UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Bézierove krivky a ich vlastnosti v Minkowského priestore

Diplomová práca

Barbora Gallusová

Bratislava 2010

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Bézierove krivky a ich vlastnosti v Minkowského priestore

Diplomová práca

Študijný odbor: Počítačová grafika a geometria

Vedúci diplomovej práce:
RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Diplomantka:
Bc. Barbora Gallusová

Bratislava 2010

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava, 20. 4. 2010 ....

Barbora Gallusová

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Pavlovi Chalmovianskému za odbornú pomoc, pripomienky a čas, ktorý mi venoval počas tvorby tejto práce. Tiež Mišovi a maminke za odbornú a morálnu podporu.

Abstrakt

Bézierove krivky ako modelovací nástroj majú široké praktické uplatnenie. Minkowského priestor poslúžil ako matematický aparát pre špeciálnu teóriu relativity. Niektoré vlastnosti kriviek sa po prechode do Minkowského priestoru zmenia. V Minkowského priestore delíme body a vektory na časové, svetelné a priestorové. Cieľom tejto práce je popísať vlastnosť priestorovosti, čiže za akých podmienok budú všetky body Bézierovej krivky priestorové. Práca oboznamuje čitateľa so základnými pojmami týkajúcich sa Bézierových kriviek a útvarov v Minkowského priestore. Hlavná časť práce sa zaoberá určením podmienok pre riadiace vrcholy Bézierovej krivky tak, aby celá krivka bola priestorová. Súčasťou práce je aj vizualizačný nástroj, pomocou ktorého sa dajú spomínané pojmy a tvrdenia názorne priblížiť.

Kľúčové slová: *Bézierova krivka, Minkowského priestor, priestorová krivka*

Obsah

Úvod

V geometrickom modelovaní sa všetky telesá zobrazujú pomocou kriviek a plôch. Vzhľadom na to, že sa modelujú predmety z reálneho sveta, ktorých analytický popis nemáme, bolo treba vymyslieť inú, dostatočne presnú reprezentáciu. Kvôli tomu vzniklo odvetvie spájajúce geometriu a počítačovú grafiku - CAGD (Computer Aided Geometry Design). Tento názov si vyslúžilo v sedemdesiatych rokoch, po tom ako páni P. de Casteljau v roku 1959 vo firme Citröen a P. Bézier v roku 1961 vo firme Renault začali používať krivky a plochy určené pomocou niekoľkých bodov. Postupne sa teória okolo Bézierovych kriviek rozšírila a zjednotila, významným okamihom bolo zavedienie racionálnych Bézierových kriviek a tzv. NURBS, ktoré umožňujú generovať klasické geometrické prvky ako guľa, valec, kužeľosečka a podobne. Ich výhodou je totiž možnosť popísať zložité tvary pomocou malého množstva dát, ktoré sa ľahko hľadá intuitívne. Dnes sú už súčasťou takmer každého grafického programu a ich komerčné využite v praxi je rozsiahle. Vďaka zaujímavým vlastnostiam týchto kriviek v tejto oblasti stále prebieha výskum.

Aký význam má Minkowského geometria ukázal Albert Einstein, keď v roku 1905 sformuloval špeciálnu teóriu relativity. Táto ako matematický aparát využívala práve Minkowského neeuklidovskú geometriu. Fyzika tak našla jednotnú teóriu vysvetľujúcu výsledky pokusov a myšlienok J. Maxwella, H. Lorentza, G. Fitzgeralda a iných, ktoré sa javili ako protichodné k zákonom dovtedy známej Newtonovej klasickej mechanike. Fyzika sa tak začala uberať novým smerom a výskum v tejto oblasti je stále živý.

Vzhľadom na význam oboch spomenutých matematických nástrojov sa čoraz častejšie objavujú práce, ktoré skúmajú vlastnosti kriviek v Minkowského priestore, špeciálne aj vlastnosti Bézierových kriviek.

Cieľom tejto práce je skúmať vybranú vlastnosť Bézierových kriviek v Minkowského priestore a pokúsiť sa odvodiť nutné, resp. postačujúce podmienky. Tiež ich porovnať s aktuálnou literatúrou publikovanou v tejto oblasti.

Výskum v tejto práci je obmedzný len na trojrozmerný Minkowského priestor, nakoľko tento sa dá ľahšie predstaviť a teda zistené skutočnosti možno približne vizualizovať pomocou euklidovskej geometrie. Čo sa týka Bézierových kriviek, pracujeme len s krivkami druhého stupňa, čo na ozrejmenie vzťahov pre jednoduchosť stačí.

Štruktúra práce je nasledovná. V prvej kapitole sú spomenuté niektoré významné výsledky a práce z oblasti štúdia Bézierových kriviek, Minkowského priestoru a ich aplikácie. Tiež sú tu ozrejmené základné definície a tvrdenia z oboch oblastí. V ďalšej kapitole je skúmaná tzv. vlastnosť priestorovosti. Je tu sformulovaná konkrétna úloha pre Bézierovu krivku druhého stupňa, pričom v jednotlivých podkapitolách sú opísané rôzne prístupy k nájdeniu riešenia. Ktoré sa nakoľko priblížilo k samotnému riešeniu, ich výhody, nevýhody a tiež ich využiteľnosť je opísané v nasledujúcej kapitole. Záverečná kapitola obsahuje vyhodnotenie dosiahnutých výsledkov, ako aj možnosť ďalšieho rozšírenia práce. Samostatnú kapitolu tvorí popis softvérovej podpory, ktorá bola vytvorená jednak za účelom získať základný prehľad ako asi vyzerá hľadané riešenie a tiež za účelom verifikácie dosiahnutých výsledkov.

Kapitola 1

Teoretické základy

V tejto kapitole sú popísané a dokázané základné vlastnosti Bézierových kriviek v euklidovskom priestore. Ďalej je tu vysvetlené, čo je Minkowského priestor, jeho základné vlastnosti a odlišnosti oproti euklidovskému priestoru. Tiež sa opisuje ako sa zmenia niektoré vlastnosti kriviek z oblasti diferenciálnej geometrie po prechode z euklidovského priestoru do Minkowského priestoru.

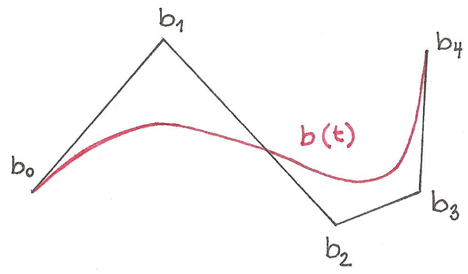
1.1 Bézierove krivky v euklidovskom priestore

Bézierove krivky sú polynomické krivky konštruované pomocou Bernsteinových polynómov a tzv. riadiacich vrcholov. Ako aproximačné krivky sa používajú pri dvojrozmernom a trojrozmernom geometrickom modelovaní.

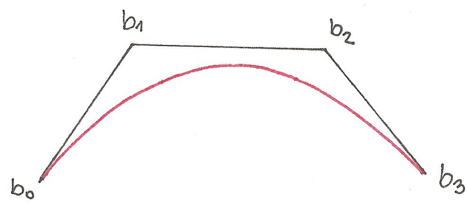
Definícia 1 (Bézierova krivka)**.** Bézierovou krivkou stupňa n nazývame polynomické zobrazenie $b : I \to \mathbb{R}^d$, dané predpisom: $b(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, b_i$ pre $t \in I \subset \mathbb{R}$. Body $b_i \in \mathbb{R}^d$, kde $i \in \{0, \ldots, n\}$ nazývame riadiacimi vrcholmi (obr. 1.1), polynómy $B_i^n(t)$, kde $i \in \{0, \ldots, n\}$ sú Bernsteinove polynómy stupňa n. Číslo t nazývame parameter krivky.

Poznámka 1.1.1. *Pod I najčastejšie rozumieme interval $[0, 1]$, pretože Bernsteinove polynómy $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, kde $i \in \{0, \ldots, n\}$ sú nad ním nezáporné. Avšak Bézierove krivky sa dajú vyjadriť nad ľubovoľným intervalom $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ použitím modifikovaných Bernsteinových polynómov, pričom platí vzťah $B_{i[a,b]}^n(t) = B_{i[0,1]}^n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$, kde $t \in [a, b]$.*

Bézierove krivky majú nasledujúce vlastnosti, [Cha09].



Obr. 1.1: Bézierova krivka stupňa $n = 4$.



Obr. 1.2: Bézierova krivka stupňa $n = 3$. Vidieť, že $b(0) = b_0$ a $b(1) = b_3$.

Veta 1.1.2 (Interpolácia koncových bodov)**.** *Platí, že* $b(0) = b_0$ *a* $b(1) = b_n$, *obr. 1.2.*

Dôkaz.

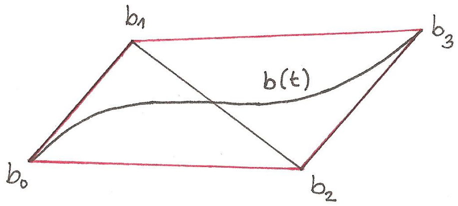
$$b(0) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(0)\, b_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 0^i (1-0)^{n-i} = \binom{n}{0} .0^0.1^n.b_0 = b_0$$

$$b(1) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(1)\, b_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i (1-1)^{n-i} = \binom{n}{n} .1^n.0^0.b_n = b_n$$

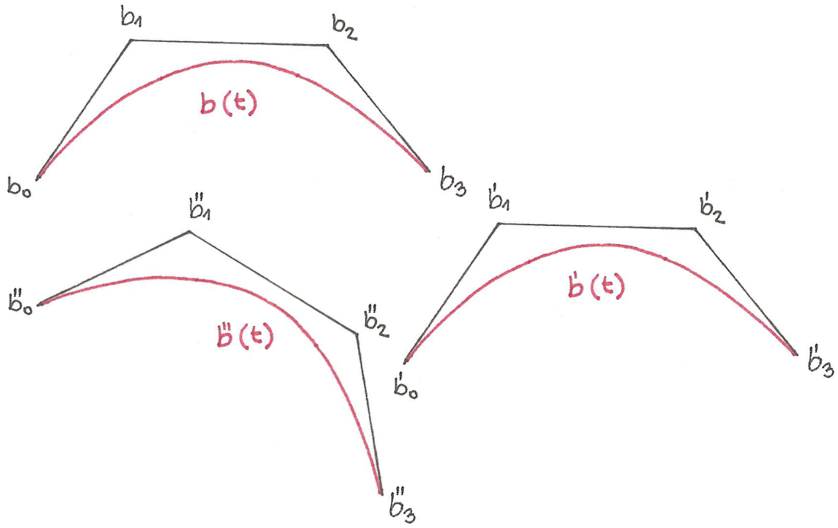
□

Veta 1.1.3 (Konvexný obal riadiacich vrcholov)**.** *Bézierova krivka leží v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov, obr. 1.3.*

Dôkaz. Bod A leží v konvexnom obale bodov $A_0, \ldots, A_k$, ak sa dá napísať ako: $A = \alpha_0 A_0 + \ldots + \alpha_k A_k$, kde $\alpha_i \geq 0$ pre $\forall i \in \{0, \ldots, k\}$ a navyše $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. Nech $x \in b(t)$, potom existuje $t_0 \in [0,1]$ také, že $b(t_0) = x$. Pre Bernsteinove polynómy platí, že $B_i^n(t_0) \geq 0$ pre $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$ a pre $t_0 \in [0,1]$ a navyše $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t_0) = 1$. Takže potom bod $x = b(t_0) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t_0) b_i$ leží v konvexnom obale riadiacich vrcholov $b_0, \ldots, b_n$. Každý bod $x \in b(t)$ potom vieme napísať ako konvexnú kombináciu bodov $b_0, \ldots, b_n$, a celá krivka leží v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov. □



Obr. 1.3: Bézierova krivka leží v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov.

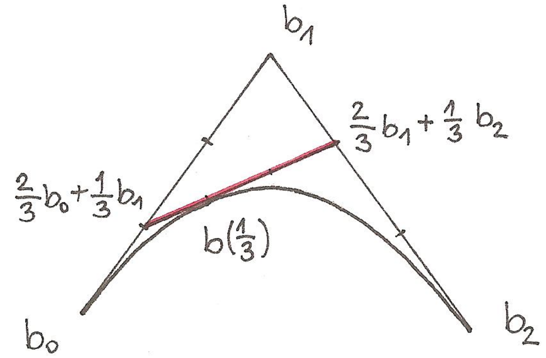


Obr. 1.4: Bézierova krivka je afinne invariantná. Bézierova krivka $b''(t)$ vznikla z $b(t)$ otočením, krivka $b'(t)$ posunutím.

Veta 1.1.4 (Afinná invariantnosť)**.** *Bézierova krivka je afinne invariantná, t.j. ak zobrazíme Bézierovu krivku z priestoru* $A^d(\mathbb{R})$ *afinným zobrazením* $f : A^d(\mathbb{R}) \rightarrow A^p(\mathbb{R})$*, výsledkom bude Bézierova krivka v priestore* $A^p(\mathbb{R})$ *s riadiacimi vrcholmi* $f(b_0), \ldots, f(b_n)$*, obr. 1.4.*

Dôkaz. Pre ľubovoľnú afinnú transformáciu f platí, že $f\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(a_i)$ pre $k \geq 0$, $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, kde $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i$ je lineárna kombinácia, teda $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. Vďaka vlastnosti Bernsteinových polynómov, že $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$ platí dokazované tvrdenie. □

Veta 1.1.5 (Derivácia)**.** *Platí, že* $\frac{d}{dt} b(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \triangle b_i$*, kde* $\triangle b_i = b_{i+1} - b_i$*, obr. 1.5.*



Obr. 1.5: Dotykový vektor k Bézierovej krivke stupňa $n = 2$ v $t = \frac{1}{3}$. Platí, že $\frac{d}{dt}b\left(\frac{1}{3}\right) = 2[(1-\frac{1}{3})(b_1 - b_0) + \frac{1}{3}(b_2 - b_1)]$.

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}b(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, b_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{d}{dt}B_i^n(t)\, b_i = \sum_{i=0}^{n} n\left[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right] b_i \\
&= n\{\left[B_{-1}^{n-1}(t) - B_0^{n-1}(t)\right] b_0 + \left[B_0^{n-1}(t) - B_1^{n-1}(t)\right] b_1 + \\
&\quad + \ldots + \left[B_{n-1}^{n-1}(t) - B_n^{n-1}(t)\right] b_n\} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\,(b_{i+1} - b_i) \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\,\triangle b_i
\end{aligned}$$

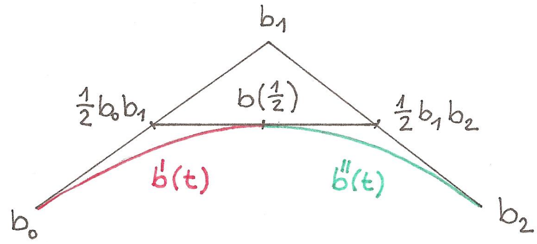
□

Poznámka 1.1.6. *Matematickou indukciou vzhľadom na k sa dá ukázať, že*

$$\frac{d^k}{dt^k}b(t) = n\ldots(n-k+1)\sum_{i=0}^{n-k} B_i^{n-k}(t)\,\triangle^k b_i\ ,$$

kde $\triangle^k b_i = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\, b_{j+i}$.

Veta 1.1.7 (Prerozdelenie)**.** *Nech Bézierova krivka* $b(t)$ *je určená riadiacimi vrcholmi* b_0, b_1, b_2. *Ak rozdelíme Bézierovu krivku v bode určenom parametrom* $t = \frac{1}{2}$, *dostaneme dve Bézierove krivky* $b'(t)$ *a* $b''(t)$, *obr. 1.6. Riadiace vrcholy krivky* $b'(t)$ *sú* $b_0, \frac{1}{2}b_0b_1, b(\frac{1}{2})$ *a riadiace vrcholy krivky* $b''(t)$ *sú* $b(\frac{1}{2}), \frac{1}{2}b_1b_2, b_2$.



Obr. 1.6: Ak rozdelíme Bézierovu krivku v bode určenom parametrom $t = \frac{1}{2}$, dostaneme dve Bézierove krivky $b'(t)$ a $b''(t)$.

1.2 Minkowského priestor

Nasledovný text je vytvorený podľa [DFN91] a [Zla09].

Definícia 2 (Pseudo-euklidovský priestor)**.** Pseudo-euklidovský priestor (ozn. $\mathbb{R}^n_p$), kde $n, p \in \mathbb{N}$ je $n-$rozmerný reálny vektorový priestor, v ktorom je definovaný pseudo-skalárny súčin nasledovne: $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n-p} x_i y_i - \sum_{j=n-p+1}^{n} x_j y_j$, kde $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_p$.

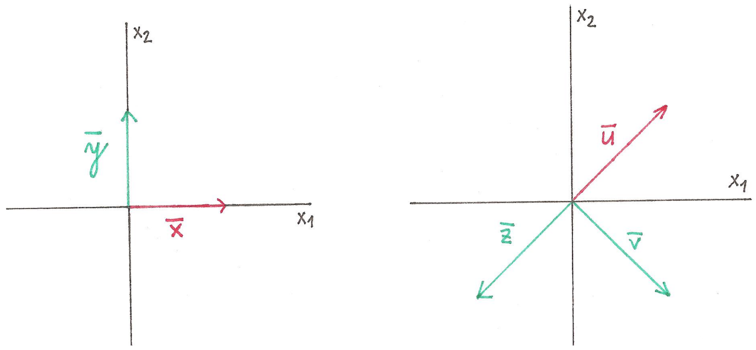
Veta 1.2.1 (Vlastnosti pseudo-skalárneho súčinu)**.** *Pseudo-skalárny súčin je zobrazenie* $\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$, *ktoré má pre* $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n_p$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$ *nasledujúce vlastnosti:*

1. *Bilineárnosť:* $\langle \alpha\overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle = \alpha \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle + \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle$,
2. *Symetrickosť:* $\langle \overline{x}, \overline{z} \rangle = \langle \overline{z}, \overline{x} \rangle$,
3. *Nedegenerovanosť: ak* $\langle \overline{x}, \overline{z} \rangle = 0$ *pre všetky* $\overline{z} \in \mathbb{R}^n_p$, *potom* $\overline{x} = \overline{0}$.

Definícia 3 (Kolmé vektory)**.** Hovoríme, že vektory $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n_p$ sú kolmé, ak $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0$, obr. 1.7.

Definícia 4 (Pseudo-norma, pseudo-vzdialenosť)**.** Pseudo-normou (alebo pseudo-vzdialenosťou) vektora $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_p$ nazvývame číslo $||\overline{x}||$ také, že $||\overline{x}||^2 = \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle$.

Poznámka 1.2.2. *Pseudo-skalárny súčin nie je pozitívne definitný ako to bolo v euklidovskom priestore, nedegenerovanosť je slabšia podmienka. Preto pseudo-norma vektora v pseudo-euklidovskom priestore môže byť aj záporná.*



Obr. 1.7: Majme priestor $\mathbb{R}^2_1$. Vektory $\overline{x} = (1, 0)$ a $\overline{y} = (0, 1)$ sú kolmé. Vektor $\overline{u} = (1, 1)$ je kolmý s vektorom $\overline{z} = (-1, -1)$, avšak nie je kolmý s vektorom $\overline{v} = (1, -1)$.

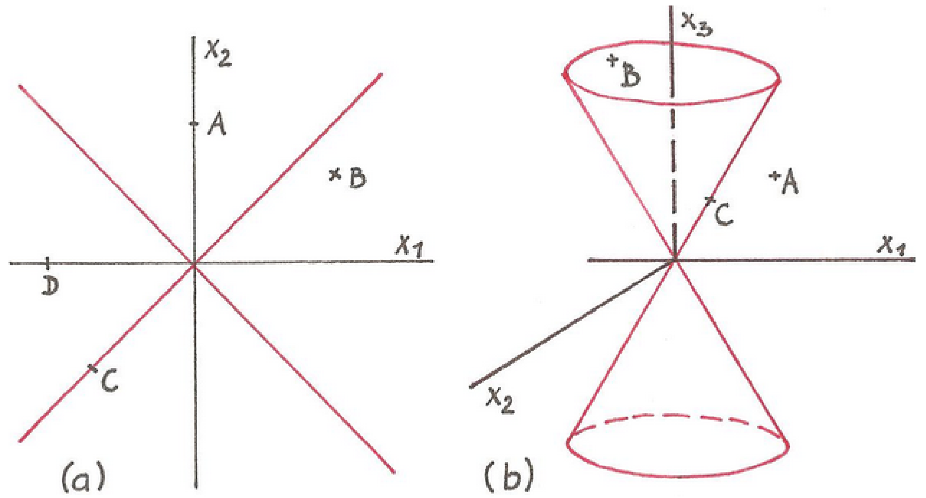
Definícia 5 (Pseudo-karteziánska sústava súradníc)**.** Pseudo-karteziánskou sústavou súradníc priestoru $\mathbb{R}^n_p$ nazývame sústavu súradníc, ktorej súradnicové osi $x_1, \ldots, x_n$ sú navzájom kolmé a pretínajú sa v jednom bode O. Tento súradnicový systém označujeme $S(O, x_1, \ldots, x_n)$. Osi $x_1, \ldots, x_{n-p}$ nazývame priestorové, osi $x_{n-p+1}, \ldots, x_n$ časové.

Definícia 6 (Minkowského priestor)**.** Minkowského priestor je pseudo-euklidovský priestor, kde $p = 1$, teda priestor $\mathbb{R}^n_1$.

Poznámka 1.2.3. *Vo fyzike sa používa Minkowského priestor $\mathbb{R}^4_1$, nazývaný aj časopriestor, kde prvá súradnica reprezentuje časovú zložku a zvyšné tri reprezentujú polohu v priestore. Vzhľadom na fyzikálnu interpretáciu Minkowského priestoru sa tu používa pseudo-karteziánsky súradnicový systém $S(O, x_0, x_1, x_2, x_3)$, kde sa prvá súradnica x_0 označuje aj ako $x_0 = ct$, kde t vyjadruje čas a c je konštanta zodpovedajúca rýchlosti svetla vo vákuu.*

Definícia 7 (Priestorový, časový a svetelný vektor)**.** Nech vektor $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_1$. Ak $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle > 0$ (resp. < 0), $\overline{x}$ nazývame priestorový (resp. časový) vektor. Ak $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0$, hovoríme, že $\overline{x}$ je svetelný vektor.

Definícia 8 (Priestorový, časový a svetelný bod)**.** Nech bod $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_1$. Nech $S(O, x_1, \ldots, x_n)$ je pseudo-karteziánska sústava súradníc v tomto priestore. Označme $\overline{x}$ jeho polohový vektor $\overline{x} = \overline{Ox}$. Hovoríme, že bod je priestorový (resp. časový alebo svetelný), ak jeho polohový vektor je priestorový (resp. časový alebo svetelný), obr. 1.8.

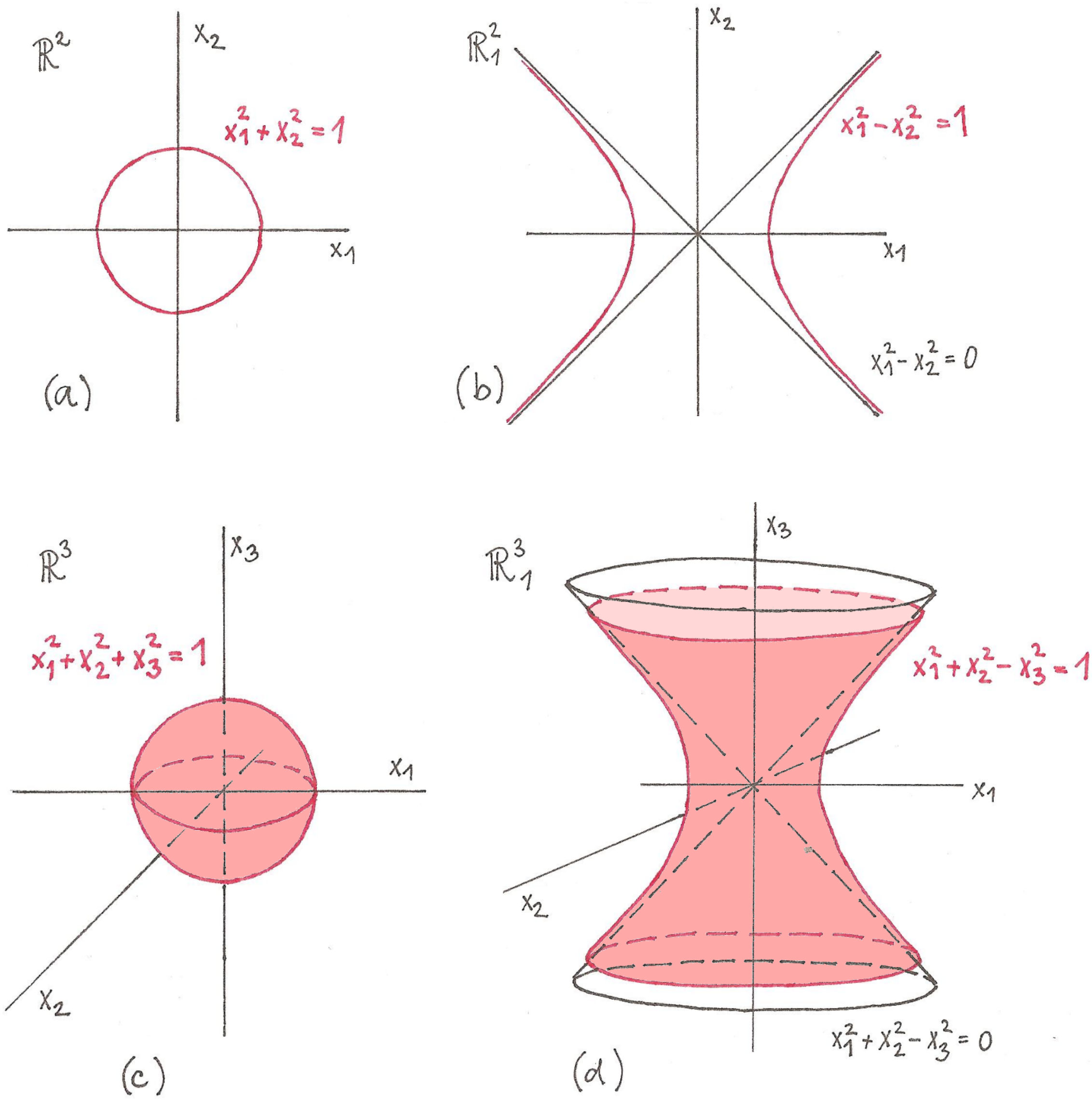


Obr. 1.8: Prípad (a) znázorňuje priestor $\mathbb{R}^2_1$. Bod A je časový (pre jeho súradnice platí $x_1^2 - x_2^2 < 0$), bod C je svetelný ($x_1^2 - x_2^2 = 0$) a body B a D sú priestorové ($x_1^2 - x_2^2 > 0$). Prípad (b) znázorňuje priestor $\mathbb{R}^3_1$. Bod B je časový, bod C je svetelný a body A je priestorový.

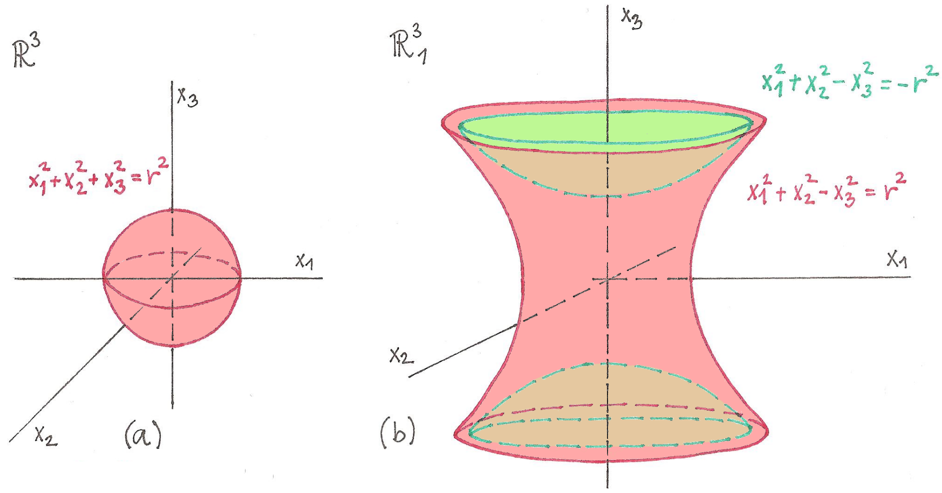
Definícia 9 (Svetelný kužeľ, jednotková pseudo-guľová plocha)**.** Všetky svetelné vektory (také, ktorých veľkosť je nulová) tvoria tzv. svetelný kužeľ. Vnútri svetelného kužeľa sa nachádzajú časové vektory, mimo kužeľa priestorové. Nech $B_1^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n_1 : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 \leq 1\right\}$ a $\partial B_1^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n_1 : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 1\right\}$. Množinu B_1^n nazývame jednotkovou pseudo-guľou a množinu ∂B_1^n jednotkovou pseudo-guľovou plochou, obr. 1.9.

Poznámka 1.2.4. *Ak budeme ďalej v texte hovoriť v Minkowského priestore o vzdialenosti, máme na mysli pseudo-vzdialenosť.*

V euklidovskom priestore tvoria body rovnako vzdialené od začiatku súradnicovej sústavy guľovú plochu s polomerom r rovným veľkosti vektora tvoreného bodom a začiatkom súradnicovej sústavy ($r > 0$). Teda v $\mathbb{R}^2$ je to kružnica s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, v $\mathbb{R}^3$ je to guľová plocha s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$. V Minkowského priestore takéto body tvoria hyperboloid. V priestore $\mathbb{R}^2_1$ tvoria časové body, ktoré majú rovnakú druhú mocninu vzdialenosti od začiatku súradnicovej sústavy, rovnoosú hyperbolu s rovnicou $x_1^2 - x_2^2 = r^2$. Priestorové body, ktoré majú rovnakú druhú mocninu vzdialenosti od začiatku súradnicovej sústavy, tvoria rovnoosú hyperbolu s rovnicou $x_1^2 - x_2^2 = -r^2$. V Minkowského priestore $\mathbb{R}^3_1$ takéto časové body tvoria dvojdielny rotačný hyperboloid s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -r^2$ a priestorové tvoria jednodielny rotačný hyperboloid s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2$. Hyperboloid tvorený časovými bodmi leží vnútri svetelného kužeľa, hyperboloid tvorený priestorovými



Obr. 1.9: Prípad (a) znázorňuje priestor $\mathbb{R}^2$, jednotkovou guľovou plochou je jednotková kužnica s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Prípad (b) znázorňuje priestor $\mathbb{R}^2_1$, jednotkovou pseudo-guľovou plochou je hyperbola s rovnicou $x_1^2 - x_2^2 = 1$, svetelný kužeľ tvoria dve priamky spĺňajúce $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Prípad (c) znázorňuje priestor $\mathbb{R}^3$, jednotková guľová plocha má rovnicu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Prípad (d) znázorňuje priestor $\mathbb{R}^3_1$, jednotkovou pseudo-guľovou plochou je rotačný hyperboloid s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$, svetelný kužeľ má rovnicu $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.



Obr. 1.10: Prípad (a) znázorňuje body rovnako vzdialené od začiatku súradnicovej sústavy v euklidovskom priestore. Tvoria guľovú plochu s rovnicou $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$, kde $r>0$. Prípad (b) znázorňuje body v Minkowského priestore, ktoré majú rovnakú druhú mocninu pseudo-vzdialenosti od začiatku súradnicovej sústavy. Časové body tvoria dvojdielny rotačný hyperboloid s rovnicou $x_1^2+x_2^2-x_3^2=-r^2$, priestorové body tvoria jednodielny rotačný hyperboloid s rovnicou $x_1^2+x_2^2-x_3^2=r^2$, kde $r\in\mathbb{R}-\{0\}$.

bodmi leží mimo svetelného kužeľa, ktorý má v $\mathbb{R}^3_1$ rovnicu $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$, obr. 1.10.

Poznámka 1.2.5 (Lobačevského geometria). *Autorom hyperbolickej geometrie je ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, ktorý ako prvý objavil geometriu nespĺňajúcu piaty Euklidov postulát. Išlo tak o prvú neeuklidovskú geometriu, ktorá vyriešila problém, či je možné dokázať piaty Euklidov postulát pomocou predchádzajúcich štyroch.*

1.2.1 Lorentzove transformácie

Majme v $\mathbb{R}^4_1$ dve pseudokarteziánske súradnicové systémy S a S'. Lorentzove transformácie nám hovoria o tom, aké súradnice bude mať bod $x\in S$ v súradnom systéme S', čiže v akom vzťahu sú navzájom S a S'. V klasickom euklidovskom priestore $\mathbb{R}^4$ (kde ako štvrtý rozmer vezmeme časovú os a za zvyšné tri rozmery súradnice priestoru) nám o vzťahu medzi dvoma súradnicovými systémami $S(t,x_1,x_2,x_3)$ a $S'(t',x_1',x_2',x_3')$ hovoria Galileove transformácie.

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x_1 &= x_1' - d \\ x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_3' \end{aligned}$$

Čiže d nám vyjadruje posunutie systému S' oproti systému S v smere osi x_1. Z fyzikálneho významu $d = vt$, kde v je vzájomná konštantná rýchlosť priestorov S a S' v smere osi x_1.

Lorentzove transformácie sú ekvivalentom Galileových transformácií v $\mathbb{R}_1^4$. Majme v $\mathbb{R}_1^4$ systém $S(O, x_0, x_1, x_2, x_3)$ a $S'(O', x_0', x_1', x_2', x_3')$. Hľadáme také transformácie $\varphi : \mathbb{R}_1^4 \to \mathbb{R}_1^4$, že $\varphi(O) = O'$ a $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = \langle \varphi(\overline{x}), \varphi(\overline{x}) \rangle$ pre každé $\overline{x} \in \mathbb{R}_1^4$. Inými slovami tieto transformácie fixujú začiatok sústavy súradníc a zachovávajú Minkowského metriku.

Pre jednoduchosť a bez ujmy na všeobecnosti ([DFN91]) možno predpokladať, že $x_2 = x_2'$ a $x_3 = x_3'$. Dá sa tiež ukázať, že zvyšné rovnice musia mať nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} x_0 &= a x_0' + b x_1' + e \\ x_1 &= c x_0' + d x_1' + f \end{aligned}$$

alebo maticovým zápisom $\overline{x} = M\overline{x'} + \overline{u}$, kde

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \overline{x'} = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \overline{u} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Takýmto transformáciám, kde M aj $\overline{u}$ sú ľubovoľné, hovoríme *nehomogénne Lorentzove transformácie* alebo *Poincarého transformácie*. Tvoria grupu P vzhľadom na skladanie zobrazení (dôkaz v [Nk87]), ktorú nazývame *Poincarého grupou*. Tieto transformácie sa javia ako transformácie rotácií a posunutia v tomto pseudo-euklidovskom priestore. Z toho dôvodu sa nazývajú aj nehomogénne pseudo-ortogonálne transformácie.

Keďže chceme fixovať začiatok sústavy súradníc ($\varphi(O) = O'$), musí byť $\overline{u} = \overline{0}$. Zo zachovania Minkowského metriky dostávame:

$$\begin{aligned} x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= a^2 x_0'^2 + 2ab x_0' x_1' + b^2 x_1'^2 - \\ &\quad - c^2 x_0'^2 - 2cd x_0' x_1' - d^2 x_1'^2 - \\ &\quad - x_2'^2 - x_3'^2 \\ &= (a^2 - c^2) x_0'^2 + 2(ab - cd) x_0' x_1' + (b^2 - d^2) x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 \ , \end{aligned}$$

a chceme, aby sa to rovnalo $x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$.
Z toho dostávame: $a^2 - c^2 = 1$, $ab - cd = 0$, $b^2 - d^2 = -1$.
Keďže $a \neq 0$, môžeme zaviesť substitúciu $\beta = \frac{c}{a}$ a dostaneme

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad c = a\beta, \quad d = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = d\beta.$$

Teda matica $M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bude mať tvar $M' = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$.
Použitím parametra ψ tak, že $\beta = \tanh\psi$ dostaneme

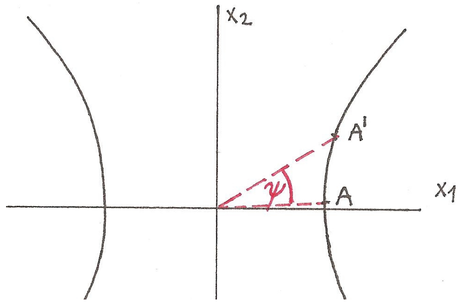
$$M' = \pm \begin{pmatrix} \cosh\psi & \pm\sinh\psi \\ \sinh\psi & \pm\cosh\psi \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Zostáva len určiť, ktorá zo štyroch možností je správna, a potom matica Poincarého transformácií v $\mathbb{R}_1^4$ má tvar

$$M = \begin{pmatrix} M'_{00} & M'_{01} & 0 & 0 \\ M'_{10} & M'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.2.6. *Matica M' je maticou hyperbolických rotácií o uhol ψ v $\mathbb{R}_1^2$, obr. 1.11. Každá takáto rotácia zabezpečí, že množina takých bodov x, že $|x|^2 = k$, kde $k \in \mathbb{R}$ sa zobrazí sama na seba. V grupe tvorenej množinou $\mathbb{R}^2$ s operáciou otočenia okolo začiatku súradnicovej sústavy je orbitou každého bodu kružnica. Orbitálny rozklad množiny $\mathbb{R}^2$ je potom $\mathbb{R}_0^+$. Podobne v grupe tvorenej množinou $\mathbb{R}_1^2$ s operáciou hyperbolického otočenia okolo začiatku súradnicovej sústavy je orbitou každého bodu hyperbola. Takýto orbitálny rozklad množiny $\mathbb{R}_1^2$ je izomorfný s $\mathbb{R}_0^+$.*

Vyššie sme popísali ako vyzerajú nehomogénne Lorentzove transformácie. Keďže sme určili, že $\overline{u} = \overline{0}$, hovoríme už o podmnožine *homogénnych Lorentzových transformácií.* Tieto transformácie tiež tvoria grupu, ktorú nazývame *všeobecnou Lorentzovou grupou L.* Naša M patrí do tejto množiny. Homogénne Lorentzove transformácie zachovávajú pseudo-skalárny súčin. Všeobecná Lorentzova grupa sa označuje aj $O(3,1)$, pretože je to grupa pseudo-ortogonálnych transformácií v pseudoeuklidovskom priestore $\mathbb{R}_1^4$. Dá sa ukázať (vidieť zo vzťahu 1.1), že determinant takých matíc je ± 1 a pre prvý člen platí $(M_{00})^2 \geq 1$. Z toho vidieť, že Lorentzova grupa $L = O(3,1)$ nie je spojitou grupou, ale sa rozpadá na štyri disjunktné podmnožiny transformácií (obr. 1.12). Každú podmnožinu môžeme charakterizovať



Obr. 1.11: Otočenie o uhol ψ v Minkowského priestore $\mathbb{R}^2_1$. Bod $A' = [a'_1, a'_2]$ vznikol z bodu $A = [a_1, a_2]$ otočením o uhol ψ. Platí, že $a_1^2 - a_2^2 = a_1'^2 - a_2'^2 = k$.

jednou z nasledujúcich štyroch matíc, pričom platí, že matice všetkých transformácií patriacich do danej množiny sú s ňou podobné:

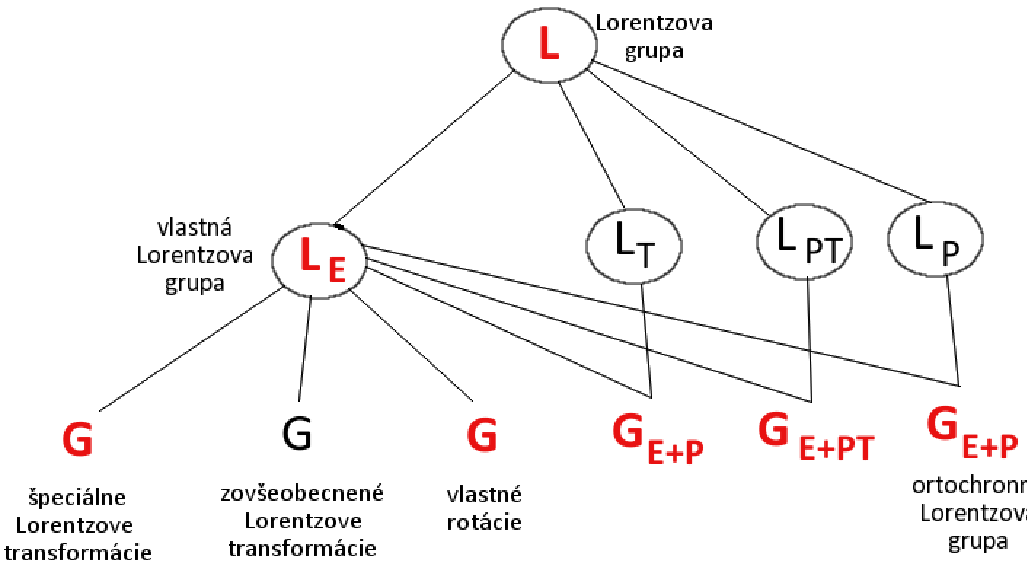
1. **jednotková matica**
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } (\det E = 1,\, e_{00} \geq 1),$$

2. **matica priestorového zrkadlenia**
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ kde } (\det P = -1,\, p_{00} \geq 1),$$

3. **matica časového zrkadlenia**
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } (\det T = -1,\, t_{00} \leq -1),$$

4. **matica priestoročasového zrkadlenia**
$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ kde } (\det PT = 1,\, pt_{00} \leq -1).$$

Všetky matice patriace do množiny reprezentovanej maticou E označujeme L_E. Tieto transformácie opäť tvoria grupu, ktorú voláme *vlastná Lorentzova grupa.* Do grupy L_E patria *špeciálne Lorentzove transformácie* (tvoria podgrupu), *zovšeobecnené Lorentzove transformácie* (netvoria podgrupu) a množinu, ktorá predstavuje *vlastné rotácie súradníc obyčajného trojrozmerného priestoru* (tvoria podgrupu). Ostatné množiny matíc (L_P, L_T, L_{PT}) netvoria podgrupy, lebo neobsahujú jednotkovú maticu. Podgrupa L_E je najmenšia invariantná a tiež najväčšia spojitá podgrupa



Obr. 1.12: Graf znázorňujúci rozpad Lorentzovej grupy. Tučnou sú vyznačené množiny, ktoré opäť tvoria grupu vzhľadom na operáciu skladania zobrazení.

všeobecnej Lorentzovej grupy L. Väčšie podgrupy L dostaneme spojením jednej z množín L_P, L_T, L_{PT} s množinou L_E (keby sme spojili dve množiny s L_E a urobili uzáver vzhľadom na operáciu skladania, už dostaneme celú L). Za najdôležitejšiu invariantnú podgrupu L považujeme grupu, ktorá vznikne zlúčením L_E a L_P. Nazýva sa *ortochronná Lorentzova grupa*. Jedná sa o grupu pseudo-euklidovských transformácií, ktoré nemenia smer plynutia času.

Ako už bolo aj vyššie spomenuté, naša skúmaná matica M bude patriť do množiny L_E. Pretože ak sa rýchlosť v, ktorou sa pohybuje systém S' v kladnom smere osi x_1 vzhľadom na systém S, blíži k nule, matica M by mala byť jednotkovou maticou (aby išlo o identitu).

Ak M má patriť do množiny matíc charakterizovaných jednotkovou maticou, správna matica $M' = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$ a následne

$$M = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0 \\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pôvodný systém

$$
\begin{aligned}
x_0 &= ax'_0 + bx'_1 \ , \\
x_1 &= cx'_0 + dx'_1 \ , \\
x_2 &= x'_2 \ , \\
x_3 &= x'_3
\end{aligned}
$$

sa potom zmení na

$$
\begin{aligned}
ct &= ct' \cosh\psi + x'_1 \sinh\psi \ , \\
x_1 &= ct' \sinh\psi + x'_1 \cosh\psi \ , \\
x_2 &= x'_2 \ , \\
x_3 &= x'_3 \ .
\end{aligned}
$$

Pre začiatok súradnicových osí O' v $x'_1 = 0$ platí

$$
\begin{aligned}
ct &= ct' \cosh\psi \ , \\
x_1 &= ct' \sinh\psi \ , \\
x_2 &= x'_2 \ , \\
x_3 &= x'_3 \ .
\end{aligned}
$$

Ak predelíme prvú rovnicu druhou a uvedomíme si, že $\frac{x_1}{t} = v$, dostávame $\frac{v}{c} = \tanh\psi$.

Odtiaľ $\cosh\psi = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ a $\sinh\psi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (podrobne v [Zla09]).

Substitúciou dostávame *špeciálne Lorentzove transformácie*

$$
t = \left(t' + \left(\frac{v}{c^2}\right) x'_1\right) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \tag{1.2}
$$

$$
x_1 = (x'_1 + vt') \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \tag{1.3}
$$

$$
x_2 = x'_2 \ , \tag{1.4}
$$

$$
x_3 = x'_3 \ . \tag{1.5}
$$

Dôsledky:

1. Pre rýchlosti v malé v porovnaní s rýchlosťou svetla c ($\frac{v}{c} \ll 1$) platí, že $\frac{v}{c} \to 0$ a teda Lorentzove transformácie dajú limitne rovnaké výsledky ako Galileove

transformácie. Avšak pri rýchlostiach, ktoré sú porovnateľné s rýchlosťou svetla, dávajú tieto dva prístupy absolútne odlišné výsledky.

2. Skracovanie dĺžky.

3. Dilatácia času.

1.2.2 Diferenciálna geometria kriviek

Podobne ako sme rozdelili body a vektory na priestorové, svetelné a časové, dajú sa rozdeliť aj krivky. Pri tomto delení existujú dva prístupy. Jeden je zameraný na body samotnej krivky, druhý na jej dotykové vektory. Uvedieme obe definície delenia.

Definícia 10 (Priestorová, časová, svetelná krivka)**.** Hovoríme, že krivka je priestorová (resp. časová, svetelná) v bodovom Minkowského priestore, ak každý jej bod je priestorový (resp. časový, svetelný).

Definícia 11 (Priestorová, časová, svetelná krivka)**.** Hovoríme, že krivka je priestorová (resp. časová, svetelná), ak dotykový vektor v každom jej bode je priestorový (resp. časový, svetelný).

Vzhľadom na to, že pseudo-skalárny súčin v Minkowského priestore sa od skalárneho súčinu v euklidovskom priestore podstatne líši, zmenia sa aj vlastnosti kriviek s ním súvisiace. Spomeňme napríklad Frenetove vzorce, popísané v [KJ06].

Uvažujme krivku $c(s) \in \mathbb{R}^3_1$, ktorá je hladká a regulárna. Aby sme sa vyhli inflexným bodom, nech vektory prvej a druhej derivácie $c'(s), c''(s)$ sú lineárne nezávislé pre všetky s.

Vektory $\overline{t}(s_0), \overline{n}(s_0), \overline{b}(s_0)$ sú jednotkové vektory Frenetovho trojhranu v bode $c(s_0)$, teda vektory ležiace na dotyčnici, hlavnej normále a binormále krivky $c(s)$. Nech $\kappa(s_0)$ a $\tau(s_0)$ sú krivosť a torzia krivky v bode $c(s_0)$.

Rozlišujeme tri prípady podľa toho, či je krivka $c(s)$ priestorová, svetelná alebo časová v zmysle definície 11:

1. $c(s)$ **je časová, čiže** $\langle c'(s), c'(s)\rangle < 0$
   Nech $c(s)$ je parametrizovaná prirodzenou parametrizáciou, teda $||c'(s)||^2 = -1$. Keďže krivka je časová podľa definície 11, vektor $\overline{t}(s)$ je časový. Platí, že $\left\langle \overline{t}(s), \overline{t}'(s)\right\rangle = 0$, a teda vektor $\overline{t}'(s)$ je vždy priestorový. Frenetove vzorce majú potom tvar

$$
\begin{aligned}
\overline{t}'(s) &= \kappa(s)\,\overline{n}(s),\\
\overline{n}'(s) &= \kappa(s)\,\overline{t}(s) + \tau(s)\,\overline{b}(s),\\
\overline{b}'(s) &= -\tau(s)\,\overline{n}(s).
\end{aligned}
$$

2. $c(s)$ **je svetelná, čiže** $\langle c'(s), c'(s)\rangle = 0$
   To znamená, že $\left\langle \overline{t}'(s), \overline{t}''(s)\right\rangle = 0$ a teda $\overline{t}''(s)$ je priestorový vektor (keby bol pre nejaké s svetelný, bod $c'(s)$ by bol inflexný). Nech $c(s)$ je parametrizovaná tzv. pseudo prirodzenou parametrizáciou, čiže $||c''(s)||^2 = 1$. Vektory $\overline{t}(s), \overline{b}(s)$ sú svetelné. Frenetove vzorce potom majú tvar

$$\begin{aligned}\overline{t}'(s) &= \overline{n}(s),\\ \overline{n}'(s) &= \tau(s)\,\overline{t}(s) - \overline{b}(s),\\ \overline{b}'(s) &= -\tau(s)\,\overline{n}(s).\end{aligned}$$

3. $c(s)$ **je priestorová, čiže** $\langle c'(s), c'(s)\rangle > 0$
   Nech $c(s)$ je parametrizovaná prirodzenou parametrizáciou, teda $||c'(s)||^2 = 1$. Vektor $\overline{t}(s)$ je priestorový. V závislosti od toho, aký bude vektor $\overline{t}'(s)$ môžeme rozlíšiť nasledujúce prípady:
   (a) ak vektor $\overline{t}'(s)$ je časový alebo priestorový, Frenetove vzorce majú tvar

$$\begin{aligned}\overline{t}'(s) &= \kappa(s)\,\overline{n}(s),\\ \overline{n}'(s) &= -\langle \overline{n}(s), \overline{n}(s)\rangle\,\kappa(s)\,\overline{t}(s) + \tau(s)\,\overline{b}(s),\\ \overline{b}'(s) &= \tau(s)\,\overline{n}(s).\end{aligned}$$

   (b) ak vektor $\overline{t}'(s)$ je svetelný v izolovanom bode, hovoríme o tzv. Minkovského inflexnom bode, ak je svetelný na celom intervale, o tzv. inflexnom segmente. Vektory $\overline{n}(s), \overline{b}(s)$ sú svetelné. Frenetove vzorce na inflexnom segmente majú tvar

$$\begin{aligned}\overline{t}'(s) &= \overline{n}(s),\\ \overline{n}'(s) &= \tau(s)\,\overline{n}(s),\\ \overline{b}'(s) &= -\overline{t}(s) - \tau(s)\,\overline{b}(s).\end{aligned}$$

Platí, že priestorová krivka $c: I \to \mathbb{R}^3_1$ má inflexný bod v $s_0 \in I$ práve vtedy, keď $||c'(s_0) \times c''(s_0)||^2 = 0$. Dôkaz v [KJ06].

V euklidovskom priestore krivka leží v rovine práve vtedy, keď $\tau(s) = 0$ pre každé $s \in I$, čiže jej torzia je v každom bode nulová. V Minkowského priestore je však toto nutnou alebo postačujúcou podmienkou toho, aby krivka ležala v rovine.

Na jednej strane sa dá ukázať, že krivka ležiaca v svetelnej rovine pozostáva iba z Minkowského inflexných bodov, čiže leží v rovine bez toho aby mala nulovú torziu.

Jej krivosť sa formálne vyčísli na 1 a jej torzia prevezme úlohu krivosti. Takéto krivky zodpovedajú príkladu 3b Frenetových vzorcov.

Na druhej strane, pre krivky s nulovou torziou platí, nasledovná veta (dôkaz v [KJ06]).

Veta 1.2.7. *Ak má krivka $c(s) \in \mathbb{R}^3_1$ nulovú torziu, potom buď leží v rovine, alebo je podobná tzv. W-null-cubic $w(s) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(6s - s^3, 3\sqrt{2}s^2, 6s + s^3\right)$.*

Poznámka 1.2.8. *Pod pojmom podobný sa v Minkowského geometrii myslí zhodný až na Lorentzove transformácie, posunutie a škálovanie.*

1.3 Bézierove krivky v Minkowského priestore

Definícia Bézierových kriviek v Minkowského priestore je veľmi podobná ako v euklidovskom priestore.

Definícia 12 (Bézierova krivka v Minkowského priestore)**.** Bézierovou krivkou stupňa n nazývame polynomické zobrazenie $b_M : I \to \mathbb{R}^d_1$, dané predpisom: $b_M(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, b_i$ pre $t \in \mathbb{R}$. Body $b_i \in \mathbb{R}^d_1$, kde $i \in \{0, \ldots, n\}$ nazývame riadiacimi vrcholmi, polynómy $B_i^n(t)$, kde $i \in \{0, \ldots, n\}$ sú Bernsteinove polynómy stupňa n. Číslo t nazývame parameter krivky.

Poznámka 1.3.1. *Dá sa ukázať, že takto definované Bézierove krivky budú mať opäť vlastnosti vyplývajúce z viet 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.7.*

V článku [Geo08] sú popísané niektoré vlastnosti priestorových Bézierových kriviek v $\mathbb{R}^3_1$, pričom autor využíva definíciu 11. Uveďme niektoré z nich.

Veta 1.3.2. *Nech $b_M(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, b_i$ je Bézierova krivka v Minkowského priestore. Ak sú vektory $\triangle b_i = b_{i+1} - b_i$ pre $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ priestorové, potom je $b_M(t)$ priestorová.*

Veta 1.3.3. *Nech $\pi_i : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}$, kde $i = 1, 2, 3$ je také, že pre $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1$ platí $\pi_i(\overline{x}) = x_i$. Nech $b_M(t)$ je Bézierova krivka v $\mathbb{R}^3_1$. Ak platí, že $\pi_1(\triangle b_i) = \pi_2(\triangle b_i)$ alebo $\pi_1(\triangle b_i) = \pi_3(\triangle b_i)$ pre $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, potom $b_M(t)$ je priestorová a nie je regulárna.*

Veta 1.3.4. *Ak je Bézierova krivka $b_M(t)$ priestorová, potom sú vektory $\triangle b_0 = b_1 - b_0$ a $\triangle b_{n-1} = b_n - b_{n-1}$ priestorové.*

Dôsledok 1.3.5. *Priestorová Bézierova krivka* $b_M(t)$ *s riadiacimi vrcholmi* $b_0, \ldots, b_n$, *kde* $n > 3$ *je uzavretá, ak* $b_0 = b_n$ *a* b_0 *je v strede segmentu* $[b_1, b_{n-1}]$.

Definícia 13 (Pseudo-vektorový súčin)**.** Pseudo-vektorovým súčinom nazývame binárnu operáciu $\phi : \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ takú, že ak $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)\,, \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3_1$ tak $\phi(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} \times \overline{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, -x_1y_2 + x_2y_1)$.

Veta 1.3.6. *Nech* $b_M(t)$ *je priestorová Bézierova krivka. Definujme funkcie*

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &= \langle b'_M(t)\,, b'_M(t)\rangle\,,\\
Q_2(t) &= \langle b'_M(t) \times b''_M(t)\,, b'_M(t) \times b''_M(t)\rangle\,,\\
Q_3(t) &= \langle b'_M(t) \times b''_M(t)\,, b'''_M(t)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Ak $b_M(t)$ *je regulárna pre nejaké* $t_0 \in [0, 1]$, *potom pre krivosť a torziu Bézierovej krivky v bode* t_0 *platí*

$$\begin{aligned}
\kappa(t_0) &= \frac{\sqrt{|Q_2(t_0)|}}{\left(\sqrt{Q_1(t_0)}\right)^3}\,,\\
\tau(t_0) &= \frac{Q_3(t_0)}{Q_2(t_0)}\,.
\end{aligned}$$

.

Kapitola 2

Podmienka priestorovosti

V tejto časti hľadáme nutné a postačujúce podmienky pre riadiace vrcholy Bézierovej krivky druhého stupňa tak, aby bola priestorová v zmysle definície 10. Budeme pracovať v trojrozmernom Minkowského priestore. Na začiatku odvodíme nutné podmienky pre jej krajné riadiace vrcholy. Ďalej budeme predpokladať, že krajné riadiace vrcholy sú pevne dané a v závislosti od nich budeme skúmať podmienky pre stredný riadiaci vrchol. Uvedieme tri rôzne prístupy k ich získaniu, pričom každý bude mať svoje výhody a nevýhody.

2.1 Nutné podmienky pre krajné body

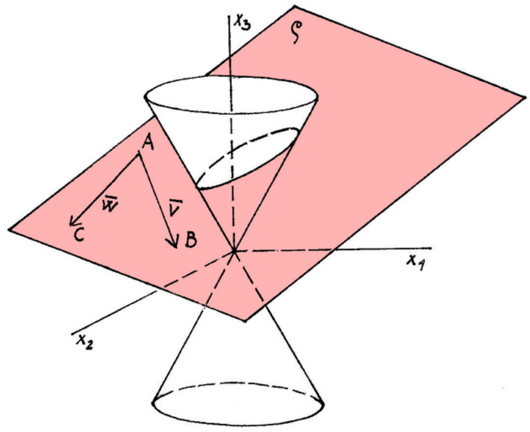
Majme Minkowského priestor $\mathbb{R}^3_1$. Vezmime Bézierovu krivku druhého stupňa s riadiacimi vrcholmi A, C a B v tomto poradí, ozn. $b_{ACB}(t)$.

Označme $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$. Aby bola Bézierova krivka priestorová, musí byť podľa definície 10 každý jej bod priestorový. Podľa vety 1.1.2 body A a B patria krivke, a teda musia byť priestorové. Preto ich súradnice musia spĺňať nutné podmienky

$$a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 > 0 \ , \tag{2.1}$$
$$b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 > 0 \ . \tag{2.2}$$

2.2 Stredný riadiaci vrchol

Našli sme nutné podmienky pre začiatočný a koncový riadiaci vrchol Bézierovej krivky. Nech teda A, B sú pevne dané a spĺňajú podmienky (2.1) a (2.2). Hľadajme podmienky pre stredný riadiaci vrchol C.



Obr. 2.1: Od polohy bodu C závisí natočenie roviny ρ. Od natočenia ρ závisí útvar vyťatý na svetelnom kuželi.

Keďže Bézierova krivka druhého stupňa je časťou paraboly, bude ležať v rovine, označme ju ρ. Táto rovina $\rho = A + t\overline{v} + s\overline{w}$, kde $t, s \in \mathbb{R}$ je určená bodom A a vektorom $\overline{v} = \overline{AB}$, ktoré poznáme a vektorom $\overline{w} = \overline{AC}$, ktorý nepoznáme. Podľa toho ako sa bude meniť bod C, bude sa otáčať táto rovina okolo osi $\overline{AB}$. Na svetelnom kuželi ρ vytne elipsu, parabolu alebo hyperbolu (ďalej len kužeľosečku K) ako vidieť na obr. 2.1.

Poznámka 2.2.1. *V špeciálnych prípadoch môže byť vyťatým útvarom bod (vrchol kužeľa), priamka (ρ je dotykovou rovinou ku kužeľu) alebo dve priamky (ak os $x_3 \in \rho$). Tieto prípady popíšeme zvlášť, keď zistíme ako vyzerajú hľadané podmienky pre elipsu, parabolu a hyperbolu.*

Aby bola Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ priestorová, musí každý jej bod ležať mimo svetelného kužeľa. Teda v závislosti od natočenia ρ mimo vyťatej elipsy, resp. paraboly alebo hyperboly. Stačí vyriešiť úlohu v rovine ρ pre jednotlivé typy kužeľosečiek a následne previesť do celého priestoru. Nasleduje niekoľko prístupov k riešeniu tohto rovinného problému. Odteraz budeme pracovať v lokálnych súradniciach roviny ρ, v pseudo-karteziánskej sústave súradníc $S_\rho(O, x, y)$. Nech v $S_\rho(O, x, y)$ sú súradnice riadiacich vrcholov $A = [a_x, a_y]$, $C = [c_x, c_y]$ a $B = [b_x, b_y]$.

2.3 Analytický prístup

V tejto časti sa snažíme vyjadriť podmienky (nutné alebo postačujúce) pre súradnice bodu C analyticky. Ak má Bézierova krivka ležať mimo K, ich prienikom musí byť prázdna množina. Vyjadrime ako vyzerá všeobecný predpis ich priesečníka. Potom nastavme podmienky tak, aby priesečník neexistoval.

Nech $K : \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$, kde $\alpha, \ldots, \zeta \in \mathbb{R}$. Bézierova krivka, kde jedinou neznámou je bod C, je určená rovnicou $b(t) = t^2(A - 2C + B) + t(-2A + 2C) + A$, kde $t \in [0, 1]$. Odtiaľ dostávame rovnice pre súradnice jej bodov $[b_x(t), b_y(t)]$

$$\begin{aligned} b_x(t) &= t^2(a_x - 2c_x + b_x) + t(-2a_x + 2c_x) + a_x \ , \\ b_y(t) &= t^2(a_y - 2c_y + b_y) + t(-2a_y + 2c_y) + a_y \ . \end{aligned}$$

Keďže priesečník je bodom Bézierovej krivky, budeme ho identifikovať podľa jeho parametra t. Do rovnice K dosadíme Bézierovu krivku a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = \alpha b_x^2(t) + \beta b_x(t) b_y(t) + \gamma b_y^2(t) \\ + \delta b_x(t) + \epsilon b_y(t) + \zeta \ . \end{aligned}$$

Tento výraz chápeme ako polynóm v premennej t a môžme ho upraviť do tvaru

$$0 = k_4 t^4 + k_3 t^3 + k_2 t^2 + k_1 t + k_0, \tag{2.3}$$

kde koeficienty $k_0, \ldots, k_4$ sú výrazy obsahujúce súradnice bodov A, B, C a parametre kužeľosečky $\alpha, \ldots, \zeta$.

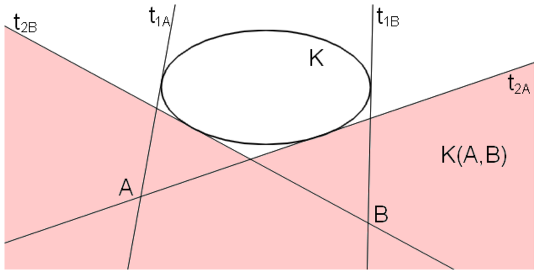
Tento polynóm štvrtého stupňa má najviac štyri korene (reálne alebo komplexné), označme ich t_1, t_2, t_3, t_4. Ak pre niektoré $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ je $t_i \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ znamená to, že Bézierova krivka a K majú spoločný bod $b(t_i)$ (vylúčili sme parametre $t = 0$ a $t = 1$, pretože prislúchajú bodom A, B, ktoré sú priestorové). To ale nechceme, preto musí byť $t_i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \setminus [0, 1])$. Z toho dostávame podmienky

$$\text{ak } t_i \in \mathbb{R}, \text{ tak musí byť } t_i < 0 \text{ alebo } t_i > 1, \tag{2.4}$$

pre všetky $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Každé t_i je výraz, kde jediné neznáme sú súradnice bodu C. Podmienky (2.4) teda priamo určujú postačujúce a zároveň nutné podmienky pre bod C. Keď sme však pomocou CAS Maxima vyjadrili korene t_1, t_2, t_3, t_4, dostali sme obrovské výrazy, z ktorých nevieme vyjadriť podmienky na praktické použitie.

Dajú sa použiť len ako rozhodovacie pravidlo, či pre známe A, C, B je $b_{ACB}(t)$ priestorová. Ak totiž poznáme A, C, B, vieme zistiť parametre kužeľosečky a CAS Maxima vie vypočítať konkrétne t_1, t_2, t_3, t_4. Ak platia podmienky (2.4), Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ je priestorová.

Poznámka 2.3.1. *Pre niektoré špeciálne prípady sa pomocou podmienok 2.4 podarilo odvodiť analytické vyjadrenie nutných a zároveň postačujúcich podmienok pre bod*



Obr. 2.2: Oblasť $K(A,B)$ je určená dotyčnicami $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$ z bodov A, B ku kužeľosečke.

C. Uveďme príklad. Nech $K : x^2+y^2 = 1$, $A = [-l, 0]$ a $B = [l, 0]$, kde $l > 2, l \in \mathbb{R}$ je pevne zvolené. Hľadajme vhodné C na priamke $x = 0$. Použili sme CAS Maxima na vyjadrenie t_1, t_2, t_3, t_4, pričom jedinou neznámou bolo c_y. Podmienky vyzerali nasledovne: $c_y > 2$ alebo $c_y < -2$. Ak c_y spĺňa túto podmienku, $b_{ACB}(t)$ je priestorová. Ak ju nespĺňa, $b_{ACB}(t)$ priestorová nie je. Správnosť výsledku sa dá dokázať, napríklad využitím symetrie celého príkladu vzhľadom na os y.

2.4 Iteratívny algoritmus

Ak nevieme získať praktické podmienky pre bod C, chceme aspoň pre dané C rozhodnúť, či je $b_{ACB}(t)$ priestorová. V predchádzajúcej časti sme uviedli ako sa to dá pomocou nástroja, ktorý vie presne vypočítať korene rovnice štvrtého stupňa. V tejto časti sa pokúsime rozhodnúť o danom C bez použitia takéhoto nástroja. Využijeme vetu 1.1.3 a vetu 1.1.7.

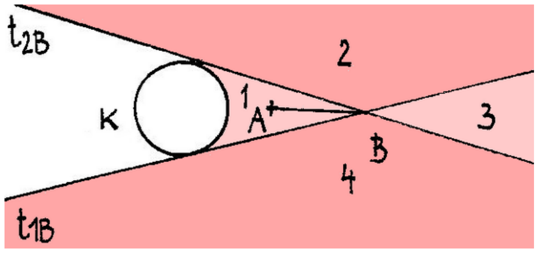
V nasledujúcom texte budeme predpokladať, že z priestorových bodov A, B vieme zostrojiť dotyčnice ku K, z každého dve. Musíme si uvedomiť, že touto podmienkou vylúčime niektoré body, napríklad stred hyperboly.

Definícia 14 (Oblasť $K(A,B)$)**.** Majme body A, B a kužeľosečku K. Označme $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$ dotyčnice z A, B ku K. Nech

$$t_{od} = \{t_{ij}, \text{ kde } i \in \{1,2\},\ j \in \{A,B\} \text{ a platí, že } t_{ij} \text{ oddeľuje } K \text{ a úsečku } AB\}$$

. Potom $K(A,B) = \cup V_{ij}$, kde V_{ij} je polrovina určená dotyčnicou $t_{ij} \in t_{od}$, ktorá neobsahuje K (obr. 2.2).

Poznámka 2.4.1. *Takto definovaná $K(A,B)$ môže byť aj prázdna množina. Ak prienik úsečky AB a K je neprázdny, množina t_{od} je prázdna a teda je prázdna aj*



Obr. 2.3: Bod A môže ležať v jednej zo štyroch častí určených dotyčnicami t_{1B}, t_{2B} z bodu B ku kužeľosečke K.

$K(A, B)$.

Veta 2.4.2. *Ak $AB \cap K = \emptyset$, potom množinu t_{od} tvoria dve priamky.*

Dôkaz. Body A, B sú priestorové, teda existujú $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$. Skúmajme dotyčnice z bodu B. Môžu nastať tri prípady:

1. Nech dotyčnice $t_{1B}, t_{2B} \notin t_{od}$. Z toho vyplýva, že A leží vo výseku ohraničenom t_{1B}, t_{2B} a K, čo je časť 1 na obr. 2.3. Potom pre obe dotyčnice z A platí, že oddeľujú AB od kužeľosečky a teda $t_{od} = \{t_{1A}, t_{2A}\}$.

2. Nech dotyčnica $t_{1B} \in t_{od}$ a dotyčnica $t_{2B} \notin t_{od}$. Dotyčnice t_{1B}, t_{2B} rozdelia rovinu na štyri časti, obr. 2.3. Ak jedna z priamok patrí do t_{od}, musí bod A ležať v časti 2 alebo časti 4. Keby obe priamky $t_{1A}, t_{2A} \notin t_{od}$, museli by podľa prípadu 1 obe priamky $t_{1B}, t_{2B} \in t_{od}$, čo je spor. Tiež nemôžu obe priamky $t_{1A}, t_{2A} \in t_{od}$, lebo to by musel bod A ležať v časti 1, čo je spor. Preto existuje len jedno $i \in \{1, 2\}$ také, že $t_{od} = \{t_{iA}, t_{1B}\}$.

3. Nech dotyčnice $t_{1B}, t_{2B} \in t_{od}$. Potom bod A leží v časti 3, pozri obr. 2.3. Z toho priamky $t_{1A}, t_{2A} \notin t_{od}$ a teda $t_{od} = \{t_{1B}, t_{2B}\}$. □

Veta 2.4.3. *Ak $AB \cap K = \emptyset$, potom $K(A, B)$ je neprázdna množina daná ako zjednotenie dvoch polrovín.*

Dôkaz. $K(A, B)$ je neprázdna, lebo pre každé $C \in AB$ platí, že $C \in K(A, B)$. Zvyšok je priamym dôsledkom lemy 2.4.2. □

Veta 2.4.4. *Ak $C \in K(A, B)$, potom $b_{ACB}(t)$ je priestorová.*

Dôkaz. Ak $C \in K(A, B)$, potom vnútro $\triangle ABC$ leží mimo K. Potom podľa vety 1.1.3 je $b_{ACB}(t)$ priestorová. □

Vďaka vete 2.4.4 nám oblasť $K(A,B)$ poskytuje akýsi hrubý odhad, či C vyhovuje podmienke. Ak pre dané A,C,B a K je $K(A,B)$ neprázdna a $C \in K(A,B)$, potom dané C vyhovuje podmienke a úloha je vyriešená. Ak $C \notin K(A,B)$, zatiaľ o C nevieme rozhodnúť.

Budeme postupne prerozdeľovať $b_{ACB}(t)$ na menšie segmenty $b_{A_iC_iB_i}(t)$ v zmysle vety 1.1.7. Pre každý segment sa budeme pýtať, či $C_i \in K(A_i,B_i)$. Ak pre nejaké i oblasť $K(A_i,B_i)$ je prázdna množina, musíme daný segment opäť prerozdeliť. Ak by sme po n prerozdeleniach dostali 2^n segmentov $b_{A_1C_1B_1}(t), \ldots, b_{A_{2^n}C_{2^n}B_{2^n}}(t)$ spĺňajúcich, že $C_i \in K(A_i,B_i)$ pre všetky $i = 1,\ldots,2^n$, na základe vety 1.1.3 a vety 1.1.7 môžme povedať, že pre dané C je $b_{ACB}(t)$ priestorová.

Na rozhodnutie, či C spĺňa požiadavku, že Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ je priestorová, budeme používať nasledovný rekurzívny algoritmus:

1. krok: Ak C leží v $K(A,B)$, podľa vety 2.4.4 vyhovuje podmienke a algoritmus skončí. Ak C neleží v $K(A,B)$, nájdeme bod $b(\frac{1}{2})$.

2. krok: Ak bod $b(\frac{1}{2})$ nie je priestorový, t.j. neplatí $b(\frac{1}{2})_1^2 - b(\frac{1}{2})_2^2 > 0$, potom Bézierova krivka nie je priestorová a teda bod C nevyhovuje a algoritmus skončí. Ak bod $b(\frac{1}{2})$ je priestorový, prerozdelíme Bézierovu krivku $b_{ACB}(t)$ v zmysle vety 1.1.7. Na oba segmenty aplikujeme 1. krok, prípadne potom 2. krok.

Koniec algoritmu nastane:

1. Buď po $n-$krokoch jeden z bodov $b(\frac{i}{2^n})$, $i = 1,\ldots,2^n$, nebude priestorový a teda celá Bézierova krivka nebude priestorová. Potom uvažovaný C nespĺňa podmienku.

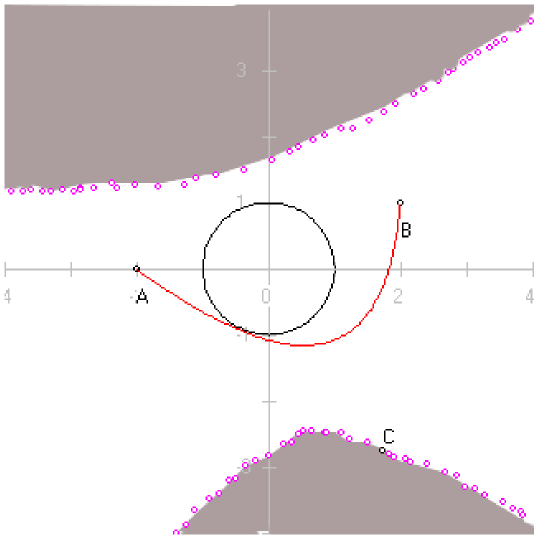
2. Alebo po n krokoch 2^n segmentov Bézierovej krivky bude spĺňať $C_i \in K(A_i,B_i)$. Teda podľa vety 2.4.4 je každý segment Bézierovej krivky priestorová krivka. Potom uvažovaný C spĺňa podmienku.

Otázkou je, či je tento algoritmus konečný. Rozlíšme tri prípady:

1. Nech $b_{ACB}(t)$ a K nemajú spoločné body, čiže Bézierove krivka je priestorová. Čím viac prerozdelení $b_{ACB}(t)$ urobíme, tým viac sa bude tvar riadiaceho polygónu približovať k tvaru Bézierovej krivky. Pri dostatočnom počte prerozdelení bude pre každý segment $b_{A_iC_iB_i}(t)$ platiť, že C_i je tak blízko úsečky A_iB_i, že $C_i \in K(A_i,B_i)$. Nastane prípad 1 a algoritmus skončí.

2. Nech $b_{ACB}\left(\frac{1}{2}\right)$ a K majú spoločné body, nie všetky dotykové. Po dostatočnom počte prerozdelení pre nejaké i bude celý segment $b_{A_iC_iB_i}(t)$ ležať v K. Potom jeho bod $b_{A_iC_iB_i}(t)$ je priestorový. Nastane prípad 2 a algoritmus skončí.

3. Nech $b_{ACB}\left(\frac{1}{2}\right)$ a K majú spoločné len dotykové body. Ak sú dotykové body tvaru $b_{ACB}\left(\frac{i}{2^n}\right)$, nastane prípad 2 a algoritmus skončí. Ak sú však dotykové



Obr. 2.4: Kužeľosečkou $K : x^2 + y^2 - 1 = 0$ je jednotková kružnica, bod $A = [-1, 0]$ a bod $B = [2, 1]$. Hľadanú oblasť určujú dve krivky.

body iného tvaru, napríklad $b(t_0)$ pre $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, algoritmus neskončí. Segment okolo dotykového bodu sa bude stále zmenšovať, ale nenastane ani jedna z ukončujúcich podmienok. Treba pridať dodatočnú podmienku, napríklad ak sú body A, B príliš blízko seba (v zmysle euklidovskej vzdialenosti), algoritmus skončí s tým, že nevie o bode C rozhodnúť a pravdepodobne existuje dotykový bod.

Poznámka 2.4.5. *V prípade hyperboly (nakoľko sa skladá z dvoch samostatných kriviek) by sme mali s takto definovanou oblasťou $K(A, B)$ problém. Preto by sme celú úlohu riešili samostatne pre každú z jej dvoch častí a výsledné riešenie by sme získali ako prienik týchto dvoch čiastkových riešení.*

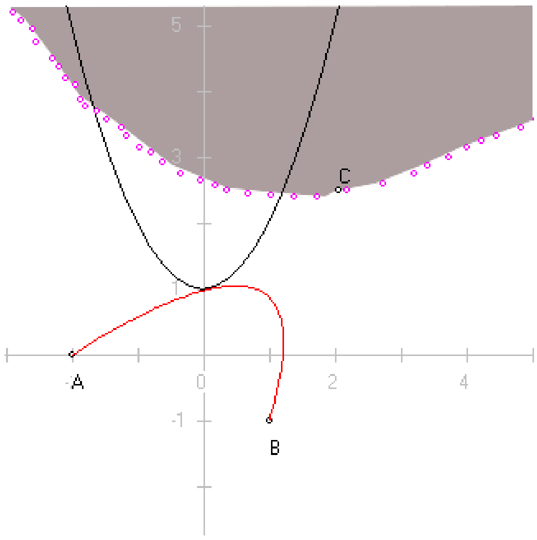
2.5 Prístup hľadaním dotyku rádu 1

Skúsme nájsť oblasť H obsahujúcu všetky body C vyhovujúce podmienke, že $b_{ACB}(t)$ je priestorová.

Za účelom získania základnej predstavy o tejto oblasti H bol vytvorený program *Experiment*. Vykreslí skúmanú kužeľosečku K a body A, B. Je možné posúvať bod C, pričom sa okamžite prekreslí Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$.

Obrázky 2.4, 2.5 vznikli ako výsledky programu *Experiment*.

Poznámka 2.5.1. *Experiment vie pracovať len so základnou elipsou, parabolou a hyperbolou. Avšak ostatné kužeľosečky sú len výsledok otočenia a posunutia, takže*



Obr. 2.5: Kužeľosečkou $K : x^2 + 1 = 0$ je parabola, bod $A = [-2, 0]$ a bod $B = [1, -1]$. Hľadanú oblasť určuje jedna krivka.

ľubovoľnú situáciu možno namodelovať len posúvaním bodov A a B. V programe je možné vykresľovať aj špeciálne prípady, keď kužeľosečka je bod, priamka alebo dve priamky.

Definícia 15 (Množina ∂H)**.** Označme ∂H množinu takých bodov C', že Bézierova krivka $b_{AC'B}(t)$ má s kužeľosečkou K práve jeden spoločný bod alebo práve dva spoločné body.

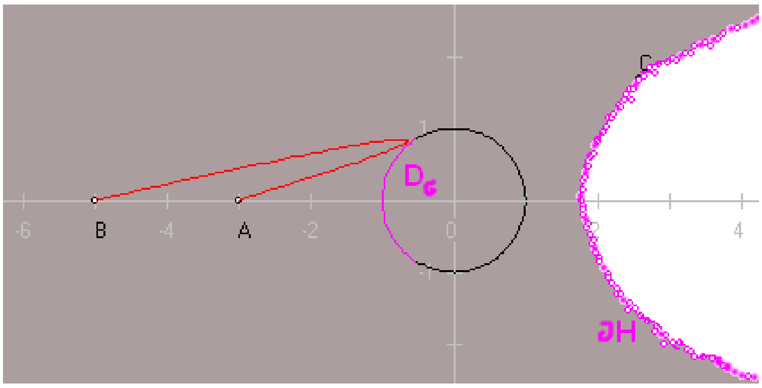
Z pozorovania možno vysloviť nasledovné hypotézy.

Hypotéza 1. *∂H je množina spojitých kriviek.*

Hypotéza 2. *H je sčasti ohraničená krivkami z ∂H.*

Hypotéza 2 je vyslovená na základe toho, že situácia, keď $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K, je akousi hranicou medzi stavom, kedy $b_{ACB}(t)$ a K nemajú spoločné body a kedy majú viac spoločných bodov.

Za predpokladu, že táto ∂H existuje, je otázkou ako ju nájsť. Povedali sme, že ∂H tvoria také C', že Bézierova krivka $b_{AC'B}(t)$ a K majú spoločné len dotykové body. To vedie k úvahám o existencii surjektívneho zobrazenie $\sigma : D_\sigma \to \partial H$, kde D_σ je zatiaľ neznámy definičný obor, obr. 2.6. Z definície 15 vyplýva, že $D_\sigma \subset K$, pretože pre každé $C' \in \partial H$ existuje bod $[x_0, y_0] \in K$ taký, že $C' = \sigma([x_0, y_0])$ a $b_{AC'B}(t) \cap K = [x_0, y_0]$. Ak zistíme ako vyzerajú σ a D_σ, získame hľadanú hranicu ∂H.



Obr. 2.6: Existuje surjektívne zobrazenie $\sigma : D_\sigma \to \partial H$, kde $D_\sigma \subset K$.

2.5.1 Zobrazenie σ

Predpis zobrazenia σ nájdeme z nasledovnej požiadavky. Ak $[x_0, y_0]$ je dotykový bod $b_{AC'B}(t)$ a K, potom $\sigma([x_0, y_0]) = C'$.

Nech t_B je dotyčnica k Bézierovej krivke v bode $[x_0, y_0]$ (existuje, lebo to nie je koncový bod) a nech t_K je dotyčnica ku kužeľosečke v bode $[x_0, y_0]$ (existuje, lebo kužeľosečka je regulárna krivka). Keďže $[x_0, y_0]$ je spoločný dotykový bod $b_{AC'B}(t)$ a K, musí $t_K = t_B$. Platí nasledujúca veta.

Veta 2.5.2 (Dotyčnica v regulárnom bode)**.** *Nech $P = [x_0, y_0]$ je regulárny bod rovinnej afinnej algebraickej krivky K danej rovnicou $f(x, y) = 0$. Potom dotyková priamka ku krivke K v bode P je daná rovnicou*

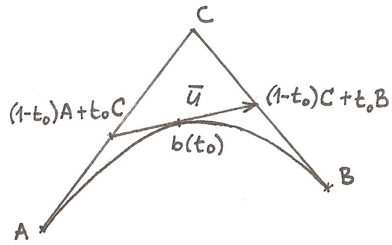
$$(x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{[x_0,y_0]} + (y - y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[x_0,y_0]} = 0\ .$$

Všetky body uvažovanej kužeľosečky K sú regulárne, teda ak K má rovnicu $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, potom dotyčnica t_K v bode $[x_0, y_0]$ má rovnicu

$$0 = (2Ax_0 + By_0 + D)(x - x_0) + (2Cy_0 + Bx_0 + E)(y - y_0)\ .$$

Dotyčnicu t_B odvodíme iným spôsobom, obr. 2.7. Nech $t_0 \in (0, 1)$ je také, že $b(t_0) = [x_0, y_0]$. Podľa vety 1.1.5 možno povedať, že t_B má parametrické vyjadrenie $t_B(t_0) = b(t_0) + s\overline{u}$, kde $s \in \mathbb{R}$ a $\overline{u} = (1 - t_0)\overline{AC} + t_0\overline{CB}$.

Rozpísaním pre jednotlivé súradnice $t_B(t_0)$ dostaneme



Obr. 2.7: Vektor $\overline{u} = (1 - t_0)\overline{AC} + t_0\overline{CB}$ je vektor dotyčnice k Bézierovej krivke v bode $b\,(t_0)$.

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + s[(1 - t_0)(c_x - a_x) + t_0(b_x - c_x)] \ , \\
y &= y_0 + s[(1 - t_0)(c_y - a_y) + t_0(b_y - c_y)] \ ,
\end{aligned}
$$

vylúčením parametra s dostaneme rovnicu t_B

$$
\begin{aligned}
0 = {} & [(1 - t_0)(c_y - a_y) + t_0(b_y - c_y)](x - x_0) \\
& - [(1 - t_0)(c_x - a_x) + t_0(b_x - c_x)](y - y_0) \ .
\end{aligned}
$$

Keďže $[x_0, y_0] = b\,(t_0)$ a $t_B = t_K$, dostávame sústavu troch rovníc

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a_x(1 - t_0)^2 + 2t_0(1 - t_0)c_x + b_x t_0^2 \ , \\
y_0 &= a_y(1 - t_0)^2 + 2t_0(1 - t_0)c_y + b_y t_0^2 \ , \\
-(2Ax_0 + By_0 + D)&[(1 - t_0)(c_x - a_x) + t_0(b_x - c_x)] \\
= (2Cy_0 + Bx_0 + E)&[(1 - t_0)(c_y - a_y) + t_0(b_y - c_y)] \ .
\end{aligned}
$$

Úpravou prvých dvoch a ich dosadením do tretej dostaneme ekvivalentnú sústavu

$$c_x = \frac{x_0 - a_x(1 - t_0)^2 - b_x t_0^2}{2t_0(1 - t_0)} \ , \tag{2.5}$$

$$c_y = \frac{y_0 - a_y(1 - t_0)^2 - b_y t_0^2}{2t_0(1 - t_0)} \ , \tag{2.6}$$

$$0 = \alpha t_0^2 + \beta t_0 + \gamma \ , \tag{2.7}$$

kde

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (Ba_x + 2Ca_y - Bb_x - 2Cb_y)y_0 + Da_x - Db_x \\
&\quad + (2Aa_x + Ba_y - 2Ab_x - Bb_y)x_0 + Ea_y - Eb_y \\
\beta &= 4Cy_0^2 + (4Bx_0 - 2Ba_x - 4Ca_y + 2E)y_0 + 4Ax_0^2 \\
&\quad + (-4Aa_x - 2Ba_y + 2D)x_0 - 2Da_x - 2Ea_y \\
\gamma &= -2Cy_0^2 + (-2Bx_0 + Ba_x + 2Ca_y - E)y_0 \\
&\quad - 2Ax_0^2 + (2Aa_x + Ba_y - D)x_0 + Da_x + Ea_y \ .
\end{aligned}
$$

Rovnica (2.7) je kvadratická, preto dostaneme dva korene t_0. Len pre jeden však platí, že $t_0 \in (0,1)$. Tento spätne dosadíme do rovníc (2.5), (2.6) a dostaneme $\sigma([x_0, y_0]) = [c_x, c_y]$, čo je hľadaný predpis pre σ spĺňajúci požiadavku určenú na začiatku. Ostáva určiť D_σ, lebo odtiaľ volíme body $[x_0, y_0]$.

Ak platí hypotéza 1, krivky tvoriace ∂H sú štvrtého stupňa, pretože body $[x_0, y_0] \in D_\sigma$ vystupujú v rovnici (2.7) v druhej mocnine (keďže ide o bod z kužeľosečky) a následne t_0 vystupuje v druhej mocnine v rovniciach (2.5) a (2.6).

2.5.2 Definičný obor D_σ

Chceme určiť definičný obor D_σ zobrazenia σ tak, aby bod

$$X \in D_\sigma \subset K \text{ práve vtedy, keď } \sigma(X) \in \partial H. \tag{2.8}$$

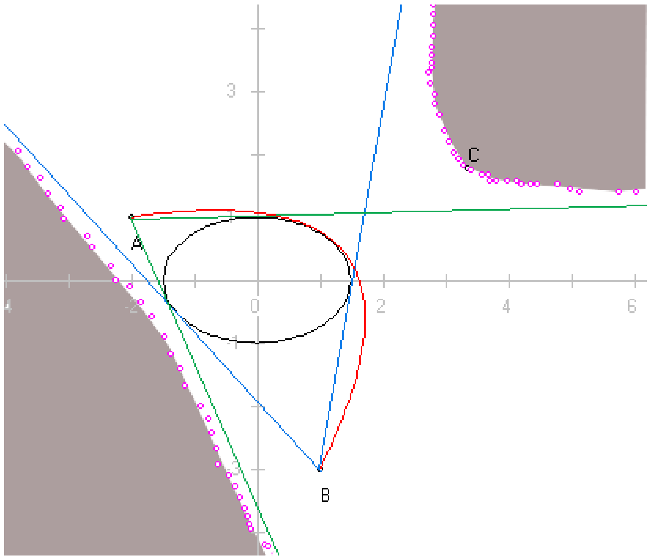
V nasledujúcom texte budeme predpokladať, že z bodov A, B vieme zostrojiť dotyčnice $t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B}$ ku K. Označme príslušné body dotyku $T_{1A}, T_{2A}, T_{1B}, T_{2B}$. Ak pre dané A, B a K existujú body C_1, C_2 také, že $b_{AC_1B}(t)$ a $b_{AC_2B}(t)$ majú s K práve dva spoločné body, označme ich $\{U_1, U_2\} = b_{AC_1B}(t) \cap K$ a $\{U_3, U_4\} = b_{AC_2B}(t) \cap K$. Takéto body U_i sú najviac štyri.

Pokusy z *Experimentu* naznačujú, že $D_\sigma \subset K$ sa skladá z niekoľkých oblúkov, ktoré sú na K presne určené. Ukazuje sa, že koncové body týchto oblúkov môžu tvoriť len body $T_{1A}, T_{2A}, T_{1B}, T_{2B}$ alebo U_1, U_2, U_3, U_4, pričom body $T_{ij} \notin D_\sigma$, kým body $U_i \in D_\sigma$.

Body $U_i \in D_\sigma$, pretože spĺňajú (2.8).

Body $T_{ij} \notin D_\sigma$, ukážeme sporom. Nech povedzme bod $T_{1A} \in D_\sigma$. Podľa podmienky (2.8) existuje taký bod C_T, že bod T_{1A} je spoločný dotykový bod $b_{AC_TB}(t)$ a K. Dotyčnica t_{1A} potom musí byť zároveň aj dotyčnicou k $b_{AC_TB}(t)$ v bode T_{1A}. Krivka $b_{AC_TB}(t)$ je krivkou druhého stupňa. Ľubovoľná dotyčnica ku krivke druhého stupňa má s krivkou práve jeden spoločný bod, bod dotyku. Lenže $A, T_{1A} \in t_{1A}$ a súčasne $A, T_{1A} \in b_{AC_TB}(t)$, čo je spor. Podobne sa dá dôkaz urobiť pre body T_{2A}, T_{1B}, T_{2B}.

Dotyčnice z A, B ku K budú pravdepodobne tvoriť asymptoty ku krivkám z ∂H, obr. 2.8. Je to preto, že čím je C vzdialenejší od AB, tým viac sa $b_{ACB}(t)$ približuje



Obr. 2.8: Krivky ∂H tvoriace hranicu hľadanej oblasti H majú asymptoty, ktoré tvoria dotyčnice z bodov A, B ku kužeľosečke K.

k svojmu konvexnému obalu, presnejšie k AC a CB.

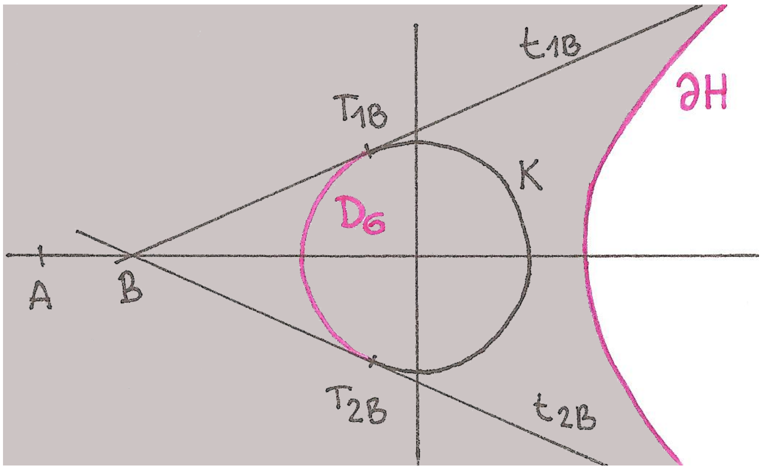
Z pozorovaní sa ukazuje, že D_σ sa skladá z jedného až štyroch oblúkov. Tento počet pravdepodobne závisí od počtu bodov U_i a tiež od vzájomnej polohy bodov T_{ij}. Sledujme ako sa správa D_σ pre jednotlivé typy K:

1. nech K je elipsa v $S_\sigma(O, x, y)$. Zoberme najjednoduchší prípad, že K je jednotková kružnica so stredom v $[0, 0]$.

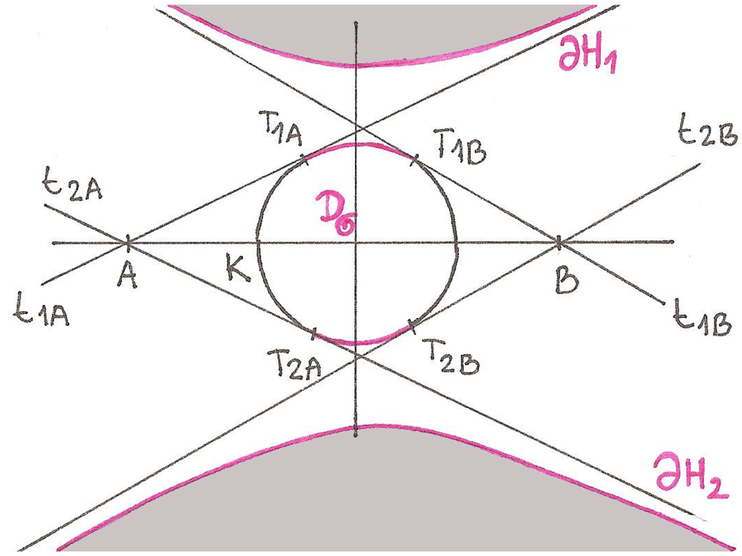
   Nech oba body A, B ležia na kladnej alebo zápornej polosi x, pričom $d(B, K) < d(A, K)$. D_σ sa bude skladať **z jedného oblúka** určeného bodmi T_{1B} a T_{2B}. Získame tak jednu krivku ∂H, ktorá určuje jednu hľadanú oblasť bodov C, obr. 2.9.

   Keby A, B ležali na opačných polosiach x dostatočne ďaleko od kružnice (pre jednotkovú kružnicu napr. $d(B, K), d(A, K) > 2$), definičný obor D_σ sa bude skladať **z dvoch oblúkov**. Koncové body oblúkov sú body T_{1B},T_{1A} a pre druhý oblúk body T_{2B},T_{2A}. Získame tak dve hranice $\partial H_1, \partial H_2$, ktoré určujú dve hľadané oblasti bodov C, obr. 2.10.

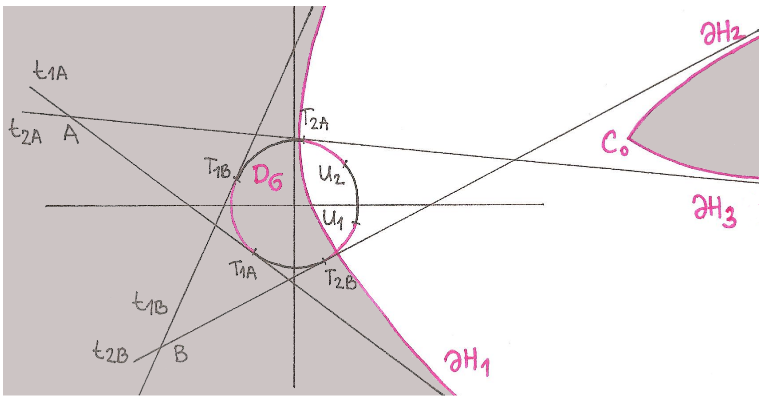
   Body A, B sa dajú umiestniť aj do takej polohy, že D_σ sa bude skladať **z troch oblúkov**. Ich koncovými bodmi budú body T_{1B},T_{1A} a pre druhý oblúk T_{2B},U_1 a pre tretí oblúk T_{2A},U_2. Body U_1, U_2 sú také, že existuje bod $C_0 \in H$, že $b_{AC_0B}(t) \cap K = \{U_1, U_2\}$, obr. 2.11. Vidíme, že akési rozdelenie jedného oblúka z predošlého prípadu spôsobí zmena počtu dotykových bodov $b_{ACB}(t)$ a K. Zaujímavé je, že hoci dostaneme tri krivky hranice $\partial H_1, \partial H_2, \partial H_3$, dve z nich majú spoločný bod (C_0), v ktorom sú C^0-hladké. Preto tieto krivky určia len dve hľadané oblasti bodov C, nie tri ako by sme mohli očakávať.



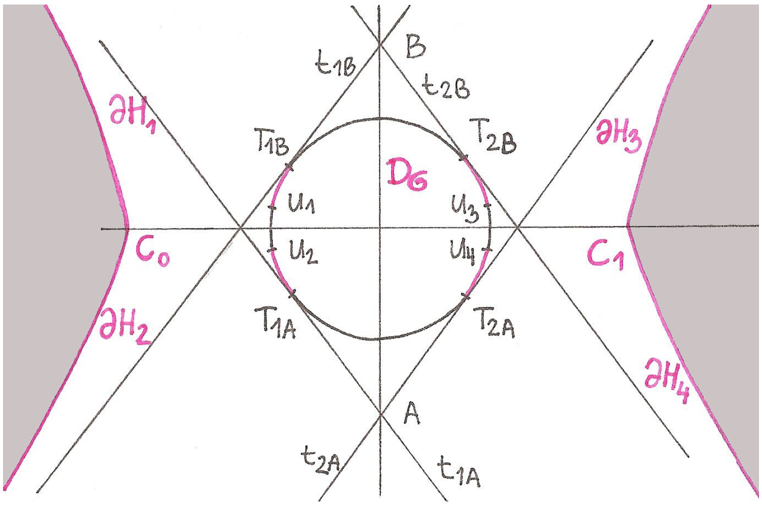
Obr. 2.9: Kužeľosečkou je elipsa, definičný obor D_σ sa skladá z jedného oblúka.



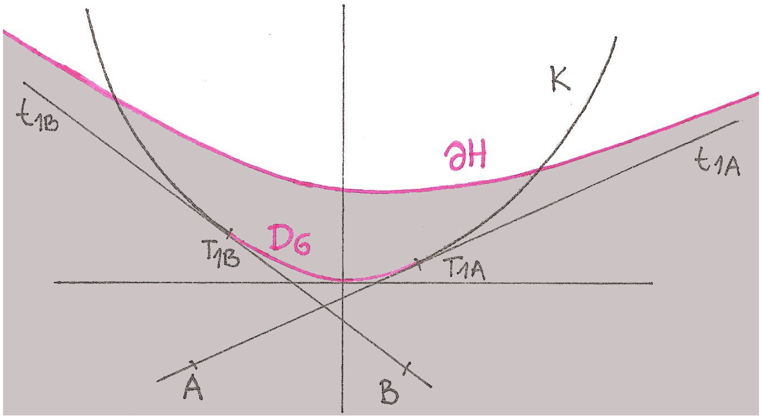
Obr. 2.10: Kužeľosečkou je elipsa, definičný obor D_σ sa skladá z dvoch oblúkov.



Obr. 2.11: Kužeľosečkou je elipsa, definičný obor D_σ sa skladá z troch oblúkov.



Obr. 2.12: Kužeľosečkou je elipsa, definičný obor D_σ sa skladá zo štyroch oblúkov.

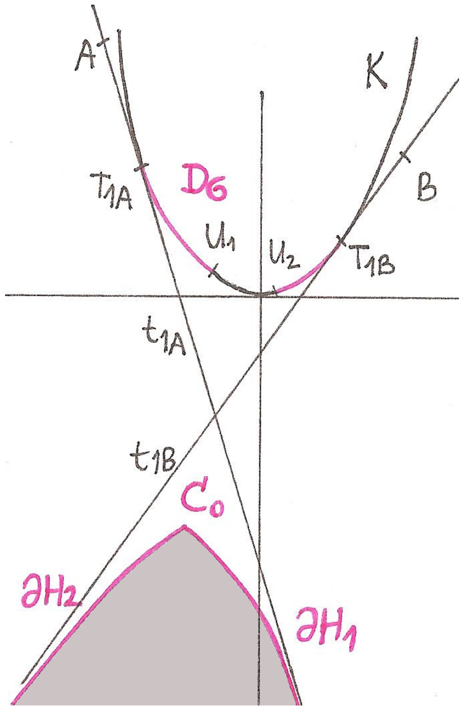


Obr. 2.13: Kužeľosečkou je parabola, definičný obor D_σ sa skladá z jedného oblúka.

Keby tentoraz A, B ležali na opačných polosiach y dostatočne blízko kružnice (pre jednotkovú kružnicu napr. $d(B, K), d(A, K) < 1.5$), D_σ sa bude skladať **zo štyroch oblúkov**. Ich koncovými bodmi budú body T_{1A},U_2 a pre druhý T_{1B},U_1, pre tretí T_{2A},U_4, pre štvrtý T_{2B},U_3. Pričom existujú bod C_0, C_1, že $b_{AC_0B}(t) \cap K = \{U_1, U_2\}$ a $b_{AC_1B}(t) \cap K = \{U_3, U_4\}$. Získame tak štyri hranice $\partial H_1, \partial H_2, \partial H_3, \partial H_4$, ktoré sú po dvoch C^0-hladké (v bodoch C_0, C_1). Tieto určujú dve hľadané oblasti bodov C, obr. 2.12.

2. nech K je parabola. Ako príklad môžme vziať parabolu s vrcholom v $[0, 0]$, ktorý je zároveň jej globálnym minimom. Obrázky 2.13, 2.14 ukazujú D_σ v závislosti od polôh bodov A, B.

3. nech K je hyperbola. Z pozorovaní možno povedať, že D_σ sa opäť môže skladať z viacerých oblúkov. Ich počet závisí od vzájomnej polohy bodov $T_{1A}, T_{2A}, T_{1B}, T_{2B}$ a bodov U_1, U_2, U_3, U_4.



Obr. 2.14: Kužeľosečkou je parabola, definičný obor D_σ sa skladá z dvoch oblúkov.

Ak sa ukáže, že D_σ sa skladá z oblúkov, potvrdí sa hypotéza 1, lebo zobrazenie σ je polynomické a teda spojité. Presný popis D_σ sa zatiaľ nepodarilo nájsť.

2.5.3 Hľadaná oblasť H

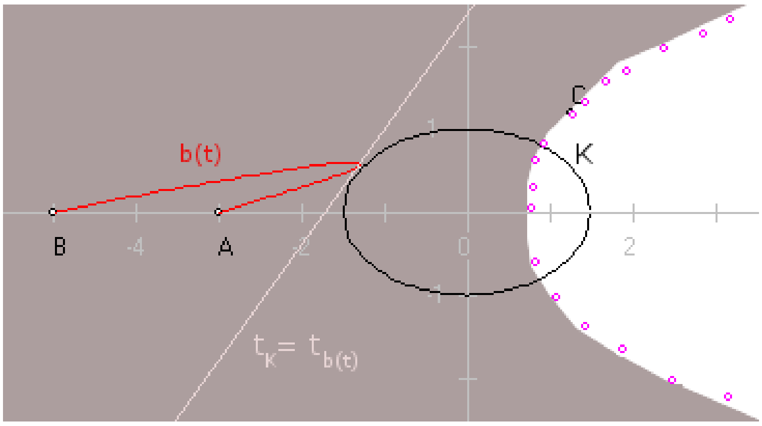
Vo výpočtoch sme našli hranicu ∂H, za predpokladu, že poznáme definičný obor D_σ. Tiež sme vyslovili hypotézu, že ∂H nám v rovine ρ oddelí také C, ktoré patria do H od tých, ktoré tam nepatria. Nikde sme však zatiaľ nepopísali, ako na základe krivky ∂H určíme oblasť H.

Ako sme spomínali v časti 2.5.2, ∂H sa skladá z viacerých kriviek ∂H_i a teda aj hľadaná oblasť H sa bude skladať z viacerých oblastí H_i.

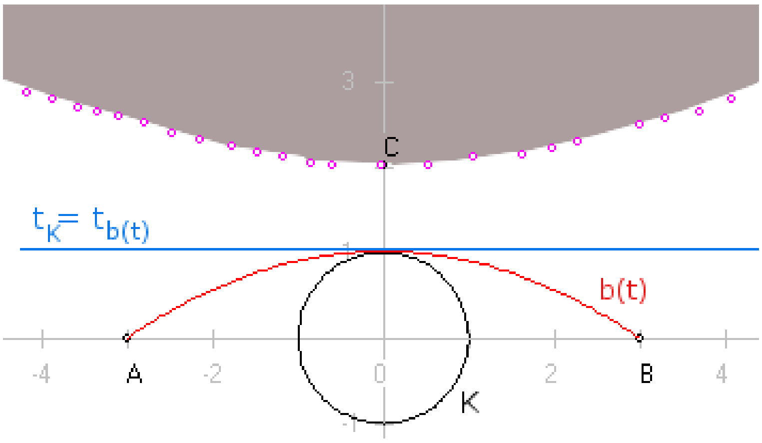
Jedna z možností je vziať z každej oblasti bod C_0 a zistiť, či $b_{AC_0B}(t)$ a K majú spoločný bod. Ak áno, oblasť nevyhovuje požadovaným kritérám. Ak nemajú spoločný bod, táto oblasť je hľadanou oblasťou takých bodov C, že $b_{ACB}(t)$ je priestorová.

Iná možnosť je skúmať, či daná hranica ∂H je z takých bodov C, že $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K zvonku ($b_{ACB}(t)$ a K sú až na bod dotyku navzájom oddelené ich spoločnou dotyčnicou) alebo zvnútra ($b_{ACB}(t)$ a K nie sú navzájom oddelené ich spoločnou dotyčnicou). Rozlíšme teda dva prípady:

1. nech ∂H je z takých bodov C, že $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K zvonku, obr. 2.15. Teda $b_{ACB}(t)$ a K sú oddelené ich spoločnou dotyčnicou. Nech ∂H rozdelí



Obr. 2.15: Ak sú $b_{ACB}(t)$ a K oddelené ich spoločnou dotyčnicou, hľadaná oblasť obsahuje body A, B.

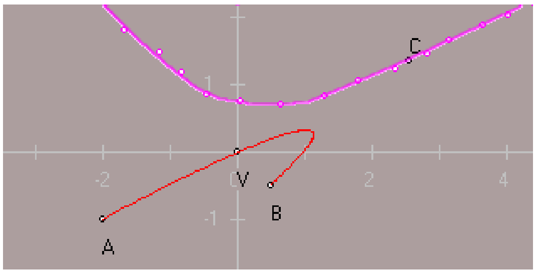


Obr. 2.16: Ak $b_{ACB}(t)$ a K nie sú oddelené ich spoločnou dotyčnicou, hľadaná oblasť neobsahuje body A, B.

ρ na dve polroviny H_1 a H_2. Vyhovujúca H_i, t.j. taká, že pre $C \in H_i$ je $b_{ACB}(t)$ priestorová, je tá, ktorá obsahuje body A, B. Oddeľujúca nadrovina nám totižto hovorí, že Bézierova krivka (a teda bod C) sa môžme posúvať len smerom k A, B. Keby sme C posúvali opačným smerom, dôjde k prieniku $b_{ACB}(t)$ a K.

2. nech ∂H je z takých bodov C, že $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K zvnútra, obr. 2.16. Teda $b_{ACB}(t)$ a K nie sú oddelené ich spoločnou dotyčnicou. Nech ∂H rozdelí ρ na dve polroviny H_1 a H_2. Vyhovujúca je tá H_i ($i \in \{1, 2\}$), ktorá neobsahuje A, B. Keby sme C posúvali smerom k A, B, dôjde k prieniku $b_{ACB}(t)$ a K.

D_σ sa skladá z viacerých oblúkov a preto zobrazením σ dostaneme viac kriviek $\partial H_1, \ldots, \partial H_k$. V prípade, že hraničné body oblúkov tvoria aj body U_i, niektoré ∂H_i na seba nadväzujú (majú spoločný bod, v ktorom sú C^0 spojité). Ak ∂H_i a ∂H_j na



Obr. 2.17: Špeciálny prípad: Kužeľosečku tvorí jeden bod $K = \{V\}$, kde $V = [0, 0]$.

seba nadväzujú, urobíme ich zjednotenie a odteraz ich budeme brať ako jednu krivku (obr. 2.11). Pôvodná množina kriviek $\partial H_1, \ldots, \partial H_k$ sa tak zredukuje na krivky, ktoré sa navzájom nepretínajú. Potom oblasť riešení hľadáme postupne. Pre každú krivku ∂H_i určíme časť roviny H_i, ktorá je riešením a výsledná H je zjednotením týchto čiastkových riešení.

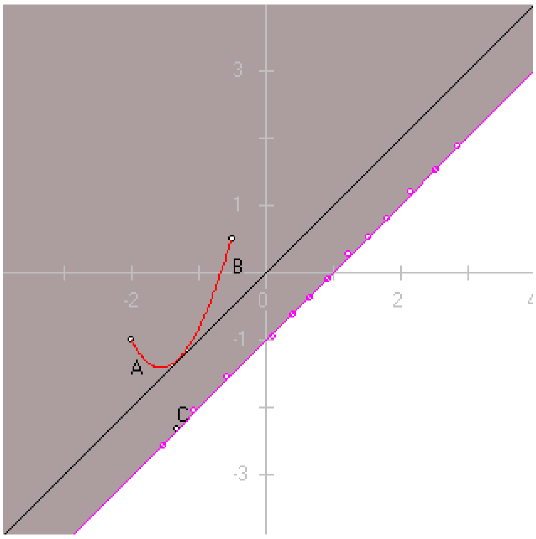
2.5.4 Špeciálne prípady K

V predchádzajúcich úvahách sme spomínali existenciu špeciálnych prípadov, keď K je bod, priamka alebo dve priamky. Poďme teda určiť, ako pre ne vyzerá ∂H v $S_\rho(O, x, y)$ a následne aj oblasť riešenia H.

1. nech $K = \{V\}$, kde $V = [0, 0, 0] \in \mathbb{R}^3_1$ je vrchol svetelného kužeľa. Nech $V = [v_x, v_y]$ v $S_\rho(O, x, y)$. Jediným obmedzením aby bola $b_{ACB}(t)$ priestorová je, že $V \notin b_{ACB}(t)$. Hľadaná podmienka pre bod C je $C \in \rho \setminus \partial H$, pričom ∂H je taká množina, že ak $C \in \partial H$, potom $V \in b_{ACB}(t)$. Ako vyzerá ∂H zistíme z rovníc (2.5) a (2.6). Platí, že $\partial H = \{[c_x, c_y]$ z (2.5) a (2.6), kde $[x_0, y_0] = [v_x, v_y]$ a $t_0 \in (0, 1)\}$, lebo $D_\sigma = \{V\}$, obr. 2.17. V prípade, že A, B, V sú kolineárne, $\partial H = \overleftrightarrow{AB}$.

2. nech $K : Dx + Ey + F = 0$, čiže ρ je dotykovou rovinou k svetelnému kužeľu. Môžme predpokladať, že $K : -x + y = 0$ v $S_\rho(O, x, y)$, keďže tento systém môžme voliť ľubovoľne. Tu vystupujú doplňujúce podmienky k podmienkam (2.1) a (2.2) pre body A, B. Ak totiž body $A = [a_x, a_y], B = [b_x, b_y]$ ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na K, taký bod C, že $b_{ACB}(t)$ je priestorová neexistuje. Nech A, B ležia v jednej polrovine vzhľadom na K. Hranica $\partial H = \{[c_x, c_y]$ z (2.5) a (2.6), kde $D_\sigma = K$ a $A, B, C, D = 0\}$. Hľadaná oblasť H je tá polrovina určená krivkou ∂H, v ktorej leží K. Keďže $[x_0, y_0] \in K$, tak $x_0 = y_0$. Z toho dostaneme v rovnici (2.7), že $t_0 = konst$. Potom $c_y - c_x = \frac{y_0 - a_y(1-t_0)^2 - b_y t_0^2}{2t_0(1-t_0)} - \frac{x_0 - a_x(1-t_0)^2 - b_x t_0^2}{2t_0(1-t_0)} = konst$ a teda množina ∂H je priamka rovnobežná s K, pozri obr. 2.18.

3. nech $K = \{p \cup q\}$, kde môžme predpokladať, že $p : -x + y = 0$ a $q : x + y = 0$ v $S_\rho(O, x, y)$, keďže tento systém môžme voliť ľubovoľne. V predchádzajú-



Obr. 2.18: Špeciálny prípad: $K : Dx + Ey + F = 0$.

com prípadne sme ukázali, že pre priamku r a body A, B je množina $\partial H'_r = \{C : b_{ACB}(t) \cap r = \{T\}\}$ je priamka rovnobežná s r (vypočítaná presne z rovníc (2.5) a (2.6)). Hranica ∂H bude určená takýmito priamkami $\partial H'_p$ a $\partial H'_q$, kde $\partial H'_p$ je rovnobežná s p a $\partial H'_q$ je rovnobežná s q. Bod $C_0 = \partial H'_p \cap \partial H'_q$ je taký, že $b_{AC_0B}(t)$ sa dotýka aj priamky p aj priamky q. Body $T_p = b_{AC_0B}(t) \cap p$ a $T_q = b_{AC_0B}(t) \cap q$ určujú definičný obor D_σ. Platí, že $D_\sigma = \overrightarrow{T_pX} \cup \overrightarrow{T_qX'}$, kde polpriamka $\overrightarrow{T_pX} \subset p$, polpriamka $\overrightarrow{T_qX'} \subset q$ a $[0,0] \notin \overrightarrow{T_pX}$, $[0,0] \notin \overrightarrow{T_qX'}$. Hľadanou oblasťou H je tá polrovina určená krivkou ∂H, v ktorej leží bod $[0,0]$, obr. 2.19. V tomto prípade tiež vystupujú doplňujúce podmienky k podmienkam (2.1) a (2.2) pre body A, B. Ak totiž A, B ležia v opačných polrovinách vzhľadom na svetelný kužeľ, úloha nemá riešenie.

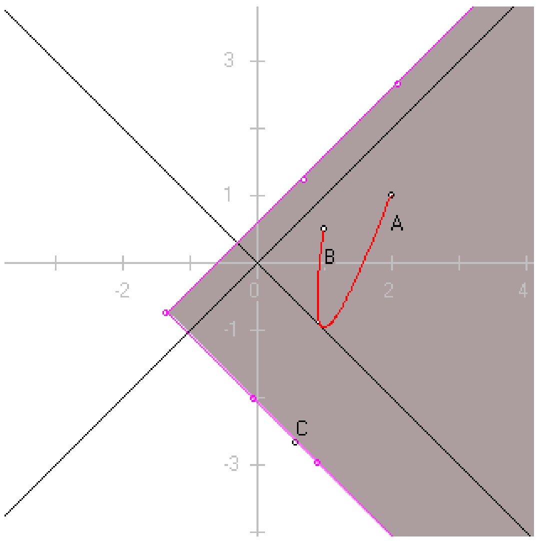
2.5.5 Overenie správnosti

Na overenie či sa takto vypočítaná hranica H podobá na experimenty bol použitý program CAS Maxima, v ktorom bežal nasledovný algoritmus.

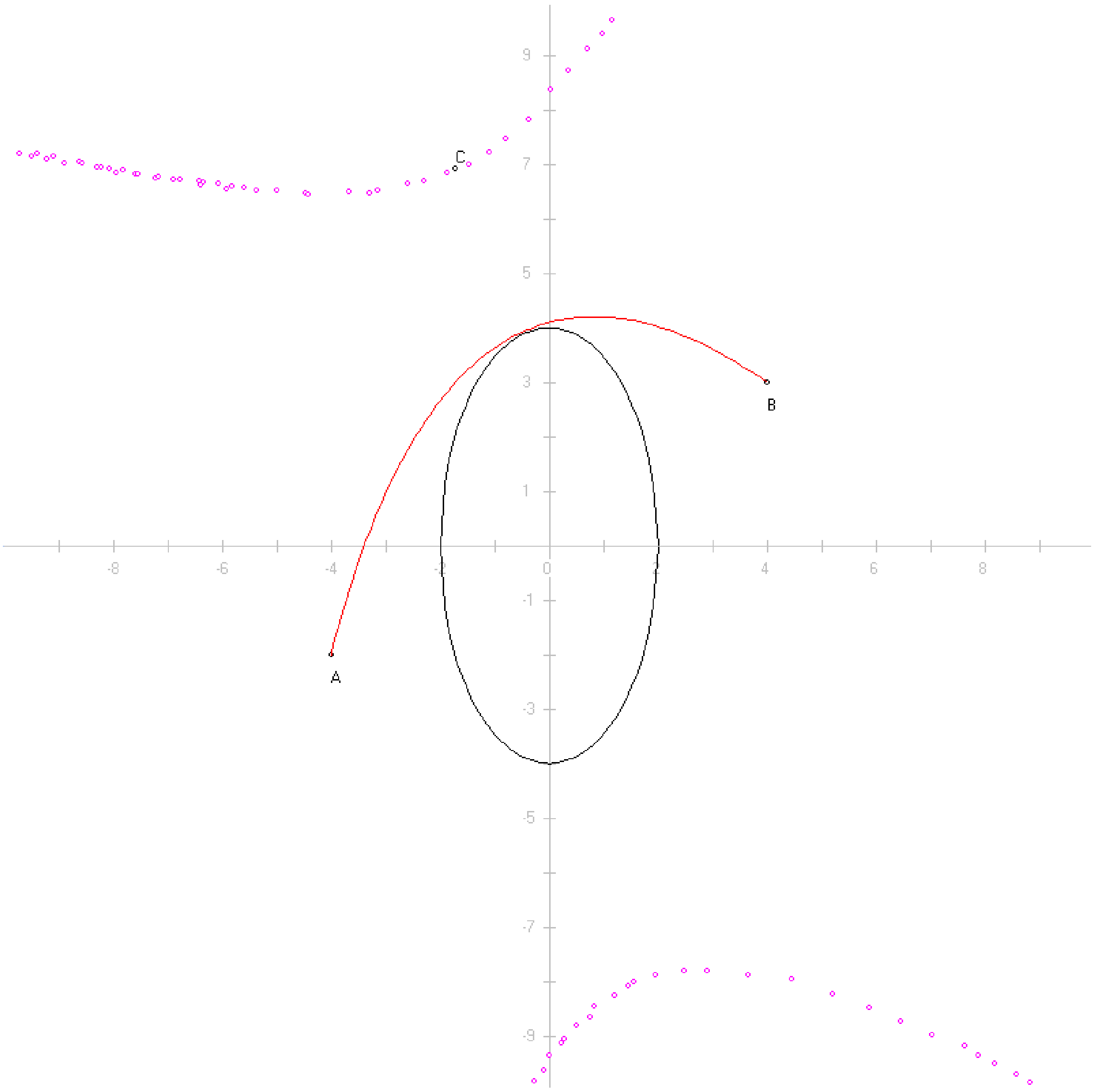
Pre každé $[x_0, y_0] \in D_\sigma$, pričom y_0 závisí od x_0 tak, že $[x_0, y_0] \in K$:

1. zráta z kvadratickej rovnice (2.7) $t_{0,1}$ a $t_{0,2}$,
2. za t_0 vyberie to, ktoré je v intervale $(0, 1)$,
3. z rovníc (2.5), (2.6) vypočíta c_x a c_y,
4. vykreslí bod $[c_x, c_y] \in \partial H$.

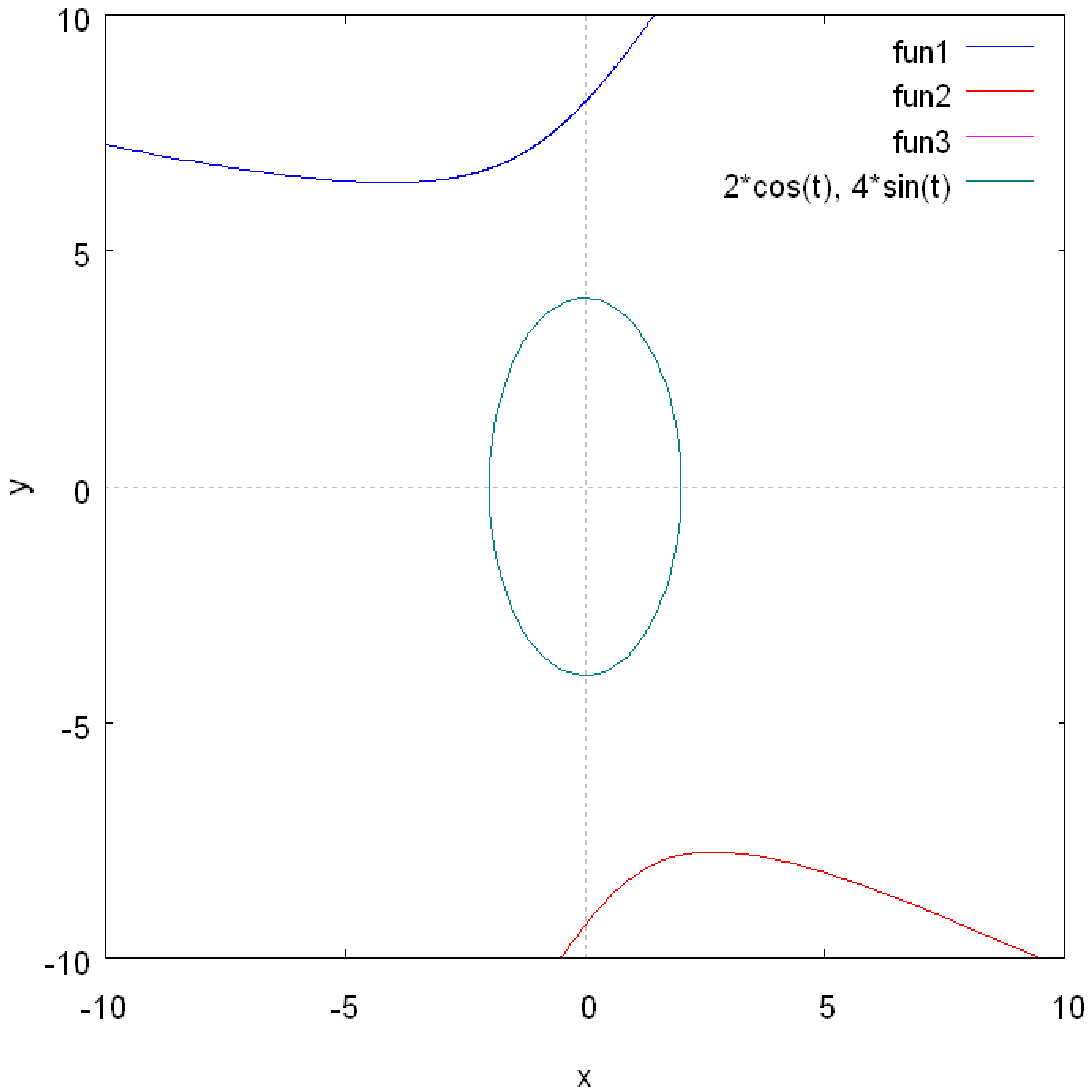
Obrázky 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 vznikli na porovnanie s experimentami. Vidieť, že takýmto algoritmom sa naozaj dá nájsť hranica hľadanej oblasti.



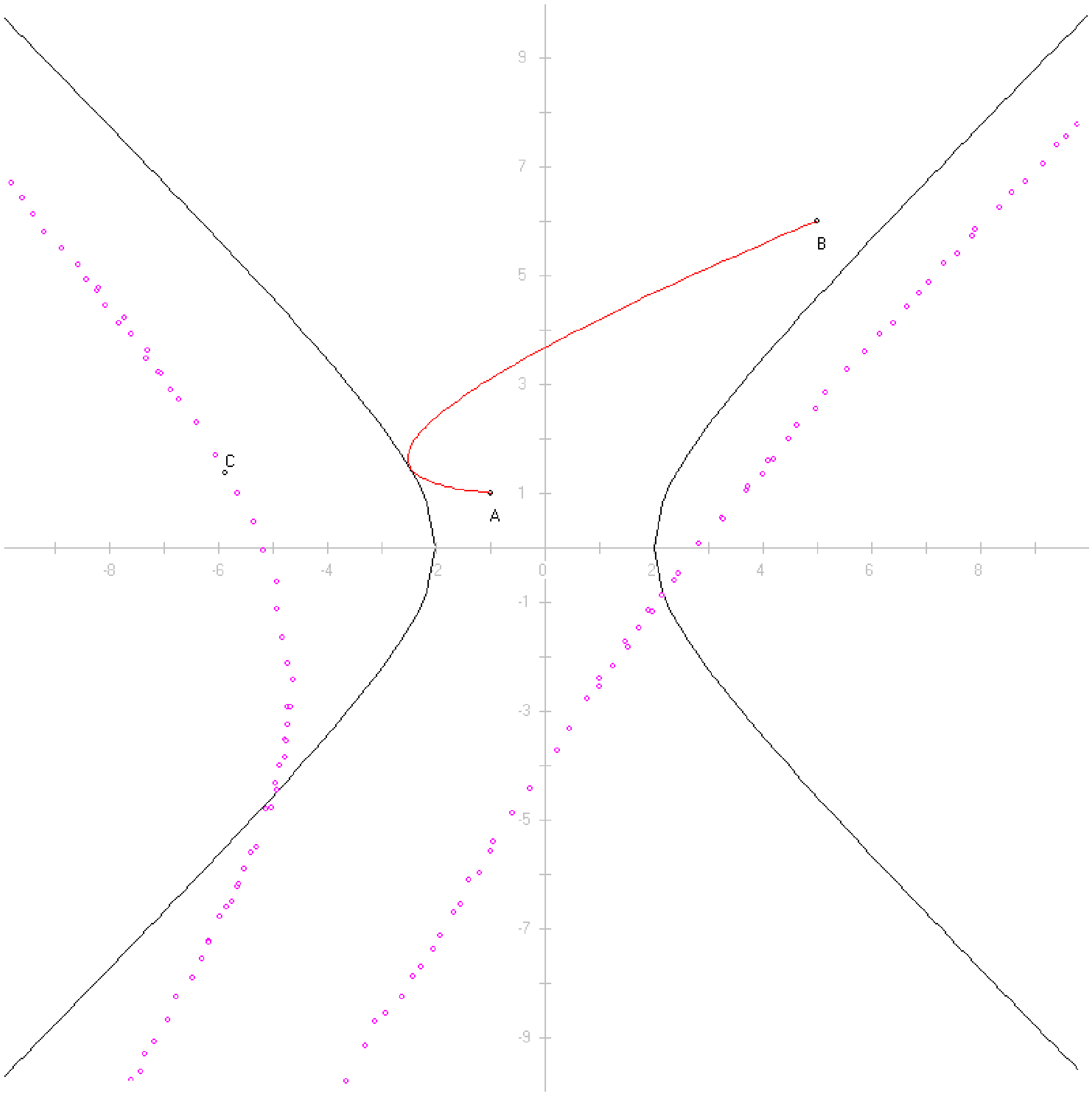
Obr. 2.19: Špeciálny prípad: $K = \{p \cup q\}$.



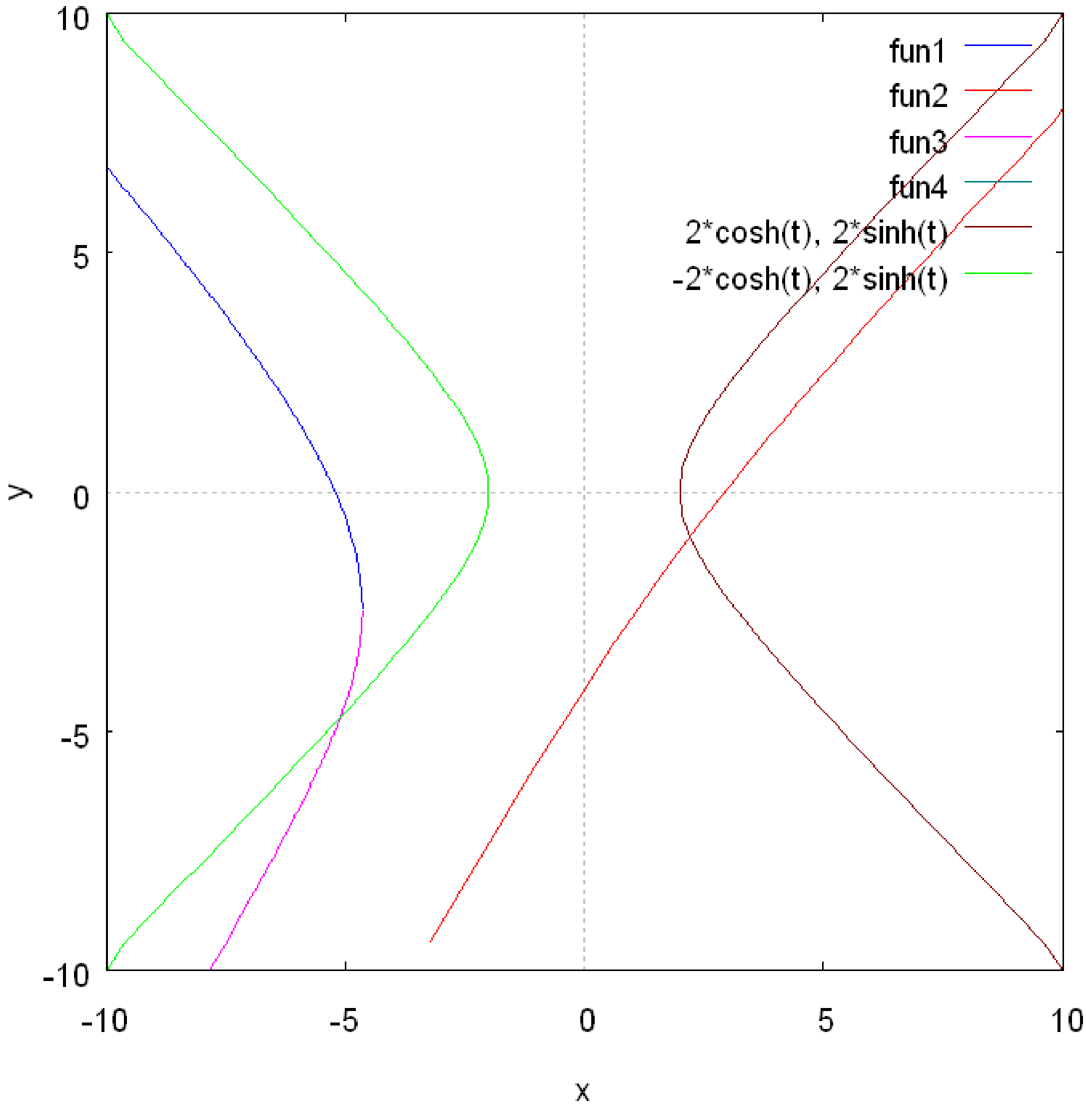
Obr. 2.20: Hranica nájdená experimentálne pre elipsu s rovnicou $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}y^2 - 1 = 0$ a body $A = [-4, -2]$ a $B = [4, 3]$.



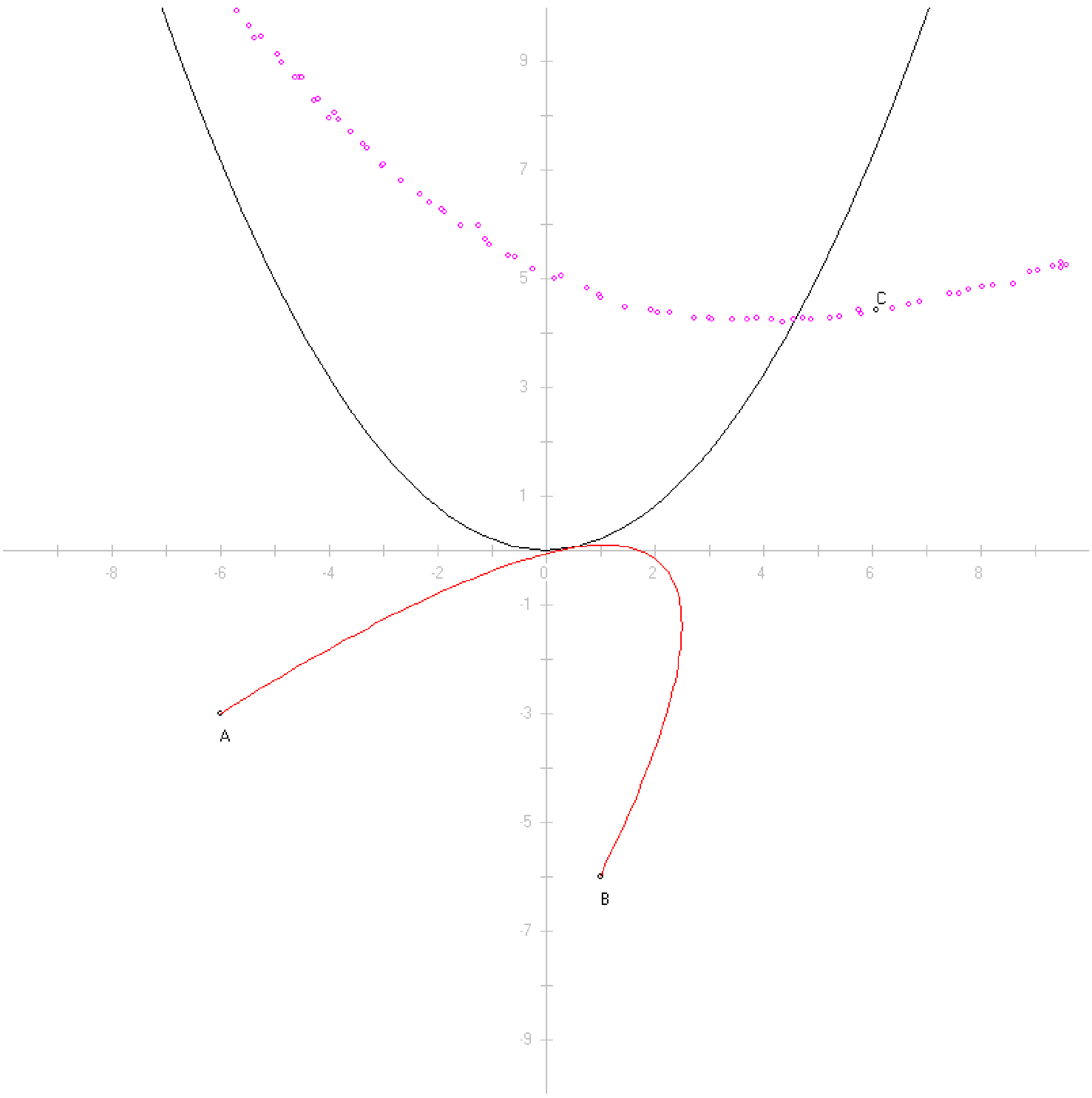
Obr. 2.21: Hranica nájdená výpočtom pomocou zobrazenia σ pre elipsu s rovnicou $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}y^2 - 1 = 0$ a body $A = [-4, -2]$ a $B = [4, 3]$, porovnanie s obrázkom 2.20.



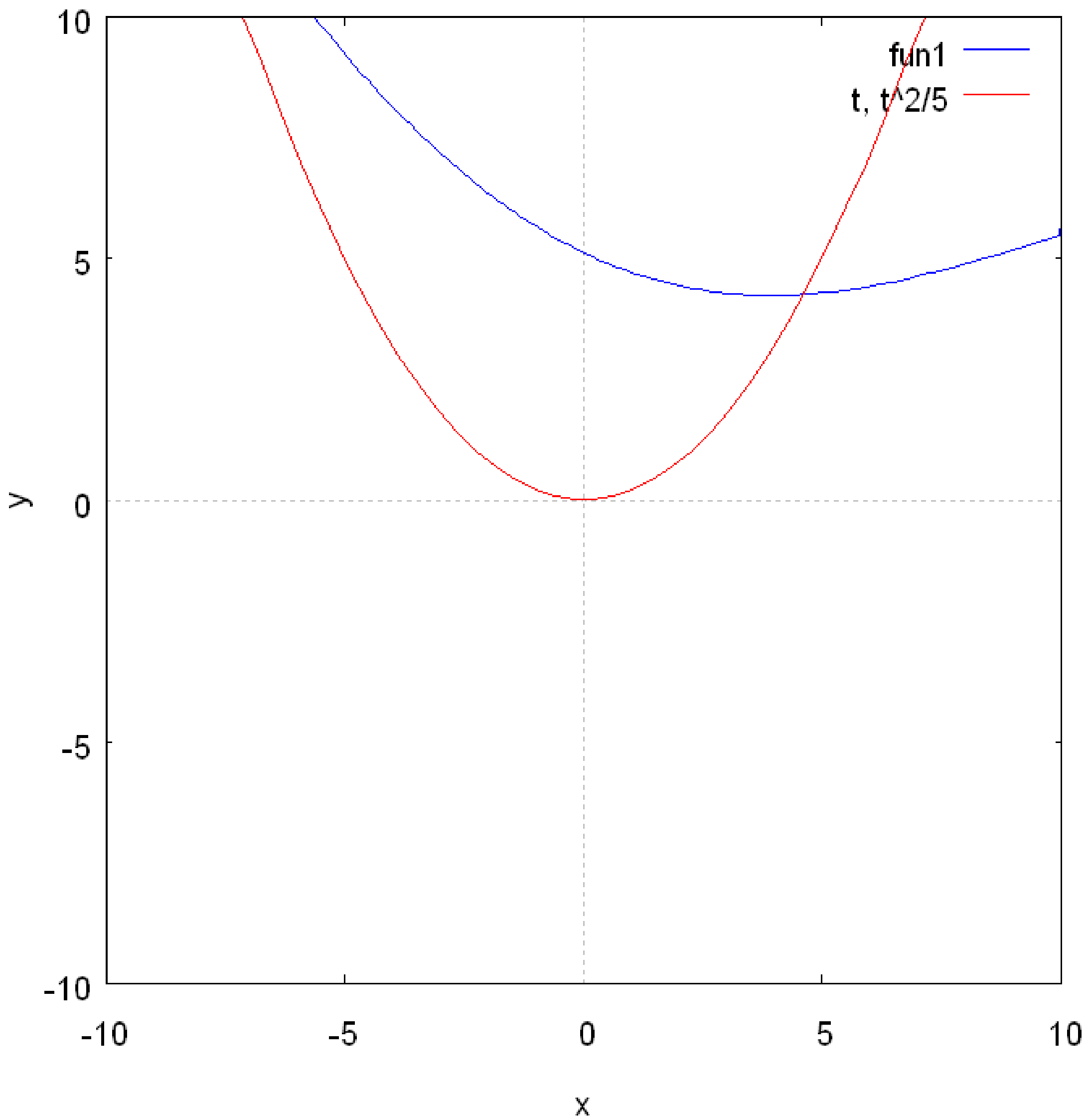
Obr. 2.22: Hranica nájdená experimentálne pre hyperbolu s rovnicou $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0$ a body $A = [-1, 1]$ a $B = [5, 6]$.



Obr. 2.23: Hranica nájdená výpočtom pre hyperbolu s rovnicou $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0$ a body $A = [-1, 1]$ a $B = [5, 6]$, porovnanie s obrázkom 2.22.



Obr. 2.24: Hranica nájdená experimentálne pre parabolu s rovnicou $\frac{1}{5}x^2 - y = 0$ a body $A = [-6, -3]$ a $B = [1, -6]$.



Obr. 2.25: Hranica nájdená výpočtom pre parabolu s rovnicou $\frac{1}{5}x^2 - y = 0$ a body $A = [-6, -3]$ a $B = [1, -6]$, porovnanie s obrázkom 2.22.

Kapitola 3

Vyhodnotenie dosiahnutých výsledkov

Pre začiatočný a koncový riadiaci vrchol sa podarilo odvodiť nutné podmienky (2.1) a (2.2). Na hľadanie podmienok pre stredný riadiaci vrchol sme priestorový problém previedli na problém rovinný. Potom nasledovali tri rôzne prístupy k vyriešeniu rovinného problému. Nasleduje zhrnutie každého prístupu k nájdeniu riešenia.

Zhrnutie analytického prístupu: Síce sme odvodili nutné a zároveň postačujúce podmienky pre stredný riadiaci vrchol, avšak sa nedajú prakticky použiť. Všeobecné vyjadrenie koreňov $t_1, \ldots, t_4$ totiž poskytlo výrazy, z ktorých nevieme vyjadriť podmienky na praktické použitie. Ďalší možný prístup je, na podmienku $t \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \setminus [0,1])$ skúsiť aplikovať Descartovo znamienkové pravidlo alebo Budan-Fourierovu vetu. Tieto hovoria o počte reálnych koreňov polynómu. V oboch vetách sa koreň počíta toľkokrát, akú má násobnosť.

Poznámka 3.0.3. *Hovoríme, že dvojica reálnych čísiel r_1, r_2 zachováva znamienko, ak $r_1 r_2 > 0$. Pre dvojicu nastáva znamienková zmena, ak $r_1 r_2 < 0$.*

Veta 3.0.4 (Descartovo znamienkové pravidlo, [Zlá06])**.** *Počet kladných koreňov polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je buď rovný počtu znamienkových zmien v postupnosti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jeho koeficientov alebo je o párny počet menší.*

Veta 3.0.5 (Budan-Fourierova, [Zlá06])**.** *Majme polynóm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Nech $a_n > 0$ a pre reálne $\alpha < \beta$ je $f(\alpha)f(\beta) \neq 0$. Označme $W(x)$ počet znamienkových zmien v postupnosti $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$. Potom počet reálnych koreňov polynómu $f(x)$, ktoré ležia v intervale $[\alpha, \beta]$, je rovný číslu $W(\alpha) - W(\beta)$ alebo je o párny počet menší.*

Tieto vety by sme skúsili aplikovať na polynóm (2.3). Keďže jeho koeficiety obsahujú len parametre kužeľosečky a súradnice bodov A, B, C, možno by sme získali zaujímavé podmienky pre bod C.

Zhrnutie prístupu iteratívneho algoritmu: Týmto prístupom sme sa snažili pre daný bod C určiť, či $b_{ACB}(t)$ je priestorová, bez použitia aplikácie, ktorá by presne vypočítala korene polynómu štvrtého stupňa. Rozhodovací algoritmus, ktorý sme popísali, pracuje rekurzívne a to je náročné na pamäť. Napriek tomu, že algoritmus je konečný, nevieme dopredu povedať, koľkokrát treba prerozdeliť Bézierovu krivku, aby pre každý segment existovali oblasti $K_i(A, B)$. Výhodou je, že tento algoritmus je jasný a riešiteľný. Nesmieme ešte zabudnúť, že sme pracovali len s takými bodmi A, B, že z každého existovali dve dotyčnice ku K, čo nám niektoré body vylúčilo. Otázkou ostáva, či sa dá na základe tohto algoritmu nájsť explicitná podmienka pre súradnice C.

Zhrnutie prístupu hľadania dotyku rádu 1
Na základe experimentálneho pozorovania sme sa snažili popísať oblasť takých bodov C, že $b_{ACB}(t)$ je priestorová. Vyslovili sme hypotézu o existencii hranice tejto oblasti. Túto hranicu sme sa snažili určiť pomocou zobrazenia σ a jeho definičného oboru D_σ. Zobrazenie σ sme presne určili rovnicami (2.5) a (2.6). Avšak nepodarilo sa nájsť presné vyjadrenie D_σ. Opísali sme len faktory, ktoré D_σ ovplyvňujú. V pokusoch sme zatiaľ pozorovali, že D_σ sa môže skladať z jedného až štyroch oblúkov z K. Takto získané ∂H_i nám rozdelili rovinu na niekoľko oblastí H_i. Určili sme rozhodovacie pravidlo na vybratie tých H_i, ktoré tvoria výslednú hľadanú oblasť H. Nesmieme ešte zabudnúť, že sme pracovali len s takými bodmi A, B, že z každého existovali dve dotyčnice ku K, čo nám niektoré body vylúčilo.

Bola snaha vyjadriť krivku ∂H pomocou všeobecnej rovnice. Za predpokladu, že je to krivka štvrtého stupňa (v premennej x a y), stačilo vziať pätnásť bodov krivky ∂H (ktoré vieme presne vypočítať) a určiť pomocou sústavy rovníc jej všeobecný predpis. Program CAS Maxima však takýto systém presne zrátať nedokázal. Dal sa zrátať iba približne, ak sme jednotlivé koeficienty v sústave vopred zaokrúhlili pomocou funkcie *float()*.

Toto rovinné riešenie nám asi najviac priblížilo ako budú vyzerať postačujúce podmienky pre stredný riadiaci vrchol Bézierovej krivky. Nasledujúci algoritmus určí oblasť vyhovujúcich bodov C v $\mathbb{R}^3_1$.

1. sú dané priestorové body A, B
2. pre každý natočenie roviny ρ:
   - zistí akú kužeľosečku K vytne rovina ρ na svetelnom kuželi,
   - vypočíta D_σ,
   - pre každé $[x_0, y_0] \in D_\sigma$:

  - zráta z kvadratickej rovnice (2.7) $t_{0,1}$ a $t_{0,2}$,
  - vyberie $t_0 = t_{0,i}$, kde $i \in \{1, 2\}$ a $t_{0,i} \in (0, 1)$,
  - z rovníc (2.5), (2.6) vypočíta bod $[c_x, c_y] \in H$,
- pre vypočítané H určí, ktoré časti roviny ρ sú hľadanou oblasťou.

Kapitola 4

Záver

Cieľom tejto práce bolo nájsť pomienky pre riadiace vrcholy Bézierovej krivky v trojrozmernom Minkowského priestore tak, aby bol každý jej bod priestorový. V práci sme pracovali s krivkou druhého stupňa.

Podarilo sa odvodiť nutné podmienky pre začiatočný a koncový riadiaci vrchol krivky. Podmienky pre stredný riadiaci vrchol (v závislosti od krajných bodov) sa podarilo určiť čiastočne, pričom v niektorých špeciálnych prípadoch úplne. V predchádzajúcej kapitole bolo spomenuté, ako sa dá ďalej vo výskume pokračovať.

Súčasťou práce je aplikácia, ktorá jednak pomohla odhaliť vzťahy medzi objektami a tiež slúži ako dobrý vizualizačný nástroj na ozrejmenie pojmov a znázornenie situácií pre rôzne polohy Bézierovej krivky. Práca obsahuje aj spustiteľné príkazy CAS Maxima. Tieto presne vykresľujú hranice takých oblastí, že ak stredný riadiaci vrchol patrí oblasti, Bézierova krivka bude priestorová.

V budúcnosti by sa dala aplikácia rozšíriť na zobrazovanie situácie v trojrozmernom priestore, pričom by sa umožnilo vykresliť naraz viac rovinných rezov. Tiež sa dá úloha riešiť pre krivky vyššieho stupňa. Odlišnosť bude v tom, že tieto krivky už neležia v rovine.

Kapitola 5

Softvérová podpora

5.1 Program Experiment

Program Experiment bol vytvorený za účelom zistiť ako približne vyzerá oblasť bodov C, ktoré hľadáme v kapitole 2. Ako je tiež v tejto kapitole popísané, hranicu tejto oblasti tvoria také body C, že Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ sa dotýka kužeľosečky K.

Aplikácia je vytvorená v C++ Builderi 6. Program je spustiteľný pod systémami Windows.

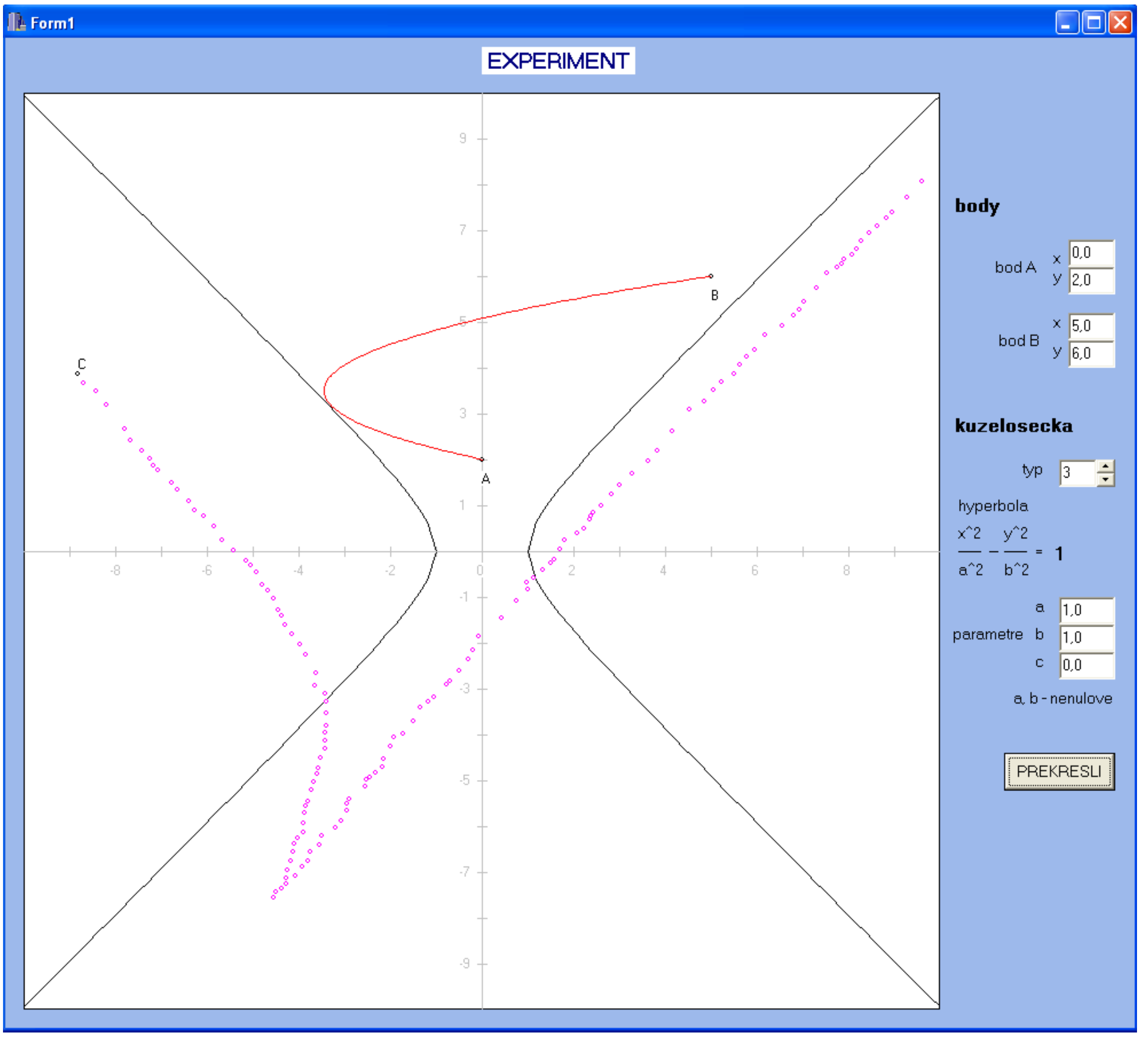
Sústava súradníc: V programe Experiment je zobrazená pseudo-karteziánska sústava súradníc $S(O, x, y)$, pričom $x \in \langle -10, 10 \rangle$ a $y \in \langle -10, 10 \rangle$. Prevod medzi reálnou a obrazovou sústavou súradníc zabezpečujú funkcie *Bod ObrDoSur(Bod O)* a *Bod SurDoObr(Bod S)*.

Bézierova krivka: Polohu bodov A, B je možné v príslušnom políčku interaktívne meniť. Poloha bodu C sa mení posúvaním myši tak, že bod C sa nachádza na mieste kurzora. Pri každej zmene niektorého z bodov A, C, B sa Bézierova krivka $b_{ACB}(t)$ okamžite prekreslí.

Kužeľosečka: Program umožňuje vykresľovať a meniť parametre $a, b, c \in \mathbb{R}$ elipsy ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), paraboly ($ax^2 + bx + c = y$) a hyperboly ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$). Tiež sa dajú vykresliť špeciálne prípady, keď kužeľosečkou je bod, priamka alebo dve priamky. Ľubovoľnú situáciu možno namodelovať posúvaním bodov A a B. Vykonaná zmena sa prejaví po stlačení tlačidla *Prekresli*.

Hľadaná oblasť: Ako už bolo popísané v kapitole 2, hranicu ∂H hľadanej oblasti H budú tvoriť také C, že $b_{ACB}(t)$ sa dotýka K. Treba hýbať bodom C tak, že $b_{ACB}(t)$ sa približne dotýka K a túto polohu treba zaznamenať kliknutím myši, čím sa na dané miesto vykreslí krúžok a tiež sa toto miesto zaznačí v poli *BodyHO*.

Ukážka: Na obr. 5.1 je ukázaný program Experiment. Vľavo sa vykresľujú body A, B, C, $b_{ACB}(t)$ a K. Napravo sa dajú nastavovať jednotlivé parametre kužeľosečiek a poloha bodov A, B. Tlačidlom *Prekresli* sa prejavia vykonané zmeny, tiež sa vyčistí



Obr. 5.1: Ukážka programu Experiment, ktorý umožňuje experimentálne určiť ako približne vyzerá hľadaná oblasť.

pole bodov *BodyHO*, ktoré predstavujú hľadanú hranicu.

5.2 CAS Maxima

V programe CAS Maxima bola hranica ∂H hľadanej oblasti H vykreslená presne. V kapitole 2 bolo popísané, ako vyzerá zobrazenie $\sigma : D_\sigma \to \partial H$. Pripojené textové súbory obsahujú zoznam príkazov spustiteľných v CAS Maxima. V každom súbore je nastavená poloha bodov A, B a parametre K. Ďalej je nastavený aj definičný obor D_σ tak, že je nastavený interval pre x a y sa dopočíta z rovnice K. Pre každý bod definičného oboru sa podľa rovníc (2.5), (2.6) a (2.7) vypočíta bod hraničnej krivky ∂H. Takto sa vypočíta asi tisíc bodov, čo je na verné zobrazenie tvaru hranice postačujúce. V prípade, že D_σ sa skladá z viacerých oblúkov, tento proces sa robí pre každý z nich, pričom sa jednotlivé hranice vykresľujú do toho istého obrázka.

Literatúra

[Cha09] P. Chalmovianský. Modelovanie kriviek pre CAGD - učebné texty. Osobná stránka: http://www.sccg.sk/˜chalmo, 2009.

[DFN91] B., A. Dubrovin, A., T. Fomenko, and S., P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications: Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer, 2nd edition, 1991.

[Geo08] M. Georgiev, editor. *Space-like Bézier Curves in the three-dimensional Minkowski Space*, volume 1067. AIP Conference Proceedings, 2008.

[KJ06] J. Kosinka and B. Jüttler. Cubic helices in Minkowski space. *Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Abt. II*, 215:13–35, 2006.

[Nk87] M. Noga and kolektív. *Teória relativity*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 1987.

[Zla09] P. Zlatoš. Úvod do špeciálnej teórie relativity - učebné texty. Url: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/leto16.pdf, 2009.

[Zlá06] L. Zlámalová. Numerické metody pro hledání kořenů polynomu - bakalárska práca. Url: http://is.muni.cz/th/43682/prif_b/bakalarka.pdf, 2006.

Zoznam obrázkov

Prílohy

- CD, ktoré obsahuje nasledujúce adresáre:

Experiment.rar – obsahuje program Experiment opísaný v kapitole Softvérová podpora

Maxima.rar – obsahuje textové súbory so spustiteľnými príkazmi CAS Maxima opísané v kapitole Softvérová podpora