

# Evolučné algoritmy kriviek

Tibor Seňko

2007

# Evolučné algoritmy kriviek

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Tibor Seňko

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA ALGEBRY, GEOMETRIE A DIDAKTIKY  
MATEMATIKY

Študijný odbor 9.1.1 Matematika

Vedúci diplomovej práce  
RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

BRATISLAVA 2007

Vyhlasujem na svoju česť, že predloženú diplomovú prácu som vypracoval samostatne s využitím uvedenej literatúry a informačných zdrojov.

V Bratislave  
24. apríla 2007

Ďakujem svojmu vedúcemu diplomovej práce,  
RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD. za cenné  
rady a pripomienky pri písaní tejto práce.

## Abstrakt

Pre evolučné algoritmy je vyvinutých veľa algoritmov umožňujúcich automatické zaobchádzanie so singularitami a zmenami topológie a riešenie toku implicitne definovanej krivky pozdĺž vektorového poľa. Avšak v literatúre sa neuvádzajú metódy pre skúmanie a detekovanie singularít na implicitne definovanej krivke tečúcej pozdĺž vektorového poľa. Zaoberáme sa skúmaním a detekovaním singularít pri toku krivky. Algoritmus je založený na skúmaní integrálu krivosti. Poskytneme teoretické výsledky a ich numerické realizácie.

**Kľúčové slová:** evolučné algoritmy, krivosť, integrál krivosti.

# Obsah

Obsah	i
Úvod	1
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>2</b>
1.1 Vektorové polia	2
1.2 Definície a reprezentácie rovinných kriviek	3
1.3 Dotyčnica a normála rovinatej krivky	4
1.4 Dĺžka krivky. Prirodzená parametrizácia krivky	6
1.5 Krivosť krivky	8
1.6 Krivkový integrál po krivke zadanej implicitne	9
1.6.1 Diracova funkcia	10
1.6.2 Aproximácia jednorozmernej Diracovej funkcie	11
1.6.3 Integrál po krivke	11
<b>2 Formulácie evolučných algoritmov</b>	<b>13</b>
2.1 Lagrangeovska formulácia	13
2.2 Eulerovská formulácia	13
2.3 Vlastnosti Eulerovskej formulácie	14
2.3.1 Zložky vektorového poľa	14
2.3.2 Výhody a nevýhody vrstevnicových metód	15
<b>3 Funkcia obsahu a jej derivácie</b>	<b>17</b>
3.1 Funkcia obsahu	18
3.2 Derivácie funkcie obsahu	21
<b>4 Integrál krivosti vyčíslený analyticky</b>	<b>25</b>
4.1 Popis a simulácie vzniku singulárneho bodu	25
4.2 Simulácie vzniku singulárneho bodu na krivkách	25
4.2.1 Lemniskata	25
4.2.2 Fólium	26
4.2.3 Jednparametrický zväzok	30
4.3 Vyhodnotenie simulácií	30

<b>5</b>	<b>Integrál krivosti vyčíslený numericky</b>	<b>33</b>
5.1	Základné numerické aproximácie . . . . .	33
5.1.1	Diskretizácia definičného oboru . . . . .	33
5.1.2	Pomerné diferencie prvého rádu . . . . .	34
5.1.3	Pomerné diferencie druhého rádu . . . . .	34
5.1.4	Aproximácia krivosti . . . . .	35
5.1.5	Numerické vyčíslenie integrálov mocnín krivosti . . . . .	36
5.2	Tok krivky v smere normály konštantnou rýchlosťou . . . . .	36
5.2.1	Lemniskata . . . . .	37
5.2.2	3 kružnice . . . . .	37
5.3	Tok krivky v smere normály v závislosti od krivosti a konš-	
	tantnej zložky . . . . .	39
5.3.1	Lemniskata . . . . .	41
5.3.2	3 kružnice . . . . .	42
	<b>Záver</b>	<b>45</b>
	<b>Referencie</b>	<b>47</b>

## Zoznam tabuliek

1	<i>Hodnoty integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri lemniskate. . . . .</i>	27
2	<i>Hodnoty integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri fóliu. . . . .</i>	29
3	<i>Hodnoty integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri jednoparametrickom zväzku. . . . .</i>	32

## Zoznam obrázkov

1	<i>Implicitne reprezentované krivky <math>\phi(x, y) = x^2 + y^2 - c = 0</math> pre rôzne hodnoty parametra <math>c</math>. . . . .</i>	4
2	<i>Vektorové pole gradientu <math>\nabla\phi</math> funkcie <math>\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1</math> a kružnica <math>\phi = 0</math> reprezentovaná implicitne. . . . .</i>	5

3	Vektorové pole gradientu $\nabla\phi$ funkcie $\phi(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ a fólium $\phi = 0$ reprezentované implicitne. . . . .	6
4	Parametricky reprezentovaná krivka $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \sin t)^\top$ . Šípky znázorňujú rast parametra. . . . .	7
5	Krivosť krivky $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \sin t)^\top$ reprezentovanej parametricky (viď obrázok 4). . . . .	9
6	Krivosť v bodoch nosnej funkcie $\phi(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . $\phi(x, y) = 0$ implicitne reprezentuje fólium (viď obrázok 3). . . . .	10
7	Aproximácia jednorozmernej Diracovej funkcie $\delta(x)$ pre $\epsilon = 0.05$ . 12	
8	Vloženie dvojrozsmernej krivky do trojrozsmernej nosnej funkcie $\phi$ ako jej nulová hladina $\phi = 0$ automaticky rieši problémy so zmenou topológie. Zatiaľ čo krivka môže meniť topológiu, plocha daná nosnou funkciou $\phi$ sa pohybuje hore a dole v pevne danej súradnicovej sústave bez zmeny topológie. . . . .	16
9	Zmena orientovaného obsahu vplyvom parametrizácie. Oblasti vnútra krivky majú rôzne znamienko orientovaného obsahu v závislosti na parametrizácii a orientácii. . . . .	20
10	Funkcia $f(x)$ a jej prvá a druhá derivácia $f'(x)$ a $f''(x)$ . . . . .	22
11	Analytická simulácia vzniku singulárneho bodu pre lemniskatu. Vznik je simulovaný zmenou parametra lemniskaty. . . . .	26
12	Grafy integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri lemniskate. . . . .	27
13	Analytická simulácia vzniku singulárneho bodu pre fólium. Vznik je simulovaný zmenou parametra fólia. . . . .	28
14	Grafy integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri fóliu. . . . .	29
15	Analytická simulácia vzniku singulárneho bodu pre jednoparametrický zväzok. Vznik je simulovaný zmenou parametra zväzku. . . . .	31
16	Grafy integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri jednoparametrickom zväzku. . . . .	32
17	Vznik singulárneho bodu (spojenie) lemniskaty pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 37. iterácia, $t = 0.45$ , $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ , $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ . . . . .	38



- 18 *Grafy integrálov mocnín krivosti lemniskaty pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 80. iterácií,  $t = 0.45$ ,  $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ ,  $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ . . . . . 38*
- 19 *Vznik singulárneho bodu (roztrhnutie) 3 kružníc pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 58. iterácia,  $t = 0.7125$ ,  $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ ,  $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ . . . . . 39*
- 20 *Grafy integrálov mocnín krivosti s kružníc pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 80. iterácií,  $t = 0.45$ ,  $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ ,  $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ . . . . . 40*
- 21 *Výskyt samoprieseku lemniskaty (pri roztrhnutí) pri numerickom výpočte toku v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 65 iterácií,  $t = 0.0064$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0.1$ ,  $D_1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D_2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$  . . . . . 41*
- 22 *Grafy integrálov mocnín krivosti pri numerickom výpočte toku krivky v okolí vzniku singulárneho bodu pre lemniskatu tokom v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 500 iterácií,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0.1$ ,  $D_1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D_2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$  . . . . . 42*
- 23 *Výskyt samoprieseku kružníc (pri spojení) pri numerickom výpočte toku v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 465 iterácií,  $t = 0.465$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0.05$ ,  $D_1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D_2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$  . . . . . 43*
- 24 *Grafy integrálov mocnín krivosti pri numerickom výpočte toku krivky v okolí vzniku singulárneho bodu pre 3 kružnice tokom v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 800 iterácií,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0.05$ ,  $D_1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D_2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$  . . . . . 44*

# Úvod

Táto diplomová práca je zameraná na skúmanie a detekovanie singularít na implicitne definovanej krivke tečúcej pozdĺž vektorového poľa. Jej cieľom je skúmanie vlastností evolúcie krivky pod vplyvom vhodne zvoleného vektorového poľa v rovine a na nesusingulárnych algebraických plochách.

V kapitole 1 podávame prehľad aparátu použitého v práci. Ide o základný aparát pre prácu s vektorovými poľami, reprezentácie a vlastnosti rovinných kriviek a krivkový integrál po rovinatej krivke reprezentovanej implicitne.

Kapitola 2 podáva prehľad možných formulácií evolučných algoritmov a to Lagrangeovskej a Eulerovskej. Bližšie sa venujeme Eulerovskej formulácii z ktorej v práci vychádzame, jej vlastnostiam, výhodám a nevýhodám.

V kapitole 3 pracujeme s krivkou reprezentovanou parametricky a chceme zistiť, ako sa v čase správa orientovaný obsah krivky pri toku krivky pozdĺž vektorového poľa. Je tu odvodená prvá a druhá časová derivácia orientovaného obsahu krivky. Volíme konkrétny druh toku krivky pre ďalšie skúmanie. Parametrický model vedie k skúmaniu integrálov mocnín krivosti implicitne reprezentovanej krivky v okolí predpokladaného vzniku singulárneho bodu.

V kapitole 4 simulujeme pohyb krivky zmenou parametra v parametrickej sústave kriviek. Nejedná sa o skutočný pohyb krivky pozdĺž vektorového poľa. Snažíme sa docieľiť aby zmeny tvaru krivky simulovali pohyb krivky a následne zmenu jej topológie sprevádzanú vznikom singulárneho bodu. V okolí vzniku singulárneho bodu počítame integrály mocnín krivosti krivky pomocou software Mathematica metódou Monto Carlo.

Kapitola 5 je zameraná na numerickú implementáciu dvoch druhov toku krivky a numerický výpočet integrálov mocnín krivosti v okolí vzniku singulárneho bodu. Prvý typ toku je tok krivky v smere normály konštantnou rýchlosťou. Druhý typ toku je tok krivky v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnej zložky.

# 1 Základné pojmy

V tejto kapitole podávame základný prehľad aparátu použitého v práci. Nesnažíme sa o vyčerpávajúci výklad vlastností a zákonitostí, ale v stručnej forme uvádzame základné definície a tvrdenia. Podrobnejšie informácie si čitateľ nájde sám v literatúre.

## 1.1 Vektorové polia

**Definícia 1.1 (Vektorové pole)** Pod pojmom *vektorové pole* rozumieme vektorovú funkciu  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \dots, v_n(\mathbf{x}))^\top, \quad v_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots n,$$

ktorá každému bodu priestoru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  priradí vektor  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

**Definícia 1.2 (Skalárny súčin)** Zobrazenie

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.1)$$

sa nazýva *skalárny súčin* a označuje sa  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ .

**Definícia 1.3 (Norma)** Zobrazenie

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.2)$$

sa nazýva *norma*.

**Definícia 1.4 (Gradient)** *Gradient* je vektorový operátor

$\nabla : C^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , pričom platí:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^\top. \quad (1.3)$$

**Definícia 1.5 (Divergencia)** *Divergencia* vektorového poľa  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je skalárny operátor  $\nabla \cdot : C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , pričom platí:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (1.4)$$

## 1.2 Definície a reprezentácie rovinných kriviek

**Definícia 1.6** *Rovinná krivka*  $\mathbf{c}(t)$  reprezentovaná parametricky je lokálne injektívne zobrazenie  $\mathbf{c}(t): \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  z triedy  $C^0$ . Bod krivky  $\mathbf{c}(t_0)$ , v ktorom  $\mathbf{c}_t(t_0)$  neexistuje alebo  $\mathbf{c}_t(t_0) = \mathbf{0}$ , nazývame *singulárnym bodom* krivky, inak ho nazývame *regulárnym bodom* krivky.

**Poznámka.** Symbolom  $\mathbf{c}_t(t_0)$  označujeme deriváciu  $\frac{d}{dt}\mathbf{c}(t)|_{t=t_0}$ .

**Definícia 1.7** *Regulárna rovinná krivka*  $\mathbf{c}(t)$  reprezentovaná parametricky je lokálne injektívne zobrazenie  $\mathbf{c}(t): \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  z triedy  $C^1$ , pričom  $\forall t \in \langle a, b \rangle$  platí  $\mathbf{c}_t(t) \neq \mathbf{0}$ .

**Poznámka.** Pripomíname, že parametrická reprezentácia krivky nie je jednoznačná. Napríklad reprezentácie

$$1. \mathbf{c}(t) = (t, t)^\top, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$2. \mathbf{c}(t) = (2t, 2t)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$$

reprezentujú tú istú priamku v rovine.

**Definícia 1.8** *Implicitne definovaná rovinná krivka* je neprázdna množina  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  v tvare

$$\phi(\mathbf{x}) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma = \{\mathbf{x} \in D \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (1.5)$$

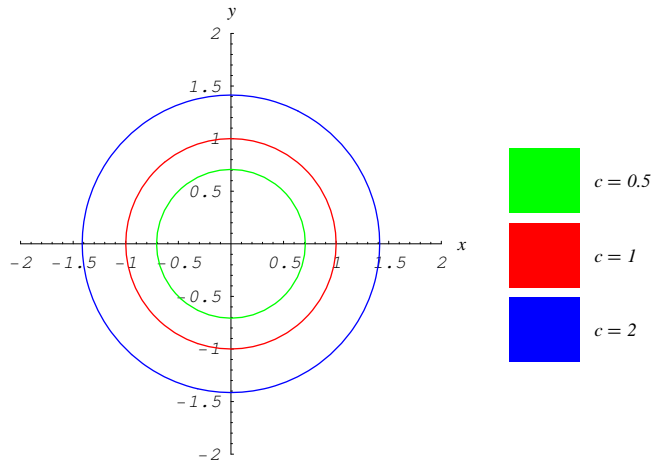
kde  $D$  je otvorená množina a  $\phi(\mathbf{x}) \in C^1(D)$ . Bod krivky  $\mathbf{x}_0$ , v ktorom  $\nabla\phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ , nazývame *singulárnym bodom* krivky, inak ho nazývame *regulárnym bodom* krivky.

**Definícia 1.9** *Regulárna implicitne definovaná rovinná krivka* je neprázdna množina  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  v tvare

$$\phi(\mathbf{x}) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma = \{\mathbf{x} \in D \mid \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla\phi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\}, \quad (1.6)$$

kde  $D$  je otvorená množina a  $\phi(\mathbf{x}) \in C^1(D)$ .

**Poznámka.** Regulárnu implicitne definovanú rovinnú krivku  $\Gamma$  v definícii 1.9 budeme označovať aj v tvare  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ .



Obrázok 1: Implicitne reprezentované krivky  $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - c = 0$  pre rôzne hodnoty parametra  $c$ .

**Poznámka.** Implicitné vyjadrenie krivky tiež nie je jednoznačné. Napríklad obidve reprezentácie

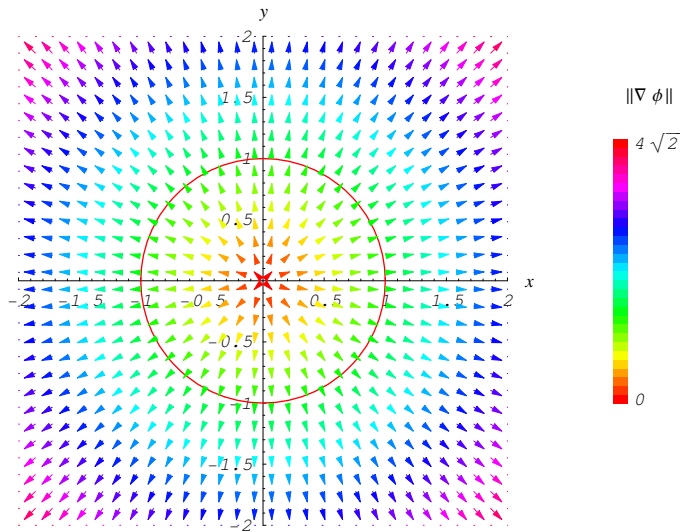
1.  $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = 0$ ,
2.  $\phi(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$

reprezentujú jednotkovú kružnicu v rovine. Reprezentácia 1 je regulárna, reprezentácia 2 nie je regulárna. Na obrázku 1 sú znázornené implicitné reprezentácie kružníc.

**Definícia 1.10** Reprezentácia krivky sa nazýva **explicitná**, ak jedna zo súradníc je funkciou druhej súradnice.

### 1.3 Dotyčnica a normála rovinnej krivky

**Definícia 1.11** *Dotyčnica* regulárnej krivky  $\mathbf{c}(t) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  danej parametrizáciou v bode  $\mathbf{c}(t_0)$  je priamka určená bodom  $\mathbf{c}(t_0)$  a vektorom  $\mathbf{c}_t(t_0) \neq \mathbf{0}$ . Vektor  $\mathbf{c}_t(t_0)$  sa nazýva *dotykový vektor* krivky v bode  $\mathbf{c}(t_0)$ .



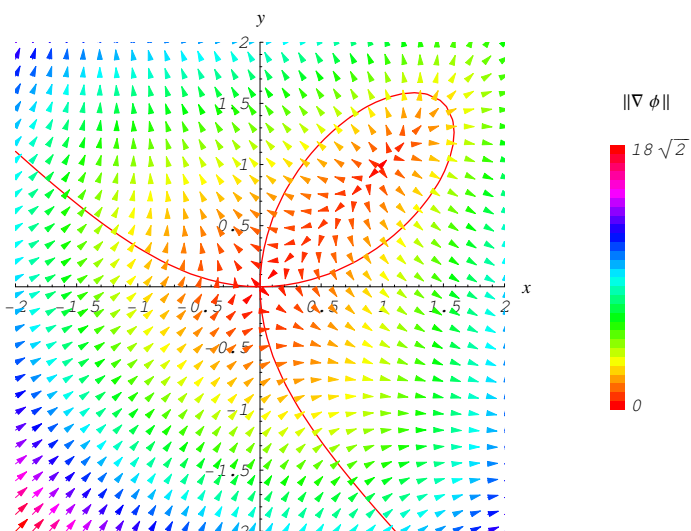
Obrázok 2: Vektorové pole gradientu  $\nabla\phi$  funkcie  $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  a kružnica  $\phi = 0$  reprezentovaná implicitne.

**Definícia 1.12** *Normála* krivky v regulárnom bode krivky je každá priamka idúca bodom krivky kolmo na dotyčnicu. V rovine má krivka v regulárnom bode práve jednu normálu.

**Veta 1.1** Pre regulárnu krivku definovanú implicitne danú rovnicou  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  je vektor  $\nabla\phi(\mathbf{x})$  kolmý na dotyčnicu krivky v bode  $\mathbf{x}$ .

**Dôkaz.** Dôkaz tejto vety možno nájsť v [4]. ■

**Poznámka.** Tvrdenie vety 1.1 je graficky znázornené na obrázku 2. Tiež si môžeme všimnúť, že krivka  $\phi = 0$  je regulárna. Jediný bod, v ktorom  $\nabla\phi = \mathbf{0}$  je bod  $(0, 0)$ , a ten neleží na krivke. Na obrázku 3 je znázornená krivka  $\phi = 0$  obsahujúca singulárny bod a vektorové pole jej gradientu.



Obrázok 3: Vektorové pole gradientu  $\nabla\phi$  funkcie  $\phi(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  a fólium  $\phi = 0$  reprezentované implicitne.

## 1.4 Dĺžka krivky. Prirodzená parametrizácia krivky

**Definícia 1.13** *Dĺžka krivky* s parametrizáciou  $\mathbf{c}(t) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je daná vzťahom

$$\mathcal{L}(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\mathbf{c}_t(t)\| dt. \quad (1.7)$$

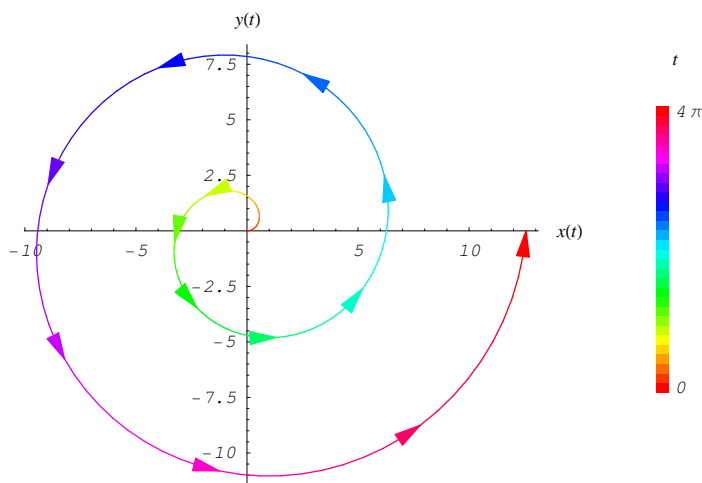
**Definícia 1.14** *Parametrizácia krivky*  $\mathbf{c}(t) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sa nazýva **prirodzená parametrizácia** alebo *parametrizácia oblúkom*, ak dĺžka každého úseku krivky sa rovná dĺžke odpovedajúcej časti definičného oboru:

$$\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{c}(c) \mathbf{c}(d)}) = d - c \quad \forall \langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle. \quad (1.8)$$

**Poznámka.** Parameter v prirodzenej parametrizácii označujeme spravidla písmenom  $s$ .

**Veta 1.2** *Parametrizácia krivky*  $\mathbf{c}(s) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je prirodzenou parametrizáciou práve vtedy, keď

$$\|\mathbf{c}_s(s)\| = 1 \quad \forall s \in \langle a, b \rangle. \quad (1.9)$$



Obrázok 4: Parametricky reprezentovaná krivka  $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \sin t)^\top$ . Šípky znázorňujú rast parametra.

**Dôkaz.** Dôkaz tejto vety možno nájsť v [4]. ■

**Lema 1.1** Pre krivku v prirodzenej parametrizácii platí:

$$\|\mathbf{n}(s)\| = 1. \quad (1.10)$$

**Dôkaz.** Vyplýva z toho, že  $\mathbf{c}_s(s) = (x_s(s), y_s(s))^\top$ ,  $\mathbf{n}(s) = (-y_s(s), x_s(s))^\top$  a platí (1.9). ■

**Poznámka.** Každá regulárna krivka má nekonečne veľa prirodzených parametrizácií, prostredníctvom elementárnych funkcií ich však možno vyjadriť len pre málo kriviek. Prirodzená parametrizácia krivky má teda veľký teoretický význam, ale ťažko sa s ňou pracuje prakticky.

**Poznámka.** Parametrizácia krivky  $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \sin t)^\top$  na obrázku 4 nie je prirodzená, pretože  $\exists t \in \langle 0, 4\pi \rangle : \|\mathbf{c}_t(t)\| \neq 1$ . To nakoniec vidno aj na obrázku, pretože šípky zodpovedajúce ekvidistančným hodnotám parametra  $t$  nevytínajú na krivke medzi sebou časti oblúka krivky s rovnakou dĺžkou.



## 1.5 Krivosť krivky

**Definícia 1.15 (Krivosť regulárnej rovinnej krivky)** *Krivosť regulárnej rovinnej krivky  $\mathbf{c}(t) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$  je daná vzťahom*

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (1.11)$$

**Poznámka.** V literatúre [4] je uvedený fyzikálny význam krivosti: krivosť krivky je absolútna hodnota okamžitej rýchlosti zmeny smeru dotyčnice.

**Definícia 1.16** *V neinflexnom bode krivky  $\mathbf{c}(t) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definujeme vektor krivosti:*

$$\mathbf{k}(t) = \kappa(t) \mathbf{n}(t), \quad (1.12)$$

kde  $\mathbf{n}(t)$  je jednotkový normálový vektor krivky  $\mathbf{c}(t)$ .

**Poznámka.** V definícii 1.16 vynechávame inflexné body. V neinflexnom bode môžeme tiež definovať vektor krivosti, ale v neinflexnom bode nie je jednoznačne definovaný normálový vektor.

**Veta 1.3** *Pre vektor krivosti a krivosť krivky  $\mathbf{c}(s) : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  v prirodzenej parametrizácii platí:*

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{c}_{ss}(s), \quad \kappa(s) = \|\mathbf{c}_{ss}(s)\|. \quad (1.13)$$

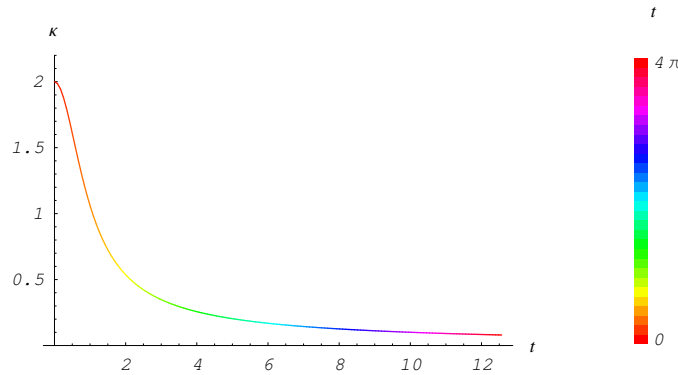
**Dôkaz.** Dôkaz tejto vety možno nájsť v [4]. ■

**Veta 1.4 (Frenet-Serret)** *Pre rovinnú krivku v prirodzenej parametrizácii platí:*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_s(s) &= \kappa(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}_s(s) &= -\kappa(s) \mathbf{t}(s). \end{aligned} \quad (1.14)$$

**Dôkaz.** Dôkaz tejto vety možno nájsť v [4]. ■

**Poznámka.** Kvôli jednoduchosti zápisu sme vo vzťahu (1.15) hodnotu  $\phi(\mathbf{x})$  označili  $\phi$ , krivosť  $\kappa(\mathbf{x})$  sme označili  $\kappa$  a gradient  $\nabla\phi(\mathbf{x})$  sme označili  $\nabla\phi$ . Ak to bude vhodné, budeme týmto spôsobom označovať aj v ďalšom texte, pričom voľba argumenta označenia bude zrejmá z kontextu.



Obrázok 5: Krivosť krivky  $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \sin t)^\top$  reprezentovanej parametricky (viď obrázok 4).

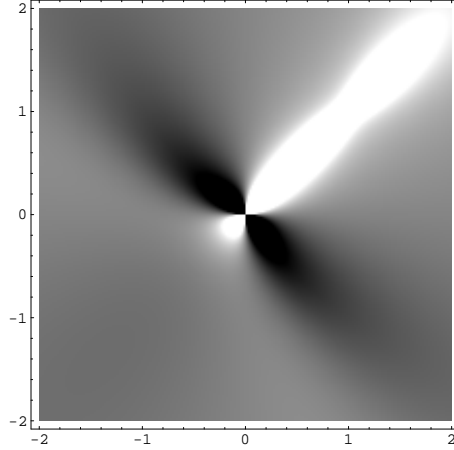
**Definícia 1.17** Pre **krivosť**  $\kappa$  regulárnej rovinnej krivky  $\phi = 0$  reprezentovanej **implicitne** v regulárnom bode platí:

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} = \frac{\phi_y^2 \phi_{xx} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_x^2 \phi_{yy}}{\|\nabla \phi\|^3}. \quad (1.15)$$

**Poznámka.** Z definícií 1.15 a 1.17 vidieť, že krivosť krivky v singulárnom bode nie je definovaná, pretože v singulárnom bode krivky reprezentovanej parametricky (implicitne) je dotykový vektor (gradient) krivky nulový a krivosť krivky sa limitne blíži k  $\pm\infty$ .

## 1.6 Krivkový integrál po krivke zadanej implicitne

V tejto časti podávame prehľad aparátu potrebného na výpočet krivkového integrálu skalárnej funkcie po krivke danej implicitnou reprezentáciou. Tento aparát je často používaný pri numerických výpočtoch pri práci s krivkami alebo plochami reprezentovanými implicitne.



Obrázok 6: Krivosť v bodoch nosnej funkcie  $\phi(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .  $\phi(x, y) = 0$  implicitne reprezentuje fólium (viď obrázok 3).

### 1.6.1 Diracova funkcia

**Definícia 1.18** *Heavisideova funkcia*  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je definovaná ako

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

**Definícia 1.19 (Diracova funkcia)** *Diracova delta funkcia*  $\hat{\delta}$  je definovaná ako smerová derivácia Heavisideovej funkcie  $H$  v smere jednotkovej normály  $\mathbf{n}$

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \nabla H(\phi(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.17)$$

pričom  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  implicitne reprezentuje hranicu  $\partial\Omega$  množiny  $\Omega$  (hranicou môže byť napr. krivka v rovine) a  $\mathbf{n}$  je jednotková normála na hranici  $\partial\Omega$ .

**Poznámka.** Definícia 1.19 je prevzatá z [8]. Pre upresnenie definície treba uviesť, že delta funkcia v skutočnosti nie je reálna funkcia, ale patrí medzi tzv. zovšeobecnené funkcie. Bližšie informácie je možné nájsť v [13].

**Poznámka.** Poznamenávame, že táto distribúcia je nenulová iba na  $\partial\Omega$ , kde  $\phi = 0$ . Rovnicu 1.17 môžeme prepísať ako

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \frac{dH}{dx}(\phi(\mathbf{x})) \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{\|\nabla\phi(\mathbf{x})\|} = \frac{dH}{dx}(\phi(\mathbf{x})) \|\nabla\phi(\mathbf{x})\|. \quad (1.18)$$

**Poznámka.** V jednorozmernom priestore je delta funkcia definovaná ako derivácia jednorozmernej Heavisideovej funkcie:

$$\delta(x) = \frac{dH}{dx}(x), \quad (1.19)$$

kde  $H(x)$  je definovaná v rovnici (1.16). Delta funkcia  $\delta(x)$  je identicky rovná nule všade okrem  $x = 0$  a platí  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ . Rovnica (1.19) nám umožňuje napísať rovnice (1.17) a (1.18) v tvare

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \delta(\phi(\mathbf{x})) \|\nabla\phi(\mathbf{x})\| \quad (1.20)$$

s použitím jednorozmernej delta funkcie  $\delta(x)$ .

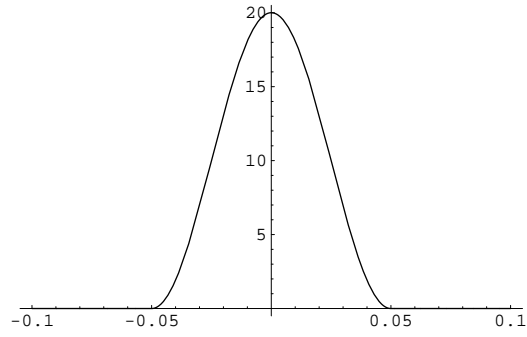
### 1.6.2 Aproximácia jednorozmernej Diracovej funkcie

Diracova funkcia (1.19) sa zaraďuje medzi zovšeobecnené funkcie. Zovšeobecnené funkcie nie sú spojité a to spôsobuje numerické problémy pri výpočtoch. Preto je potrebné aproximovať zovšeobecnené funkcie spojitými funkciami ktoré čo najlepšie vystihujú tvar pôvodných zovšeobecnených funkcií. My používame aproximáciu jednorozmernej Diracovej funkcie uvedenú v literatúre [8] danú vzťahom (1.21). Informácie o ďalších typoch aproximácií je možné nájsť v [6].

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x < -\epsilon, \\ \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon} \cos\left(\frac{\pi x}{\epsilon}\right) & -\epsilon \leq x \leq \epsilon, \\ 0 & \epsilon < x. \end{cases} \quad (1.21)$$

### 1.6.3 Integrál po krivke

**Poznámka.** Poznamenávame, že  $d\mathbf{x}$  je objemový element v trojrozmernom priestore a plošný element v dvojrozmernom priestore. V dvojrozmernej pravouhlej mriežke je to plocha dvojrozmernej bunky  $\Delta x \Delta y$ , v trojrozmernej pravouhlej mriežke je to objem trojrozmernej bunky  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .



Obrázok 7: Aproximácia jednorozmernej Diracovej funkcie  $\delta(x)$  pre  $\epsilon = 0.05$ .

**Definícia 1.20 (Krivkový integrál)** Nech  $\phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . **Integrál funkcie**  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  **po krivke**  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  je definovaný ako

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.22)$$

kde oblasť cez ktorú integrujeme je  $\mathbb{R}^2$ , pretože  $\hat{\delta}(\mathbf{x})$  vylúči všetko okrem krivky  $\phi(\mathbf{x})$  a  $d\mathbf{x}$  je objemový element.

## 2 Formulácie evolučných algoritmov

### 2.1 Lagrangeovska formulácia

Predpokladajme, že rýchlosť pohybu každého bodu  $\mathbf{x}$  na hranici oblasti v čase  $t$  je daná ako  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ . Tomu zodpovedá rovnica

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{V}(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Toto je Lagrangeovská formulácia rovnice evolúcie hranice. Pri aproximatívnom riešení rovnice (2.1) hranicu diskretizujeme. Napríklad v dvojrozmernom priestore je hranica krivka a na diskretizáciu môžeme použiť segmenty, v trojrozmernom priestore je hranica plocha a na diskretizáciu môžeme použiť napr. trojuholníky. Avšak aj triviálne vektorové polia rýchlosti môžu spôsobiť deformácie elementov hranice a presnosť klesá, ak sa neupravuje diskretizácia s ohľadom na tieto deformácie. Navyše sa musíme rozhodnúť, ako budeme riešiť diskretizáciu pri zmene topológie hranice (spájanie alebo rozdeľovanie častí hranice). Metódy spájania a rozdeľovania hranice používané pri tomto prístupe sú komplikované. Použitie Lagrangeovských formulácií pre pohyb hranice spolu s metódami vyhladzovania a regularizácie a prerozdeľovania sa v anglicky písanej literatúre označujú ako front tracking methods.

### 2.2 Eulerovská formulácia

Aby sme sa vyhli problémom s deformáciami elementov hranice a prerozdeľovaním hranice pri zmene topológie, používame funkciu  $\phi$  súčasne na reprezentáciu hranice a jej evolúciu. Evolúciu hranice danú implicitnou funkciou  $\phi = 0$  vo vektorovom poli  $\mathbf{V}$  definujeme rovnicou toku

$$\phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (2.2)$$

Táto rovnica definuje pohyb hranice všade tam, kde  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ . Nazýva sa Eulerovská formulácia evolúcie hranice, pretože hranica je obsiahnutá v implicitnej funkcii. Uvedenú rovnicu pre evolúciu rozhrania uviedli Osher a Sethian ([10],[9]). V anglicky písanej literatúre sa rovnica (2.2) niekedy nazýva level set equation a metódy využívajúce Eulerovskú formuláciu sa označujú level set methods.

Nech  $\mathbf{c}(0)$  je hladká uzavretá počiatková rovinná krivka a nech  $\mathbf{c}(t)$  je jednoparametrická trieda kriviek generovaná pohybom počiatkovej krivky  $\mathbf{c}(0)$  v čase  $t$  rýchlosťou určenou vektorovým poľom  $\mathbf{V}$ . Hlavnou myšlienkou level set prístupu je reprezentovať  $\mathbf{c}(t)$  implicitne ako hladinu  $\phi(t) = 0$  skalárnej funkcie  $\phi(t)$ . Môžeme teda združiť jednoparametrickú triedu pohybujúcich sa kriviek s jednoparametrickou triedou pohybujúcich sa plôch v tom zmysle, že hladina  $\phi = 0$  je nesená pohybujúcou sa plochou.

Napríklad ak počiatková krivka  $\mathbf{c}(0)$  v rovine  $xy$  je kružnica so stredom  $(0,0)$  a polomerom  $r$ , môžeme ju reprezentovať ako hladinu  $\phi(x, y, 0) = 0$  funkcie  $z = \phi(x, y, t)$  v čase  $t = 0$ , pričom  $\phi(x, y, 0) = \sqrt{x^2 + y^2} - r$ .

## 2.3 Vlastnosti Eulerovskej formulácie

### 2.3.1 Zložky vektorového poľa

Pri zadávaní vektorového poľa vo všeobecnosti nemusíme zadávať tangenciálnu zložku. Pretože  $\mathbf{n}$  a  $\nabla\phi$  majú rovnaký smer,  $\mathbf{t} \cdot \nabla\phi = 0$  pre ľubovoľný dotykový vektor  $\mathbf{t}$ , z čoho vyplýva, že tangenciálne zložky vektorového poľa sa v level set rovnici neuvažujú. Napríklad v dvojrozmernom prípade sa vektorové pole  $\mathbf{V}$  rozkladá na normálovú  $V^n \mathbf{n}$  a tangenciálnu  $V^t \mathbf{t}$  zložku:

$$\mathbf{V} = V^n \mathbf{n} + V^t \mathbf{t}. \quad (2.3)$$

Teda level set rovnica

$$\phi_t + (V^n \mathbf{n} + V^t \mathbf{t}) \cdot \nabla\phi = 0 \quad (2.4)$$

je ekvivalentná s

$$\phi_t + V^n \mathbf{n} \cdot \nabla\phi = 0. \quad (2.5)$$

Pretože

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \cdot \nabla\phi = \frac{\|\nabla\phi\|^2}{\|\nabla\phi\|} = \|\nabla\phi\|, \quad (2.6)$$

môžeme rovnicu (2.4) prepísať do tvaru

$$\phi_t + V^n \|\nabla\phi\| = 0. \quad (2.7)$$

Autori v [1] poznamenávajú, že použitie vektorových polí generovaných krivkou (napr. tok v smere normály konštantnou rýchlosťou, tok v smere normály s rýchlosťou úmernou krivosti krivky) vedie k použitiu rovnice (2.7).

### 2.3.2 Výhody a nevýhody vrstevnicových metód

Hlavnou výhodou level set metód je jednoduché riešenie zmien topológie hranice. Funkcia  $\phi$  vyvíjajúca sa v čase pod vplyvom vektorového poľa  $\mathbf{V}$  ostáva funkciou tak dlho, pokiaľ je  $\mathbf{V}$  hladká funkcia. Hladina  $\phi = 0$  implicitne reprezentujúca hranicu však môže meniť topológiu (spájať sa, trhať sa alebo formovať ostré rohy) podľa toho, ako sa  $\phi$  vyvíja. Na obrázku 8 je znázornené automatické riešenie zmien topológie touto metódou.

Ďalšou výhodou je dostupnosť vhodných numerických metód pre riešenie level set rovníc. V [8], [9], [7], [1] sú uvedené numerické schémy pre rôzne typy tokov hranice a schémy pre priestorovú diskretizáciu (Upwind diferencie, Hamilton-Jacobi ENO, Hamilton-Jacobi WENO) a časovú diskretizáciu (TVD Runge-Kutta) potrebnú k dosiahnutiu stability výpočtu. Tieto numerické metódy pracujú s objemovou reprezentáciou, čo má svoje výhody a nevýhody, a zároveň prinášajú aj nevýhodu v podobe dĺžky výpočtu potrebnej k dodržaniu stability výpočtu. Zvýšenie presnosti a zjednodušenie numerických metód prináša voľba funkcie  $\phi$  ako orientovanej funkcie vzdialenosti za cenu reinitializácie pri výpočte (pozri [8], [1]).

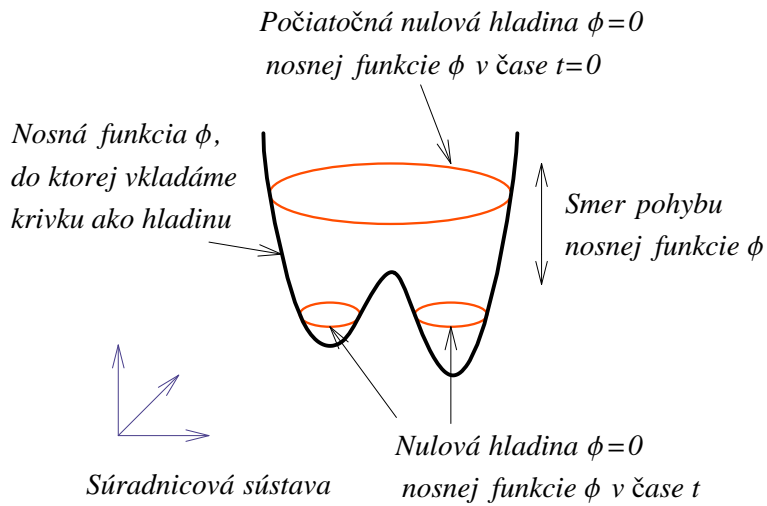
Výhodou tejto formulácie je aj to, že vlastné geometrické vlastnosti hranice môžu byť určené priamo z funkcie  $\phi$ . Napríklad v bode hranice je normálový vektor daný ako  $\nabla\phi$  a krivosť sa dá získať ako divergencia jednotkového normálového vektora na hranici zo vzťahu (1.15).

Nakoniec výhoda spočíva aj v tom, že nie sú žiadne podstatné rozdiely medzi evolúciou v dvojrozmernom a trojrozmernom priestore. Aproximácie derivácií sa nemenia, rozšírenie sa rieši rozšírením štruktúr a operátorov gradientu o tretiu súradnicu.

Nevýhodou level set prístupu je časová náročnosť. Tento prístup síce prináša výhodu ľahkej implementácie, ale zároveň prináša časovú náročnosť, pretože treba počítat' na celom definičnom obore. Časovú náročnosť tohto prístupu odstraňujú metódy, ktoré počítajú iba na okolí krivky (narrow band). To všetko ale za cenu zvýšenia obtiažnosti implementácie. Týmto sa v práci nebudeme ďalej zaoberať.

Výhodou a nevýhodou zároveň je celkový charakter numerických metód (z hľadiska rýchlosti a presnosti) použitých pri tomto prístupe. Detailnejši





Obrázok 8: Vloženie dvojrozmernej krivky do trojrozmernej nosnej funkcie  $\phi$  ako jej nulová hladina  $\phi = 0$  automaticky rieši problémy so zmenou topológie. Zatiaľ čo krivka môže meniť topológiu, plocha daná nosnou funkciou  $\phi$  sa pohybuje hore a dole v pevne danej súradnicovej sústave bez zmeny topológie.

prehľad je uvedený v [8].

### 3 Funkcia obsahu a jej derivácie

Parametricky reprezentovaná krivka sa pri svojom pohybe v čase  $t$  môže pretnúť sama so sebou tak, že už nie je regulárna a vnútro krivky sa skladá z viacerých oblastí. Tieto oblasti sa vyznačujú rôznou orientáciou svojej hranice: pre niektoré oblasti je krivka ako hranica kladne orientovaná, pre niektoré záporne. Od orientácie a teda aj parametrizácie hranice závisí orientovaný obsah oblasti (jeho znamienko), a teda zmeny vnútra krivky vyvolané pohybom krivky sa prejavujú aj na zmene orientovaného obsahu vnútra krivky. Chceme lokálne v okolí vzniku singulárneho bodu krivky sledovať zmeny obsahu (orientovaného). Rýchlosť zmeny obsahu v čase je vyjadrená jeho časovou deriváciou, ktorú budeme sledovať. Funkciu obsahu si odvodíme pre prípad krivky reprezentovanej parametricky a vyvodíme z nej závery. Pretože implicitná reprezentácia krivky prináša výhodu vo forme automatických zmien topológie, budeme funkciu obsahu sledovať na príkladoch kriviek reprezentovaných implicitne. To je pre dôležité práve z hľadiska zmien topológie, pretože situácia prerozdelenia oblastí znázornená na obrázku pri implicitnej reprezentácii vplyvom zmien topológie nemusí v prípade vzniku singulárnych bodov nastať, ale môže dôjsť k zmenám obsahu.

V úvode kapitoly uvádzame rovinnú verziu Greenovej vety potrebnú pre odvodenie funkcie obsahu oblasti ohraničenej krivkou a vetu o derivácii parametrického integrálu potrebnú pre odvodenie derivácie funkcie obsahu.

**Definícia 3.1** *Množinu bodov v rovine ohraničenú jednoduchou uzavretou rovinnou krivkou  $\mathbf{c}$  nazývame **vnútro krivky** a označujeme ho  $\Omega$ .*

**Definícia 3.2** *Jednoduchá uzavretá rovinná krivka  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$  je **kladne orientovaná**, ak pre každý regulárny bod  $\mathbf{c}(t)$  krivky  $\mathbf{c}$  existuje  $\delta > 0$  také, že  $\mathbf{c}(t_0) + s\mathbf{n} \in \Omega$  pre každé  $s \in (0, \delta)$ , kde  $\mathbf{n} = (-y_t(t), x_t(t))^T$  je normálový vektor ku krivke  $\mathbf{c}$  v bode  $\mathbf{c}(t)$ .*

**Veta 3.1 (Greenova veta)** *Nech  $\mathbf{c}$  je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka cyklicky orientovaná súhlasne s daným súradnicovým systémom. Nech množina  $\Omega$  pozostáva z bodov krivky  $\mathbf{c}$  a jej vnútra. Nech sú funkcie  $U(x, y)$  a  $V(x, y)$  spojité aj so svojimi parciálnymi deriváciami na množine*

$\Omega$ . Potom

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \int_c U(x, y) dx + V(x, y) dy. \quad (3.1)$$

**Dôkaz.** Dôkaz tejto vety možno nájsť v [5]. ■

**Veta 3.2 (Derivácia parametrického integrálu)** *Nech  $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ . Ak spojitá funkcia  $f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$  má na množine spojitú parciálnu deriváciu  $f_y$ , tak funkcia  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  je diferencovateľá na  $(c, d)$  a platí*

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx. \quad (3.2)$$

**Dôkaz.** Dôkaz tejto vety možno nájsť v literatúre [2]. ■

### 3.1 Funkcia obsahu

V tejto podkapitole predpokladáme, že krivka  $\mathbf{c}$  je vo všeobecnosti parametrizovaná nasledujúcim spôsobom:

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t)).$$

V ďalšom texte budeme kvôli prehľadnosti zápisu niekedy pri označeniach vynechávať parameter  $t$ . Voľba označenia bude zrejmá z kontextu.

**Lema 3.1** *Nech  $\mathbf{c}(t) : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ , je po častiach hladká jednoduchá uzavretá rovinná krivka. Potom pre orientovaný obsah  $S$  vnútra  $\Omega$  krivky  $\mathbf{c}$  platí:*

$$S(t) = -\frac{1}{2} \int_c \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dt. \quad (3.3)$$

**Dôkaz.** Zvoľme  $U(x, y) = y$ ,  $V(x, y) = 0$ . Potom pre plošný obsah  $S$  podľa vety 3.1 dostávame

$$S = \iint_{\Omega} dx dy = \int_c y dx. \quad (3.4)$$

Zvoľme  $U(x, y) = 0$ ,  $V(x, y) = x$ , podľa vety 3.1 dostávame

$$S = \iint_{\Omega} dx dy = \int_c x dy. \quad (3.5)$$

Z toho

$$S = \iint_{\Omega} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{c}} x dy - y dx. \quad (3.6)$$

Pre diferenciály funkcií  $x$  a  $y$  platí:

$$dx = x_t dt \quad dy = y_t dt \quad (3.7)$$

Dosadením dostávame tvrdenie lemy

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{c}} (x y_t - y x_t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{c}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_t \\ x_t \end{pmatrix} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dt. \blacksquare \end{aligned} \quad (3.8)$$

Vzťah (3.3) platí pre jednoduchú krivku. V ďalšej časti ukážeme, že platí aj pre krivku, ktorá nie je jednoduchá, a teda jej vnútro sa skladá z viacerých oblastí.

Autori v [3] uvádzajú, že ak rovinná krivka  $\mathbf{c}$  nie je jednoduchá, potom existuje konečný počet jednoduchých orientovaných uzavretých rovinných kriviek  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  takých, že

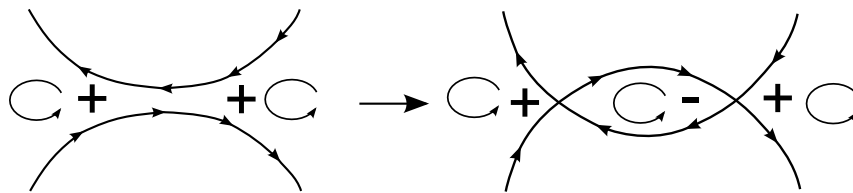
$$\mathbf{c} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{c}_i. \quad (3.9)$$

Potom vnútro  $\Omega$  krivky  $\mathbf{c}$  sa skladá z  $n$  oblastí  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ohraničených jednoduchými uzavretými krivkami  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i. \quad (3.10)$$

Ak krivka obsahuje singulárne body, môže nastať situácia, že krivka  $\mathbf{c}$  sa skladá z  $k$  oblastí  $\Omega_i^+$  so súhlasnou parametrizáciou a z  $n - k$  oblastí s nesúhlasnou parametrizáciou  $\Omega_i^-$  (viď obrázok ??):

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i^+ \cup \bigcup_{i=k+1}^n \Omega_i^-. \quad (3.11)$$



Obrázok 9: Zmena orientovaného obsahu vplyvom parametrizácie. Oblasti vnútra krivky majú rôzne znamienko orientovaného obsahu v závislosti na parametrizácii a orientácii.

Orientovaný obsah oblastí so kladnou orientáciou je kladný, orientovaný obsah oblastí so zápornou orientáciou je záporný:

$$\begin{aligned} S(\Omega_i^+) &> 0, & i = 1 \dots k, \\ S(\Omega_i^-) &< 0, & i = k + 1 \dots n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Definujme obsah  $S$  vnútra  $\Omega$  krivky  $\mathbf{c}$ :

$$S = \sum_{i=1}^k S(\Omega_i^+) + \sum_{i=k+1}^n S(\Omega_i^-). \quad (3.13)$$

**Dôsledok 3.1 (Obsah vnútra krivky)** *Nech  $\mathbf{c}(t) : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  je po častiach hladká uzavretá rovinná krivka. Potom pre orientovaný obsah  $S$  vnútra  $\Omega$  krivky  $\mathbf{c}$  platí:*

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dt. \quad (3.14)$$

**Dôkaz.** Zo vzťahov v predchádzajúcej časti vyplýva

$$S = \sum_{i=1}^k S(\Omega_i^+) + \sum_{i=k+1}^n S(\Omega_i^-) \quad (3.15)$$

$$= \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{c}_i} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_i dt \quad (3.16)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dt, \quad (3.17)$$

príčom  $\mathbf{n}_i$  je normálový vektor krivky  $\mathbf{c}_i$ . ■

### 3.2 Derivácie funkcie obsahu

**Lema 3.2 (Derivácia funkcie obsahu)** *Nech  $\mathbf{c}(s, t) : \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  je rovinná krivka v prirodzenej parametrizácii. Potom derivácia funkcie obsahu jej vnútra je vyjadrená ako*

$$S'(t) = - \int_0^L \mathbf{c}_t \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (3.18)$$

pričom je  $L$  dĺžka krivky a  $\mathbf{n}$  je normálové vektorové pole na krivke.

**Dôkaz.** Obsah oblasti ohraničenej krivkou je daný ako

$$S(t) = -\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Derivácia funkcie obsahu:

$$S'(t) = -\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{c}_t \cdot \mathbf{n} \, ds - \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_t \, ds. \quad (3.19)$$

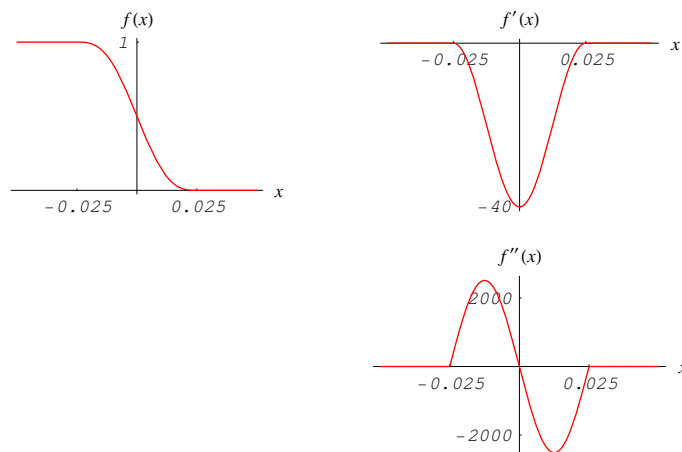
Pretože krivka je uzavretá platí:

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(L), \quad \mathbf{c}_t(0) = \mathbf{c}_t(L), \quad \mathbf{c}_t^\perp(0) = \mathbf{c}_t^\perp(L). \quad (3.20)$$

Integrovaním druhého integrálu per partes dostávame:

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_t \, ds &= \int_0^L \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} -y_{pt} \\ x_{pt} \end{pmatrix} ds \\ &= \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} -y_t \\ x_t \end{pmatrix} \Big|_0^L - \int_0^L \mathbf{c}_p \cdot \begin{pmatrix} -y_t \\ x_t \end{pmatrix} ds \\ &= \underbrace{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}_t^\perp \Big|_0^L}_{=0} - \int_0^L \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_t \\ x_t \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^L \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_p \\ x_p \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^L \mathbf{c}_t \cdot \mathbf{n} \, ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dosadením (3.21) do (3.19) dostávame tvrdenie lemy. ■



Obrázok 10: Funkcia  $f(x)$  a jej prvá a druhá derivácia  $f'(x)$  a  $f''(x)$ .

Nech je definovaný nasledujúci druh toku krivky:

$$\mathbf{c}_t = (\alpha + \beta\kappa) \mathbf{n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_0^+. \quad (3.22)$$

Potom derivácia obsahu má tvar:

$$\begin{aligned} S'(t) &= - \int_0^L (\alpha + \beta\kappa) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= - \int_0^L (\alpha + \beta\kappa) ds \\ &= -\alpha \int_0^L ds - \beta \int_0^L \kappa ds \\ &= -\alpha L - \beta \int_0^L \kappa ds. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Na podrobnejšie určenie vlastností prvej derivácie obsahu určíme ešte jej druhú deriváciu, pretože chceme sledovať extrémny (viď obrázok 10).

Ďalším derivovaním (3.22) dostávame druhú deriváciu obsahu:

$$S''(t) = -\beta \int_0^L \kappa_t ds. \quad (3.24)$$

Potrebujeme ešte určiť časovú deriváciu krivosti v (3.24). Tú určíme nasledovne:

$$\kappa_t = \frac{\partial}{\partial t} \|\mathbf{c}_{ss}\| = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{x_{ss}^2 + y_{ss}^2} \right) = \frac{x_{ss} x_{sst} + y_{ss} y_{sst}}{\sqrt{x_{ss}^2 + y_{ss}^2}} = \frac{\mathbf{c}_{ss} \cdot \mathbf{c}_{sst}}{\|\mathbf{c}_{ss}\|}. \quad (3.25)$$

Pretože  $\mathbf{c} \in C^3$ , môžeme zameniť poradie derivovania:

$$\mathbf{c}_{sst} = \mathbf{c}_{tss} = [(\alpha + \beta\kappa) \mathbf{n}]_{ss} = 2\beta\kappa_s \mathbf{n}_s + (\alpha + \beta\kappa) \mathbf{n}_{ss} + \beta\kappa_{ss} \mathbf{n}. \quad (3.26)$$

Na určenie derivácií normálového vektora v rovnici (3.26) využijeme vetu 1.4. Ešte potrebujeme určiť výraz  $\mathbf{n}_{ss}$ . Ten získame deriváciou vzťahu (1.14):

$$\mathbf{n}_{ss} = -\kappa_s \mathbf{t} + \kappa \mathbf{t}_s = -\kappa_s \mathbf{t} + \kappa^2 \mathbf{n}.$$

Výsledne teda máme:

$$\mathbf{c}_{sst} = -2\beta\kappa_s \kappa \mathbf{t} + (\alpha + \beta\kappa) (-\kappa_s \mathbf{t} + \kappa^2 \mathbf{n}) + \beta\kappa_{ss} \mathbf{n} \quad (3.27)$$

a z toho

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ss} \cdot \mathbf{c}_{sst} &= \kappa \mathbf{n} \cdot [-2\beta\kappa_s \kappa \mathbf{t} + (\alpha + \beta\kappa) (-\kappa_s \mathbf{t} + \kappa^2 \mathbf{n}) + \beta\kappa_{ss} \mathbf{n}] \\ &= \kappa \mathbf{n} \cdot (\alpha + \beta\kappa) (-\kappa_s \mathbf{t} + \kappa^2 \mathbf{n}) + \kappa \mathbf{n} \cdot \beta\kappa_{ss} \mathbf{n} \\ &= -\kappa \mathbf{n} \cdot (\alpha + \beta\kappa) \kappa_s \mathbf{t} + \kappa \mathbf{n} \cdot (\alpha + \beta\kappa) \kappa^2 \mathbf{n} + \kappa \beta \kappa_{ss} \\ &= \kappa (\alpha + \beta\kappa) \kappa^2 + \kappa \beta \kappa_{ss}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pretože  $\|\mathbf{c}_{ss}\| = \kappa$ , z predchádzajúceho pre časovú deriváciu krivosti dostávame:

$$\kappa_t = \frac{\kappa (\alpha + \beta\kappa) \kappa^2 + \kappa \beta \kappa_{ss}}{\kappa} = \alpha \kappa^2 + \beta \kappa^3 + \beta \kappa_{ss}. \quad (3.29)$$

Pre druhú deriváciu obsahu dostávame:

$$\begin{aligned} S''(t) &= -\beta \int_0^L (\alpha \kappa^2 + \beta \kappa^3 + \beta \kappa_{ss}) ds. \\ &= -\alpha \beta \int_0^L \kappa^2 ds - \beta^2 \int_0^L \kappa^3 ds - \beta^2 \int_0^L \kappa_{ss} ds. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Výraz  $\kappa_{ss}$  po zderivovaní obsahuje aj tretie a štvrté derivácie. Pretože derivácie vyšších rádov bývajú numericky nestabilné, integrál obsahujúci člen  $\beta \kappa_{ss}$  v rovnici (3.30) pri numerických metódach riešenia toku zanedbávame. Pre aproximáciu druhej derivácie obsahu teda dostávame:

$$\begin{aligned} S''(t) &\approx -\alpha \beta \int_0^L \kappa^2 ds - \beta^2 \int_0^L \kappa^3 ds \\ &\approx -\alpha \beta I_2 - \beta^2 I_3 \end{aligned} \quad (3.31)$$



kde

$$I_n = \int_0^L \kappa^n ds, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

Z toho vidíme, že treba sledovať správanie sa integrálov  $I_2$  a  $I_3$ . Pretože funkcia  $f(x) = x$  sa správa v okolí nuly podobne ako  $f(x) = x^3$ , budeme sledovať aj integrál  $I_1$ . Pre určenie dominantnosti integrálu mocniny krivosti pre opis správania sa krivky rozhodujú konštanty  $\alpha$  a  $\beta$ . V kapitole 5 uvidíme, že pri zvolených druhoch toku pri numerických výpočtoch sa stane dominantný integrál  $I_2$ . Integrály  $I_1$  a  $I_3$  však tiež pomáhajú opisovať správanie krivky.

## 4 Integrál krivosti vyčíslený analyticky

### 4.1 Popis a simulácie vzniku singulárneho bodu

Nech  $\phi(\mathbf{x}, t) : D \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  je skalárna funkcia a nech  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  je krivka definovaná implicitne. Integrál  $n$ -tej mocniny krivosti  $I_n$  z rovnice (3.32) je vyjadrený ako

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^2} \kappa^n(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \kappa^n(\mathbf{x}) \delta(\phi(\mathbf{x})) \|\nabla\phi(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}.$$

V tejto časti skúmame správanie sa integrálov mocnín krivosti pri vzniku samoprieseku krivky. Volíme krivky, ktoré obsahujú uzlový singulárny bod alebo singulárny bod vyššieho rádu, ale nie izolovaný alebo bod vratu. Pri analytickom skúmaní integrálov  $I_n$  v skutočnosti nerátame tok krivky vo vektorovom poli a jej vývoj v čase, ale zmenou parametra  $t$  funkcie  $\phi(\mathbf{x}, t)$  ovplyvňujeme tvar krivky  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  a to tak, že pri určitej zvolenej hodnote parametra krivka obsahuje singulárny bod.

V okolí predpokladaného vzniku singulárneho bodu počítame integrály mocnín krivosti. Za okolie singulárneho bodu sme zvolili interval  $\langle -0.5, 0.5 \rangle^2$ . K výpočtu integrálov  $I_n$  používame software Mathematica, konkrétne metódu pre numerické integrovanie typu Monte Carlo (500000 iterácií). Pre aproximáciu Diracovej delta funkcie (rovnica (1.21)) sme zvolili  $\epsilon = 0.0075$ .

### 4.2 Simulácie vzniku singulárneho bodu na krivkách

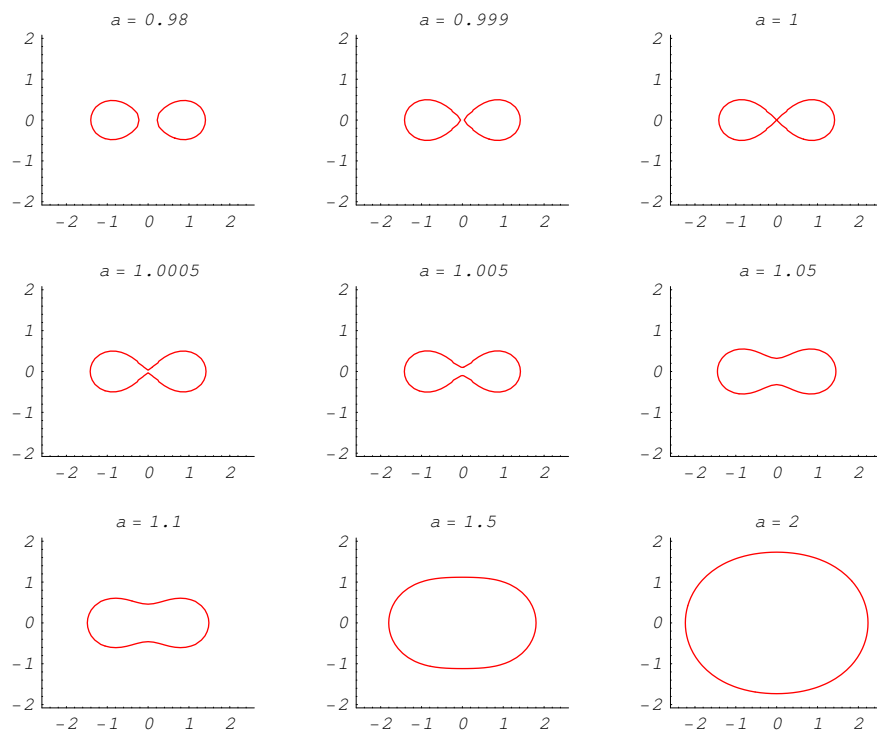
#### 4.2.1 Lemniskata

Lemniskata má implicitnú reprezentáciu v tvare

$$\phi(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) - (a^4 - c^4). \quad (4.1)$$

Parameter  $c$  sme zvolili  $c = 1$ . Parametrom  $a$  sme ovplyvňovali tvar lemniskaty. Lemniskata obsahuje singulárny bod pri hodnote parametra  $a = 1$ . V tabuľke 1 sú uvedené hodnoty parametra  $a$  a integrálov mocnín krivosti v okolí singulárneho bodu. Na obrázku 11 je znázornená lemniskata na intervale  $\langle -2.5, 2.5 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle$  pre rôzne hodnoty parametra  $a$ . V tabuľke sú

zvýraznené hodnoty „pred“, „v čase vzniku“ a „po zániku singulárneho bodu“. Na obrázku 12 sú graficky znázornené hodnoty z tabuľky 1. Integrály  $I_1$  a  $I_3$  sa „v čase vzniku singulárneho bodu“ správajú podobne a to tak, že medzi hodnotami parametra  $a = 1$  a  $a = 1.005$  nastáva zmena znamienka integrálu. Integrál  $I_2$  dosahuje maximum pri hodnote  $a = 1$ .



Obrázok 11: Analytická simulácia vzniku singulárneho bodu pre lemniskatu. Vznik je simulovaný zmenou parametra lemniskaty.

#### 4.2.2 Fólium

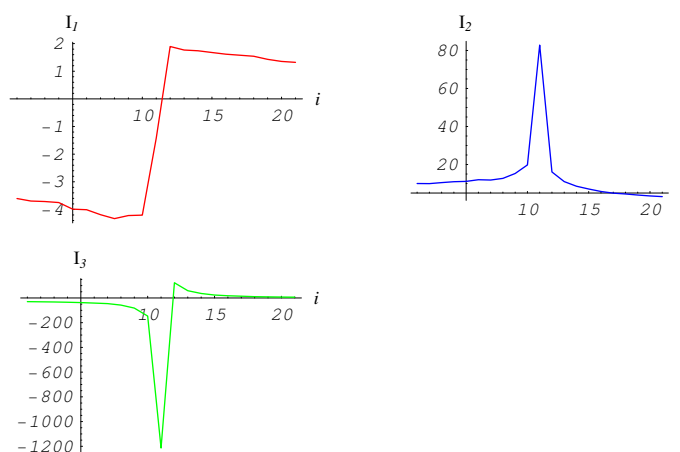
Fólium má implicitnú reprezentáciu v tvare

$$\phi(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - a. \quad (4.2)$$

Parametrom  $a$  sme ovplyvňovali tvar lemniskaty. Fólium obsahuje singulárny

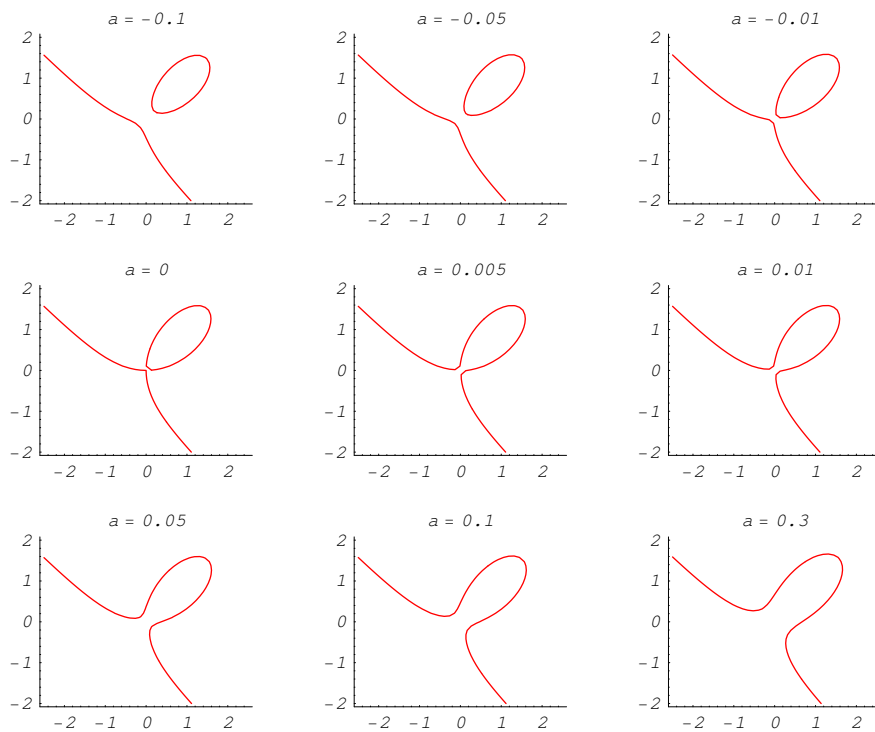
$a$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$a$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.95	-3.60527	10.0082	-29.7246	<b>1.005</b>	<b>1.89501</b>	<b>16.0841</b>	<b>123.001</b>
0.955	-3.69611	9.95044	-31.1146	1.01	1.7675	11.021	58.7047
0.96	-3.71373	10.4844	-32.4956	1.015	1.74048	8.58407	36.3043
0.965	-3.75091	10.9587	-34.6638	1.02	1.67787	7.11649	23.6155
0.97	-3.98967	11.1285	-37.4486	1.025	1.61703	5.81514	17.7992
0.975	-4.0103	12.002	-41.4323	1.03	1.58001	4.94392	14.332
0.98	-4.19017	11.836	-45.7187	1.035	1.54227	4.50405	10.4187
0.985	-4.33195	12.7111	-57.6825	1.04	1.4303	3.94513	8.83888
0.99	-4.22066	15.2819	-81.8833	1.045	1.35506	3.47196	7.3971
<b>0.995</b>	<b>-4.20621</b>	<b>19.7861</b>	<b>-146.586</b>	1.05	1.32149	3.11448	6.32636
<b>1.0</b>	<b>-1.42239</b>	<b>82.818</b>	<b>-1213.99</b>				

Tabuľka 1: Hodnoty integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri lemniskate.



Obrázok 12: Grafy integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri lemniskate.

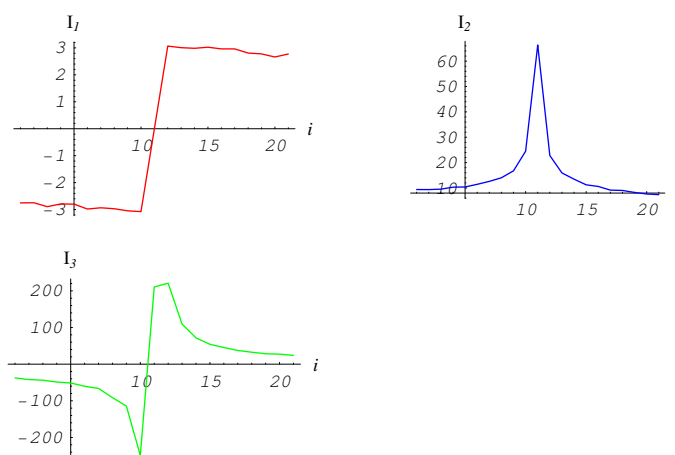
bod pri hodnote parametra  $a = 0$ . V tabuľke 2 sú uvedené hodnoty parametra  $a$  a integrálov mocnín krivosti v okolí singulárneho bodu. Na obrázku 13 je znázornené fólium na intervale  $\langle -2.5, 2.5 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle$  pre rôzne hodnoty parametra  $a$ . V tabuľke sú zvýraznené hodnoty „pred“, „v čase vzniku“ a „po zániku singulárneho bodu.“. Na obrázku 14 sú graficky znázornené hodnoty z tabuľky 2. Integrály  $I_1$  a  $I_3$  sa „v čase vzniku singulárneho bodu“ správajú podobne a to tak, že medzi hodnotami parametra  $a = 0$  a  $a = 0.01$  nastáva zmena znamienka integrálu. Integrál  $I_2$  dosahuje maximum pri hodnote  $a = 0$ .



Obrázok 13: Analytická simulácia vzniku singulárneho bodu pre fólium. Vznik je simulovaný zmenou parametra fólia.

$a$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$a$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
-0.1	-2.75134	9.3908	-37.5108	<b>0.01</b>	<b>3.06789</b>	<b>22.7961</b>	<b>220.895</b>
-0.09	-2.74621	9.37525	-41.9755	0.02	3.00777	15.9357	109.312
-0.08	-2.89154	9.53829	-43.7591	0.03	2.98486	13.4843	71.7526
-0.07	-2.79103	10.3157	-48.7179	0.04	3.02533	11.2571	54.1522
-0.06	-2.79772	10.402	-51.2848	0.05	2.9626	10.6049	45.4692
-0.05	-2.9792	11.4477	-60.2603	0.06	2.96176	9.15802	37.3674
-0.04	-2.93339	12.6059	-66.2015	0.07	2.8091	9.03629	32.6275
-0.03	-2.9683	14.0358	-91.2974	0.08	2.77654	8.2356	28.4593
-0.02	-3.04618	16.775	-114.421	0.09	2.66192	7.64426	27.3429
<b>-0.01</b>	<b>-3.07507</b>	<b>24.4961</b>	<b>-248.742</b>	0.1	2.77401	7.37578	23.9213
<b>0</b>	<b>-0.00086</b>	<b>66.3709</b>	<b>210.714</b>				

Tabuľka 2: Hodnoty integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri fóliu.



Obrázok 14: Grafy integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri fóliu.

### 4.2.3 Jednoperametrický zväzok

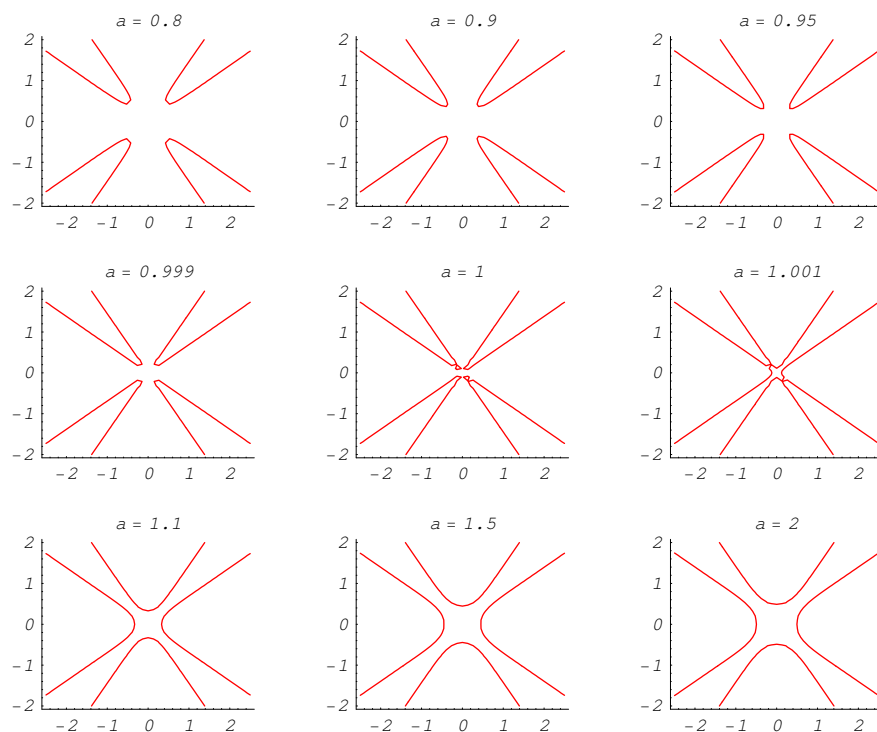
Jednoperametrický zväzok má implicitnú reprezentáciu v tvare

$$\phi(x, y) = (1 - a)(x^2 + y^2 - 1) + a \left( (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2)^2 \right). \quad (4.3)$$

Parametrom  $a$  sme ovplyvňovali tvar jednoperametrického zväzku. Parameter  $c$  sme zvolili  $c = 2$ . Jednoperametrický zväzok obsahuje singulárny bod pri hodnote parametra  $a = 1$ . V tabuľke 3 sú uvedené hodnoty parametra  $a$  a integrálov mocnín krivosti v okolí singulárneho bodu. Na obrázku 15 je znázornené fólium na intervale  $\langle -2.5, 2.5 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle$  pre rôzne hodnoty parametra  $a$ . Kvôli nedokonalosti zobrazovania implicitných funkcií v systéme Mathematica nie je pre hodnotu parametra  $a = 1$  správne zobrazený singulárny bod krivky. Na obrázku 16 sú graficky znázornené hodnoty z tabuľky 3. Integrály  $I_1$  a  $I_3$  sa „v čase vzniku singulárneho bodu“ správajú podobne a to tak, že medzi hodnotami parametra  $a = 1$  a  $a = 1.05$  nastáva zmena znamienka integrálu. Integrál  $I_2$  dosahuje maximum pri hodnote  $a = 1$ .

### 4.3 Vyhodnotenie simulácií

Z týchto simulácií vzniku singulárneho bodu predpokladáme, že hodnoty integrálov  $I_1$  a  $I_3$  pri vzniku singulárneho bodu menia znamienko a integrál  $I_2$  dosahuje maximum.

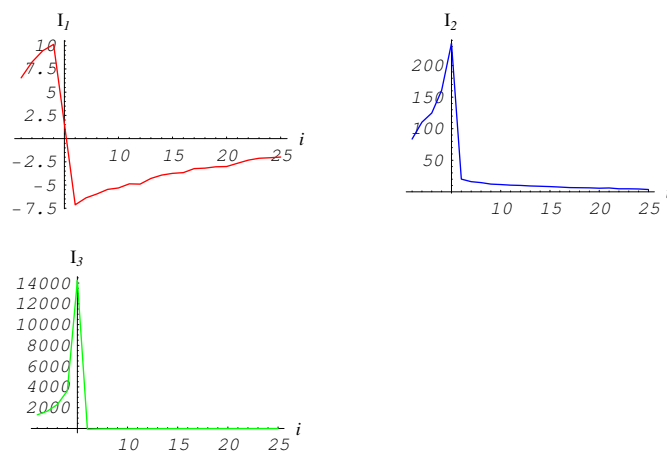


Obrázok 15: Analytická simulácia vzniku singulárneho bodu pre jednoparametrický zväzok. Vznik je simulovaný zmenou parametra zväzku.



$a$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$a$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.8	6.54119	83.6041	1315.17	1.45	-3.92625	8.82818	-18.6069
0.85	8.2348	110.352	1666.45	1.5	-3.74186	8.30058	-16.663
0.9	9.46255	124.878	2300.96	1.55	-3.66296	7.56016	-16.1235
<b>0.95</b>	<b>10.1451</b>	<b>160.798</b>	<b>3632.55</b>	1.6	-3.23132	6.71454	-13.921
<b>1.0</b>	<b>1.59686</b>	<b>235.142</b>	<b>14262.1</b>	1.65	-3.17977	6.51385	-13.5525
<b>1.05</b>	<b>-7.1261</b>	<b>20.1413</b>	<b>-65.8464</b>	1.7	-3.03441	6.32494	-11.9995
1.1	-6.37789	16.0883	-44.988	1.75	-3.00539	5.72549	-12.6169
1.15	-5.96227	14.6063	-35.9296	1.8	-2.65809	6.1237	-10.6765
1.2	-5.46768	12.2344	-32.1984	1.85	-2.31993	4.80792	-10.1619
1.25	-5.31477	11.5327	-27.7484	1.9	-2.115	4.80379	-9.5423
1.3	-4.87175	10.5668	-23.7817	1.95	-2.06082	4.52205	-8.00405
1.35	-4.89915	10.1649	-22.2603	2.	-1.9865	3.65646	-8.04368
1.4	-4.28886	9.28432	-20.5707				

Tabuľka 3: Hodnoty integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri jednoparametrickom zväzku.



Obrázok 16: Grafy integrálov mocnín krivosti získaných analytickou simuláciou vzniku singulárneho bodu pri jednoparametrickom zväzku.

## 5 Integrál krivosti vyčíslený numericky

Vzhľadom na to, že skúmame vznik samoprieseku krivky, sme sa rozhodli, že využijeme tok krivky v smere normály konštantnou rýchlosťou pretože pri tomto druhu toku je častý vznik singularít. Ďalej sme sa rozhodli využiť tok krivky v smere normály závislý na krivosti krivky a konštantnej zložke, pretože chceme zistiť ako tok krivky závislý na krivosti ovplyvňuje integrály mocnín krivosti. Numerická metóda pre simuláciu je implementovaná v matematickom software Mathematica. Pre skúmanie integrálu krivosti krivky zadanej implicitne sme sa rozhodli použiť diskretnú numerickú metódu. Dôvody pre numerickú implementáciu sú nasledovné:

- Evolučné rovnice sa zaraďujú do kategórie tuhých (stiff) problémov pre ktoré je potrebné zvoliť individuálny prístup, a matematický software neposkytuje metódy pre riešenie týchto typov diferenciálnych rovníc.
- Integrovanie integrálov typu (1.22) pomocou matematického software je problematické (viď [11]) a ani pri použití stochastických metód integrovania neprináša požadovanú presnosť ani za cenu dlhšej doby trvania výpočtu.

Pri použití numerickej metódy vychádzame so zdrojov [8] a [12].

### 5.1 Základné numerické aproximácie

#### 5.1.1 Diskretizácia definičného oboru

Priestorovú časť  $D$  definičného oboru funkcie  $\phi(\mathbf{x}, t)$  diskretizujeme pomocou dvojrozmerného rastra, ktorý má rozlíšenie  $p_x + 1$  hodnôt v smere osi  $x$  a  $p_y + 1$  hodnôt v smere osi  $y$ . Predpis pre diskretizáciu priestorových premenných  $x$  a  $y$  je nasledovný:

$$\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_i) \quad i = 0..p_x, \quad j = 0..p_y, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} x_i &= a + i\Delta x & \Delta x &= \frac{b-a}{p_x}, \\ y_j &= c + j\Delta y & \Delta y &= \frac{d-c}{p_y}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Diskretizáciu časovej zložky definičného oboru funkcie  $\phi(\mathbf{x}, t)$  riešime tak, že kroky výpočtu realizujeme v diskrétnych časoch

$$t_n = t_0 + \Delta t, \quad (5.3)$$

kde  $t_0$  je počiatočný čas pri simulácii toku a  $\Delta t$  je veľkosť časového kroku. Veľkosť časového kroku  $\Delta t$  sa môže pri výpočte meniť, aby sa dosiahla numerická stabilita výpočtu.

Numerická diskretizácia funkčných hodnôt funkcie  $\phi(\mathbf{x}, t)$  v  $n$ -tom časovom kroku výpočtu je dvojrozmerný raster  $\phi_{i,j}$  s rozlíšením  $p_x + 1$  hodnôt v smere osi  $x$  a  $p_y + 1$  hodnôt v smere osi  $y$  daný predpisom:

$$\phi_{i,j}^n = \phi(\mathbf{x}_{i,j}, t_n) \quad i = 0 \dots p_x, \quad j = 0 \dots p_y. \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Pomerné diferencie prvého rádu

Pomerné diferencie prvého rádu sa používajú na aproximáciu prvých parciálnych derivácií funkcie. Konkrétna voľba, či použijeme doprednú, spätnú alebo centrálnu diferenciu závisí na metóde použitej pri riešení, a často sa kombinujú v rámci jednej metódy.

Dopredné diferencie:

$$D_{i,j}^{+x} \phi = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}, \quad D_{i,j}^{+y} \phi = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}. \quad (5.5)$$

Spätné diferencie:

$$D_{i,j}^{-x} \phi = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad D_{i,j}^{-y} \phi = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y}. \quad (5.6)$$

Centrálné diferencie:

$$D_{i,j}^{0x} \phi = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad D_{i,j}^{0y} \phi = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (5.7)$$

### 5.1.3 Pomerné diferencie druhého rádu

Pomerné diferencie druhého rádu sa používajú na aproximáciu druhých parciálnych derivácií funkcie. Tu uvádzame aj konkrétne voľby typov pomernejších diferencií použitých pre konkrétne typy druhých derivácií funkcie.

$$\phi_{xx} \approx D_{i,j}^{+x} D_{i,j}^{-x} \phi = D_{i,j}^{+x} \left( \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} \right) = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (5.8)$$

$$\phi_{yy} \approx D_{i,j}^{+y} D_{i,j}^{-y} \phi = D_{i,j}^{+y} \left( \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \phi_{xy} \approx D_{i,j}^{0x} D_{i,j}^{0y} \phi &= D_{i,j}^{0x} \left( \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\ &= \frac{\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i-1,j-1} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j+1}}{\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (5.10)$$

### 5.1.4 Aproximácia krivosti

Autori v [12] uvádzajú prístup, pri ktorom sa pri normálovom vektore s normou menšou ako hraničná hodnota zanedbá vplyv krivosti v danom pre ďalší výpočet. My sme využili tento prístup. Diskretizácia pre krivosť krivky  $\kappa$  v  $n$ -tej iterácii je nasledovná:

$$g = \left[ (D_{i,j}^{0x} \phi^n)^2 + (D_{i,j}^{0y} \phi^n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

$$d_1 = (D_{i,j}^{0y} \phi^n)^2 (D_{i,j}^{+x} D_{i,j}^{-x} \phi^n)$$

$$d_2 = (D_{i,j}^{0x} \phi^n)^2 (D_{i,j}^{0x} D_{i,j}^{0y} \phi^n)$$

$$d_3 = (D_{i,j}^{0x} \phi^n)^2 (D_{i,j}^{+y} D_{i,j}^{-y} \phi^n)$$

$$\kappa_{i,j}^n = \begin{cases} \frac{d_1 - 2d_2 + d_3}{g} & g > \epsilon_\kappa, \\ 0 & g \leq \epsilon_\kappa. \end{cases} \quad (5.12)$$

Ako hraničná hodnota pre dĺžku normálového vektora je stanovené  $\epsilon_\kappa = 10^{-9}$ . Tento prístup sme zvolili pri riešení rovnice (5.15).

Autori v [8] uvádzajú, že krivosť krivky by nemala byť mimo intervalu  $\langle -\frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta x} \rangle$ . V opačnom prípade má byť vypočítaná krivosť nahradená hodnotou  $-\frac{1}{\Delta x}$  alebo  $\frac{1}{\Delta x}$  podľa toho ku ktorej z daných dvoch hodnôt je bližšie. Tento prístup sme zvolili pri riešení rovnice (5.23). V prípade, že chceme počítať krivosť v singulárnom bode je parabolický člen v aproximácii (5.24) nahradený hodnotou  $-\frac{1}{\Delta x}$  alebo  $\frac{1}{\Delta x}$ .

### 5.1.5 Numerické vyčíslenie integrálov mocnín krivosti

Integrál krivosti  $\kappa$  v n-tej iterácii vypočítame podľa nasledujúceho vzťahu:

$$I^n = - \sum_{i=0}^{p_x} \sum_{j=0}^{p_y} \kappa_{i,j}^n \delta(\phi_{i,j}^n) \Delta x \Delta y. \quad (5.13)$$

Integrál k-tej mocniny krivosti  $\kappa^k$  v n-tej iterácii vypočítame podľa nasledujúceho vzťahu:

$$I_k^n = - \sum_{i=0}^{p_x} \sum_{j=0}^{p_y} (\kappa_{i,j}^n)^k \delta(\phi_{i,j}^n) \Delta x \Delta y. \quad (5.14)$$

Hranice sumovania sa môžu líšiť od hraníc stanovených v rovnici (5.13) a (5.14) v závislosti od toho, na akej časti definičného oboru chceme počítať integrál mocniny krivosti (viď diskretizáciu definičného oboru). Pre aproximáciu Diracovej delta funkcie (rovnica (1.21)) sme zvolili  $\epsilon = 1.5\Delta x$  ako odporúčajú autori v [8].

## 5.2 Tok krivky v smere normály konštantnou rýchlosťou

Rovnica pre tento druh toku má tvar

$$\phi_t - a \|\nabla\phi\| = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Bližšie je tento druh toku popísaný v [8]. My uvádzame iba popis numerickej schémy. Pri výpočte derivácií využívame upwind prístup, t.j dopredné alebo spätné diferencie sa volia podľa smeru toku krivky (pozri [8],[12]):

$$\nabla^+ = \left( \max(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y}, 0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.16)$$

$$\nabla^- = \left( \max(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.17)$$

Numerická diskretizácia rovnice (5.15) v n-tej iterácii má tvar

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \Delta t a [\max(a, 0) \nabla^+ + \min(a, 0) \nabla^-]. \quad (5.18)$$

Pre dodržanie stability výpočtu je nutné splniť CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) podmienku pre veľkosť časového kroku pri výpočte:

$$\Delta t \left( \frac{\max(|F|)}{\min(\Delta x, \Delta y)} \right) = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (5.19)$$

Autori v [8] odporúčajú skoro optimálnu hodnotu  $\alpha = 0.9$  alebo konzervatívnu hodnotu  $\alpha = 0.5$ . My sme zvolili  $\alpha = 0.5$  z dôvodov zvýšenia stability výpočtu.

Integrály mocnín krivosti sme počítali na dvoch oblastiach:

$$\begin{aligned} D_1 &= \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle, \\ D_2 &= \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Vznik uzlového singulárneho bodu nastáva v oblasti  $D_1$  a v oblasti  $D_2$  nastáva.

### 5.2.1 Lemniskata

V rovnici 5.15 sme zvolili  $a = 1$  a vzhľadom ku vzťahu 3.22 a 3.31 je zrejmé, že dominantný je integrál  $I_2$ .

Krivka je implicitne reprezentovaná predpisom (4.1). Singulárny bod (spojenie) vznikol v čase  $t = 0.45$  v oblasti  $D_1$  (pozri obrázok 17). V oblasti  $D_2$  majú hodnoty približne konštantný priebeh (pozri 18). Ďalej sa venujeme oblasti  $D_1$ . Najprv opíšeme správanie sa integrálu  $I_1$  v 3 po sebe nasledujúcich iteráciách. V čase  $t = 0.425$  má hodnotu  $-1.15792$ . V čase  $t = 0.4375$  má hodnotu  $0.595461$ . V čase  $t = 0.45$  má hodnotu  $28.4629$ . Vidíme teda, že v čase vzniku singularity  $I_1$  mení znamienko. Integrál  $I_2$  dosahuje v čase vzniku singularity maximum. Integrál  $I_3$  mení znamienko v časoch  $t = 0.425$  a  $t = 0.4375$ . V čase vzniku singularity dosahuje maximum.

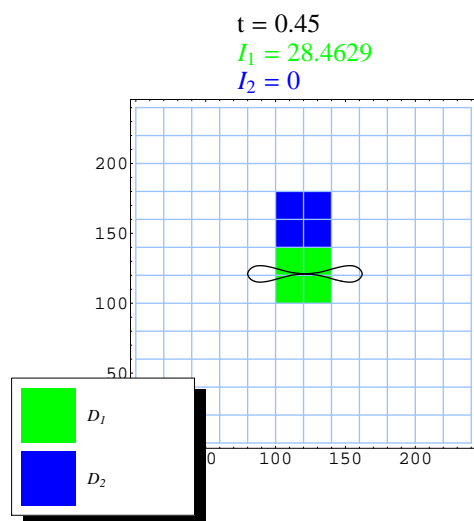
### 5.2.2 3 kružnice

Krivka  $\phi$  je implicitne reprezentovaná zjednotením 3 kružníc  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  pomocou operácie  $\min$  (vid' [1]):

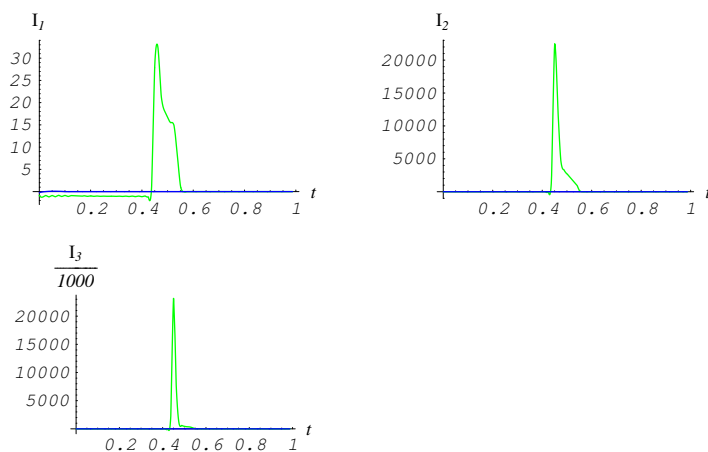
$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= (x - 1.2)^2 + y^2 - 0.5^2, \\ \phi_2(x, y) &= (x + 1.2)^2 + y^2 - 0.5^2, \\ \phi_3(x, y) &= x^2 + (y - 2)^2 - 0.5. \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\phi(x, y) = \min(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y)). \quad (5.22)$$

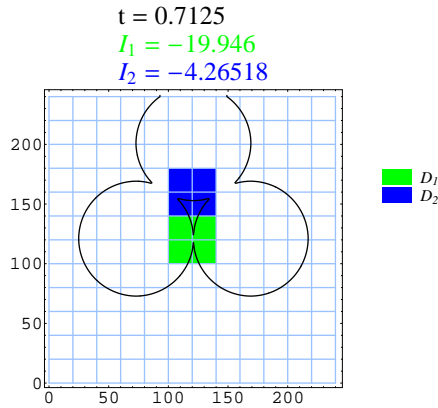
V rovnici 5.15 sme  $a = 1$  a vzhľadom ku vzťahu 3.22 a 3.31 je zrejmé, že dominantný je integrál  $I_2$ .



Obrázok 17: Vznik singulárneho bodu (spojenie) lemniskaty pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 37. iterácia,  $t = 0.45$ ,  $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ ,  $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ .



Obrázok 18: Grafy integrálov mocnín krivosti lemniskaty pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 80. iterácií,  $t = 0.45$ ,  $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ ,  $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ .



Obrázok 19: Vznik singulárneho bodu (roztrhnutie) 3 kružníc pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 58. iterácia,  $t = 0.7125$ ,  $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ ,  $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ .

Singulárny bod (spojenie) vznikol v čase  $t = 0.7125$  v oblasti  $D_1$  (pozri obrázok 17). Venujme sa najprv oblasti  $D_1$ . Najprv opíšeme správanie sa integrálu  $I_1$  v 3 po sebe nasledujúcich iteráciách. V časoch  $t = 0.675$  a  $t = 0.4375$  mení znamienko. V čase vzniku singulárneho bodu má hodnotu je blízko maxima  $I_1$ . Vidíme teda, že v čase vzniku singularity  $I_1$  mení znamienko. Integrál  $I_2$  dosahuje v čase vzniku singularity maximum. Integrál  $I_3$  mení znamienko v časoch  $t = 0.6625$  a  $t = 0.675$ . V čase vzniku singularity dosahuje maximum.

V oblasti  $D_2$  vznikol tiež singulárny bod, ale typu bod vratu (pozri 18). Tento typ nechceme detekovať. Bod vratu pod vplyvom pohybu krivky zmenil pozíciu a prejavilo sa to na hodnotách integrálov mocnín krivosti. Integrály mocnín krivosti sa ale správajú podobne ako pri vzniku samoprieseku.

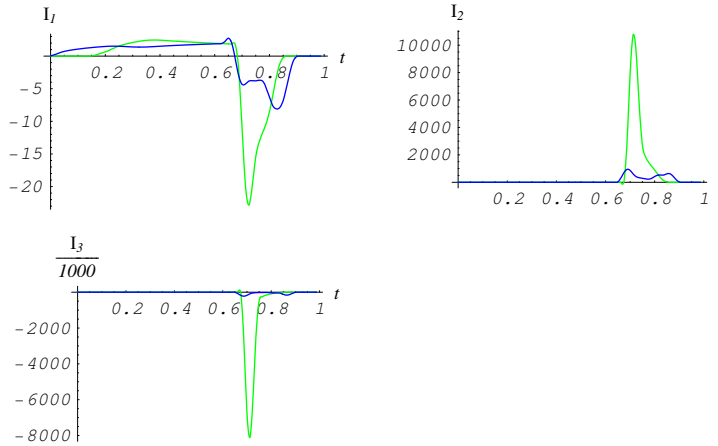
### 5.3 Tok krivky v smere normály v závislosti od krivosti a konštantnej zložky

Rovnica pre tento druh toku krivky má tvar

$$\phi_t + a \|\nabla\phi\| = b \kappa \|\nabla\phi\|, \quad a \in \mathbb{R}, b \geq 0. \quad (5.23)$$

Bližšie je tento druh toku popísaný v [8]. Podobne ako v predchádzajúcej





Obrázok 20: Grafy integrálov mocnín krivosti š kružníc pri toku konštantnou rýchlosťou v smere normály. 80. iterácií,  $t = 0.45$ ,  $D_1 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle -0.5, 0.5 \rangle$ ,  $D_2 = \langle -0.5, 0.5 \rangle \times \langle 0.5, 1.5 \rangle$ .

podkapitole uvádzame iba popis numerickej schémy. Numerickej diskretizácia v  $n$ -tej iterácii má tvar

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \left( \underbrace{-a \|\nabla \phi^n\|}_{\text{hyperbolicky}} + \underbrace{b \kappa^n \|\nabla \phi^n\|}_{\text{parabolicky}} \right) \Delta t^n. \quad (5.24)$$

Určenie CFL podmienky pre časový krok pre tento druh toku je (z dôvodov numerickej nestability pri konkrétnej implementácii riešenia rovnice (5.24)) nahradený konštantnou dostatočne malou hodnotou časového kroku  $\Delta t$ .

Hyperbolický člen je určený pomocou upwind prístupu s doprednými a spätnými diferenciami (viď diskretizáciu (5.18)), parabolický člen využíva centrálné diferencie pri aproximácii krivosti aj gradientu.

Integrály  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  sme počítali na 2 oblastiach:

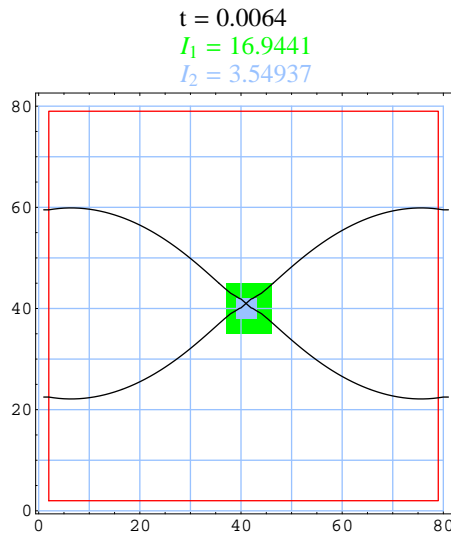
$$\begin{aligned} D_1 &= \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle, \\ D_2 &= \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Oblasť  $D_1$  je väčšia (z hľadiska plošného obsahu) ako  $D_2$  a zisťovali sme, ako sa to prejaví na presnosti výpočtu integrálov  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$ .

### 5.3.1 Lemniskata

V rovnici 5.23 sme zvolili  $a = -1$  a  $b = 0.1$ . Vysoké hodnoty  $b$  vedú k preváženiu vplyvu krivosti (je známe pri toku závislom iba od krivosti samopriesek nenastáva) a k potrebe zvoliť veľmi malý časový krok. Vzhľadom ku vzťahu 3.22 a 3.31 je zrejmé, že dominantný je integrál  $I_2$ . Priestorová diskretizácia mala parametre  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ . Časová diskretizácia mala parameter  $\Delta t = 0.0001$ .

Integrály namerané na oblasti  $D_1$  nie sú kôli svojej monotónnosti smerodajné. Integrály krivosti namerané na oblasti  $D_2$  podávajú presnejší obraz o vývoji krivky v čase. K samoprieseku došlo v čase  $t = 0.0065$ . V roztrhnutí došlo v čase  $t = 0.0085$ . V čase roztrhnutia dosahovali integrály  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  maximálnu hodnotu.



Obrázok 21: Výskyt samoprieseku lemniskaty (pri roztrhnutí) pri numerickom výpočte toku v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 65 iterácií,  $t = 0.0064$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0.1$ ,  $D1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$

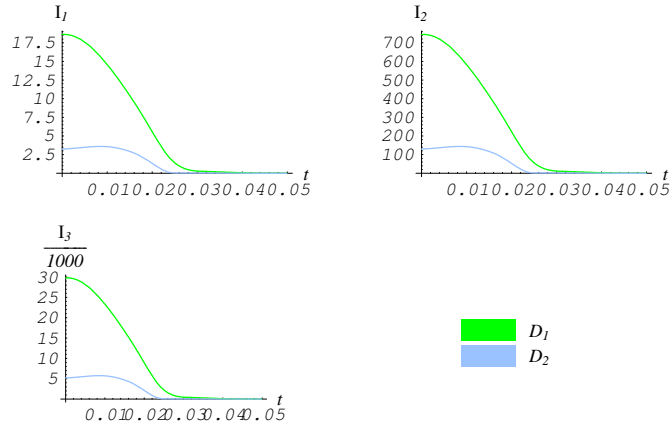
### 5.3.2 3 kružnice

Krivka  $\phi$  je implicitne reprezentovaná zjednotením 3 kružníc  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  pomocou operácie min (viď [1]):

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= (x - 1.2)^2 + y^2 - 1.19^2, \\ \phi_2(x, y) &= (x + 1.2)^2 + y^2 - 1.19^2, \\ \phi_3(x, y) &= x^2 + (y - 2)^2 - 1^2.\end{aligned}\tag{5.26}$$

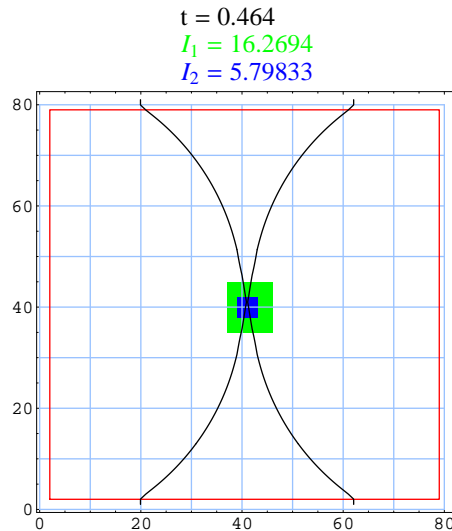
$$\phi(x, y) = \min(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y)).\tag{5.27}$$

V rovnici 5.23 sme zvolili  $a = 1$  a  $b = 0.05$ . Vysoké hodnoty  $b$  vedú k preváženiu vplyvu krivosti (je známe pri toku závislom iba od krivosti samopriesek nenastáva) a k potrebe zvoliť veľmi malý časový krok. Vzhľadom ku vzťahu 3.22 a 3.31 je zrejmé, že dominantný je integrál  $I_2$ . Priestorová diskretizácia mala parametre  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ . Časová diskretizácia mala parameter  $\Delta t = 0.001$ .

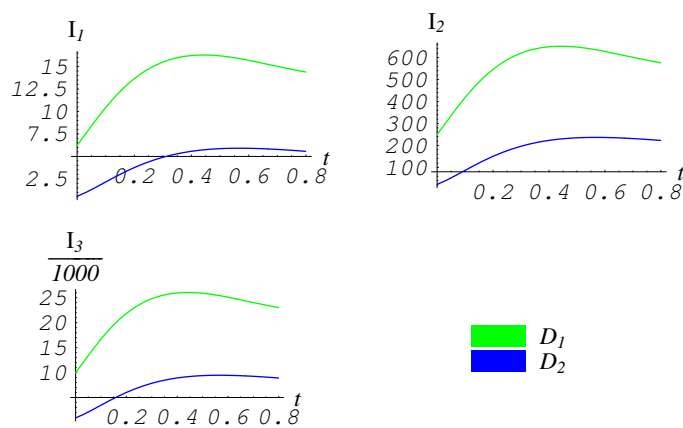


Obrázok 22: Grafy integrálov mocnín krivosti pri numerickom výpočte toku krivky v okolí vzniku singulárneho bodu pre lemniskatu tokom v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 500 iterácií,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0.1$ ,  $D_1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D_2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$

Integrály namerané na oblasti  $D_1$  a  $D_2$  sa správajú podobne. K spojeniu došlo v čase  $t = 0.465$ . K roztrhnutiu došlo v čase  $t = 0.485$ .  $I_1$  dosahoval maximálnu hodnotu v čase  $t = 0.568$ .  $I_1$  a  $I_3$  dosahoval maximálnu hodnotu v čase  $t = 0.567$ .



Obrázok 23: Výskyt samoprieseku kružníc (pri spojení) pri numerickom výpočte toku v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 465 iterácií,  $t = 0.465$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0.05$ ,  $D1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$



Obrázok 24: Grafy integrálov mocnín krivosti pri numerickom výpočte toku krivky v okolí vzniku singulárneho bodu pre 3 kružnice tokom v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnou zložkou. 800 iterácií,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0.05$ ,  $D_1 = \langle 0.925, 1.15 \rangle \times \langle 0.875, 1.125 \rangle$ ,  $D_2 = \langle 0.975, 1.075 \rangle \times \langle 0.95, 1.05 \rangle$

## Záver

V súčasnosti si metódy pracujúce s implicitnou reprezentáciou kriviek a plôch a ich tokmi vydobili svoje miesto v spracovaní obrazu a vo výpočtovej fyzike a s narastajúcou výpočtovou silou sa stávajú stále používanějšími v ďalších oblastiach. Táto práca sa snažila preskúmať kvalitatívne správanie sa vybraných druhov tokov pri implicitnej reprezentácii s jednoduchou mriežkou na celom rastru - nie metód narrow band.

Pri analytickej simulácii pomocou zmeny parametra a výpočte sa výsledky získané stochastickým integrovaním metódou Monte Carlo zhodujú s očakávaným správaním derivácií funkcií obsahu resp. správaním integrálov mocnín krivosti krivky v okolí vzniku singulárneho bodu.

Pri simulácii toku krivky v smere normály konštantnou rýchlosťou v časti 5.2 sa výsledky získané numerickým integrovaním metódou Monte Carlo zhodujú s očakávaným správaním derivácií funkcií obsahu resp. správaním integrálov mocnín krivosti krivky v okolí vzniku singulárneho bodu. Ako mätúce sa môže javiť správanie sa integrálov mocnín krivosti v prípade, že singulárny bod typu bod vratu pri pohybe krivky vstupuje do oblasti kde počítame integrály mocnín krivosti. Bolo by vhodné ubrať sa smerom ku klasifikácii druhu singulárneho bodu, ktorá sa v práci nenachádza.

Pri simulácii toku krivky v smere normály rýchlosťou závislou od krivosti krivky a konštantnej zložky sa výsledky rôznia. Bola zvolená iná aproximácia krivosti ako v časti 5.2, pretože sa prejavuje vplyv krivosti na tok krivky. Pri lemniskate sa ukazuje, že je potrebné počítat integrály mocnín krivosti krivky na malom okolí singulárneho bodu. Veľké okolie poskytuje skreslené výsledky. Pri malom okolí sa integrály mocnín krivosti správajú podľa predpokladov, a to tak, že pri zmene topológie (konkrétne roztrhnutí) krivky dosahuje integrál druhej mocniny krivosti extrém. Priebeh tohoto integrálu však nie je tak výrazne „ihlovitý“, ako by sa očakávalo z analytickej simulácie. Pri 3 kružniciach nastáva na malom okolí singulárneho bodu časová odchýlka medzi zmenou topológie a maximom integrálu druhej mocniny krivosti približne 100 iterácií. Integrál na veľkom okolí presnejšie vystihuje zmenu topológie.

Skúmanie evolúcie kriviek na plochách nebolo realizované z dôvodov ex-

trémnej numerickej náročnosti či už na čas, alebo presnosť výpočtu. Dá sa ale predpokladať, že správanie sa integrálov mocnín krivosti krivky na ploche je podobné ako kriviek v rovine. Je možné uberať sa ďalej týmto smerom. Takisto je možné a vhodné preskúmať správanie sa integrálov mocnín krivosti krivky pri algoritmoch typu narrow band s reinicializáciou funkcie vzdialenosti.

## Referencie

- [1] Level set and pde methods for computer graphics, notes for siggraph 2002 course #10.
- [2] BARNOVSKÁ, M. Matematická analýza iii. zbierka príkladov na cvičenia pre 2.ročník. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/maiii/>.
- [3] BOCK, I. *Krivkové a plošné integrály*. STU, 2001.
- [4] BOŽEK, M. Geometria 1,2. poznámky k prednáške.
- [5] KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., AND ŠVEC, M. *Matematika 1,2*. Alfa, Bratislava, 1970.
- [6] LI, Q. Blending implicit shapes using smooth unit step functions. [citeseer.ist.psu.edu/685638.html](http://citeseer.ist.psu.edu/685638.html), 2004.
- [7] MALLADI, R., SETHIAN, J. A., AND VEMURI, B. C. Shape modeling with front propagation: A level set approach. [citeseer.ist.psu.edu/malladi95shape.html](http://citeseer.ist.psu.edu/malladi95shape.html), 1995.
- [8] OSHER, S., AND FEDKIW, R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2003.
- [9] OSHER, S., AND SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* 79 (1988), 12–49.
- [10] SETHIAN, J. Curvature and the evolution of fronts. [citeseer.ist.psu.edu/sethian85curvature.html](http://citeseer.ist.psu.edu/sethian85curvature.html).
- [11] SINCLAIR, R. Sparse integrands. [citeseer.ist.psu.edu/201219.html](http://citeseer.ist.psu.edu/201219.html).
- [12] SUMENGEN, B. A guide to implementing level set methods for curve evolution. <http://barissumengen.com/>.
- [13] WEISSTEIN, E. W. Delta function. from mathworld—a wolfram web resource. <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>.