -\frac{1}{16}(3y - 2x)^4 + \frac{1}{4}(3y - 2x)^2 - y^2$ , (b)-(e) – postup tvorby grafu krivky  $\Gamma$ , (f) – topologický graf krivky  $\Gamma$ .

## Záver

V práci sme zdefinovali pojem implicitnej krivky ako aj pojem významného bodu. Dozvedeli sme sa, ako vypočítame topologický graf algebraickej krivky, ktorého vrcholy sú významné body a hrany prislúchajú regulárnym oblúkom krivky. Tieto regulárne oblúky sme aproximovali lomenou čiarou, a tak sme získali aproximáciu celej algebraickej krivky. Táto aproximácia ale v niektorých prípadoch dáva nekompletný výsledok. A preto jednou z možných rozšírení tejto práce vidíme v zlepšení aproximačného algoritmu.

Poznatky nadobudnuté z literatúry sme použili pri vytváraní programu *Algebraic curve visualization*, ktorý sme vytvorili ako súčasť tejto práce. V tejto aplikácii sme skombinovali symbolické aj numerické metódy do algoritmu, ktorého funkčnosť sme v texte prezentovali na jednom kontrétnom príklade.

Budúcu prácu vidíme v rozšírení algoritmu tak, aby počítal topológiu priestorovej algebraickej krivky. Napríklad, priestorovú krivku premietneme do niekoľkých rovín, tým získame niekoľko rovinných kriviek, ktoré spracujeme postupom opísaným v tejto práci. Potom topológiu priestorovej krivky môžeme zrekonštruovať z topológie rovinných priemetov.

Na vytvorenie aplikácie používame knižnicu GLUT, ktorej posledná dostupná verzia je z roku 2006, a preto by bolo vhodnejšie prerobenie implementácie pomocou inej aktuálnej knižnice, ktorá by zároveň podporovala diakritiku.

## Literatúra

- [1] Max K. Agoston. *Computer Graphics and Geometric Modeling: Mathematics*. Springer, 2005.
- [2] Max K. Agoston. *Computer Graphics and Geometric Modeling: Implementation and Algorithms*. Springer, 2005.
- [3] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computations in Mathematics*. Springer-Verlag, 2003.
- [4] Egbert Brieskorn, Horst Knörrer. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser Verlag, 1986.
- [5] Ernst Kunz. *Introduction to plane algebraic curve*. Birkhäuser Verlag, 2005.
- [6] P. Prešnajder. Elektronický učebný text k predmetu Matematika 1. Ne-publikované, UK Bratislava, 2006.
- [7] Raimund Seidel, Nicola Wolpert. On the Exact Computation of the Topology of Real Algebraic Curves. *Proc. of the 21st Ann. ACM Symp. on Comp. Geom. (SCG 2005)*, str. 107-115. ACM, 2005.
- [8] Tibor Seňko. *Evolučné algoritmy kriviek*. Diplomová práca, FMFI UK Bratislava, 2007.
- [9] Michael Spivak. *Calculus on Manifolds*. W. A. Benjamin, New York, 1965.
- [10] R.J. Walker. *Algebraic Curves*. Springer, Berlin and New York, 1978.
- [11] L. Gonzalez-Vega, M. El Kahoui. An improved upper complexity bound for the topology computation of a real algebraic plane curve. *Journal of Complexity*, 12:527–544, 1996.
- [12] L. Gonzalez-Vega, I. Necula. Efficient topology determination of implicitly defined algebraic plane curves. *Computer Aided Geometric Design*, 19:719–743, 2002.
- [13] GLUT. <http://www.opengl.org/resources/libraries/glut/>.
- [14] GLUI. <http://glui.sourceforge.net/>.
- [15] GiNaC. <http://www.ginac.de/>.

- [16] Eric W. Weisstein. *Singular Point*. From MathWorld –A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/SingularPoint.html/>.