

Topológia a funkcionálna analýza

Pavel Chalmovianský



Zoznam základných pojmov a tvrdení zo všeobecnej topológie a teórie Banachových a Hilbertových priestorov. Predmet sa vyučuje na študijnom odbore 9.1.1 Matematika, v študijnom programe Počítačová grafika a geometria.

Bratislava, 10. mája 2020

Autor: Pavel Chalmovianský

Názov: Topológia a funkcionálna analýza

Grafická úprava: Pavel Chalmovianský

Rok vydania: 2020+

Obsah

Zoznam obrázkov	5
1. Úvod	7
Kapitola 1. Topológia	9
1. Základné pojmy	9
2. Topologický priestor	9
3. Konštrukcie topologických priestorov	18
4. Konvergencia a limity v topologických priestoroch	30
5. Kompaktné priestory	35
6. Súvislé priestory	38
7. Lokálne euklidovské priestory	40
8. Bairove priestory	43
9. Ďalšie cvičenia z topológie	44
Kapitola 2. Funkcionálna analýza	45
1. Lineárne normované priestory	45
2. Hilbertove priestory	64
3. Spojité funkcie na kompaktnej množine	73
4. Fourierove rady	75
5. Aparát zisťovania konverencie Fourierových radov	77
6. Analýza Fejérovho jadra	78
7. Explicitná rovnomerná aproximácia	81
8. Bodová konvergencia	83
9. Vybrané lineárne transformácie a ortogonálne bázy	86
Dodatok A. Prehľad základných pojmov a faktov z teórie miery	91
1. Lebesguova miera	91
2. Lebesguov integral	93
Dodatok. Literatúra	95
Dodatok. Register pojmov	97
Dodatok. Register autorov	101

Zoznam obrázkov

1	Množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ s obvyklou topológiou, jej uzáver, vnútro a hranica. Body z hranice množiny, ktoré nepatria do jednotlivých množín sú nakreslené čiarkovanou čiarou.	11
2	Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na predbáze.	16
3	Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na bázach okolí $\mathbf{x}$ a $f(\mathbf{x})$	16
4	Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na uzavretých množinách.	16
5	Obraz bodov uzáveru množiny v spojitom zobrazení je pod uzáverom obrazu tejto množiny. Neznamená to však, že obraz hranice je hranica!	16
6	Ekvivalentná podmienka otvorenosti resp. uzavretosti zobrazenia.	17
7	Suma topologických priestorov $\mathbf{p}_0 \oplus \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{e}_0 \oplus \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2 \oplus \mathbf{f}$ dáva trojuholník ako disjunktné zjednotenie vrcholov, otvorených hrán a otvorenej steny. Analogicky sa dá postupovať aj pre simplexy vyšších dimenzií.	20
8	Faktorové priestory vzniknuté niektorými „zlepeniami“ hrán štvorca a ich niektoré zobrazenia do $\mathbb{R}^3$.	23
9	Nemyckého rovina je príkladom priestoru, ktorý je úplne regulárny, ale nie je normálny. Rovnako je príkladom toho, že podpriestorom separabilného priestoru nemusí byť separabilný priestor. Na obrázku vidíme bázu okolí dvoch typov bodov (vpravo) a funkciu reprezentovanú zmenou intenzity šedého odtieňa (vľavo) demonštrujúcu na jednom bazovom okolí, že tento priestor je úplne regulárny.	26
10	Uzavreté množiny tvoria bázu okolí v T_1 -priestore práve vtedy, keď je regulárny.	27
1	Rovnobežníkové pravidlo hovorí (v euklidovskom prípade) o vzťahu obsahov štvorcov nad stranami a uhlopriečkami rovnobežníka.	52
2	Cauchyovská postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nekonvergujúca v $C([a, b], \mathbb{R})$ s L^1 normou.	54
3	Jednotkové kružnice v rôznych p -normách v $\mathbb{R}^2$.	57

- 4 Jednotková guľová nadplocha vo vektorovom priestore s nekonečnou dimenziou nie je kompaktná. 57
- 5 Deformácia jednotkovej gule lineárnym zobrazéním a jej súvis s normou tohoto zobrazenia. V prípade konečnorozmerného priestoru je norma zobrazenia určená vektorom s maximálnou normou, ktorý je v obraze $D_1(\vec{0})$. 58
- 6 Banachova-Schauderova veta o otvorenom zobrazení. 61
- 7 Rovnobežníky v rovnobežnostene určenom vektormi $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, pomocou ktorých sa ukazuje aditívnosť. Červeným sú vyznačené vektory, ktoré sú v zmysle rovnobežníkového pravidla nahradené novými. 66

1. Úvod

Topológia je matematická veda zaoberajúca sa vlastnosťami geometrických (a ako uvidíme aj iných) priestorov, ktoré sa zachovávajú spojitými zobrazeniami. Špeciálne ide o také, ktoré nezávisia na metrike. Čo to presnejšie znamená, si načrtne neskôr. Velmi voľne sa dá povedať, že topológia skúma vlastnosti priestoru, ktoré sa zachovávajú (sú invariantné, nemenné) aj po bijektívnom zobrazení, ktoré je spojité a aj inverzné zobrazenie je spojité. Takéto zobrazenie sa často interpretuje ako vzájomná spojitá deformácia priestorov. Predstavme si nafukovacie plávajúce koleso, na ktoré si sadneme (a nepraskne). Pýtame sa, čo majú takéto dva objekty z matematického hľadiska spoločné?

Funkcionálna analýza študuje priestory funkcií ako bodové priestory (bod je funkcia resp. nejaká trieda funkcií). Takéto priestory sú obvykle nekonečnorozmerné, ak definičný obor a obor hodnôt sú dostatočne veľké množiny. Na takýchto priestoroch sa definujú „bežné“ pojmy z geometrie ako vzdialenosť, skalárny súčin, lineárna varieta a pod. Tieto geometrické pojmy majú potom nejakú interpretáciu v reči funkcií. Aj vlastnosti objektov a pojmov z geometrie sa potom dajú interpretovať v tomto jazyku. Čiastočne je sprostredkovateľom práve jazyk topológie. Nosnou témou v tejto časti sú základné fakty najmä o Hilbertových priestoroch a pokúsime sa predstaviť ich spojenie s niektorými algoritmami najmä v teórii spracovania obrazu, či všeobecnejšie signálu.

Predmet sa vyučuje 5 hodín týždenne, čo nie je na prednášku predstavujúcu dve naozaj rozsiahle matematické disciplíny veľa. Ponímame ho ako geometriu nekonečnorozmerného priestoru, ktorá pripravuje na neskoršie najmä numerické aplikácie v spracovaní obrazu či iných oblastiach aplikovanej geometrie a počítačovej grafiky. Na dôkladné pochopenie pojmov odporúčame riešiť cvičenia, ktoré sú uvedené buď v tomto materiáli alebo v odporúčaných knihách.

1.1. Syllabus.

- Topologický priestor. Metrická topológia.
- Otvorené a uzavreté množiny, okolia. Vnútro a uzáver.
- Spojité zobrazenie.
- Základné konštrukcie topologických priestorov (podpriestor, konečný súčin, faktorový priestor).
- Axiómy spočítateľnosti. Oddelovanie ($T_0 - T_4$). Súvislosť. Kompaktnosť.
- Lineárne normované priestory, lineárne spojité funkcionály a operátory, Hahnova-Banachova veta, duálne priestory, Banachove priestory, Banachova-Steinhausova veta, rozdiely medzi konečnorozmernými a nekonečnorozmernými priestormi.

- Hilbertove priestory, veta o projekciách, Rieszova veta o reprezentácii, Besselova nerovnosť, Fourierove koeficienty, ortogonálne systémy, ortonormálna báza.
- Priestory spojitých funkcií, Stonova-Weierstrassova veta, duál priestoru $C(I)$.
- Fourierove rady a ich analýza.

V materiáloch zatiaľ nie je pokrytý celý sylabus, ale sú tam témy navyše, ktoré poukazujú na aplikácie oboch spomínaných oblastí.

Táto prednáška čerpá hlavne z literatúry [6], [15], [7], [16], [8], [2], [9], [19], [1], [13], [5], [?], [12], [4], [5], [?], [?], [3], [18], pričom v niektorých pasážach voľne sleduje najmä [6], [2], [8], [10] a [11].

K mnohým knižkám existujú vo fakultnej knižnici alebo priamo u mňa k dispozícii ruské originály alebo ruské preklady.

Časť literatúry som konzultoval s autorom sylabu prof. Milanom Medveďom a k celkovému osvetleniu, ako by mala prednáška vyzeráť v širších súvislostiach štúdia zamerania Počítačová grafika a geometria, prispel aj doc. Miloš Božek, za čo im obom ďakujem.

Podakovanie za opravu niektorých nepresností, chýb a nezrovnalostí patrí najmä študentom Elene Duškovej, Miroslave Fekiačovej, Rastislavovi Halamíčkovovi a Tomášovi Kovačovskému.

Všetky zostávajúce chyby idú na môj vrub a budem rád, ak ma na ne upozorníte, a zároveň nerád, že sa v texte vyskytli.

KAPITOLA 1

Topológia

V tejto kapitole uvedieme nevyhnutné pojmy na opis pojmu topologického priestoru. Tento pojem zahŕňa veľmi širokú škálu priestorov, a preto je vhodné na začiatku povedať, že sa odpozaroval z pojmu metrického priestoru. Na začiatku je vhodné si všetky pojmy predstaviť na obvyklom n -rozmernom reálnom priestore s euklidovskou metrikou. Pre $n = 3$ je to priestor, na ktorý sme intuitívne najviac zvyknutí, pre $n = 2$ sa jedná o euklidovskú rovinu a veľa pojmov vieme aj ilustrovať nákresom. Postupne si budeme budovať intuíciu aj pre ďalšie typy priestorov.

1. Základné pojmy

Nech X je množina. Označme $\mathcal{P}(X)$ množinu všetkých podmnožín X , teda

$$\mathcal{P}(X) = \{U : U \subseteq X\}.$$

Zopakujte si vlastnosti vzoru nejakej množiny v zobrazení f .

Nech A je množina a $\leq \subset A \times A$ je relácia s vlastnosťami

reflexivita: $a \leq a$ pre ľubovoľné $a \in A$,

antisymetria: ak $a \leq b$ a $b \leq a$, tak $a = b$ pre ľubovoľné $a, b \in A$,

tranzitívnosť: ak $a \leq b$, $b \leq c$, tak $a \leq c$, pre ľubovoľné $a, b, c \in A$.

Potom reláciu $\leq$ nazývame reláciou čiastočného usporiadania množiny A .

Používame obvyklé číselné množiny: množina prirodzených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (v časti literatúry do prirodzených čísel nepočítajú autori aj číslo 0, je dobré si to ujasniť na začiatku), množina celých čísel $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, množina racionálnych čísel $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ a množina komplexných čísel $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$. Symbolom $\Re z$ označujeme reálnu časť komplexného čísla z a analogicky $\Im z$ jeho imaginárnu zložku. Teda $z = \Re z + i\Im z$. Karteziánska mocnina $\mathbb{R}$ sa označuje napr. $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Špeciálne $\mathbb{R}_{\geq}^n$ je polpriestor $\mathbb{R}^n$ bodov so súradnicou $x_n \geq 0$.

2. Topologický priestor

Nasledujúca definícia topologického priestoru vznikla extrahovaním niektorých vlastností otvorených množín, ktoré platia v metrickom

priestore. Uvidíme, že sú postačujúce na odvodenie mnohých podstatných pojmov, najmä spojitosti zobrazenia medzi takýmito priestormi, ale aj pojmy, na ktoré sme zvyknutí z geometrických priestorov. Ako prvý príklad je dobré testovať euklidovský priestor, o ktorom máme intuíciu vybudovanú od detstva.

DEFINÍCIA 2.1 (Topologický priestor). *Nech X je množina a $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s vlastnosťami*

- (1) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$,
- (2) ak $U_i \in \mathcal{T}$ pre $i \in I$, tak $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
- (3) ak $U_i \in \mathcal{T}$ pre $i = 1, \dots, n$, tak $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Potom dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame topologický priestor, pričom množinu X nazývame nosičom priestoru, prvky nosiča nazývame bodmi a $\mathcal{T}$ nazývame systémom otvorených podmnožín alebo topológiou priestoru $(X, \mathcal{T})$. Prvky tohoto systému nazývame otvorené podmnožiny $(X, \mathcal{T})$.

POZNÁMKA 2.1. *Ak bude systém otvorených množín zrejmy z kontextu, často budeme písať len o topologickom priestore X .*

DEFINÍCIA 2.2 (Uzavreté podmnožiny). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Podmnožina $V \subseteq X$ sa nazýva uzavretá, ak existuje otvorená podmnožina $U \in \mathcal{T}$ taká, že $V = X - U$.*

CVIČENIE 2.1. *Nech X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je systém podmnožín s vlastnosťami*

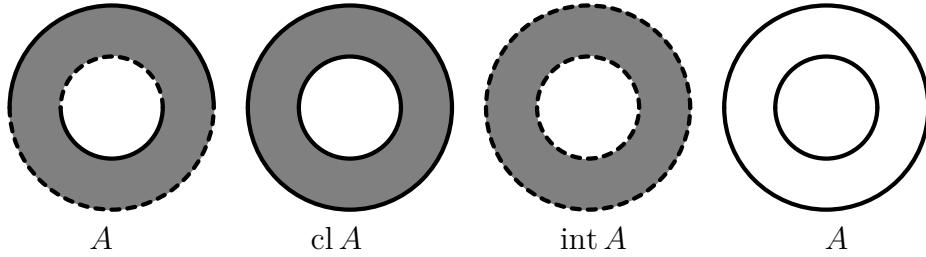
- (1) $\emptyset \in \mathcal{S}, X \in \mathcal{S}$,
- (2) ak $V_i \in \mathcal{S}$ pre $i \in I, I \neq \emptyset$, tak $\cap_{i \in I} V_i \in \mathcal{S}$,
- (3) ak $V_i \in \mathcal{S}$ pre $i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$, tak $\cup_{i=1}^n V_i \in \mathcal{S}$.

Nech $\mathcal{T} = \{U_V \in \mathcal{P}(X) : U = X - V, V \in \mathcal{S}\}$. Ukážte, že $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.

Príklad:[Niektoré topologické priestory]

1. Nech X je množina a $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Potom $(X, \mathcal{T})$ tvoria topologický priestor. Nazývame ho *triviálny alebo antidiskrétny topologický priestor*. Je to „najmenší“ topologický priestor s nosičom X .
2. Nech X je množina a $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Potom $(X, \mathcal{T})$ tvoria topologický priestor. Nazývame ho *diskrétny topologický priestor*. Každá množina v tomto priestore je otvorená aj uzavretá.
3. Nech (X, d) je metrický priestor. Nech $\mathcal{T}$ je množina otvorených podmnožín tohoto priestoru. Potom $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Napr. reálny d -rozmerný priestor s euklidovskou metrikou $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$.
4. Nech X je ľubovoľná množina a $\mathcal{T}$ obsahuje $\emptyset$ a všetky podmnožiny X s doplnkom konečnej kardinality v X t.j. $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \text{card}(X - U) < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$. Potom $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.

CVIČENIE 2.2. *Dokážte podrobne, že priestory z príkladu 2 sú topologické.*



OBR. 1. Množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ s obvyklou topológiou, jej uzáver, vnútro a hranica. Body z hranice množiny, ktoré nepatria do jednotlivých množín sú nakreslené čiarkovanou čiarou.

CVIČENIE 2.3. Nájdite všetky možné topologické priestory s jedným, dvomi a tromi bodmi.

DEFINÍCIA 2.3 (Okolie). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $x \in X$ je bod. Hovoríme, že $V \subseteq X$ je okolie bodu x , ak existuje $U \in \mathcal{T}$ také, že $x \in U \subseteq V$. Každú množinu $U \in \mathcal{T}$ takú, že $x \in U$ nazývame otvoreným okolím bodu x . Ak V je uzavretá množina, tak ju nazývame uzavretým okolím bodu x . Nech $A \subseteq X$ je množina. Potom množinu $V \subseteq X$ nazývame okolím množiny A , ak V je okolím každého bodu $x \in A$. Analogicky hovoríme o otvorenom alebo uzavretom okolí množiny A , ak V je otvorená alebo uzavretá. Ak U je okolie bodu $x \in X$, tak hovoríme, že $U - \{x\}$ je rýdze okolie bodu x .

POZNÁMKA 2.2. V niektorých topologických priestoroch nemusí byť množina $U - \{x\}$ otvorená aj keď je množina U otvorená. Dozvieme sa o tom viac v časti o oddeliteľnosti bodov.

DEFINÍCIA 2.4 (Vnútro, uzáver, hranica). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $A \subseteq X$. Množinu všetkých bodov $x \in A$, pre ktoré, je A okolím nazývame vnútrom množiny A a označujeme ju $\text{int } A$ t.j.

$$(1) \quad \text{int } A = \{x \in A : \exists U \in \mathcal{T} \wedge x \in U \subseteq A\}.$$

Množinu bodov $x \in X$ takých, že $x \notin \text{int}(X - A)$ nazývame uzáverom množiny A a označujeme ju $\text{cl } A$. Teda

$$(2) \quad \text{cl } A = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ platí } U \subseteq X - A \implies x \notin U\}.$$

Množinu bodov $A = \text{cl } A - \text{int } A$ nazývame hranicou množiny A .

POZNÁMKA 2.3. Treba si uvedomiť, že v rôznych topológiách môže mať tá istá množina rôzne vnútra, uzavery a hranice.

V literatúre sa môžete často stretnúť s alternatívnym označením vnútra (napr. A°), uzáveru (napr. $\bar{A}$) alebo hranice (napr. ∂A) množiny A .

CVIČENIE 2.4. Ukážte, že platia nasledujúce vzťahy. V prípade nerovnosti, nájdite príklad, ktorý demonštruje rozdiel vo výsledku operácií. Pre ľubovoľné množiny $A, B \subseteq X$ resp. $A_i \subseteq X, i \in I$ platí

- (1) $A \subseteq \text{cl } A, \text{int } A \subseteq A,$
- (2) $A \subseteq B \implies \text{int } A \subseteq \text{int } B,$
- (3) $A \subseteq B \implies \text{cl } A \subseteq \text{cl } B,$
- (4) $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset, \text{int}(\emptyset) = \emptyset,$
- (5) $\text{cl}(A) = X - \text{int}(X - A),$
- (6) $\text{cl}(A) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(X - A),$
- (7) $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A),$
- (8) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A),$
- (9) $\text{int}(\text{cl}(A)) = \text{int}(A),$
- (10) $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B),$
- (11) $\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B),$
- (12) $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B),$
- (13) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B),$
- (14) $\text{int}(\cup_{i \in I} A_i) \supseteq \cup_{i \in I} \text{int}(A_i),$
- (15) $\text{int}(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} \text{int}(A_i),$
- (16) $\text{cl}(\cup_{i \in I} A_i) \supseteq \cup_{i \in I} \text{cl}(A_i),$
- (17) $\text{cl}(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} \text{cl}(A_i),$

DEFINÍCIA 2.5 (Hustá množina, riedka množina, hromadný bod, izolovaný bod). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $A \subseteq X$. Nazývame ju hustou v priestore X , ak $\text{cl } A = X$. Množina A sa nazýva riedka v X , ak $\text{int}(\text{cl}(A)) = \emptyset$. Bod $x \in X$ sa nazýva hromadným bodom množiny A , ak každé rýdže okolie bodu x má neprázdny prienik s množinou A . Množinu všetkých hromadných bodov A označujeme $\text{acc}(A)$. Bod $x \in A$ sa nazýva izolovaným bodom množiny A , ak existuje jeho rýdže okolie disjunktné s A t.j. existuje $U \in \mathcal{T}$ také, že $x \in U$ a $U \cap A \subseteq \{x\}$.

POZNÁMKA 2.4. Riedka množina nemá bod s okolím v nej dokonca ani po uzávere tejto množiny.

CVIČENIE 2.5. Zistite, či platia nasledujúce tvrdenia pre množinu $A \subseteq X$. Ak áno dokážte, ak nie, uveďte príklad:

- (1) Množina A je riedka, ak žiaden jej bod nie je jej hromadným bodom.
- (2) $\text{int}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(\text{int}(A)).$
- (3) Ak A je riedka, tak každý bod množiny $X - A$ je hromadným bodom množiny A .
- (4) Množina A je hustá v X , ak každý bod X je jej hromadným bodom.
- (5) Ak A je zjednotením konečného počtu izolovaných bodov, tak je riedkou množinou.
- (6) Množina A je riedka, ak nie je hustá v žiadnom okolí priestoru X .

- (7) Bod $x \in X$ je izolovaný, práve vtedy keď $\{x\}$ je otvorenou množinou v X .
- (8) Bod je hromadným bodom práve vtedy keď nie je izolovaným bodom.

CVIČENIE 2.6. Zistite, či nasledujúce množiny sú husté, riedke, majú hromadné body, izolované body a ako sa zmenia ich vlastnosti, keď izolované resp. hromadné body pridáme resp. vynecháme. Uvážte, ako je to s ich doplnkom.

- množina $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$,
- množina $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}$,
- pre pevne zvolené $n \in \mathbb{N}$ množina $\{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \in \mathbb{C} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ v $\mathbb{C}$
- pre pevne zvolené $\theta \in \mathbb{R}$ množina $\{e^{ik\theta} \in \mathbb{C} : k \in \mathbb{Z}\}$ v $\mathbb{C}$
- množina $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$
- množina $\mathbb{Q}_{\geq} \cup \mathbb{Z}_{\leq}$ v $\mathbb{R}$

CVIČENIE 2.7. Nájdite takú množinu $A \subset \mathbb{E}^2$, že platí $A \subsetneq \text{acc}(A)$.

DEFINÍCIA 2.6 (Báza topológie, predbáza topológie). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Podmnožinu $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ nazývame bázou topológie $\mathcal{T}$, ak sa ľubovoľná neprázdna množina $U \in \mathcal{T}$ dá napísať v tvare $\cup_{i \in I} V_i$, kde $V_i \in \hat{\mathcal{T}}$. Podmnožinu $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ nazývame predbázou topológie $\mathcal{T}$, ak sa ľubovoľná neprázdna množina $U \in \mathcal{T}$ dá napísať v tvare $\cup_{i \in I} (\cap_{j=1}^{n_i} V_{j_i})$, kde $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i > 0$ pre každé $i \in I$ a $V_{j_i} \in \tilde{\mathcal{T}}$.

POZNÁMKA 2.5. Pomocou predbázy resp. bázy môžeme definovať topológiu, ak ku nej pridáme prázdnu množinu. Je dobré si uvedomiť, že báza je taký systém otvorených množín, z ktorého použitím 2. axiómy topologického priestoru dostaneme všetky otvorené množiny a podobne z predbázy použitím 3. axiómy topologického priestoru dostaneme bázu topologického priestoru.

CVIČENIE 2.8. Dokážte, že $\tilde{\mathcal{T}}$ je predbázou topológie $\mathcal{T}$ práve vtedy, keď $\hat{\mathcal{T}} = \{\cap_{j=1}^n V_j : V_1, \dots, V_n \subseteq \tilde{\mathcal{T}}\}$ je bázou topológie $\mathcal{T}$.

CVIČENIE 2.9. Ukážte, že ľubovoľná báza $\tilde{\mathcal{T}}$ topológie topológie $\mathcal{T}$ má nasledujúce dve vlastnosti

- (1) pre ľubovoľné $U_1, U_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$ a $x \in U_1 \cap U_2$ existuje $U \in \tilde{\mathcal{T}}$ taká, že $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$,
- (2) pre ľubovoľné $x \in X$ existuje $U \in \tilde{\mathcal{T}}$ taká, že $x \in U$.

DEFINÍCIA 2.7 (Báza okolí). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $x \in X$. Hovoríme, že systém množín $\{U_i\}_{i \in I}$ tvorí bázu okolí bodu x , ak $x \in U_i$, $i \in I$, každé okolie bodu x obsahuje niektorú množinu tohoto systému a každá množina tohoto systému obsahuje nejaké okolie bodu x .

DEFINÍCIA 2.8 (Axiómy spočítateľnosti, separabilnosť). *Nech je daný topologický priestor $(X, \mathcal{T})$. Nazveme ho priestorom spĺňajúcim prvú axiómu spočítateľnosti, ak pre ľubovoľný bod $x \in X$ existuje postupnosť jeho okolí $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ taká, že ku každému okoliu U bodu x existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $U_n \subseteq U$. Hovoríme, že topologický priestor spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti, ak má spočítateľnú bázu topológie. Topologický priestor sa nazýva separabilný, ak má spočítateľnú hustú podmnožinu.*

CVIČENIE 2.10. *Ukážte, že opísaním bázy okolí každého bodu sa dá jednoznačne definovať topológia celého priestoru.*

Príklad:

- (1) Každý metrický priestor spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti. Stačí zobrať pre ľubovoľný bod $x \in X$ postupnosť $(B_{\frac{1}{n}}(x))_{n=1}^{\infty}$.
- (2) Topologický (ani metrický) priestor nemusí spĺňať druhú axiómu spočítateľnosti. Zoberme nespočítateľnú množinu (napr. $\mathbb{R}$) s diskretnou metrikou.

DEFINÍCIA 2.9 (Spojité zobrazenie). *Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ sú topologické priestory. Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva spojité, ak pre ľubovoľnú množinu $U \in \mathcal{U}$ je množina $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.*

LEMA 2.1 (Ekvivalentné podmienky spojitosti). *Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Potom sú ekvivalentné tvrdenia*

- (1) f je spojité
- (2) vzor ľubovoľnej množiny z predbázy (bázy) Y je otvorený v X
- (3) existujú systém báz okolí $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ v X , kde $\mathcal{B}(x)$ je bázou okolí bodu $x \in X$ a $\{\mathcal{D}(y)\}_{y \in Y}$ v Y , kde $\mathcal{D}(y)$ je bázou okolí bodu $y \in Y$ také, že pre ľubovoľný bod $x \in X$ a $V \in \mathcal{D}(f(x))$ existuje $U \in \mathcal{B}(x)$, pre ktoré platí $f(U) \subseteq V$.
- (4) vzor ľubovoľnej uzavretej množiny je uzavretá množina
- (5) pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq X$ platí $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$
- (6) pre ľubovoľnú množinu $B \subseteq Y$ platí $\text{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(B))$
- (7) pre ľubovoľnú množinu $B \subseteq Y$ platí $f^{-1}(\text{int}(B)) \subseteq \text{int}(f^{-1}(B))$

Dôkaz: Tvrdenie $1 \implies 2$ je zrejmé priamo z definície predbázy (bázy) a spojitosti zobrazenia (pozri obr 2).

Dôkaz tvrdenia $2 \implies 3$ začneme výberom systémov okolí (pozri obr. 3). Nech $\mathcal{D}$ je báza topológie Y . Nech $\mathcal{B}(x)$ sú všetky okolia bodu $x \in X$ a $\mathcal{D}(y)$ sú všetky okolia bodu $y \in Y$. Pre ľubovoľné okolie $V \in \mathcal{D}(f(x))$ existuje otvorené okolie $W \in \mathcal{D}$ také, že $f(x) \in W \subseteq V$. Potom $f^{-1}(W)$ je otvorená v X , $x \in f^{-1}(W)$. Položme $U = f^{-1}(W)$. Potom $f(U) \subseteq V$.

Dôkaz tvrdenia $3 \implies 4$. Nech $U \subseteq Y$ je ľubovoľná uzavretá množina (poz. obr. 4). Potom $Y - U$ je otvorená a $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$.

Ukážeme, že toto je otvorená množina. Pre každý bod $x \in f^{-1}(Y - U)$ a $V \in \mathcal{D}(f(x))$, $V \subseteq Y - U$ máme otvorenú množinu $U_x \subseteq U'_x \in \mathcal{B}(x)$, pričom $f(U'_x) \subseteq V$. Potom zjednotenie $\bigcup_{x \in f^{-1}(Y - U)} U_x = f^{-1}(Y - U)$. Teda je to otvorená množina.

Dôkaz tvrdenia $4 \implies 5$. Podľa predpokladu je $f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$ uzavretá množina. Keďže $A \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$, platí $\text{cl}(A) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$. A teda $f(\text{cl}(A)) \subseteq (\text{cl}(f(A)))$ (poz. obr. 5).

Dôkaz tvrdenia $5 \implies 6$. Nech $A = f^{-1}(B)$. Potom $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$, teda $f(\text{cl}(f^{-1}(B))) \subseteq \text{cl}(f \circ f^{-1}(B)) \subseteq \text{cl}(B)$. Z vlastností vzoru teda máme $\text{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(B))$.

Dôkaz tvrdenia $6 \implies 7$. Nech $U = Y - B$. Potom $\text{cl}(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(U))$. Teda môžeme písať

$$\begin{aligned} X - \text{int } f^{-1}(B) &= \text{cl}(X - f^{-1}(B)) = \text{cl}(f^{-1}(U)) \subseteq \\ &\subseteq f^{-1}(\text{cl } U) = f^{-1}(Y - \text{int } B) = X - f^{-1}(\text{int } B). \end{aligned}$$

Toto dáva inklúziu $f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int } f^{-1}(B)$.

Dôkaz tvrdenia $7 \implies 1$. Pre ľubovoľnú otvorenú množinu platí $U = \text{int } U$. Takže $f^{-1}(U) = f^{-1}(\text{int } U) \subseteq \text{int } f^{-1}(U)$. Keďže $\text{int } f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)$, máme rovnosť týchto dvoch množín. Teda f je spojitý. $\square$

POZNÁMKA 2.6. Tvrdenie 3 sa používa ako definícia spojitosti zobrazenia v bode x , pričom zobrazenie je spojitý, ak je spojitý v každom svojom bode.

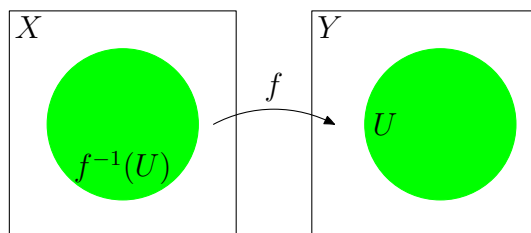
Tvrdenie 5 sa voľne dá interpretovať tak, že body z uzáveru množiny („blízke“ k množine) sa v spojitom zobrazení zobrazia do uzáveru obrazu tejto množiny (t.j. na „blízke“ body k obrazu množiny).

CVIČENIE 2.11. Nájdite príklad spojitého zobrazenia topologických priestorov, kde sa hranica nezobrazí na hranicu. Zmení sa niečo, ak pridáme požiadavku surjektívnosti a/alebo injektívnosti zobrazenia?

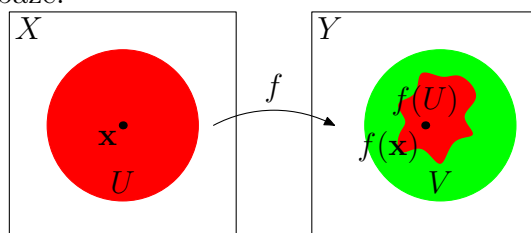
VETA 2.2 (Skladanie spojitých zobrazení). Nech X, Y, Z sú topologické priestory. Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú spojitý zobrazenia, potom $g \circ f: X \rightarrow Z$ je spojitý zobrazenie.

Dôkaz: Nech W je otvorená množina v Z . Potom $V = g^{-1}(W) \subseteq Y$ je otvorená, a teda $U = f^{-1}(V) \subseteq X$ je otvorená. Keďže platí $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = U$, tak je podľa definície zložené zobrazenie spojitý. $\square$

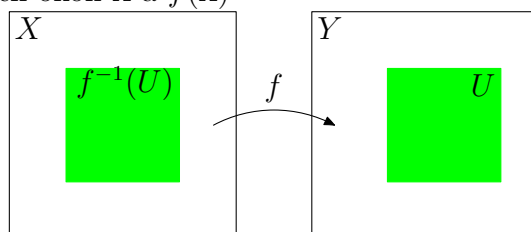
CVIČENIE 2.12. Dokážte, že $f: X \rightarrow Y$ je spojitý v bode $a \in X$ práve vtedy, keď ku každému okoliu V bodu $f(a) \in Y$ existuje také okolie U bodu $a \in X$, že $f(U) \subseteq V$.



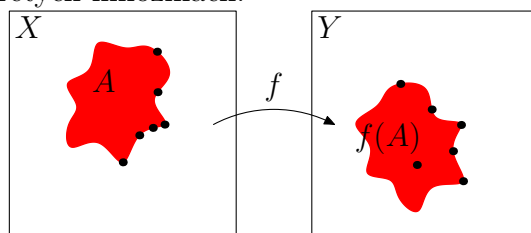
OBR. 2. Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na predbáze.



OBR. 3. Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na bázach okolí $\mathbf{x}$ a $f(\mathbf{x})$



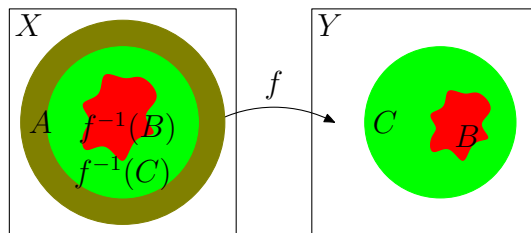
OBR. 4. Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na uzavretých množinách.



OBR. 5. Obraz bodov uzáveru množiny v spojitom zobrazení je pod uzáverom obrazu tejto množiny. Neznamená to však, že obraz hranice je hranica!

CVIČENIE 2.13. (*Systém borelovských¹ množín*) Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je systémom množín spĺňajúcim nasledujúce podmienky

¹Émile Borel (1871–1956) – francúzsky matematik, pracoval v oblasti aritmetiky, teórie množín, teórie miery, teórie funkcií, geometrie, teórie pravdepodobnosti a matematickej fyziky. V niekoľkých disciplínach sa radí na popredné miesta v histórii. Je jedným zo zakladateľov teórie hier. Za svoju prácu dostal množstvo ocenení.



OBR. 6. Ekvivalentná podmienka otvorenosti resp. uzavretosti zobrazenia.

- (1) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$,
- (2) ak $A \in \mathcal{S}$, tak aj $X - A \in \mathcal{S}$,
- (3) ak $A_i \in \mathcal{S}$, $i \in \mathbb{N}$, tak $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{S}$.

Takýto systém nazývame systémom borelovských množín na topologickom priestore X . Neuzavretú množinu tvaru $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{S}$, pre A_i uzavreté, nazývame F_σ množina. Neotvorenú množinu tvaru $\cap_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{S}$, pre B_i otvorené, nazývame G_σ množina. Ukážte, že platí

- (1) doplnok F_σ množiny je G_σ množina,
- (2) vzor F_σ množiny v spojitom zobrazení je F_σ množina,
- (3) vzor G_σ množiny v spojitom zobrazení je G_σ množina,
- (4) množina $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ je F_σ množina,
- (5) množina $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ nie je G_σ množina.

DEFINÍCIA 2.10 (Otvorené a uzavreté zobrazenie). Zobrazenie topologických priestorov $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva otvorené (uzavreté), ak obrazom otvorenej (uzavretej) množiny v X je otvorená (uzavretá) množina v Y .

VETA 2.3 (Ekvivalentná podmienka uzavretosti(otvorenosti) spojitého zobrazenia). Spojité zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je uzavreté (otvorené) vtedy a len vtedy, ak pre ľubovoľnú množinu $B \subseteq Y$ a pre ľubovoľnú otvorenú(uzavretú) množinu $A \subseteq X$ takú, že $f^{-1}(B) \subseteq A$ existuje otvorená(uzavretá) množina C splňajúca $B \subseteq C \subseteq Y$ a $f^{-1}(C) \subseteq A$ (pozri obr. 6).

Dôkaz: Nech f je otvorené zobrazenie a A, B sú ako z nutnej podmienky. Potom $X - A$ je otvorená, a teda $f(X - A)$ je otvorená v Y . Keďže $f^{-1}(B) \subseteq A$, tak $f(X - A) \cap B = \emptyset$. Položme $C = Y - f(X - A)$. Zrejme $B \subseteq C$ a $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Nech teraz platí nutná podmienka z tvrdenia. Potom zoberme ľubovoľnú otvorenú množinu $U \subseteq X$. Množina $A = X - U$ je uzavretá a obsahuje množinu $f^{-1}(B)$ pre $B = Y - f(U)$. Takže existuje uzavretá množina $C \subseteq Y$, $f^{-1}(C) \subseteq A$ a $B \subseteq C$. Teda platí $f(U) \subseteq Y - C$ a $f^{-1}(C) \subseteq A$. Z čoho máme $C \subseteq B$, a teda $f(U) = Y - C$.

Časť s uzavretým zobrazením sa dokáže analogicky. □

CVIČENIE 2.14. Dokážte ekvivalentnú podmienku k uzavretému zobrazeniu vo vete 2.3.

CVIČENIE 2.15. Spojité zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je uzavreté vtedy a len vtedy, keď pre každý bod $y \in Y$ a každú otvorenú množinu $U \subseteq X$, $f^{-1}(y) \subseteq U$ existuje okolie V bodu y , že platí $f^{-1}(V) \subseteq U$. Dokážte!

DEFINÍCIA 2.11 (Homeomorfizmus). Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva homeomorfizmus, ak je bijektívne, spojité a f^{-1} je spojité.

CVIČENIE 2.16. Dokážte, že relácia topologických priestorov „byť homeomorfný“ je relácia ekvivalencie.

CVIČENIE 2.17. Nech $f: X \rightarrow Y$ je spojité bijektívne zobrazenie topologických priestorov. Potom sú ekvivalentné nasledujúce tvrdenia

- (1) f^{-1} je spojité,
- (2) f je uzavreté,
- (3) f je otvorené,
- (4) množina $f(A)$ je uzavretá v Y vtedy a len vtedy, keď je A uzavretá v X ,
- (5) množina $f^{-1}(B)$ je uzavretá v X vtedy a len vtedy, keď je B uzavretá v Y ,
- (6) množina $f(A)$ je otvorená v Y vtedy a len vtedy, keď je A otvorená v X ,
- (7) množina $f^{-1}(B)$ je otvorená v X vtedy a len vtedy, keď je B otvorená v Y .

Dokážte!

POZNÁMKA 2.7. Vzhľadom na predchádzajúcu vetu v cvičení 2.17 možno povedať, že dva homeomorfné topologické priestory majú rovnaké otvorené (a teda aj uzavreté množiny). Z hľadiska topológie ich teda nevieme rozlíšiť. Topologické vlastnosti sa preto formulujú pre triedy homeomorfných topologických priestorov. Toto je analógia k známej vete z lineárnej algebry o existencii izomorfizmu medzi ľubovoľným n -rozmerným vektorovým priestorom nad poľom F a vektorovým priestorom $V^n(F)$. Tvrdenia stačí naformulovať pre F^n , a potom previesť izomorfizmom do príslušného priestoru.

3. Konštrukcie topologických priestorov

VETA 3.1 (Podpriestor). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nech $Y \subseteq X$ je podmnožina. Potom $(Y, \mathcal{S})$, kde $\mathcal{S} = \{Z_U \subseteq Y : Z_U = Y \cap U, U \in \mathcal{T}\}$ je topologický priestor.

Dôkaz: Lahko sa presvedčíme, že táto dvojica splňa všetky predpoklady definície topologického priestoru. $\square$

CVIČENIE 3.1. Overte všetky predpoklady z definície topologického priestoru pre $(Y, \mathcal{S})$.

DEFINÍCIA 3.1 (Podpriestor). *Priestor $(Y, \mathcal{S})$ z vety 3.1 nazývame topologický podpriestor priestoru $(X, \mathcal{T})$. Topológiu $\mathcal{S}$ nazývame relatívnou topológiou. Ak Y je otvorenou (uzavretou) podmnožinou X , hovoríme o otvorenom (uzavretom) podpriestore.*

VETA 3.2 (Tranzitivnosť relácie „byť podpriestorom“). *Nech X, Y, Z sú topologické priestory, pričom Y je podpriestorom X a Z je podpriestorom Y . Potom Z je aj podpriestorom X .*

Dôkaz: Zrejmy, keďže pre otvorenú množinu $W \subseteq Z$ existuje otvorená množina $V \subseteq Y$ a otvorená množina $U \subseteq X$ splňajúce rovnosť $W = V \cap Z = (U \cap Y) \cap Z$. $\square$

POZNÁMKA 3.1. *Na základe vety 3.2 hovoríme, že vlastnosť „byť podpriestorom“ je tranzitívna na množine všetkých podpriestorov nejakého topologického priestoru X .*

POZNÁMKA 3.2. *Ak uvažujeme priestor, ktorý je podpriestorom euklidovského priestoru a nešpecifikujeme otvorené množiny, predpokladáme, že ide o indukovanú topológiu.*

CVIČENIE 3.2. *Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie priestoru $(X, \mathcal{T})$. Nech $(Y, \mathcal{S})$ je podpriestor $(X, \mathcal{T})$. Potom $\mathcal{C} = \{C_U \subseteq Y : C = U \cap Y, U \in \mathcal{B}\}$ je báza topológie $\mathcal{S}$. Dokážte.*

CVIČENIE 3.3. *Uvažujme $\mathbb{R}$ s euklidovskou topológiou. Opíšte všetky otvorené množiny podpriestoru $[a, b] \subset \mathbb{R}$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukážte, že systém množín $\{[a, a') : a' \in [a, b]\} \cup \{(b', b] : b' \in [a, b]\}$ tvorí predbázu v podpriestore $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

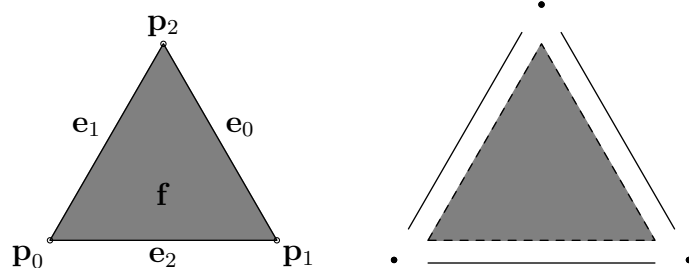
VETA 3.3 (Súčin dvoch priestorov). *Nech $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{U})$ sú topologické priestory. Nech $Z = X \times Y$ a $\mathcal{V}' = \{T \times U \in \mathcal{P}(X \times Y) : T \in \mathcal{T}, U \in \mathcal{U}\}$. Potom $\mathcal{V}'$ je bázou topológie $\mathcal{V}$ a $(Z, \mathcal{V})$ je topologický priestor*

Dôkaz: Stačí ukázať, že konečný prienik množín z $\mathcal{V}'$ je opäť z $\mathcal{V}'$. Zrejme $(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$. Ďalej pokračujeme matematickou indukciou. $\square$

DEFINÍCIA 3.2 (Súčin dvoch topologických priestorov). *Priestor $(X \times Y, \mathcal{V})$ z vety 3.3 sa nazýva topologickým súčinom dvoch priestorov.*

POZNÁMKA 3.3. *Podobne sa dá definovať topologický súčin konečného počtu k topologických priestorov, kde $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.*

CVIČENIE 3.4. *Nech X, Y sú topologické priestory, $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Potom ak A a B sú uzavreté, tak $A \times B$ je uzavretá v $X \times Y$. Navyiac, pre ľubovoľné množiny platí $\text{cl}(A \times B) = \text{cl}(A) \times \text{cl}(B)$. Dokážte!*



OBR. 7. Suma topologických priestorov $\mathbf{p}_0 \oplus \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{e}_0 \oplus \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2 \oplus \mathbf{f}$ dáva trojuholník ako disjunktné zjednotenie vrcholov, otvorených hrán a otvorenej steny. Analogicky sa dá postupovať aj pre simplexy vyšších dimenzií.

DEFINÍCIA 3.3 (Suma priestorov). *Nech $\{X_s\}_{s \in S}$ je systém po dvoch disjunktných topologických priestorov. Potom $X = \cup_{s \in S} X_s$ s topológiou danou množinami $U \subseteq X$ takými, že $U \cap X_s$ je otvorená v X_s pre všetky $s \in S$ nazývame sumou topologických priestorov $\{X_s\}_{s \in S}$. Označujeme $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ (pozri obr. 7).*

POZNÁMKA 3.4. *Predchádzajúca definícia sa dá ľahko realizovať aj pre priestory, ktoré nie sú disjunktné. Stačí každý podpriestor „vynásobiť“ vhodnou množinou. Napr. pre systém podpriestorov $\{X_i\}_{i \in I}$ zoberieme systém homeomorfných priestorov $\{X_i \times \{i\}\}_{i \in I}$. Tieto sú už po dvoch disjunktné.*

CVIČENIE 3.5. *Množina $A \subseteq \bigoplus_{s \in S} X_s$ je uzavretá vtedy a len vtedy, ak je uzavretá každá množina $A \cap X_s$, $s \in S$. Dokážte! Ukážte, že potom je X_s ako podmnožina $\bigoplus_{s \in S} X_s$ otvorená aj uzavretá.*

CVIČENIE 3.6. *Zobrazenie $f: \bigoplus_{s \in S} X_s \rightarrow Y$ je spojité vtedy a len vtedy, keď je spojité každé zobrazenie $f \circ i_s: X_s \rightarrow Y$, kde zobrazenie $i_s: X_s \rightarrow \bigoplus_{s \in S} X_s$ je prirodzené vloženie. Dokážte!*

CVIČENIE 3.7. *Simplex v $\mathbb{R}^d$ je daný ako množina bodov, ktorá je konvexným obalom $d + 1$ lineárne nezávislých bodov (neležia v jednej nadrovine). Opíšte rozklad simplexu na otvorené steny podobne ako na obr. 7. Opíšte nerovnosťami jednotlivé podpriestory, z ktorých sa skladá d -rozmerný simplex.*

DEFINÍCIA 3.4 (Súčin priestorov). *Nech $\{X_s\}_{s \in S}$, $S \neq \emptyset$ je neprázdny systém topologických priestorov. Potom $X = \prod_{s \in S} X_s$ s topológiou generovanou množinami, ktoré sú vzormi otvorených množín v priestoroch X_s v projekciách $\pi_s: X \rightarrow X_s$, $\pi_s(x) = x_s$ (t.j. tieto zobrazenia sú spojité a topológia na X je minimálna taká – najhrubšia) nazývame súčinom topologických priestorov $\{X_s\}_{s \in S}$.*

POZNÁMKA 3.5. *Existencia neprázdneho súčinu ľubovoľného systému topologických priestorov je ekvivalentná axióme výberu.*

VETA 3.4 (Kanonická báza topológie súčinu priestorov). *Nech $X = \prod_{s \in S} X_s$. Potom všetky podmnožiny X tvaru $\prod_{s \in S} W_s$, kde každá podmnožina $W_s \subseteq X_s$ je otvorené v X_s a okrem konečného počtu indexov $s \in S$ je $W_s = X_s$, tvoria bázu topológie X .*

Dôkaz: Nech $\mathcal{T}$ je systém podmnožín X z tvrdenia vety. Je zrejmé, že pre otvorené $W_t \subseteq X_t$ je z $\mathcal{T}$ aj $\pi_t^{-1}(W_t) = \prod_{s \in S} \tilde{X}_s$, kde $\tilde{X}_s = X_s$ pre $s \neq t$ a $\tilde{X}_t = W_t$. Konečnými prienikmi týchto špeciálnych prvkov dostaneme ľubovoľný prvok z $\mathcal{T}$. Takže každá topológia X , v ktorej všetky $\pi_s, s \in S$ sú spojitú obsahuje $\mathcal{T}$. Najhrubšiu topológiu dostaneme uzavretím na zjednotenie prvkov $\mathcal{T}$. $\square$

VETA 3.5 (Uzáver súčinu množín). *Pre ľubovoľný systém množín $\{A_s\}_{s \in S}$, kde $A_s \subseteq X_s$ platí v $\prod_{s \in S} X_s$, že $\text{cl}(\prod_{s \in S} A_s) = \prod_{s \in S} \text{cl}(A_s)$.*

Dôkaz: Ak $x = (x_s)_{s \in S} \in \text{cl}(A)$, kde $A = \prod_{s \in S} A_s$, tak ľubovoľná množina W z bázy $X = \prod_{s \in S} X_s$ obsahujúca x musí mať neprázdny prienik s A . Teda $\prod_{s \in S} A_s \cap \prod_{s \in S} W_s = \prod_{s \in S} (A_s \cap W_s) \neq \emptyset$, a teda pre každé $s \in S$ a ľubovoľnú otvorenú množinu W_s , ktorá je okolím x_s , t.j. s -tej súradnice bodu x , je $W_s \cap A_s \neq \emptyset$ v X_s . To je vtedy a len vtedy, keď $x \in \prod_{s \in S} \text{cl}(A_s)$. $\square$

VETA 3.6 (Spojitosť zobrazenia do súčinu priestorov). *Nech je daný priestor $Y = \prod_{s \in S} Y_s$. Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojitú vtedy a len vtedy, keď je spojitú každé zobrazenie $\pi_s \circ f: X \rightarrow Y_s$ pre $s \in S$.*

Dôkaz: Nutná podmienka je zrejmá z definície súčinu topologických priestorov.

Množina $U \subseteq Y$ je z bázy topológie Y , ak sa dá napísať v tvare $U = \bigcap_{i=1}^n \pi_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$ pre nejaké $s_1, \dots, s_n \in S$. Z vlastností vzoru je potom $f^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^n (\pi_{s_i} \circ f)^{-1}(W_{s_i})$ otvorená. $\square$

Príklad: [Kružnica ako faktorový priestor reálnej priamky] Nech $\mathbb{S}^1$ je jednotková kružnica v $\mathbb{R}^2$. Uvažujme priamku, ktorú chceme „namotať“ ako niť na túto kružnicu. Je zrejmé, že ak bude niť napnutá, tak po dĺžke 2π musíme namotať ďalšiu takúto dĺžku a potom znovu a znovu. Na reálnej priamke to znamená, že ju rozdelíme na disjunktné časti dĺžky obvodu kružnice. Takéto diely môžeme očíslovať číslami zo $\mathbb{Z}$. Pri namotávaní sa niektoré body z dielov dostanú „nad seba“ a je prirodzené ich stotožniť. Nad každým bodom kružnice bude práve jeden bod z každého dielu reálnej priamky dlhého 2π . Takejto konštrukcii hovoríme faktorizácia a v tomto prípade píšeme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

DEFINÍCIA 3.5 (Faktorový priestor). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $\sim$ je relácia ekvivalencie na X a $X_{\sim} = X/\sim$ je rozklad množiny X definovaný touto reláciou. Nech $\pi: X \rightarrow X_{\sim}$ je projekcia a $a \mapsto [a]$, kde $[a]$ je trieda ekvivalencie v relácii $\sim$. Definujeme $\mathcal{T}_{\sim} = \{V \subseteq X_{\sim} :$*

$\pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Potom $(X_\sim, \mathcal{T}_\sim)$ nazývame faktorovým podpriestorom $(X, \mathcal{T})$ podľa relácie $\sim$.

CVIČENIE 3.8. Množina $F \subseteq X_\sim$ je uzavretá vtedy a len vtedy, keď $\pi^{-1}(F)$ je uzavretá v X . Dokážte!

VETA 3.7. Zobrazenie $f: X_\sim \rightarrow Y$ je spojité vtedy a len vtedy, ak je spojité zobrazenie $f \circ \pi$.

Dôkaz: Stačí si uvedomiť ako je definovaná topológia na $X_\sim$ a použiť vzťah $(f \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$. $\square$

POZNÁMKA 3.6. Z definície priamo vidno, že projekcia π na faktorový priestor je spojité zobrazenie.

DEFINÍCIA 3.6 (Faktorová topológia). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Potom $\mathcal{T}_f = \{V \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ sa nazýva faktorovou topológiou na priestore Y určenou zobrazením f . Spojité surjektívne zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva faktorové, ak topológia Y je faktorová vzhľadom na f .

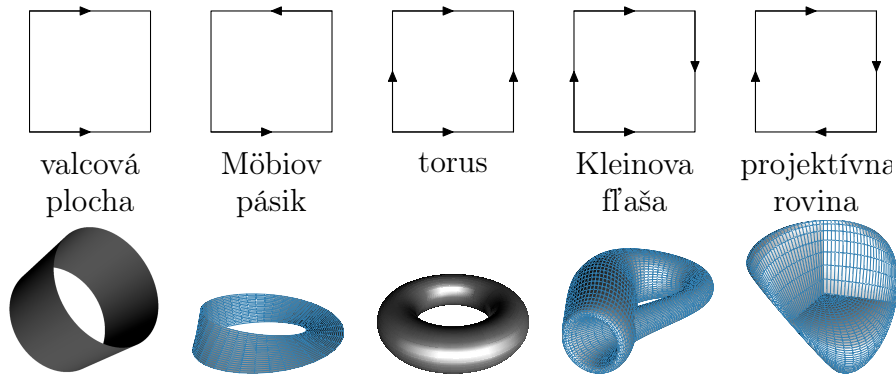
CVIČENIE 3.9. Spojité surjektívne zobrazenie $f: X \rightarrow Y$, ktoré je otvorené alebo uzavreté, je aj faktorové.

Príklad: V nasledujúcich príkladoch faktorových topológií konštruujeme rôzne plochy zo štvorca.

- (1) Zlepením dvoch protiľahlých hrán štvorca v rovnakom smere dostaneme plochu homeomorfnú s valcovou plochou.
- (2) Zlepením dvoch protiľahlých hrán štvorca v opačnom smere dostaneme plochu, ktorá sa nazýva Möbiov² list. Möbiov list je jednostranná plocha s hranicou homeomorfnou kružnici.
- (3) Zlepením dvoch dvojíc protiľahlých hrán štvorca v rovnakom smere dáva torus (alebo anuloid). Jedným zlepením dostaneme valcovú plochu a zlepením jej okrajov v rovnakom smere dostaneme torus.
- (4) Zlepením dvoch párov protiľahlých hrán štvorca, pričom prvú dvojicu zlepíme v rovnakom smere a druhú v opačnom smere dostaneme Kleinovu³ fľašu. Jedným zlepením dostaneme valcovú plochu a zlepením jej okrajov v protismere dostaneme Kleinovu fľašu.

²August Ferdinand Möbius (1790-1868), potomok Martina Luthera, Gaußov a Pfaffov žiak, pracoval v matematike i astronómii. Zaoberal sa trigonometrickými rovnicami, analytickou geometriou, zaviedol projektívne súradnice a zaoberal sa barycentrickými súradnicami. Prispel aj do teórie geometrických transformácií. Je po ňom pomenovaných niekoľko matematických objektov – Möbiov list (hoci ho neobjavil), Möbiova grupa, Möbiova inverzia.

³Felix Klein (1849–1925), nemecký matematik. Položil základy modernej (ne-euklidovskej) geometrie vyhlásením tzv. erlangenského programu. Je po ňom pomenovaných niekoľko geometrických objektov – Kleinova fľaša, Kleinova kvadrika, Kleinov model neeuklidovskej geometrie...



OBR. 8. Faktorové priestory vzniknuté niektorými „zlepneniami“ hrán štvorca a ich niektoré zobrazenia do $\mathbb{R}^3$.

- (5) Zlepením dvoch párov protilahlých hrán štvorca, pričom oba páry zlepieme v opačnom smere, dostávame projektívnu rovinu.

CVIČENIE 3.10. Nájdite parametrické vyjadrenia plôch homeomorfných s plochami v príklade 3.

VETA 3.8. Nech X, Y, Z sú topologické priestory, Y je faktorový podpriestor X a Z je faktorový podpriestor Y . Potom Z je faktorový podpriestor X .

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že zložením spojitých projekcií $\pi_Y: X \rightarrow Y$ a $\pi_Z: Y \rightarrow Z$ dostaneme spojitú projekciu $X \rightarrow Z$. $\square$

CVIČENIE 3.11. Nech $X = \mathbb{R}$ s euklidovskou topológiou a $Y = (\mathbb{R} - \mathbb{N}) \cup \{y_0\}$, kde $y_0 \notin \mathbb{R}$. Nech $f: X \rightarrow Y$ je identitou na $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ a $f(n) = y_0$ pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$. Ukážte, že f je faktorové zobrazenie. Ukážte, že Y s indukovanou topológiou nespĺňa prvú axiómu spočítateľnosti. [Návod: Identifikujte štruktúru okoli bodu y_0 . Ukážte, že pre akúkoľvek postupnosť okoli bodu y_0 vieme nájsť okolie, ktoré neobsahuje ani jedno okolie z danej postupnosti.]

DEFINÍCIA 3.7 (Axiómy oddeliteľnosti). Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva

T_0 -priestor: ak pre ľubovoľné jeho dva body $x \neq y$, existuje otvorená množina $U \in \mathcal{T}$ taká, že buď $x \in U$ a $y \notin U$ alebo $y \in U$ a $x \notin U$,

T_1 -priestor: ak pre ľubovoľné jeho dva body $x \neq y$, existujú otvorené množiny $U, V \in \mathcal{T}$ také, že $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ a $x \notin V$,

T_2 -priestor, Hausdorffov⁴ priestor: ak pre ľubovoľné jeho dva body $x \neq y$, existujú disjunktné otvorené množiny $U, V \in \mathcal{T}$ také, že $x \in U$ a $y \in V$,

T_3 -priestor, regulárny priestor: ak je T_1 -priestor a pre ľubovoľný bod $x \in X$ a každú uzavretú množinu $R \subseteq X$, $x \notin R$ existujú disjunktné otvorené množiny $U, V \in \mathcal{T}$ také, že $x \in U$ a $R \subseteq V$,

$T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor, úplne regulárny priestor, tichonovovský⁵: ak je T_1 -priestor a pre ľubovoľný bod $x \in X$ a každú uzavretú množinu $R \subseteq X$, $x \notin R$ existuje spojitý zobrazenie $f: X \rightarrow [0, 1]$, pričom $f(x) = 0$ a $f(R) \subseteq \{1\}$,

T_4 -priestor, normálny priestor: ak je T_1 -priestor a pre ľubovoľné dve disjunktné uzavreté množiny $R, S \subseteq X$ existujú disjunktné otvorené množiny $U, V \in \mathcal{T}$ také, že $R \subseteq U$ a $S \subseteq V$.

POZNÁMKA 3.7. Azda najdôležitejší typ priestoru je T_2 -priestor. Vela výsledkov topológie a analytických disciplín sa formuluje a platí len pre takéto priestory. V algebrickej geometrii, kde sa takéto priestory prirodzene nevyskytujú sa hľadá vhodná charakteristika (separabilita, iná ako sme definovali vyššie), ktorá nahrádza takýto pojem.

Všimnite si, že v definícii tichonovovského priestoru používame iný topologický priestor – reálny interval $[0, 1]$ s obvyklou topológiou.

VETA 3.9 (Hierarchia axiém oddeliteľnosti). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický T_i -priestor pre $i = 1, 2, 3, 4$, potom je aj T_{i-1} -priestor. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor je aj T_3 -priestor.

Dôkaz: Urobíme napr. dôkaz $T_1 \implies T_0$. Keďže platí pre pevný bod $x \in X$ a ľubovoľný $y \in X$, že existuje otvorená množina $U_y \in \mathcal{T}$ neobsahujúca x , ale obsahujúca y . A to je práve hľadaná množina U z definície T_0 -priestoru.

Uvedomme si, že v T_1 priestore je jednobodová množina $\{x\}$ uzavretá pre ľubovoľné $x \in X$, lebo $\cup_{y \in X - \{x\}} U_y = X - \{x\}$ je otvorená.

□

POZNÁMKA 3.8. Platí aj tvrdenie, že každý T_4 priestor je úplne regulárny ako uvidíme neskôr vo vete 3.13.

CVIČENIE 3.12. Dokončite dôkaz vety 3.9 pre ostatné typy priestorov.

⁴Felix Hausdorff (1868–1942), nemecký matematik, vyštudoval aplikovanú matematiku so zameraním na astronómiu, neskôr pracoval v teórii množín a topológii, kde dosiahol výrazné úspechy. Z pojmov nesúcich jeho meno sú známe Hausdorffova (fraktálna) dimenzia a Hausdorffov priestor. Svoj život ukončil spolu s niekoľkými rodinnými príslušníkmi po ozname o internácii.

⁵Andrej Nikolajevič Tichonov (1906–1993) – sovietsky matematik s tematicky širokým záberom od topológie, funkcionálnej analýzy, teórie diferenciálnych rovníc až po numerické metódy riešenia. Je po ňom pomenovaná metóda regularizácie zle podmienených úloh a trieda úplne regulárnych topologických priestorov.

Príklad:[Kontrapríklady k hierarchii T_i priestorov]

- (1) Triviálny (antidiskrétny) priestor s aspoň dvoma bodmi nie je T_0 priestorom.
- (2) Nech X je ľubovoľná množina s aspoň 2 prvkami a $x_0 \in X$. Potom pre $\emptyset \neq A \subseteq X$ položíme $\text{cl } A = A \cup \{x_0\}$ a $\text{cl } \emptyset = \emptyset$. Takýmto systémom uzavretých množín definujeme topológiu na X . Lahko sa vidí, že priestor je T_0 , ale nie je T_1 . Žiadna otvorená množina okrem celého priestoru totiž neobsahuje x_0 .
- (3) Nech X je ľubovoľná nekonečná množina. Systém otvorených množín definujeme $\{\emptyset\} \cup \{V \subseteq X : \text{card}(X - V) < \aleph_0\}$. Tento priestor je T_1 -priestorom, ale nie je T_2 -priestorom.
- (4) Nech $X = \mathbb{R}$ a $Z \subseteq X$, $Z = \{\frac{1}{z} : z \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Pre ľubovoľné $x \in X$ zoberme $U_i(x) = (x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i})$ a báza okolí bodu x je $\mathcal{B}(x) = \{U_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ pre $x \neq 0$ a $\mathcal{B}(0) = \{U_i(0) - Z\}_{i \in \mathbb{N}}$. Priestor X s takto generovanou topológiou je Hausdorffov. Množina Z je uzavretá a $0 \notin Z$. Ale ľubovoľné dve otvorené množiny $U_1, U_2 \subseteq X$ také, že $0 \in U_1$ a $Z \subseteq U_2$ majú neprázdny prienik. Takže tento priestor nie je T_3 .
- (5) Nech $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Označme $\Gamma_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Pre ľubovoľný bod $z \in \Gamma - \Gamma_0$ definujeme bázu okolí tohoto bodu pomocou euklidovskej topológie tejto polroviny. Pre bod $a = (x, 0) \in \Gamma_0$ definujeme bázu okolí ako $\{B((x, r), r) \cup \{a\}\}_{r > 0}$. Takto definovaná množina tvorí bázu okolí. Priestor sa nazýva Moorovou⁶ alebo Nemyckého⁷ rovinou. V tomto priestore je Γ_0 uzavretou podmnožinou.

Nemyckého rovina je úplne regulárny priestor. Nech množina $U(a)$ je prvok bázy okolí bodu $a \in \Gamma$ a pre $b \in U(a) - \{a\}$ je b' bod prieniku priamky ab a hranice $U(a)$. Potom funkcia

$$(3) \quad f(b) = \begin{cases} 0, & \text{ak } b = a \\ 1, & \text{ak } b \in \Gamma - U(a) \\ \frac{|ab|}{|ab'|}, & \text{ak } b \in U(a) - \{a\} \end{cases}$$

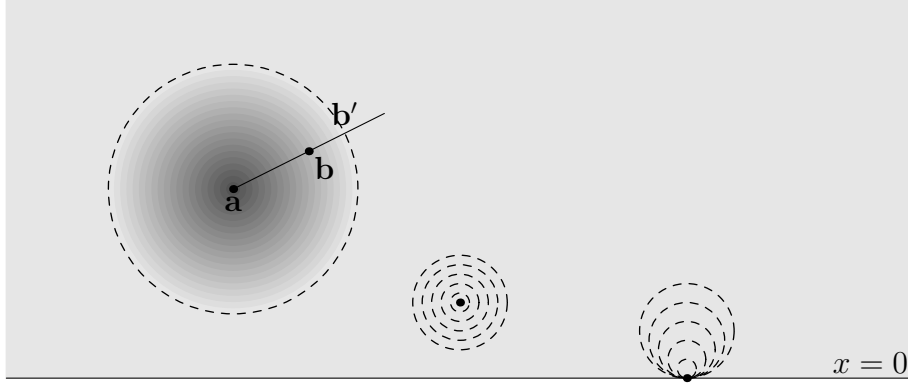
je spojité zobrazenie $f: \Gamma \rightarrow I$ (poz. obr. 9).

Je zrejmé, že $\text{acc}(\Gamma_0) = \emptyset$. Navyiac to platí pre ľubovoľnú $A \subseteq \Gamma_0$. A keďže Γ_0 je diskretný podpriestor Γ , tak A je uzavretá podmnožina Γ_0 .

Množina $C = (\Gamma - \Gamma_0) \cap \mathbb{Q}^2$ bodov s racionálnymi súradnicami mimo Γ_0 je hustá v Γ .

⁶Moore, Robert Lee (1882–1974) – americký matematik venujúci sa všeobecnej topológii. Známa je jeho metóda vyučovania matematiky.

⁷Nemyckij, Viktor Vladimirovič, (1900–1967) – sovietsky matematik, pracoval v Moskovskej univerzite, zaoberal sa kvalitatívnou teóriou diferenciálnych rovníc, nelineárnych operátorových rovníc, teóriou funkcií jednej premennej a topológiou.



OBR. 9. Nemyckého rovina je príkladom priestoru, ktorý je úplne regulárny, ale nie je normálny. Rovnako je príkladom toho, že podpriestorom separabilného priestoru nemusí byť separabilný priestor. Na obrázku vidíme bázu okolí dvoch typov bodov (vpravo) a funkciu reprezentovanú zmenou intenzity šedého odtieňa (vľavo) demonštrujúcu na jednom bazovom okolí, že tento priestor je úplne regulárny.

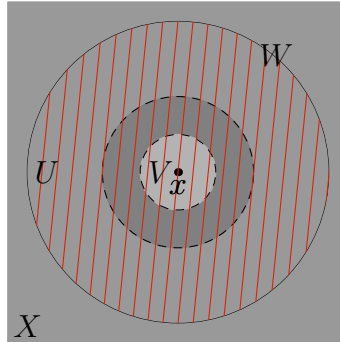
Ak je Γ normálny priestor, tak pre ľubovoľné $Z \subseteq \Gamma_0$ existujú otvorené množiny U_Z a V_Z také, že $Z \subseteq U_Z$, $\Gamma_0 - Z \subseteq V_Z$ a $U_Z \cap V_Z = \emptyset$. Označme $C_Z = U_Z \cap C$. Nech $A, B \subseteq \Gamma_0$ sú také, že $A - B \neq \emptyset$. Potom $\emptyset \neq A - B \subseteq \text{cl}(U_A) \cap V_B$ a navyše $\text{cl}(U_B) \cap V_B = \emptyset$, lebo $U_B \cap V_B = \emptyset$. Takže $\text{cl}(U_A) \neq \text{cl}(U_B)$. Z toho priamo máme aj $\text{cl}(C_A) \neq \text{cl}(C_B)$, a teda $C_A \neq C_B$. Teda pre rôzne množiny A, B sú rôzne aj C_A a C_B .

To vedie k sporu, lebo podmnožín C je len $2^{\aleph_0}$, zatiaľčo podmnožín Γ_0 je 2^c .

VETA 3.10 (Uzavretosť množiny bodov s rovnakými hodnotami v zobrazeniach). *Nech $f, g: X \rightarrow Y$ sú spojité zobrazenia a Y je Hausdorffov topologický priestor. Potom množina $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je uzavretá v X .*

Dôkaz: Ukážeme, že $A = X - \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je otvorená. K bodom $f(x) \neq g(x)$ existujú otvorené množiny U_x a V_x , $U_x \cap V_x = \emptyset$, $f(x) \in U_x$, $g(x) \in V_x$. Množina $f^{-1}(U_x) \cap g^{-1}(V_x)$ je otvorené okolie bodu x a je celé podmnožinou A . □

POZNÁMKA 3.9. *Špeciálnym prípadom predchádzajúcej vety je tvrdenie, že implicitne definovaná krivka v euklidovskej rovine alebo plocha v euklidovskom trojrozmernom priestore je uzavretá množina. Stačí ako druhú funkciu vziať nulovú funkciu. Ako je to s implicitne definovanou krivkou v trojrozmernom euklidovskom priestore?*



OBR. 10. Uzavreté množiny tvoria bázu okolí v T_1 -priestore práve vtedy, keď je regulárny.

VETA 3.11 (Ekvivalentná podmienka regulárnosti). T_1 -priestor X je regulárny vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľný bod $x \in X$ a jeho otvorené okolie $V \subseteq X$ existuje okolie $U \subseteq X$ bodu x také, že $\text{cl } U \subseteq V$.

Dôkaz: V regulárnom priestore X zoberme $x \in X$ a uzavretú množinu $F = X - V$. Potom existujú otvorené okolia $U_1, U_2 \subseteq X$ také, že $x \in U_1$, $F \subseteq U_2$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Je zrejmé, že okolie $\text{cl } U_1 \subseteq X - U_2 \subseteq V$, keďže $X - U_1$ je uzavretá.

Ak platí nutná podmienka z tvrdenia, tak uzavretú množinu $F \subseteq X$, $x \notin F$ zoberme $V = X - F$. Potom existuje okolie $U_1 \subseteq X$ bodu x také, že $\text{cl } U_1 \subseteq V$. Vezmime za $U_2 = X - \text{cl } U_1$. Zrejme $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ a $x \in U_1$ a $F \subseteq U_2$. $\square$

CVIČENIE 3.13. Dokážte vetu 3.11 za predpokladu, že V je okolie z nejakej pevne zvolenej predbázy X .

DÔSLEDOK 3.1. T_1 priestor je regulárny práve vtedy, keď uzavreté okolia ľubovoľného bodu tvoria bázu okolí.

Dôkaz: Nech X je regulárny, potom pre $x \in X$ a otvorenú množinu U , $x \in U$ platí, že k $R = X - U$ existujú disjunktné otvorené množiny $V, W \subseteq X$ také, že $x \in V$ a $R \subseteq W$ (pozri obr. 10). To ale znamená, že množina $X - W \subseteq X - R = U$ je uzavretá a obsiahnutá v okolí U . Takže uzavreté okolia tvoria bázu okolí bodu x .

Nech X je T_1 -priestor a bod $x \in X$ má bázu okolí z uzavretých množín. Nech R je uzavretá množina a $x \notin R$. Potom k otvorenej množine $X - R$ existuje uzavretá množina S , $x \in S \subseteq X - R$. Množina S obsahuje otvorenú podmnožinu V , $x \in V \subseteq S$. Potom otvorené disjunktné množiny V a $X - \text{cl}(V) \supseteq X - S \subseteq R$ oddeľujú x a R . $\square$

CVIČENIE 3.14. Dokážte dôsledok 3.1 tak, že efektívnejšie využijete výsledky vety 3.11.

DÔSLEDOK 3.2. *Podpriestor regulárneho priestoru je tiež regulárny.*

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že uzavretý systém okolí bodu x z pôvodného priestoru sa stane základom systému okolí tohoto bodu v podpriestore. $\square$

LEMA 3.12 (Ekvivalentná podmienka úplnej regulárnosti). *T_1 priestor X je úplne regulárny práve vtedy, keď pre ľubovoľný bod $x \in X$ a jeho otvorené okolie $V \subseteq X$ existuje spojitá funkcia $f: X \rightarrow I$ taká, že $f(x) = 0$ a $f(X - V) \subseteq \{1\}$.*

Dôkaz: Nutná podmienka je zrejmá z definície úplne regulárneho priestoru, lebo $X - V$ je uzavretá množina a $x \notin X - V$.

Postačujúca podmienka je zrejmá z toho istého dôvodu. $\square$

CVIČENIE 3.15. *Urobte dôkaz vety 3.12 za predpokladu, že V je z nejakej predbázy topológie na X .*

LEMA 3.13 (Urysonova⁸ lema). *Nech A, B sú dve disjunktné uzavreté podmnožiny normálneho priestoru X , $I = [0, 1]$. Potom existuje spojitá funkcia $f: X \rightarrow I$ taká, že $f(x) = 0$ pre $x \in A$ a $f(x) = 1$ pre $x \in B$.*

Dôkaz: Náčrt dôkazu je nasledujúci. Ku každému racionálnemu číslu $r \in [0, 1]$ zostrojíme otvorenú množinu U_r s vlastnosťami

- (1) $A \subseteq U_r$, $B \subseteq X - U_r$,
- (2) $\text{cl}(U_r) \subseteq U_s$ pre $r < s$.

Funkciu $f: X \rightarrow I$ zostrojíme predpisom

$$(4) \quad f(x) = \inf\{r : x \in U_r\}.$$

Množiny U_r zostrojíme indukzívne. Nech $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je postupnosť všetkých racionálnych čísel z $[0, 1]$ taká, že $r_0 = 0$ a $r_1 = 1$. Keďže X je normálny, existujú otvorené disjunktné U, V , $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Položme $U_0 = U$, $U_1 = X - B$. Je zrejmé, že spĺňajú podmienku (1). Podmienka (2) platí, lebo $A \subseteq U_0 \subseteq X - V = \text{cl}(X - V) \subseteq X - B = U_1$. Takže $\text{cl}(U_0) \subseteq U_1$.

Majme zostrojenú postupnosť množín U_{r_i} pre $i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, ktoré spĺňajú podmienky (1) a (2).

Nech $s = \max\{r_i : r_{n+1} > r_i : i = 0, \dots, n\}$ a $t = \min\{r_i : r_{n+1} < r_i : i = 0, \dots, n\}$. Potom $\text{cl}(U_s) \subseteq U_t$. Teda k množinám $\text{cl}(U_s)$ a $X - U_t$ existujú disjunktné otvorené podmnožiny U, V také, že $\text{cl}(U_s) \subseteq U$ a $X - U_t \subseteq V$. Keďže $\text{cl}(U) \subseteq X - V \subseteq U_t$, tak položíme $U_{r_{n+1}} = U$.

⁸Pavel Samuilovič Uryson (1898–1924) – ruský matematik rozvíjajúci najmä teóriu dimenzie a teóriu metrizovateľných priestorov. Niekoľko pojmov nesie jeho meno, napr. Mengerova-Urysonova dimenzia, Urysonov univerzálny priestor. Utopil sa pri plávaní v mori v Bretónsku.

Teraz ešte treba ukázať, že f definované (4) je spojité zobrazenie. Z definície funkcie je zrejmé, že $f^{-1}([0, a)) = \cup_{r < a} U_r$, lebo infimum nejakej množiny v každom okolí obsahuje nejaký prvok danej množiny. Podobne $f^{-1}((b, 1]) = \cup_{r \leq b} (X - \text{cl}(U_r))$, lebo v ľubovoľne malom okolí prvku tohoto intervalu sa nenachádza obraz bodu z $\cup_{r \leq b} \text{cl}(U_r)$. Oba vzory sú otvorené množiny a systém množín $\{[0, a) : a \in [0, 1]\} \cup \{(b, 1] : b \in [0, 1]\}$ tvorí predbázu v $[0, 1]$. Takže z ekvivalentných podmienok spojitosti je f spojité. $\square$

POZNÁMKA 3.10. Zrejmým dôsledkom Urysonovej lemy je fakt, že normálny priestor je úplne regulárny.

CVIČENIE 3.16. Podmnožina A normálneho topologického priestoru X je uzavretá G_σ vtedy a len vtedy, keď existuje spojitá funkcia $f: X \rightarrow I$ taká, že $A = f^{-1}(0)$. Dokážte!

CVIČENIE 3.17. Podmnožina A normálneho topologického priestoru X je otvorená F_σ vtedy a len vtedy, keď existuje spojitá funkcia $f: X \rightarrow [0, 1]$ taká, že $A = f^{-1}((0, 1])$. Dokážte!

CVIČENIE 3.18. Nech X je T_1 -priestor a pre ľubovoľnú uzavretú množinu $F \subseteq X$ a otvorenú množinu $G \subseteq X$, $F \subseteq G$ existuje postupnosť otvorených množín $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ takých, že $F \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ a $\text{cl}(G_i) \subseteq G$ pre $i \in \mathbb{N}$. Potom je priestor X normálny. Dokážte!

CVIČENIE 3.19. Regulárny priestor spĺňajúci druhú axiómu spočítateľnosti je normálny. Dokážte!

CVIČENIE 3.20. Nech $A \subseteq X$ je hustá podmnožina. Nech $f: A \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie, ktoré sa spojito predĺži (dodefinuje) na zobrazenie $z: X \rightarrow Y$. Ak Y je Hausdorffov priestor, tak predĺženie je jednoznačné. Dokážte!

VETA 3.14 (Podpriestory T_i priestorov). Podpriestor T_i priestoru je T_i priestor pre $i \leq 3\frac{1}{2}$.

Dôkaz: Ide o jednoduché cvičenie. $\square$

VETA 3.15 (Súčin T_i priestorov). Súčin T_i -priestorov je T_i -priestor pre $i \leq 3\frac{1}{2}$. Obrátene, ak súčin priestorov je T_i priestor, tak všetky priestory v systéme sú T_i .

Dôkaz: Pre T_1 priestor tvrdenie vyplýva napr. z toho, že množina $\Pi_{s \in S} A_s$ pre $\emptyset \neq A_s \subseteq X_s$ je uzavretá vtedy a len vtedy, keď je A_s uzavretá v X_s pre každé $s \in S$. Stačí si potom pozrieť množinu obsahujúcu bod $\{x\}$.

Pre $i = 0, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ sú dôkazy podobné. Ukážeme, že súčin $X = \Pi_{s \in S} X_s$ tichonovovských priestorov je tichonovovský. Nech všetky X_s sú úplne regulárne, tak pre $x = \{x_s\}_{s \in S} \in X$ a uzavretú (kanonickú)

množinu $F = \Pi_{s \in S} F_s$, kde $F_s = X_s$ pre $s \neq t$ a F_t je neprázdna uzavretá v X_t , existuje funkcia $f_t: X_t \rightarrow [0, 1]$ taká, že $f_t(x_t) = 0$ a $f_t(F_t) \subseteq \{1\}$. Potom $f_t \circ \pi_t$ je hľadané zobrazenie pre x a F .

Ak $X = \Pi_{s \in S} X_s$, kde všetky priestory X_s sú neprázdne, zoberme bod $x = \{x_s\}_{s \in S} \in X$ a položíme $X_t^* = \Pi_{s \in S} A_s$, kde $A_s = \{x_s\}$ pre $s \neq t$ a $A_t = X_t$. Je zrejmé, že X_t^* je homeomorfný s X_t a je podpriestorom X . Navyše je to uzavretý podpriestor, ak $i \geq 1$. Takže X_s je podľa vety 3.14 T_i -priestorom. $\square$

Príklad: Priestory $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, $[0, 1]^n$, $(\mathbb{S}^1)^2$ sú súčiny priestorov. Sú to všetko aj $T_{3\frac{1}{2}}$ priestory.

DEFINÍCIA 3.8 (Graf zobrazenia). *Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie topologických priestorov. Potom množinu $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ nazývame grafom zobrazenia f .*

VETA 3.16 (Vlastnosti grafu spojitého zobrazenia). *Nech $f: X \rightarrow Y$ je spojitý zobrazenie. Potom je $\Gamma(f)$ homeomorfný obraz X v homeomorfizme $h: X \rightarrow \Gamma(f) \subseteq X \times Y$ danom $h(x) = (x, f(x))$ pre $x \in X$. Podobne, zúženie projekcie $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ na $\Gamma(f)$ je homeomorfizmus. Ak Y je hausdorffovský, tak $\Gamma(f)$ je uzavretá podmnožina $X \times Y$.*

Dôkaz: Prvé dve tvrdenia sa dokážu priamočiaro, pričom zobrazenia h a π_X sú navzájom inverzné. Tretia časť je zrejmá z faktu, že $\Gamma(f) = (f \times id_Y)^{-1}(\Delta)$, kde $\Delta = \{(y, y) \in Y \times Y : y \in Y\}$ je diagonála. Tá je uzavretá podľa vety 3.10, lebo $\Delta = \{(x, y) \in Y \times Y : \pi_{Y,1}(x, y) = \pi_{Y,2}(x, y)\}$ (t.j. projekcie na prvú a druhú zložku sa rovnajú). Teda aj vzor Δ v spojitom zobrazení je uzavretá množina. $\square$

4. Konvergencia a limity v topologických priestoroch

V topologických priestoroch sa pojem postupnosti nahrádza pojmom siete. Dôvod je skrytý vo fakte, že existujú priestory nespĺňajúce prvú axiómu počítateľnosti.

DEFINÍCIA 4.1 (Usmernená množina). *Nech $(D, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina taká, že pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in D$, existuje $\gamma \in D$, $\alpha \leq \gamma$ a $\beta \leq \gamma$. Hovoríme, že D je usmernená.*

DEFINÍCIA 4.2 (Sieť). *Nech X je topologický priestor a $(D, \leq)$ je usmernená množina. Potom funkciu $\phi: D \rightarrow X$ nazývame sieťou.*

DEFINÍCIA 4.3. *Nech $\phi: D \rightarrow X$ je sieť a $A \subseteq X$. Hovoríme, že sieť je často v A , ak pre ľubovoľné $\alpha \in D$ existuje $\beta \in D$, $\alpha \leq \beta$ a $\phi(\beta) \in A$. Hovoríme, že horná časť ϕ sa nachádza v A , ak existuje $\alpha \in D$, že pre všetky $\beta \in D$, $\alpha \leq \beta$ platí $\phi(\beta) \in A$.*

DEFINÍCIA 4.4 (Hromadný bod siete). *Hovoríme, že $x \in X$ je hromadným bodom siete $\mu: D \rightarrow X$, ak sa sieť nachádza v každom okolí bodu x často.*

DEFINÍCIA 4.5 (Konvergenca siete, limita). *Bod $x \in X$ nazývame limitou konvergentnej siete $\phi: D \rightarrow X$, ak pre ľubovoľné okolie U bodu x existuje $\delta_0 \in D$ také, že pre všetky $\delta \in D$, $\delta_0 \leq \delta$ platí $\phi(\delta) \in U$, teda že horná časť ϕ je v U . Množina všetkých limit siete sa označuje $\lim_{\delta \in D} \phi(\delta)$ alebo často len $\lim x_\delta$, kde $x_\delta = \phi(\delta)$.*

POZNÁMKA 4.1. *Pre postupnosti, na ktoré sme zvyknutí z reálnej analýzy, je $D = \mathbb{N}$ a $\leq$ je obvyklé usporiadanie prirodzených čísel.*

Limitou siete vo všeobecnom topologickom priestore môže byť aj množina s viacerými bodmi.

VETA 4.1 (Ekvivalentná podmienka spojitosti). *Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité, ak pre ľubovoľnú sieť ϕ konvergujúcu k bodu $x \in X$, je sieť $f \circ \phi$ konvergentná k bodu $f(x)$.*

Dôkaz: Nech f je spojitý zobrazenie a ϕ konverguje k $x \in X$. Potom pre ľubovoľné otvorené okolie V bodu $f(x)$ je $f^{-1}(V)$ otvorená v X , obsahuje x a horná časť ϕ je v nej. To znamená, že horná časť $f \circ \phi$ je vo V .

Nech f nie je spojitý. Potom existuje otvorená množina $V \subseteq Y$, že $U = f^{-1}(V)$ nie je otvorená. Nech $x \in U - \text{int } U$. Vezmime systém $\mathcal{D}$ všetkých otvorených okolí bodu x s usporiadaním $A \leq B \iff B \subseteq A$. Pre každé otvorené okolie $A \in \mathcal{D}$ bodu x je množina $A \cap (X - U)$ neprázdna (inak by $x \in \text{int } U$). Takže položíme $\phi(A) = y$, kde $y \in A \cap (X - U)$. Zrejme ϕ konverguje k x , ale $f \circ \phi(A) \notin V$ pre žiadne A , a teda táto sieť nekonverguje ku $f(x) \in V$. $\square$

VETA 4.2 (Jednoznačnosť limity v hausdorffovských priestoroch). *Topologický priestor je hausdorffovský práve vtedy, keď ľubovoľná sieť má najviac jednu limitu.*

Dôkaz: Ak sú body oddeliteľné disjunktnými otvorenými množinami, tak horná časť siete môže byť len v jednej z týchto množín. Tým je ukázaná nutná podmienka.

Nech body $x, y \in X$ nie sú oddeliteľné dvoma disjunktnými otvorenými množinami. Potom ľubovoľné okolie bodu x obsahuje aj bod ľubovoľného okolia bodu y . Nech $\mathcal{D}$ je systém všetkých prienikov $U_x \cap U_y$ otvorených okolí U_x bodu x a U_y bodu y s usporiadaním daným inklúziou t.j. pre $A, B \in \mathcal{D}$ definujeme $A \leq B \iff B \subseteq A$. Zrejme ide o usmernenu množinu, lebo pre ľubovoľné okolia U_1, U_2 bodu x a V_1, V_2 bodu y platí $(U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \neq \emptyset$. Sieť $\mu: \mathcal{D} \rightarrow X$ daná $\mu(A) = w_A \in A$. Je zrejmé, že $\{x, y\} \subseteq \lim_{A \in \mathcal{D}} w_A$. $\square$

VETA 4.3 (Uzavretosť množiny pomocou limit). *Bod $x \in \text{cl}(A)$ práve vtedy, keď existuje sieť prvkov množiny A konvergujúca k bodu x .*

Dôkaz: Ide o ľahké cvičenie. $\square$

CVIČENIE 4.1. *Sformulujte niektoré vlastnosti postupností z reálnej analýzy vo forme viet o sieťach a pokúste sa ich dokázať.*

CVIČENIE 4.2. *Ukážte, že systém okolí vybraného bodu $x \in X$ je usmernená množina vzhľadom na obrátenú inklúziu $A \leq B \Leftrightarrow B \subseteq A$.*

DEFINÍCIA 4.6 (Kofinálne zobrazenie). *Nech D a D' sú usmernené množiny a $h: D' \rightarrow D$ je zobrazenie zachovávajúce usporiadanie (t.j. $x \leq y \Rightarrow h(x) \leq h(y)$). Nazývame ho kofinálnym, ak pre ľubovoľné $d \in D$ existuje $d' \in D'$ také, že pre všetky $a' \in D'$ také, že $a' \geq d'$ je $h(a') \geq d$.*

POZNÁMKA 4.2. *Uvedomme si, že usporiadania v D a D' sú rôzne, hoci ich označujeme rovnakým znakom. Budeme tak robiť, ak to bude možné a nebude to viesť k nedorozumeniu.*

DEFINÍCIA 4.7 (Podsieť). *Podsietou siete $\mu: D \rightarrow X$ nazývame zobrazenie $\mu \circ h$, kde $h: D' \rightarrow D$ je kofinálne zobrazenie.*

VETA 4.4. *Sieť $\mu: D \rightarrow X$ sa nachádza často v každom okolí bodu $x \in X$ práve vtedy, keď má konvergentnú podsieť k bodu x .*

Dôkaz: Zostrojme množinu

$$D' = \{(\alpha, U) : \alpha \in D, U \in \mathcal{T}, x \in U, \mu(\alpha) \in U\}.$$

Čiastočné usporiadanie na D' je generované predpisom $(\alpha, U) \leq (\alpha', U')$ práve vtedy, keď $\alpha \leq \alpha'$ a $U' \subseteq U$.

Zrejme ku každým dvom prvkom $(\alpha, U), (\beta, V) \in D'$ existuje v D' prvok $(\gamma, U \cap V)$, ktorý je od oboch väčší. Prvok $\gamma \in D$ vyberieme tak, aby $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ a $x_\gamma \in U \cap V$, čo sa dá vďaka usmerneniu D a vlastnosti, že μ je často v okolí x . To znamená, že D' je usmernená množina.

Zobrazenie $D' \rightarrow D$ dané $(\alpha, U) \mapsto \alpha$ je kofinálne. Takže $\{x_{(\alpha, U)}\}$ je podsietou $\{x_\alpha\}$. Ukážeme, že konverguje ku x .

Zoberme ľubovoľné okolie O bodu x . Potom v ňom existuje podľa predpokladu nejaký prvok x_β zo siete μ . Ak $(\alpha, U) \geq (\beta, O)$, tak $x_{(\alpha, U)} = x_\alpha \in U \subseteq O$. To znamená, že horná časť siete je v O . $\square$

CVIČENIE 4.3. *Nech $\mu: D \rightarrow X$ je sieť s hromadným bodom $x \in X$. Ukážte, že existuje podsieť konvergujúca k bodu x . Ukážte, že hromadný bod podsiete $\mu' = \mu \circ h$, kde $h: D' \rightarrow D$ je monotónne kofinálne zobrazenie, je aj hromadným bodom siete μ .*

CVIČENIE 4.4. *Nech $\mu: D \rightarrow X$ je sieť konvergujúca k bodu $x \in X$. Ukážte, že každá jej podsieť konverguje tiež k bodu x . Ukážte, že limita podsiete $\mu' = \mu \circ h$, kde $h: D' \rightarrow D$ je monotónne kofinálne zobrazenie, je aj limitou siete μ .*

CVIČENIE 4.5. *Nech D je čiastočne usporiadaná množina. Definujme na D bázu otvorených množín $B = \{U \subset D : U \text{ je horná časť } D\}$. Ukážte, že takto je možné definovať na D topológiu. Ukážte, že kofinálne zobrazenie je spojité zobrazenie medzi dvoma usmernenými množinami s takouto topológiou.*

DEFINÍCIA 4.8 (Univerzálna sieť). *Sieť sa nazýva univerzálna, ak pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq X$ je horná časť siete v A alebo v $X - A$.*

VETA 4.5 (Obraz univerzálnej siete). *Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie a $\mu: D \rightarrow X$ je univerzálna sieť. Potom $f \circ \mu$ je univerzálna sieť v Y .*

Dôkaz: Dôkaz je zrejmý z toho, že $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ pre ľubovoľné $B \subseteq Y$. □

CVIČENIE 4.6. *Ukážte, že postupnosť je univerzálna vtedy a len vtedy, keď je konštantná až na konečný počet členov (horná časť je konštantná).*

VETA 4.6 (Zornova⁹ lema). *Každá čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každý reťazec je zhora ohraničený, má aspoň jeden maximálny prvok.*

POZNÁMKA 4.3. *Zornova lema je tvrdenie, ktoré sa obyčajne dokazuje v teórii množín. Je ekvivalentná axióme výberu, ktorá má niektoré neintuitívne dôsledky v matematike (napr. Banachov¹⁰-Tarského¹¹ paradox o rozklade gule). Niekedy sa nazýva aj princípom maximality.*

CVIČENIE 4.7. *Podsieť univerzálnej siete je univerzálna. Dokážte!*

CVIČENIE 4.8. *Každá univerzálna sieť sa nachádza často buď v A alebo v $X - A$. Dokážte!*

⁹Max August Zorn (1908–1993) – pôvodom nemecký matematik žijúci v USA. Zaoberal sa algebrou, teóriou grúp a numerickou matematikou. Zornovu lemu objavil v roku 1935 nezávisle od Kuratowského, ktorý ju objavil v roku 1922.

¹⁰Stefan Banach (1892–1945) – poľský matematik a univerzitný profesor v Lvove. Výrazná postava v oblasti funkcionálnej analýzy a teórie lineárnych operátorov. Je po ňom pomenovaný Banachov priestor, Banachova veta o pevnom bode, Hahn-Banachova veta a ďalšie pojmy.

¹¹Alfred Tarski (1901–1983) – poľský logik, matematik a filozof. Pôsobil vo Varšave a po nútenej emigrácii v roku 1939 pracoval od 1942 na Kalifornskej univerzite v Berkley. Zaoberal sa logikou prvého rádu, nerozhodnuteľnosťou teórií, axiomatizáciou teórií (napr. aj rovinnej geometrie), algebrami. Je po ňom pomenovaných niekoľko pojmov a viet napr. Tarského-Seidenbergova veta, Tarského axióma, Tarského-Grothendieckova teória množín.

VETA 4.7 (O existencii univerzálnej podsiete). *Každá sieť má univerzálnu podsieť.*

Dôkaz: Majme sieť $\mu: P \rightarrow X$. Nech $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je ľubovoľný systém podmnožín X takých, že μ je často v A pre $A \in \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ je uzavretý na prienik. Dva takéto systémy sú prirodzene usporiadané inklúziou podmnožín $\mathcal{P}(X)$. Reťazec (lineárne usporiadaná množina takýchto systémov) dáva po zjednotení opäť takúto množinu, takže podľa Zornovej lemy, existuje v tejto čiastočne usporiadanej množine maximálny prvok. Označme ho $\mathcal{D}$.

Definujme podobne ako v dôkaze vety 4.4 podsieť. Na $P_0 = \{(\alpha, A) \in P \times \mathcal{D} : \mu(\alpha) = x_\alpha \in A\}$ máme čiastočné usporiadanie dané predpisom $(\alpha, A) \leq (\alpha', A')$ práve vtedy, keď $\alpha \leq \alpha'$ a $A' \subseteq A$. Je zrejmé, že ide o usmernenú množinu a že zobrazenie $\phi: P_0 \rightarrow P$ dané predpisom $\phi((\alpha, A)) = \alpha$ je kofinálne.

Potom $\nu: P_0 \rightarrow X$ dané $\nu = \mu \circ \phi$ alebo podrobnejšie predpisom $y_{(\alpha, A)} = \nu((\alpha, A)) = x_\alpha$ je podsieť μ . Ukážeme, že je univerzálna.

Nech $U \subseteq X$ je množina, v ktorej sa často nachádza ν (a teda aj μ). Potom pre ľubovoľné $A \in \mathcal{D}$ máme nejaké $(\alpha, A) \in P_0$ a k nemu existuje $(\beta, B) \in P_0$, $(\beta, B) \geq (\alpha, A)$ a $y_{(\beta, B)} \in U$. Takže ν sa často nachádza aj v $U \cap A$, lebo $x_\beta \in B \subseteq A$. Keďže systém $\mathcal{D}_U = \mathcal{D} \cup \{U \cap A : A \in \mathcal{D}\} \cup \{U\}$ je uzavretý na prienik a ν je v každej z množín často, tak ide o nejaké $\mathcal{C}$ z vyššie uvedenej úvahy. Navyše $\mathcal{D}$ bol maximálny, tak $U \in \mathcal{D}$.

Ak ν je často aj v $X - U$, tak $X - U \in \mathcal{D}$, a teda $\emptyset \in \mathcal{D}$. Spor s definíciou takého systému. To znamená, že horná časť siete ν je v U . Takže ν je univerzálna. $\square$

CVIČENIE 4.9. *Ukážte, že spojité zobrazenie $f: X \rightarrow Y$, kde Y je regulárny možno definovať hodnotami na hustej podmnožine $H \subseteq X$. Teda ukážte, že ak f je ľubovoľné zobrazenie, ktoré spĺňa, že pre ľubovoľnú sieť $\{x_\alpha\}$, kde $x_\alpha \in H$ a $\lim x_\alpha = x \in X$ je $\lim f(x_\alpha) = f(x) \in Y$, tak potom f je spojité. Ťažšia časť cvičenia je ukázať, že ak priestor Y nie je regulárny, tak to nemusí platiť.*

CVIČENIE 4.10. *Ukážte, že na čiastočne usporiadanej množine $(D, \leq)$ môže byť topológia generovaná hornými úsekmi, t.j. horné časti množiny D tvoria bázu topológie. Táto topológia sa nazýva Alexandrovova¹². Potom sieť je definovaná ako spojité zobrazenie $z: (D, \leq)$ do X . Formulujte vlastnosti sietí spomínané v predchádzajúcich častiach tejto kapitoly ako vlastnosti takýchto spojitých zobrazení.*

¹²Pavel Sergejevič Alexandrov (1896–1982) – významný sovietsky matematik aktívny v teórii množín a topológii. Bol členom Steklovovho inštitútu. Je po ňom pomenovaná napr. Alexandrovova kompaktifikácia a Alexandrovova topológia.

DEFINÍCIA 4.9 (Sekvenciálny priestor). *Priestor sa nazýva sekvenciálny, ak uzavretá množina obsahuje s každou konvergentnou postupnosťou aj limitu tejto postupnosti.*

POZNÁMKA 4.4. *Priestory, s ktorými obvykle pracujeme v geometrii a príbuzných disciplínach, sú sekvenciálne. Mnoho zaujímavých vlastností súvisiacich so sekvenciálnosťou sa dá dozvedieť štúdiom Arensovoho¹³-Fortovho¹⁴ priestoru.*

5. Kompaktné priestory

DEFINÍCIA 5.1 (Pokrytie). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je systém podmnožín X . Hovoríme, že ide o pokrytie, ak $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$. Ak $\mathcal{S}$ je systém otvorených (uzavretých) podmnožín X . Nazývame ho otvoreným(uzavretým) pokrytím priestoru X . Ak $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ sú pokrytia priestoru X a $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, tak hovoríme, že $\mathcal{S}'$ je podpokrytie pokrytia $\mathcal{S}$.*

DEFINÍCIA 5.2 (Kompaktný priestor). *Priestor X sa nazýva kompaktný, ak ľubovoľné otvorené pokrytie obsahuje konečné podpokrytie X .*

DEFINÍCIA 5.3 (Centrovaný systém). *Systém $\mathcal{S}$ podmnožín priestoru X sa nazýva centrovaný, ak každý neprázdny konečný podsystém $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ má neprázdny prienik t.j. $\bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S \neq \emptyset$.*

LEMA 5.1 (Ekvivalentná podmienka kompaktnosti). *Priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý neprázdny centrovaný systém uzavretých množín $\mathcal{S}$ má neprázdny prienik.*

Dôkaz: Ide o preformulovanie definície kompaktnosti v „reči“ uzavretých množín. □

DEFINÍCIA 5.4 (Kompaktná podmnožina). *Množina $A \subseteq X$ sa nazýva kompaktnou, ak podpriestor A je kompaktný.*

LEMA 5.2. *Uzavretá podmnožina kompaktného priestoru je kompaktná.*

Dôkaz: Stačí napr. k ľubovoľnému otvorenému pokrytiu $\mathcal{S}$ uzavretej množiny $A \subseteq X$ pridať otvorenú množinu $X - A$. Takýto systém je pokrytím celého priestoru. Vyberieme konečný podsystém, a potom z neho prípadne odstránime množinu $X - A$. □

Príklad:

- (1) Ľubovoľný konečný priestor je kompaktný.

¹³Arens

¹⁴Fort

- (2) Interval $[0, 1]$ s obvyklou topológiou je kompaktný. Nech $\mathcal{S}$ je otvorené pokrytie takéhoto priestoru. Potom zostrojme $J = \{x \in [0, 1] : [0, x] \text{ sa dá pokryť konečným podpokrytím } \mathcal{S}\}$. Množina J je uzavretý interval. Nech $m = \sup J$. Ak $m < 1$, tak v $\mathcal{S}$ existuje otvorená množina, ktorá obsahuje m , a teda aj nejaký interval $(m - \epsilon, m + \epsilon) \cap [0, 1]$. Takže dostaneme spor, lebo všetky čísla tvaru $m + \epsilon$, také, že sú z $[0, 1]$ sú aj z J .

CVIČENIE 5.1. *Nech A je kompaktný podpriestor topologického priestoru X . Potom z ľubovoľného systému $\{U_s\}_{s \in S}$ otvorených podmnožín X takých, že $A \subseteq \bigcup_{s \in S} U_s$ možno vybrať konečné podpokrytie A .*

VETA 5.3. *Ak X je Hausdorffov priestor, tak kompaktná množina $A \subseteq X$ je uzavretá.*

Dôkaz: Nech $x \in X - A$. Potom ku každému $y \in A$ existujú otvorené množiny U_y, V_y také, že $U_y \cap V_y = \emptyset$ a navyše $y \in U_y, x \in V_y$. Zo systému $\{U_y\}_{y \in A}$ vyberieme konečné podpokrytie A , a to znamená, že $A \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ a bod x je aj s otvoreným okolím $V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$ mimo tejto množiny. Takže $X - A$ je otvorená. $\square$

VETA 5.4 (Obraz kompaktného priestoru). *Spojité obraz kompaktného priestoru je kompaktný.*

Dôkaz: Nech X je kompaktný priestor, $f: X \rightarrow Y$ je spojitý zobrazenie a $A = f(X) \subseteq Y$. Z otvoreného pokrytia $\{U_s\}_{s \in S}$ množiny A dostaneme otvorené pokrytie $\{f^{-1}(U_s)\}_{s \in S}$ priestoru X . Jeho konečné podpokrytie nám dá aj konečné podpokrytie A zodpovedajúcimi množinami. $\square$

VETA 5.5. *Ak X je kompaktný, Y je Hausdorffov a $f: X \rightarrow Y$ je spojitý bijektívne zobrazenie, tak je aj homeomorfizmom.*

Dôkaz: Treba ukázať, že f^{-1} je spojitý. Nech $U \subseteq Y$ je uzavretá, potom je podľa vety 5.2 aj kompaktná. Takže jej obraz je podľa vety 5.4 kompaktná množina v X , a teda podľa vety 5.3 aj uzavretá. $\square$

VETA 5.6. *Kompaktný Hausdorffov priestor je normálny.*

Dôkaz: Nech A je uzavretá množina a $x \notin A$. Potom A je kompaktná. K bodu $y \in A$ a x existujú otvorené disjunktné množiny U_y, V_y také, že $y \in U_y$ a $x \in V_y$. Takže zo systému $\{U_y\}_{y \in A}$ pokrývajúceho A môžeme vybrať konečné podpokrytie. A máme, že priestor je regulárny, lebo $A \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ a bod $x \in V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$, čo sú otvorené disjunktné množiny.

Analogicky, pre B uzavretú a disjunktnú s A môžeme pre každý bod $x \in A$ zostrojiť disjunktné otvorené oddeľujúce množiny. A rovnakou

úvahou dospejeme k tomu, že existujú oddeľujúce disjunktné otvorené množiny nad A a B . Teda X je normálny. $\square$

DEFINÍCIA 5.5 (Vlastné zobrazenie). *Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva vlastné, ak pre ľubovoľnú kompaktnú množinu $A \subseteq Y$ je $f^{-1}(A)$ kompaktná v X .*

VETA 5.7. *Nech $f: X \rightarrow Y$ je uzavreté zobrazenie a $f^{-1}(y)$ je kompaktná množina v X pre ľubovoľné $y \in Y$. Potom je f vlastné.*

Dôkaz: Nech B je kompaktná v Y a $A = f^{-1}(B)$. Nech $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ je otvorené pokrytie A . Potom pre $y \in B$ existuje konečné podpokrytie $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}$ každej množiny $f^{-1}(y) \subseteq A$. Zoberme $V_y = \cup_{U \in \mathcal{U}_y} U$. Množina $f(X - V_y)$ je uzavretá v Y , a teda $W_y = Y - f(X - V_y)$ je otvorená, pričom $f^{-1}(W_y) \subseteq V_y$. Množina B sa dá pokryť konečným podpokrytím $B \subseteq W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}$. Takže $A \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = \cup_{i=1}^n \cup_{U \in \mathcal{U}_{y_i}} U$. $\square$

VETA 5.8 (Ekvivalentné podmienky kompaktnosti). *Nech X je topologický priestor. Potom sú ekvivalentné nasledujúce podmienky.*

- (1) X je kompaktný.
- (2) Každý centrovanej systém uzavretých podmnožín X má neprázdny prienik.
- (3) Každá univerzálna sieť v X konverguje.
- (4) Každá sieť v X má konvergentnú podsieť.

Dôkaz: Tvrdenia (1) a (2) sú ekvivalentné podľa 5.1.

Teraz ukážeme, že (1) $\implies$ (3). Nech $\{x_\alpha\}$ je univerzálna sieť, ktorá nekonverguje. Potom pre ľubovoľné $x \in X$ existuje otvorené okolie U_x také, že horná časť siete nie je v U_x . Potom $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ pre nejaké body $x_1, \dots, x_n \in X$. To znamená, že horná časť siete nie je ani v jednej z týchto množín, spor.

Platnosť (3) $\implies$ (4) je zrejmá, lebo každá sieť má univerzálnu podsieť.

Na záver ukážeme implikáciu (4) $\implies$ (2). Nech $\mathcal{F} = \{C\}$ je centrovanej systém uzavretých množín. Vložíme tam všetky (chýbajúce) konečné prieniky množín z $\mathcal{F}$ t.j. uzavrieme systém $\mathcal{F}$ vzhľadom na konečné prieniky. Potom $\mathcal{F}$ je čiastočne usporiadaná množina pomocou inklúzie a je usmernená. Takže podľa predpokladu sieť $\{x_C\}_{C \in \mathcal{F}}$, kde $x_C \in C$, má konvergentnú podsieť. Nech je daná kofinálnym zobrazením $h: D \rightarrow \mathcal{F}$. Nech $\lim x_{h(\alpha)} = x$. Potom pre ľubovoľné $C \in \mathcal{F}$ existuje $\beta \in D$ také, že pre $\gamma \in D$, $\gamma \geq \beta$ je $h(\gamma) \subseteq C$, a teda $x_{h(\gamma)} \in h(\gamma) \subseteq C$. Keďže C je uzavretá, tak $x \in C$. Takže $x \in \cap_{C \in \mathcal{F}} C$. $\square$

CVIČENIE 5.2. *Sieť $\mu: D \rightarrow X$ v súčine priestorov $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ konverguje práve vtedy, keď pre každé $\alpha \in I$ konverguje sieť $\pi_\alpha \circ \mu$. Dokážte.*

VERA 5.9 (Tichonovova). *Súčin ľubovoľného systému kompaktných priestorov X_α , $\alpha \in I$ je kompaktný priestor.*

Dôkaz: Nech $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ a $\mu: D \rightarrow X$ je univerzálna sieť. Potom $\pi_\alpha \circ \mu$ je univerzálna sieť v každom priestore X_α . Takže konverguje ku prvku $x_\alpha \in X_\alpha$. To znamená, že sieť μ konverguje k bodu $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$. To znamená, že X je kompaktný. $\square$

CVIČENIE 5.3. *Suma konečného systému kompaktných priestorov X_α , $\alpha \in I$ je kompaktný priestor. Dokážte!*

CVIČENIE 5.4. *Nájdite príklad nekonečného systému kompaktných priestorov, ktorých suma dá nekompaktný priestor.*

CVIČENIE 5.5. *Podpriestor euklidovského priestoru $\mathbb{R}^n$ je kompaktný práve vtedy, keď je uzavretý a ohraničený.*

DEFINÍCIA 5.6 (Lokálna kompaktnosť). *Priestor sa nazýva lokálne kompaktný, ak každý bod má kompaktné okolie.*

CVIČENIE 5.6. *Ukážte, že každý priestor X možno rozšíriť o jeden bod ∞ tak, $X^* = X \cup \{\infty\}$ má na podmnožine X rovnakú topológiu a X^* je kompaktný. Ide o tzv. jednobodovú alebo Alexandrovovu kompaktifikáciu. Ukážte, že X^* má hustú podmnožinu X , ak X nie je kompaktný. Ukážte, že X^* je Hausdorffov práve vtedy, keď X je Hausdorffov a lokálne kompaktný. [Návod: Okolia nového bodu majú kompaktný a uzavretý doplnok v X .]*

6. Súvislé priestory

DEFINÍCIA 6.1 (Súvislosť. Cestná súvislosť. Oblúková súvislosť). *Topologický priestor sa nazýva súvislý, ak nie je zjednotením dvoch neprázdnych disjunktných otvorených podmnožín. Priestor X sa nazýva cestne súvislý, ak pre ľubovoľné body $x, y \in X$ existuje spojitý zobrazenie $f: [0, 1] \rightarrow X$ také, že $f(0) = x$ a $f(1) = y$. Takéto zobrazenie nazývame cestou. Topologický priestor sa nazýva oblúkovito súvislý, ak medzi každými dvoma bodmi priestoru existuje cesta, ktorá je homeomorfizmom.*

POZNÁMKA 6.1. *Cestná súvislosť sa v staršej literatúre nazýva aj lineárnou súvislosťou. Topologický priestor s dostatočne bohatou topológiou je cestne súvislý práve vtedy, keď je oblúkovito súvislý (napr. euklidovský priestor).*

Príklad: Diskrétny priestor s aspoň dvoma bodmi nie je súvislý. Zjednotenie disjunktných otvorených intervalov $\mathbb{R}$ je nesúvislé. Antidiskrétny priestor s dvoma bodmi je cestne súvislý, ale nie je oblúkovito súvislý.

VERA 6.1 (O obraze súvislého priestoru). *Nech X je súvislý, $f: X \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie. Potom $f(X)$ je súvislý podpriestor Y .*

Dôkaz: Nech $f(X)$ nie je súvislý, potom existujú jeho dve neprázdne otvorené disjunktné podmnožiny $U_1, U_2 \subseteq Y$ také, že $f(X) \subseteq U_1 \cup U_2$. To ale znamená, že $X \subseteq f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$, pričom $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$, čo je spor. $\square$

CVIČENIE 6.1. Ukážte, že v súvislom priestore X sú $\emptyset$ a X jediné jeho podmnožiny, ktoré sú aj otvorené aj uzavreté.

CVIČENIE 6.2. Ukážte, že spojité zobrazenie súvislého priestoru X do diskrétného priestoru D je konštantné.

VERA 6.2. Ak $\{Y_i\}_{i \in I}$ je systém súvislých množín v priestore X , pričom každé dve majú neprázdny prienik. Potom $\cup_{i \in I} Y_i$ je súvislý.

Dôkaz: Nech $Y = \cup_{i \in I} Y_i$ nie je súvislý, potom existujú dve otvorené množiny $U, V, U \cap V = \emptyset, Y \subseteq U \cup V$. To znamená, že buď sú všetky Y_i podmnožinou jednej množiny (napr. U) alebo je nejaká Y_i rozdelená v oboch množinách. Oba tieto závery vedú k sporu s predpokladmi. $\square$

VERA 6.3. Priestor, ktorý má hustý súvislý podpriestor, je tiež súvislý.

Dôkaz: Ide o jednoduché cvičenie. $\square$

VERA 6.4. Ak sa v priestore X pre každé dva body nachádza súvislý podpriestor, ktorý ich obsahuje, tak aj X je súvislý.

Dôkaz: Zoberme pevný bod $x_0 \in X$ a zoberme pre ľubovoľný bod $x \in X$ podpriestor Y_x taký, že je súvislý a obsahuje oba body. Potom systém $\{Y_x\}_{x \in X - x_0}$ spĺňa predpoklady vety 6.2. Teda X je súvislý. $\square$

DEFINÍCIA 6.2 (Komponent súvislosti). *Maximálna (v zmysle inkľúzie množín) súvislá otvorená podmnožina priestoru X sa nazýva komponentom súvislosti priestoru X .*

CVIČENIE 6.3. Ukážte, že $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ je súvislý. [Návod: Postupujte sporom.]

VERA 6.5. Každý lineárne súvislý priestor je aj súvislý.

Dôkaz: Sporom, keby bol nesúvislý, zoberieme body z dvoch rôznych komponentov súvislosti $x \in U_1, y \in U_2$. Potom $0 \in f^{-1}(U_1)$ a $1 \in f^{-1}(U_2)$ sú dve otvorené disjunktné množiny pokrývajúce $[0, 1]$, čo nie je možné, pretože $[0, 1]$ je súvislý. $\square$

Príklad: [Súvislý priestor, ktorý nie je lineárne súvislý] Priestor $X = [0, 0]^\top \cup \Gamma(x \mapsto \sin \frac{1}{x}) \subseteq \mathbb{R}^2$ je súvislý, ale nie je lineárne súvislý.

VETA 6.6 (Súčin súvislých priestorov). *Súčin $\prod_{s \in S} X_s$, $s \in S$ pre $X_s \neq \emptyset$ je súvislý práve vtedy, keď sú všetky X_s súvislé.*

Dôkaz: Ak je $X = \prod_{s \in S} X_s$ súvislý, tak sú aj X_s , lebo π_s sú spojité zobrazenia.

Obrátene, v prípade konečného počtu priestorov $X_1, \dots, X_n$ sa tvrdenie pre súčin ľahko ukáže matematickou indukciou z faktu, že ľubovoľné body $(x_1, \dots, x_n)$ a $(y_1, \dots, y_n)$ možno pokryť súvislým podpriestorom $X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times \{y_n\} \cup X_1 \times \dots \times \{x_{n-1}\} \times X_n$.

V prípade ľubovoľného systému priestorov využijeme predchádzajúci fakt. Nech $a = \{a_s\} \in X$ je pevne vybraný bod. Nech $\mathcal{T}$ je systém konečných podmnožín množiny S . Potom pre $T \in \mathcal{T}$ máme množinu $Q_T = \prod_{s \in S} A_s$, kde $A_s = \{a_s\}$ pre $s \notin T$ a inak $A_s = X_s$ pre $s \in T$. Je zrejmé, že $a \in \bigcap_{T \in \mathcal{T}} Q_T$ a že každé Q_T je súvislý priestor. Takže $Q = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} Q_T$ je súvislý. Navyše $Q \subseteq X$ je hustá. Takže aj X je súvislý. $\square$

Príklad: $\mathbb{R}^d$, $[a, b]^d$ sú súvislé priestory pre ľubovoľné kardinálne číslo d .

7. Lokálne euklidovské priestory

DEFINÍCIA 7.1 (Lokálne definované zobrazenie). *Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je jeho otvorené pokrytie. Nech $\mathcal{F} = \{f_S: S \rightarrow Y : S \in \mathcal{S}\}$ je systém zobrazení takých, že $f_{S_1}|_{S_1 \cap S_2} = f_{S_2}|_{S_1 \cap S_2}$ pre ľubovoľné $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$. Hovoríme, že zobrazenia sú koordinované. Potom zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ dané*

$$(5) \quad f(x) = f_S(x), \quad x \in S$$

nazývame zlepením koordinovaného systému zobrazení $\mathcal{F}$.

VETA 7.1 (Spojitosť koordinovaného zobrazenia). *Nech $\{U_s\}_{s \in S}$ je otvorené pokrytie X a $\{f_s\}_{s \in S}$ je koordinovaný systém spojitých zobrazení na Y . Potom zlepenie tohoto systému zobrazení je spojité zobrazenie.*

Dôkaz: Nech $U \subseteq Y$ je otvorená, potom $f^{-1}(U) = \bigcup_{s \in S} f_s^{-1}(U)$ je otvorená. $\square$

CVIČENIE 7.1. Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité vtedy a len vtedy, ak každý bod $x \in X$ má okolie U_x , na ktorom je toto zobrazenie spojité. Dokážte!

CVIČENIE 7.2. Nech $\{F_s\}_{s \in S}$ je lokálne konečné uzavreté pokrytie X (každý bod má okolie, ktoré má prienik len s konečným počtom množín z pokrytia) a $\{f_s\}_{s \in S}$ je koordinovaný systém spojitých zobrazení na ňom. Potom zlepenie tohoto systému zobrazení je spojité.

CVIČENIE 7.3. Nech X je topologický priestor, $\{U_s\}_{s \in S}$ je pokrytie X a $\{f_s\}_{s \in S}$ je koordinovaný systém spojitých zobrazení na ňom taký, že ich zlepenie je spojité zobrazenie. Ak sú všetky zobrazenia otvorené (uzavreté a systém $\{f_s(U_s)\}_{s \in S}$ lokálne konečný), tak aj zlepené zobrazenie je otvorené (uzavreté).

DEFINÍCIA 7.2 (Topologická varieta). T_2 -priestor X spĺňajúci druhú axiómu spočítateľnosti, kde pre ľubovoľný bod $x \in X$ existuje okolie $U_x \subseteq X$ homeomorfné s $\mathbb{R}^d$ nazývame topologickou varietou. Homeomorfizmus $\phi_x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^d$, kde U_x je okolie bodu x nazývame súradnicovým zobrazením tohto okolia. Zobrazenie $\phi_{xy}: \phi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \phi_y(U_x \cap U_y)$ dané $\phi_{xy} = \phi_y \circ \phi_x^{-1}$ nazývame zmenou súradníc alebo prechodovým zobrazením medzi súradnicami.

POZNÁMKA 7.1. Topologická varieta je teda hausdorffovský priestor so spočítateľnou bázou, ktorý je lokálne euklidovský.¹⁵

DEFINÍCIA 7.3 (Zobrazenie variety). Nech X je topologická varieta a $\mathcal{U} = \{U_x\}$ je pokrytie X otvorenými okoliami homeomorfnými s $\mathbb{R}^d$. Nech $\mathcal{F}$ je systém koordinovaných zobrazení na $\mathcal{U}$ do priestoru Y . Zlepenie tohoto systému zobrazení nazývame zobrazením variety X do Y .

DEFINÍCIA 7.4 (Funkcionálna štruktúra priestoru). Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Funkcionálnou štruktúrou na X je zobrazenie $F_X: \mathcal{T} \rightarrow \sqcup_{U \in \mathcal{T}} C^0(U, \mathbb{R})$, pričom

- (1) $F_X(U) \subseteq C^0(U, \mathbb{R})$ je podalgebra všetkých reálnych spojitých funkcií na U ,
- (2) všetky konštantné funkcie na U sú z $F_X(U)$,
- (3) pre $U, V \in \mathcal{T}$, $V \subseteq U$ a pre ľubovoľné $f \in F_X(U)$ je $f|_V \in F_X(V)$,
- (4) ak $f \in C^0(U, \mathbb{R})$, $U = \cup_{i \in I} U_i$ a $f|_{U_i} \in F_X(U_i)$, tak $f \in F_X(U)$. Dvojicu (X, F_X) nazývame funkcionálne štrukturovaný priestor.

¹⁵Euklides (asi 325 p.n.l–asi 265p.n.l) – grécky matematik, ktorý vydal dielo Základy pojednávajúce o geometrii budovanej axiomaticky. Jeho spôsob budovania matematickej teórie je vzorom pre ostatné (často aj nematematické) disciplíny. Časť matematiky bola ovplyvnená problémom V. postulátu o rovnobežkách, ktorý sa objasnil až objavením neeuklidovskej geometrie v 19. storočí v publikovaných prácach J. Bolyaya a N. Lobačevského.

Príklad: Často vyskykujúci sa príklad je $X = \mathbb{R}^n$ a $F_X(U) = C^0(U, \mathbb{R})$, reálny n -rozmerný priestor so všetkými spojitými funkciami nad každou z otvorených množín. Ďalšie príklady

- $F_X(U) = C^k(U)$, $k \geq 0$, všetky C^k diferencovateľné funkcie na $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
- $F_X(U) = C^\infty(U)$, všetky hladké (ľubovoľne diferencovateľné) funkcie na U
- $F_X(U) = C^\omega(U)$, všetky analytické funkcie na U (t.j. v každom bode U a nejakom jeho okolí sa dajú rozvinúť do konvergentného Taylorovho radu).

POZNÁMKA 7.2. Funkcionálne štrukturované priestory slúžia ako dôležitý odrazový mostík pre priestory vyskytujúce sa napr. v modernej algebraickej geometrii. Teória schém je ich priamym zovšeobecnením.

DEFINÍCIA 7.5 (Morfizmus štrukturovaných priestorov). Pod morfizmom dvoch štrukturovaných priestorov (X, F_X) , (Y, F_Y) rozumieme zobrazenie $\phi: X \rightarrow Y$, ktoré $f \in F_Y(U)$ priradí zobrazenie $f \circ \phi \in F_X(\phi^{-1}(U))$. Ak je takéto zobrazenie bijektívne a ϕ^{-1} je tiež morfizmom, tak hovoríme, že ϕ je izomorfizmus štrukturovaných priestorov.

DEFINÍCIA 7.6 (Hladká varieta). Topologickú varietu s funkcionálnou štruktúrou (M^n, F) lokálne izomorfnou s $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$ nazývame n -rozmernou hladkou varietou. Morfizmus dvoch hladkých variet nazývame diferencovateľné zobrazenie. Izomorfizmus dvoch diferencovateľných variet nazývame difeomorfizmus.

DEFINÍCIA 7.7 (Hladká varieta s okrajom). Topologická varieta M^n s funkcionálnou štruktúrou (M^n, F) , ktorá je lokálne izomorfná buď $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$ alebo $(\mathbb{R}_{\geq}^n, C^\infty)$, kde $\mathbb{R}_{\geq}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$, nazývame n -rozmernou diferencovateľnou varietou s hranicou. Hranicu tvoria všetky body s okolím druhého typu, pričom tieto body ležia na hranici tohto okolia.

POZNÁMKA 7.3. Lokálna izomorfnosť sa dá podrobnejšie vysvetliť tak, že každý $\mathbf{x} \in M$ má v M otvorené okolie U také, že $(U, F_U) \cong (V, C_V^\infty)$.

Príklad: Torus $\mathbb{T}^2$, sféra $\mathbb{S}^2$, projektívna rovina $\mathbb{RP}^2$.

CVIČENIE 7.4. Nech X^* je priestor zložený z dvoch typov bodov – $X^* = X_1 \cup X_2$. Podpriestor $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ a $X_2 = \{(x, \phi) \in \mathbb{R} \times (0, \pi), \text{ kde dvojica } (x, \phi) \text{ zodpovedá polpriamke začínajúcej v bode } (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \text{ so smerovým vektorom } (\cos \phi, \sin \phi)\}$. Bázou okolí prvého typu bodov je obvyklá euklidovská dvojrozmerná topológia. Bázou bodu z množiny X_2 je systém okolí generovaný nasledujúcimi množinami:

pre $(x, \phi) \in X_2$ zoberme ϕ_1, ϕ_2 také, že $0 < \phi_1 < \phi < \phi_2 < \pi$, $\epsilon > 0$ a definujme okolie $U(\phi_1, \phi_2, \epsilon) = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in X_1 : (\bar{x} - x)^2 + \bar{y}^2 < \epsilon^2\} \cup \{(x, \psi) \in X_2 : \phi_1 < \psi < \phi_2\}$.

Zrejme ide o podpriestor, kde každý bod X_1 má euklidovské okolie dimenzie 2 a každý bod X_2 má okolie ako hraničný bod euklidovskej polroviny.

Zoberme priestor X , ktorý dostaneme spojením dvoch kópií takýchto priestorov pozdĺž svojich hraníc.

Ukážte, že priestor spĺňa všetky vlastnosti definície diferencovateľnej variety okrem druhej axiomy spočítateľnosti, má hustú spočítateľnú podmnožinu, má nespočítateľnú diskretnú podmnožinu a nie je normálny.

CVIČENIE 7.5. Ukážte, že funkcia

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$$

je C^∞ v bode 0. Aký je jej Taylorov rozvoj v bode 0? Je analytická? Nakreslite jej graf a aj graf funkcie $g(t) = \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$.

CVIČENIE 7.6. Ukážte, že funkcia $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{2^n}} \cos(2^n x)$ je hladká funkcia, ktorá nie je nikde analytická.

8. Bairove priestory

Táto časť obsahuje niektoré doplnky ku dôkazom viet z funkcionálnej analýzy.

DEFINÍCIA 8.1 (Bairov¹⁶ priestor. Bairove kategórie.). Nech X je topologický priestor. množina $A \subseteq X$ sa nazýva reziduálna, ak $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, kde A_n je otvorená a hustá v X . Priestor X sa nazýva Bairov, ak každá reziduálna množina je hustá.

Množina $B \subseteq X$ sa nazýva množina prvej Bairovej kategórie, ak $B = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$, kde C_n je uzavretá a $\text{int } C_n = \emptyset$. Ak množina nie je prvej Bairovej kategórie, tak hovoríme, že je druhej Bairovej kategórie.

Množina $B \subseteq X$ sa nazýva riedka, ak $\text{int}(\text{cl}(B)) = \emptyset$.

VETA 8.1 (Bairovskosť niektorých úplných priestorov). Úplné pseudometrické priestory sú bairovské a bairovský priestor je druhej Bairovej kategórie.

Dôkaz: Nech $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ sú otvorené a husté v X , ktorý je úplný a pseudometrický. Ukážeme, že $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ je tiež hustá v X . Nech $W \subseteq X$ je neprázdna a otvorená. Potom $U_1 \cap W \neq \emptyset$ a otvorená. Nech obsahuje $B_{r_0}(x_0)$ a $0 < r_0 < 1$. Zrejme $B_{r_0}(x_0) \cap U_2 \neq \emptyset$, je otvorená a obsahuje $B_{r_1}(x_1)$ pre $0 < r_1 < 2^{-1}$ a $\text{cl } B_{r_1}(x_1) \subseteq U_1 \cap B_{r_0}(x_0)$, atď. pomocou matematickej indukcie. Získali sme do seba zapadajúce uzavreté gule $\text{cl } B_{r_n}(x_n)$, kde $0 < r_n < 2^{-n}$. Takže cauchyovská postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

¹⁶Baire, René-Louis, (1874–1932), francúzsky matematik a súčasník Henriho Léona Lebesguea a Emila Borela. Jeho práca sa týkala najmä teórie množín a základov matematiky. Je po ňom pomenovaných niekoľko pojmov ako Bairova kategória, Bairova miera, Bairova množina, Bairova funkcia.

konverguje ku $x \in X$. Keďže $x \in B_{r_N}(x_N) \subseteq U_N \cap B_{r_0}(x_0)$ pre ľubovoľné $N \in \mathbb{N}$, tak $x \in W$, a teda $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je hustá množina.

Ak by $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, kde C_n je riedka množina v X , tak $\{X - C_n\}_{n=1}^{\infty}$ je spočítateľný systém otvorených hustých podmnožín a $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - C_n) \neq \emptyset$, a teda $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \neq X$. $\square$

POZNÁMKA 8.1. *Poznamenajme, že pseudometrický priestor sa od metrického priestoru líši v požiadavke, že pseudovzdialenosť je pozitívne semidefinítaná, t.j. spĺňa len požiadavku $d(x, x) = 0$ pre ľubovoľné $x \in X$. Nepožadujeme však, aby z platnosti $d(x, y) = 0$ platilo aj $x = y$.*

9. Ďalšie cvičenia z topológie

CVIČENIE 9.1. *Premyslite si, ktoré zo známych topologických vlastností priestoru sa priamo prenášajú na podpriestor. Ktoré sa prenášajú na otvorený podpriestor a ktoré na uzavretý podpriestor. Hovoríme o dedičnosti vlastností.*

KAPITOLA 2

Funkcionálna analýza

1. Lineárne normované priestory

Funkcionálna analýza sa zaoberá topológiou, geometriou, riešením rovníc a ďalšími vlastnosťami priestorov funkcií. Primárnym objektom sú priestory s nekonečnou dimenziou (napr. všetky reálne funkcie nad intervalom $[0, 1]$), ale pre účely numerických výpočtov sa treba obmedziť na niektoré ich konečnorozmerné podpriestory (napr. priestor všetkých polynómov stupňa najvyššie k). V týchto podpriestoroch hľadáme buď presné riešenia úloh alebo ich vhodné aproximácie. Vlastnosti vyplývajúce z konečnej resp. najmä nekonečnej dimenzie môžu niekedy odporovať intuícii. Aj preto treba postupy pri budovaní teórie dôkladne zdôvodniť.

V celom texte sa výsledky formulujú nad polom F . Ak nie je špecifikované inak, tak $F = \mathbb{R}$ alebo $F = \mathbb{C}$ a z kontextu je zrejmé, ktorý prípad máme na mysli.

DEFINÍCIA 1.1 (Norma. Priestor s normou.). *Nech X je reálny (komplexný) vektorový priestor (nie nutne konečnorozmerný). Zobrazenie $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťami*

pozitívna (semi)definitnosť: $\|\vec{x}\| \geq 0$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ a $\|\vec{x}\| = 0$ práve vtedy, keď $\vec{x} = \vec{0}$ (druhá časť za spojkou „a“ pri semidefinitnosti nemusí platiť),

homogénnosť: $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$, pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$),

trojuholníková nerovnosť: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in X$.

nazývame (polo)normou na priestore X . Hovoríme, že X je vektorový priestor s normou (polonormou), ak je na ňom definovaná norma (polonorma).

Príklad: Reálny d -rozmerný priestor $\mathbb{R}^d$ s euklidovskou normou $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2}$, kde $\vec{x} = (x^1, \dots, x^d)$ a $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$.

Na $\mathbb{R}^d$ existuje veľa noriem. Špeciálne každý výraz tvaru

$$(6) \quad \|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x^1|^p + \dots + |x^d|^p}, \quad p > 1$$

definuje normu na $\mathbb{R}^d$. Nazývame ju p -normou. Prípad $p = 2$ je euklidovská norma. Špeciálne pre $p = 1$ sa táto norma definuje pomocou

výrazu

$$(7) \quad \|\vec{x}\|_1 = |x^1| + \dots + |x^d|$$

a podobne pre $p = \infty$

$$(8) \quad \|\vec{x}\|_\infty = \sup_i |x^i|.$$

Komplexný d -rozmerný priestor $\mathbb{C}^d$ s *hermitovskou*¹ normou $\|\vec{z}\|_2 = \sqrt{z^1 \bar{z}^1 + \dots + z^d \bar{z}^d}$, kde $\vec{z} = (z^1, \dots, z^d)$ a $z^i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, d$, kde $\bar{z}$ je komplexne združené číslo ku z .

Príklad: [$\|\vec{x}\|_p$ je norma.] Nech $p = 1$, potom je zrejmé, že $\|\cdot\|_1$ spĺňa všetky vlastnosti normy. Pre $p > 1$ a $p = \infty$ je zrejmá pozitívna definitnosť a homogénosť. Ukážeme, že platí aj trojuholníková nerovnosť. Dôkaz sa skladá z ukázania troch nerovností

Youngova² **nerovnosť:**

$$(9) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \geq 0,$$

Hölderova³ **nerovnosť:**

$$(10) \quad \sum_{i=1}^d |x^i| |y^i| \leq \left(\sum_{i=1}^d |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^d |y^i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{alebo} \quad \|\vec{x}\vec{y}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q,$$

Minkowského⁴ **nerovnosť:**

$$(11) \quad \left(\sum_{i=1}^d |x^i + y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^d |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^d |y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{alebo} \quad \|\vec{x} + \vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p,$$

kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Všimnite si, že v alternatívnom zápise Hölderovej nerovnosti, $\vec{x}\vec{y}$ **nie** je skalárny súčin vektorov ale d -rozmerný vektor, ktorého súradnice sú $x^i y^i$.

¹Charles Hermite (1822–1901) – francúzsky matematik, priatelil sa z významnými matematikmi svojej doby – Bertrandom, Jacobim, Cauchym. Zaoberal sa teóriou čísel (e je transcendentné), teóriou kvadratických foriem a invariantov, eliptickými funkciami. Jeho meno nesú pojmy hermitovská matica, hermitovský priestor, Hermitova diferenciálna rovnica, Hermitov polynóm a ďalšie.

²William Henry Young (1863–1942) – britský matematik, ktorý pracoval v teórii miery a Fourierových radov. Nezávislo objavil ekvivalentnú formuláciu Lebesguovho integrálu dva roky po Lebesguovi. Vydal aj knižku elementárnej geometrie. K výskumu sa dostal najmä pod vplyvom svojej manželky a stretnutí s Felixom Kleinom.

³Otto Hölder (1859–1937) – nemecký matematik zaoberajúci sa teóriou Fourierových radov a neskôr teóriou grúp. Je po ňom pomenovaná známa nerovnosť a veta z oblasti kompozičných radov grúp (Jordanova-Hölderova veta).

⁴Hermann Minkowski (1864–1909) – v Rusku narodený nemecký matematik so širokým záberom. Blízky spolupracovník a priateľ Hilberta. Počas svojho života

Najprv dokážeme Youngovu nerovnosť. Lahko nahliadneme, že platí pre $a = 0$ alebo $b = 0$. Takisto platí rovnosť v prípade, že $a^p = b^q$, lebo $ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{p}} a^{\frac{p}{q}} = a^{p(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Nech teda $a^p \neq b^q$. Potom platí $\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q$. Funkcia $\ln(x)$ je rastúca, takže $\ln a^p \neq \ln b^q$. Funkcia e^x je ostro konvexná na $\mathbb{R}$. Takže platí $e^{(1-t)x+ty} < (1-t)e^x + te^y$. Potom

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} < \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teraz ukážeme Hölderovu nerovnosť. Ak $\vec{x} = \vec{0}$ alebo $\vec{y} = \vec{0}$, tak sa (ne)rovnosť ukáže ľahko. V opačnom prípade

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d |x^i| |y^i| &= \left(\sum_{i=1}^d \frac{|x^i|}{\|\vec{x}\|_p} \frac{|y^i|}{\|\vec{y}\|_q} \right) \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left(\frac{|x^i|^p}{p \|\vec{x}\|_p^p} + \frac{|y^i|^q}{q \|\vec{y}\|_q^q} \right) \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q = \\ &= \left(\frac{\|\vec{x}\|_p^p}{p \|\vec{x}\|_p^p} + \frac{\|\vec{y}\|_q^q}{q \|\vec{y}\|_q^q} \right) \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q = \\ &= \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q. \end{aligned}$$

Poslednou nerovnosťou je Minkowského nerovnosť. Ak $\|\vec{x} + \vec{y}\| = 0$, tak nerovnosť triviálne platí. Nech teda $\|\vec{x} + \vec{y}\| > 0$. Potom

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^d |x^i + y^i|^p \leq \sum_{i=1}^d (|x^i| + |y^i|) |x^i + y^i|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^d |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^d |x^i + y^i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^d |y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^d |x^i + y^i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p) \left(\sum_{i=1}^d |x^i + y^i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p) \|\vec{x} + \vec{y}\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

lebo $(p-1)q = p$ a $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$. Skrátením $\|\vec{x} + \vec{y}\|_p^{p-1}$ dostávame výsledok.

publikoval práce z teórie kvadratických foriem, neeuklidovských priestorov, geometrie foriem, matematickej fyziky a teórie čísel. Je po ňom pomenovaný časopriestor, Minkowského súčet, niekoľko nerovností.

CVIČENIE 1.1. Dokážte Youngovu nerovnosť pomocou faktu, že $f(t) = \frac{t^p}{p} - t + \frac{1}{q}$ má pre $t \geq 0$ minimum v bode 1, kde $p > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

CVIČENIE 1.2. Dokážte Youngovu nerovnosť pomocou geometrickej úvahy o obsahu obdĺžnika so stranami dĺžok $a > 0$, $b > 0$. V karteziánskej súradnicovej sústave zobrazte graf funkcie $h(x) = x^{p-1}$. Obsah útvaru ohraničený osou x , grafom funkcie $h(x)$ a priamkami $x = 0$, $x = a$, je $\frac{a^p}{p}$. Ako je to s obsahom útvaru ohraničeným funkciou $h(x)$, $y = b$, $x = 0$ a $x = a$? Aký je jeho vzťah ku $\frac{b^q}{q}$? Nakreslite si k tomu obrázok. Predpokladáme, že $p > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Príklad: [L^p - priestory] Pre tých, ktorí nemali teóriu miery je pripravený stručný prehľad výsledkov v Dodatku A. Ako dobrá prvá aproximácia postačí predstavovať si známy Riemannov⁵ integrál na „pekných“ funkciách. Lebesguov⁶ integrál je jeho rozšírenie, ktoré funguje aj na „menej pekných“ funkciách, ktoré sa líšia od pekných v zanedbateľnej množine, pričom „zanedbávaná“ množina však môže byť prekvapujúco veľká, (napr. pre $S = \mathbb{R}$, to môže byť $\mathbb{Q}$).

Nech (S, μ) je priestor s mierou a f je merateľná komplexná funkcia na S a platí $\|f\|_p = (\int_S |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$, kde $p \geq 1$. Pre $p = \infty$ položíme $\|f\|_\infty = \inf \{C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ pre skoro všetky } x \in S\}$. Potom množina všetkých takýchto funkcií tvorí vektorový priestor s operáciami definovanými po bodoch priestoru S .

Musíme teda ukázať, že $\lambda f \in L^p(S, \mu)$ pre $\lambda \in \mathbb{C}$ a $f \in L^p(S, \mu)$, čo je zrejmé. A treba aj, že pre $f, g \in L^p(S, \mu)$ aj $f + g \in L^p(S, \mu)$. Tento fakt zabezpečujú postupne Hölderova nerovnosť a Minkowského nerovnosť v potrebnej podobe pre $1 \leq p \leq \infty$. Ostatné prípady sa dajú ukázať analogicky.

Hölderovu nerovnosť stačí ukázať pre funkcie f, g také, že $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Tie funkcie, ktoré majú nenulovú normu, možno vydeliť touto normou (je to reálna konštanta). Tie, ktoré majú nulovú normu, spĺňajú túto nerovnosť automaticky.

Z Youngovej nerovnosti pre $|f(x)g(x)|$ máme po integrácii

$$\int_S |f(x)g(x)| d\mu \leq \int_S \frac{1}{p} |f(x)|^p d\mu + \int_S \frac{1}{q} |g(x)|^q d\mu \leq 1 = \|f\|_p \|g\|_q,$$

takže $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, čo je Hölderova nerovnosť.

⁵Bernhard Riemann (1826–1866) – nemecký matematik s významnými príspevkami k analýze a diferenciálnej geometrii. Jeho výsledky sú v mnohých oblastiach prelomové a jeho meno nesie veľa matematických pojmov ako Riemannova sféra, Riemannova plocha, Riemannov tenzor krivosti, Riemannova geometria, Riemannov integrál, Riemannova Rochova veta, Riemannova hypotéza a iné.

⁶Henri Léon Lebesgue (1875–1941) – francúzsky matematik známy najmä teóriou integrovania. Zovšeobecnil integrovanie funkcií aj pre tie, ktoré majú množinu nespojitosti s nulovou Lebesguovou mierou. Zaoberal sa aj teóriou Fourierových radov.

Na dôkaz Minkowského nerovnosti použijeme Hölderovu nerovnosť pri prechode medzi druhým a tretím riadkom nasledujúcich nerovností.

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p &= \int_S |f + g|^p d\mu \leq \int_S (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu = \\ &= \int_S |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int_S |g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \\ &\leq \left(\left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_S |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_S (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Teraz stačí už len skrátiť $\|f + g\|_p^{p-1}$, ak je táto hodnota nenulová. Ak $\|f + g\|_p = 0$, tak tvrdenie platí triviálne.

Ďalej si musíme uvedomiť, že $\|\cdot\|_p$ je polonorma na $L^p(S, \mu)$, takže normu dostaneme až pre vektorový priestor $L^p(S, \mu)/\ker \|\cdot\|_p$. Tento priestor sa nazýva *Lebesguov p -priestor* a vyskytuje sa vo veľa aplikáciách.

CVIČENIE 1.3. *Odvodte z predchádzajúceho výsledku Hölderovu a Minkowského nerovnosť pre $\mathbb{R}^n$ použitím špeciálnych funkcií pre $S = [0, 1]$ a mieru μ odvodenú od euklidovskej normy.*

Príklad: [ℓ^p -priestory] Priestor

$$(12) \quad \ell^p(\mathbb{C}) = \{(a^i)_{i=0}^\infty : a^i \in \mathbb{C}, \left(\sum_{i=0}^\infty |a^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

so sčítaním postupností po členoch s rovnakým indexom a násobením skalárom po členoch je spolu s normou $\|a\|_p = \left(\sum_{i=0}^\infty |a^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ lineárny normovaný priestor pre $1 \leq p < \infty$. Pre $p = \infty$ definujeme $\|a\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}_0} |a^i|$. Opäť ide o lineárny normovaný priestor.

CVIČENIE 1.4. *Ukážte, že $\ell^p(\mathbb{C})$ a aj $\ell^p(\mathbb{R})$ je lineárny priestor s normou uvedenou v predchádzajúcom príklade.*

DEFINÍCIA 1.2 (Skalárny súčin v reálnom vektorovom priestore). *Nech X je reálny vektorový priestor. Zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťami*

linearita: $\langle \vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \beta \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$,

symetria: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,

kladná definitnosť: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ a $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ práve vtedy, keď $\vec{x} = \vec{0}$

platnými pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nazývame reálny skalárny súčin.

Príklad: Štandardný skalárny súčin na $\mathbb{R}^d$ je daný výrazom

$$(13) \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^1 y^1 + \cdots + x^d y^d.$$

POZNÁMKA 1.1. *Linearita platí v druhej premennej v reálnom skalárnom súčine. Ako je to v prvej premennej?*

DEFINÍCIA 1.3 (Skalárny súčin v komplexnom vektorovom priestore). *Nech X je komplexný vektorový priestor. Zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ s vlastnosťami*

pololinearita: $\langle \vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \beta \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle,$

polosymetria: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle},$

kladná definitnosť: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ a $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ práve vtedy, keď $\vec{x} = \vec{0}$

platnými pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ nazývame komplexný (hermitovský) skalárny súčin.

POZNÁMKA 1.2. *Pololinearita platí v druhej premennej komplexného skalárneho súčinu. Ako je to v prvej premennej?*

Hovoríme, že reálny skalárny súčin je bilineárny a komplexný skalárny súčin je jeden a pol lineárny (sesquilineárny).

Príklad: Štandardný skalárny súčin na $\mathbb{C}^d$ je daný výrazom

$$(14) \quad \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = z^1 \overline{w^1} + \dots + z^d \overline{w^d}.$$

CVIČENIE 1.5. *Zistite, čo dostaneme použitím vlastností reálneho (komplexného) skalárneho súčinu pre výraz $\langle \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}, \vec{x} \rangle$.*

META 1.1 (Norma indukovaná skalárnym súčinom). *Nech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je reálny (komplexný) skalárny súčin na priestore X . Potom $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ pre $\vec{x} \in X$ je norma na X .*

Dôkaz: Kladná definitnosť tohoto zobrazenia vyplýva bezprostredne z kladnej definitnosti skalárneho súčinu.

Homogénnosť dostávame použitím jeden a pol linearitu a polosymetrie, lebo

$$\|\lambda \vec{x}\|^2 = \langle \lambda \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = |\lambda|^2 \|\vec{x}\|^2.$$

Analogicky v reálnom prípade.

Tretiu časť ukážeme pomocou Cauchyho⁷-Schwarzovej⁸-Buňakovského⁹ nerovnosti (CSB)

$$(15) \quad |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in X.$$

Keďže

$$0 \leq \langle \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \rangle = |\alpha|^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\Re(\alpha \bar{\beta} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) + |\beta|^2 \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle,$$

môžeme použitím $\alpha = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ a $\beta = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ dostať

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle|^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\Re(\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) + |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \\ &= |\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle|^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle, \end{aligned}$$

čo pre $\vec{y} \neq \vec{0}$ dáva po skrátaní výrazom $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ CSB nerovnosť. Pre $\vec{y} = \vec{0}$ platí táto nerovnosť triviálne.

Počítajme teraz s použitím $|\Re(z)| \leq |z|$ pre $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2\Re(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) + \|\vec{y}\|^2 \leq \\ &\leq \underbrace{\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2}_{\text{CSB nerovnosť}} = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Keďže oba výrazy sú nezáporné, odmocnením dostávame trojuholníkovú nerovnosť. $\square$

DEFINÍCIA 1.4 (Norma indukovaná skalárnym súčinom). *Normu z vety 1.1 nazývame norma indukovaná skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

VETA 1.2 (Polarizácia a rovnobežníkové pravidlo). *Nech X je lineárny priestor a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalárny súčin na tomto priestore. Potom pre reálny skalárny súčin platí polarizačný vzťah*

$$(16) \quad 4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$$

a v komplexnom prípade

$$(17) \quad 4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + i\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2$$

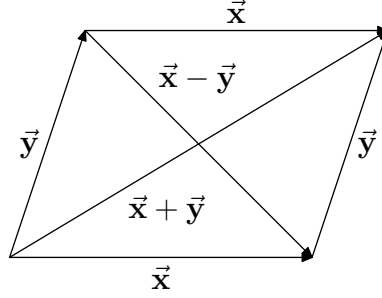
a v oboch prípadoch platí rovnobežníkové pravidlo (pozri obr. 1)

$$(18) \quad \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$$

⁷Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – francúzsky matematik s obrovskou výkonnosťou (takmer 800 prác) z oblasti reálnej a komplexnej analýzy, teórie svetla, matematickej fyziky a teoretickej mechaniky. Je po ňom pomenovaných veľa pojmov ako Cauchyho integrálna veta, Cauchyho-Kovalevskej veta o existencii riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc, Cauchyho-Riemannove podmienky, Cauchyovská postupnosť atď.

⁸Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) – nemecký matematik, zaoberal sa teóriou minimálnych plôch, konformnými zobrazovacími, Riemannovým zobrazovaním jednoducho súvislej množiny. Schwarzova minimálna plocha ako aj Cauchyho-Schwarzova-Buňakovského nerovnosť je niekoľko pojmov, ktorými ovplyvnil viacerých významných matematikov.

⁹Viktor Jakovlevič Buňakovskij (1804–1889) – ruský matematik, vyštudoval u Cauchyho. Pracoval v oblasti teórie čísel, geometrie a aplikovanej matematiky.



OBR. 1. Rovnobežníkové pravidlo hovorí (v euklidovskom prípade) o vzťahu obsahov štvorcov nad stranami a uhlopriečkami rovnobežníka.

Dôkaz: Priame rozpísanie podľa pravidiel skalárneho súčinu. $\square$

Označme v ďalšom texte otvorenú guľu, uzavretú guľu a guľovú nadplochu so stredom $\vec{x}$ a s polomerom ϵ symbolmi

$$B_\epsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} \in X : \|\vec{y} - \vec{x}\| < \epsilon\},$$

$$D_\epsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} \in X : \|\vec{y} - \vec{x}\| \leq \epsilon\},$$

$$S_\epsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} \in X : \|\vec{y} - \vec{x}\| = \epsilon\}.$$

VETA 1.3 (Metrizácia vektorového priestoru s normou. Zúplnenie.). *Každý vektorový priestor s normou je aj metrický priestor s metrikou $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Každý vektorový priestor X s normou sa dá zúplniť na $\tilde{X}$, pričom X je hustý v $\tilde{X}$.*

Dôkaz: Je zrejmé, že d je metrika. Každý metrický priestor X vieme zúplniť (poz. [13]) na $\tilde{X}$ tak, aby $X \subseteq \tilde{X}$ bol v tomto priestore hustý a na ňom definujeme normu pomocou $\|\vec{x}\| = d(\vec{x}, \vec{0})$. Homogenosť tohoto výrazu dostaneme limitným prechodom a z hustoty X v $\tilde{X}$. Ostatné vlastnosti normy sú zrejmé. $\square$

VETA 1.4 (Báza topológie indukovanej normou). *Nech X je normovaný vektorový priestor. Potom $\tilde{\mathcal{B}} = \{B_\epsilon(\vec{x}) : \vec{x} \in X, \epsilon > 0\}$ je báza topológie na X .*

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že konečný prienik takýchto množín je buď prázdny alebo obsahuje bod $\vec{y}$ a s ním aj nejakú množinu z $\tilde{\mathcal{B}}$. Na korektný dôkaz potrebujeme trojuholníkovú nerovnosť.

Ak totiž $\vec{y} \in B_{\epsilon_1}(\vec{x}_1) \cap B_{\epsilon_2}(\vec{x}_2)$, tak $B_\epsilon(\vec{y}) \subset B_{\epsilon_1}(\vec{x}_1) \cap B_{\epsilon_2}(\vec{x}_2)$, kde $\epsilon = \min\{\epsilon_1 - \|\vec{y} - \vec{x}_1\|, \epsilon_2 - \|\vec{y} - \vec{x}_2\|\}$. $\square$

DEFINÍCIA 1.5 (Topológia indukovaná normou). *Nech X je normovaný vektorový priestor. Potom topológiu danú bázou z vety 1.4 nazývame topológiou na X indukovanou normou $\|\cdot\|$.*

CVIČENIE 1.6. Ukážte, že zobrazenie $\phi: X \rightarrow F$, $\phi(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ je spojité.

DEFINÍCIA 1.6 (Banachov priestor). Úplný vektorový priestor s normou $(X, \|\cdot\|)$ nazývame Banachov priestor.

Príklad:[Priestor ohraničených funkcií] Nech X je množina. Označme $B(X, F) = \{f: X \rightarrow F : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$, $F = \mathbb{R}$ alebo $F = \mathbb{C}$. Ide o ohraničené funkcie na X . Zrejme $B(X, F)$ je vektorový priestor s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Navyše ide o Banachov priestor.

Nech $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je cauchyovská postupnosť v $B(X, F)$. Potom pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, že pre $m, n > N(\epsilon)$ platí $\|f_n - f_m\| < \epsilon$. Ukážeme, že má limitu v $B(X, F)$.

Keďže $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pre $g \in B(X, F)$, tak $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je cauchyovská postupnosť v F , lebo $|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\|$, a teda má v F limitu. Označme ju $f(x)$. Máme teda $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon$ a pre $m \rightarrow \infty$ dostaneme $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon$, teda $f_n - f \in B(X, F)$, čo znamená, že $f \in B(X, F)$. Navyše $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Teda $B(X, F)$ je úplný.

Aký priestor dostaneme, keď $X = \mathbb{N}$?

Príklad:[Priestor spojitých ohraničených funkcií] Nech X je topologický priestor. Označme $CB(X, F) = \{f: X \rightarrow F : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty, f \text{ je spojitá}\}$. Norma je indukovaná z $B(X, F)$. Potom $CB(X, F)$ je uzavretý podpriestor $B(X, F)$, lebo cauchyovská postupnosť v tomto priestore má bodovú limitu a tá je vzhľadom na metriku rovnomernou limitou spojitých funkcií, čo znamená spojitost limitnej funkcie. Teda $CB(X, F)$ je Banachov priestor.

Ak X je kompaktný, potom $CB(X, F) = C(X, F)$ (priestor spojitých funkcií na X) je Banachov. (Konvergentná postupnosť spojitých funkcií na kompaktnom priestore konverguje rovnomerne k svojej limite, a teda limita je spojitá funkcia. Spojitý obraz kompaktného priestoru je kompaktný, teda je uzavretý a ohraničený v F .)

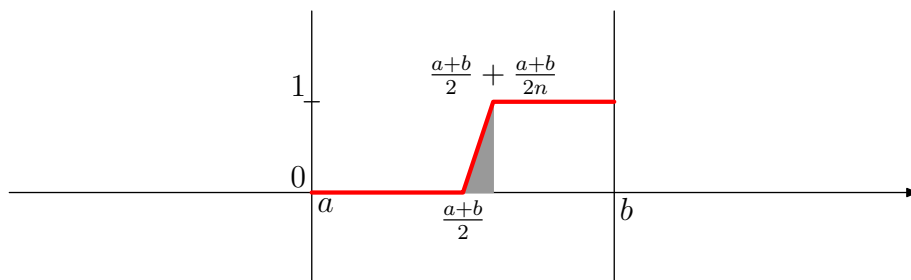
Typický príklad je $C[0, 1]$ so suprémovou metriku.

Príklad:[Neúplný vektorový priestor] Nech $C([a, b], \mathbb{R})$ je priestor spojitých reálnych funkcií na $[a, b]$. Uvažujme L^1 normu. Postupnosť funkcií (pozri obr. 2)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, \frac{a+b}{2}), \\ \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2n}} & x \in [\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2n}), \\ 1 & x \in [\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2n}, b], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je zrejmé, že postupnosť $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je cauchyovská, ale jej limita je nespojitá.

DEFINÍCIA 1.7 (Lineárne nezávislá množina). Nech X je vektorový priestor nad poľom F . Množinu $B \subseteq X$ nazývame lineárne nezávislou,



OBR. 2. Cauchyovská postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nekonvergujúca v $C([a, b], \mathbb{R})$ s L^1 normou.

ak z rovnosti $c_1 \vec{x}_1 + \dots + c_n \vec{x}_n = \vec{0}$ vyplýva, že $c_1 = \dots = c_n = 0$, kde $c_1, \dots, c_n \in F$ a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in B$ sú ľubovoľné.

DEFINÍCIA 1.8 (Algebraická báza). *Nech X je lineárny priestor. Množinu $H \subseteq X$ nazývame algebraickou bázou priestoru X , ak každý prvok X možno napísať pomocou prvkov tejto bázy ako jednoznačnú konečnú lineárnu kombináciu. Často sa táto báza nazýva aj Hamelova.*¹⁰

VETA 1.5 (Existencia Hamelovej bázy). *Nech X je vektorový priestor nad polom. Nech množina $B_0 \subseteq X$ je lineárne nezávislá. Potom existuje algebraická báza B priestoru X taká, že $B_0 \subseteq B$.*

Dôkaz: Nech $\mathcal{B} = \{B \subseteq X : B_0 \subseteq B, B \text{ je lineárne nezávislá}\}$. Na $\mathcal{B}$ máme čiastočné usporiadanie dané reláciou $B \preceq B'$ práve vtedy, keď $B \subseteq B'$ t.j. keď báza B generuje podpriestor priestoru generovaného bázou B' . Je zrejmé, že reťazec $\{B_i\}_{i \in I}$ je zhora ohraničený priestorom generovaným množinou $\cup_{i \in I} B_i$. Podľa Zornovej lemy teda existuje maximálny prvok. Nech je to množina H .

Ukážeme sporom, že prvky množiny H generujú celý priestor. Keby negenerovala napr. prvok $\vec{x} \in X$, tak $H \cup \{\vec{x}\}$ je z $\mathcal{B}$ a dostávame spor s maximalitou množiny H .

Množina H je aj lineárne nezávislá. Nech $c_1 \vec{x}_1 + \dots + c_n \vec{x}_n = \vec{0}$. Potom existujú množiny $B_{j_1}, \dots, B_{j_n} \in \mathcal{B}$ z reťazca také, že $\vec{x}_i \in B_{j_i}$. Keďže sú lineárne usporiadané, nech napr. B_{j_n} obsahuje všetky $\vec{x}_i$. Potom sú ale koeficienty $c_1 = \dots = c_n = 0$. $\square$

DEFINÍCIA 1.9 (Lineárne zobrazenie). *Nech X, Y sú lineárne priestory nad polom F . Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ sa nazýva lineárne, ak spĺňa $f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in F$ a $\vec{x}, \vec{y} \in X$. Množinu všetkých lineárnych zobrazení z priestoru X do priestoru Y označujeme $L_a(X, Y)$. Ak $Y = F$, tak zobrazenia nazývame lineárne funkcionály.*

¹⁰Georg Karl Wilhelm Hamel (1877–1954) nemecký matematik s prácami v oblasti teórie funkcií, mechaniky a základov matematiky. Prácu o báze publikoval v r. 1905.

POZNÁMKA 1.3. *Existencia lineárneho zobrazenia medzi priestormi X a Y je zaručená napr. vďaka existencii Hamelovej bázy. Stačí predpísať obraz každému prvku bázy a zvyšok je určený pomocou linearít tohoto zobrazenia.*

VETA 1.6 (Ekvivalentné podmienky spojitosti lineárneho zobrazenia). *Nech $f: X \rightarrow Y$ je lineárne. Potom sú ekvivalentné nasledujúce podmienky*

- (1) *f je spojité zobrazenie*
- (2) *f je spojité zobrazenie v $\vec{0}$*
- (3) *existuje $M > 0$ také, že $\|f(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}\|$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$.*

Dôkaz: Z prvej podmienky je zrejmá druhá a z druhej prvá, pretože bazové okolie $B_\epsilon(\vec{y})$ ľubovoľného bodu $\vec{y} \in Y$ vieme napísať ako $\vec{y} + B_\epsilon(\vec{0}) = \{\vec{y} + \vec{z} : \vec{z} \in B_\epsilon(\vec{0})\}$. Z linearít zobrazenia f je teda $f^{-1}(B_\epsilon(\vec{y})) \subseteq f^{-1}(\vec{y}) + f^{-1}(B_\epsilon(\vec{0})) = \bigcup_{\vec{x} \in f^{-1}(\vec{y})} \vec{x} + f^{-1}(B_\epsilon(\vec{0}))$, čo je otvorená množina v X .

Tretia podmienka zrejme dáva ľahko druhú. Ak platí druhá podmienka, tak existuje $\delta > 0$, že $B_\delta(\vec{0}) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(\vec{0}))$ pre ľubovoľné $\epsilon > 0$. Z linearít máme pre $\vec{x} \in X$, $\|\vec{x}\| = 1$, že $\|f(\vec{x})\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$. Položme $M = \frac{\epsilon}{\delta}$. Potom pre ľubovoľný nenulový vektor $\vec{x} \in X$ máme $\|f(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|})\| \leq M$, teda $\|f(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}\|$. $\square$

POZNÁMKA 1.4. *Treba si uvedomiť, že $\|f(\vec{x})\|$ je norma v Y a $\|\vec{x}\|$ je norma v X .*

DEFINÍCIA 1.10 (Priestor spojitých lineárnych zobrazení). *Množinu všetkých spojitých lineárnych zobrazení z priestoru X do priestoru Y označujeme $L(X, Y)$.*

CVIČENIE 1.7. *Dokážte, že $L(X, Y)$ je spolu s operáciou násobenia skalárom z poľa F vektorový priestor.*

CVIČENIE 1.8. *Ak $f \in L(X, Y)$, $g \in L(Y, Z)$, tak $g \circ f \in L(X, Z)$. Dokážte.*

DEFINÍCIA 1.11 (Ekvivalencia noriem). *Dve normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ na vektorovom priestore X sa nazývajú ekvivalentné, ak indukujú tú istú topológiu na X .*

VETA 1.7 (O ekvivalencii noriem). *Dve normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ na vektorovom priestore X sú ekvivalentné, ak existujú reálne konštanty $c_1, c_2 > 0$ také, že pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ platí*

$$(19) \quad c_1\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_2 \leq c_2\|\vec{x}\|_1.$$

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, ako je definovaná báza topológie indukovanej normou. Nech $\tilde{\mathcal{T}}_i$ je báza indukovaná normou $\|\cdot\|_i$ pre $i = 1, 2$. Ľahko vidno z nerovností (19), že pre $U_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1$ je $U_1 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{T}}_2, U \subseteq U_1} U$ a

rovnako pre $U_2 \in \tilde{\mathcal{T}}_2$ je $U_2 = \cup_{U \in \tilde{\mathcal{T}}_1, U \subseteq U_2} U$. To znamená, že $\tilde{\mathcal{T}}_1$ a $\tilde{\mathcal{T}}_2$ sú bázami rovnakej topológie. $\square$

VETA 1.8 (Ekvivalencia noriem v konečnorozmerných priestoroch). *Nech X je konečnorozmerný reálny alebo komplexný vektorový priestor. Potom sú ľubovoľné dve normy ekvivalentné.*

Dôkaz: Nech $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ báza priestoru $\mathbb{R}^n$ a $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. Na $\mathbb{R}^n$ je $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ normou. Ukážeme, že každá iná norma je s ňou ekvivalentná.

Nech $\|\cdot\|$ je ľubovoľná norma na $\mathbb{R}^n$. Potom zobrazenie $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ dané $\phi(\vec{x}) = \|\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\|$ je spojité v norme $\|\cdot\|_1$ na X , lebo z trojuholníkovej nerovnosti a homogenosti platí

$$\begin{aligned} |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| &\leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|\vec{e}_i\| \leq \max_i \|\vec{e}_i\| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ &\leq M \|\vec{x} - \vec{y}\|_1. \end{aligned}$$

Po zúžení zobrazenia na jednotkovú guľovú plochu v norme $\|\cdot\|_1$ (ktorá je kompaktná) je toto zobrazenie tiež spojité, kladné, a teda dosahuje kladné minimum M_1 a maximum M_2 . Potom môžeme písať pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$, že

$$(20) \quad M_1 \|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\| \leq M_2 \|\vec{x}\|_1,$$

a teda normy sú ekvivalentné.

Analogicky možno dôkaz vykonať aj pre komplexný priestor $\mathbb{C}^n$. $\square$

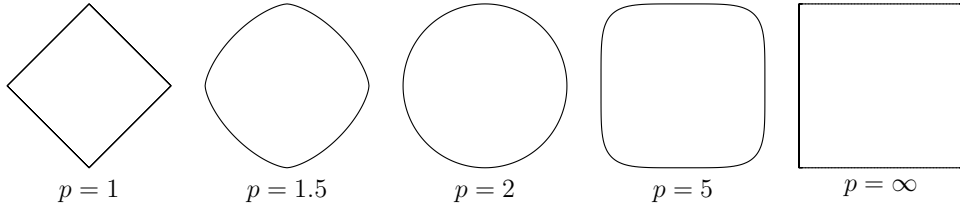
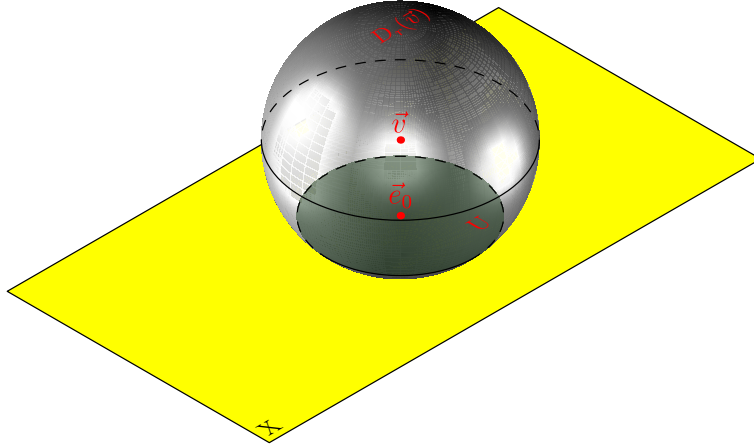
DÔSLEDOK 1.1 (Úplnosť konečnorozmerných priestorov s normou). *Konečnorozmerný reálny alebo komplexný vektorový priestor je úplný vzhľadom na ľubovoľnú normu.*

Dôkaz: Vieme, že euklidovská norma (resp. metrika) je úplná, teda aj každá iná norma je úplná. $\square$

CVIČENIE 1.9. *Ukážte, že ekvivalentnosť všetkých noriem v $\mathbb{R}^n$ znamená aj ekvivalentnosť všetkých noriem v $\mathbb{C}^k$.*

POZNÁMKA 1.5. *Jednotková guľová nadplocha v $\mathbb{R}^n$ sa dá pre rôzne p -normy ilustrovať. Prípad $n = 2$ možno pre niektoré p vidieť na obrázku*

VETA 1.9 (Kompaktnosť jednotkovej guľovej nadplochy). *Jednotková guľová plocha vo vektorovom priestore s normou je kompaktná vtedy a len vtedy, ak je priestor konečnorozmerný.*

OBR. 3. Jednotkové kružnice v rôznych p -normách v $\mathbb{R}^2$.

OBR. 4. Jednotková guľová nadplocha vo vektorovom priestore s nekonečnou dimenziou nie je kompaktná.

Dôkaz: V konečnorozmernom euklidovskom priestore je jednotková guľová nadplocha uzavretá a ohraničená, takže je aj kompaktná (poz. [13]).

Ak by bola kompaktná aj v nekonečnorozmernom priestore Y , môžeme ju pokryť konečným počtom gúľ $\{B_{\frac{1}{2}}(\vec{x}_1), \dots, B_{\frac{1}{2}}(\vec{x}_n)\}$, kde $\vec{x}_i \in S_1(\vec{0})$. Nech $X = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$. Je izomorfný s $\mathbb{C}^k$ (alebo $\mathbb{R}^k$). Je to teda úplný podpriestor Y , takže je uzavretý v Y . Ukážeme, že $X = Y$.

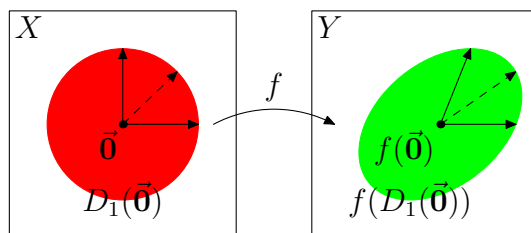
Ak totiž existuje $\vec{v} \in Y - X$, tak z uzavretosti X je $d = \inf\{\|\vec{v} - \vec{x}\| : \vec{x} \in X\} > 0$. Zoberme $r > d$, potom $U = D_r(\vec{v}) \cap X \neq \emptyset$ (pozri obr. 4). Keďže U je uzavretá a ohraničená množina, tak je kompaktná. Naviac hodnota d sa nadobúda pre nejaký vektor $\vec{e}_0 \in U$, lebo zobrazenie $\vec{e} \mapsto \|\vec{v} - \vec{e}\|$ je spojité. Teda pre nejaké $\vec{x}_i$ platí

$$(21) \quad \left\| \frac{\vec{v} - \vec{e}_0}{\|\vec{v} - \vec{e}_0\|} - \vec{x}_i \right\| < \frac{1}{2},$$

čo znamená, že

$$\|\vec{v} - \vec{e}_0 - \|\vec{v} - \vec{e}_0\| \vec{x}_i\| < \frac{1}{2} \|\vec{v} - \vec{e}_0\| = \frac{d}{2}.$$

Keďže $\vec{e}_0 + \|\vec{v} - \vec{e}_0\| \vec{x}_i \in X$, máme $\|\vec{v} - (\vec{e}_0 + \|\vec{v} - \vec{e}_0\| \vec{x}_i)\| < \frac{d}{2}$, spor s definíciou d . $\square$



OBR. 5. Deformácia jednotkovej gule lineárnym zobrazením a jej súvis s normou tohoto zobrazenia. V prípade konečnorozmerného priestoru je norma zobrazenia určená vektorom s maximálnou normou, ktorý je v obraze $D_1(\vec{0})$.

CVIČENIE 1.10. *Aké normy existujú v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$?*

CVIČENIE 1.11. *Ukážte, že lokálne kompaktný Banachov priestor je konečnorozmerný.*

DEFINÍCIA 1.12 (Norma lineárneho zobrazenia). *Nech $f: X \rightarrow Y$ je lineárne zobrazenie. Reálne číslo*

$$(22) \quad \|f\| = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} \|f(\vec{x})\|$$

nazývame normou lineárneho zobrazenia

CVIČENIE 1.12. *Nech f je lineárne zobrazenie. Ukážte, že*

$$(23) \quad \|f\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|f(\vec{x})\|$$

$$(24) \quad = \inf\{M \in \mathbb{R} : \|f(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}\| \text{ pre všetky } \vec{x} \in X\}.$$

POZNÁMKA 1.6. *Geometrická interpretácia tohoto faktu súvisí s deformáciou jednotkovej guľovej plochy lineárnym zobrazením. Norma je určená suprémom (maximom v prípade konečnorozmerného priestoru) zmien normy vektora (pozri obr. 5). Skúste si nakresliť podobné obrázky v iných normách.*

DEFINÍCIA 1.13 (Duálne priestory). *Priestor $L(X, F)$ nazývame prvým duálom priestoru X . Označujeme ho X^* alebo $X^{(1)}$. Priestor $X^{(n)} = (X^{(n-1)})^*$ nazývame n -tý algebrický duál priestoru X . Budeme označovať $X^{**} = X^{(2)}$ resp. $X^{***} = X^{(3)}$.*

VETA 1.10 (Duál Banachovho priestoru). *Duálny priestor Banachovho priestoru je Banachov priestor s normou z definície 1.12 na funkcionáloch.*

Dôkaz: Treba ukázať, že ide o vektorový priestor s normou $\|f\|$, čo sa ľahko overí pomocou priameho výpočtu.

Ďalej treba overiť úplnosť tohoto priestoru. Nech $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je cauchyovská postupnosť lineárnych funkcionálov. To znamená, že $\|f_n - f_m\| <$

ϵ pre dostatočne veľké $m, n \in \mathbb{N}$. Keďže máme $|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})| \leq \|f_n - f_m\| \|\vec{x}\|$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$, postupnosť $\{f_n(\vec{x})\}_{n \in \mathbb{N}}$ je cauchyovská v F . Z úplnosti F máme limitu tejto postupnosti pre každé $\vec{x} \in X$. Definujme $f: X \rightarrow F$ tak, že $f(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x})$. Je zrejmé, že toto zobrazenie je lineárne. Ukážeme, že je spojité a že $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$, t.j. je limitou danej cauchyovskej postupnosti funkcionálov.

Pre $\|\vec{x}\| \leq 1$ a pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje pre $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, že pre $m, n > N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ platí $\|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \epsilon$. V limite pre $m \rightarrow \infty$ dostaneme, že $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| \leq \epsilon$. Teda $f_n - f \in L(X, F)$ a aj $f \in L(X, F)$.

Naviac pre $n > N(\epsilon)$ je $\|f_n - f\| \leq \epsilon$, teda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. $\square$

CVIČENIE 1.13. *Dokážte tvrdenie, že $L(X, Y)$ je Banachov, ak Y je Banachov.*

VETA 1.11 (Hahnova¹¹-Banachova). *Nech X je vektorový priestor nad poľom F ($\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$) s polonormou $\|\cdot\|$. Nech $Y \subseteq X$ je vektorový podpriestor a $f \in Y^*$ spĺňa nerovnosť $|f(\vec{y})| \leq \|\vec{y}\|$ pre všetky $\vec{y} \in Y$. Potom existuje zobrazenie $f': X \rightarrow F$ také, že $f'|_Y = f$ a $|f'(\vec{x})| \leq \|\vec{x}\|$ pre všetky $\vec{x} \in X$.*

Dôkaz: Dôkaz sa spraví špeciálne pre pole reálnych čísel $F = \mathbb{R}$ a špeciálne pre pole komplexných čísel $F = \mathbb{C}$ prípad. Pre reálny prípad najskôr rozšírime Y o jednu dimenziu. Nech $Y' = Y \oplus [\vec{e}_0]$ pre $\vec{e}_0 \in X - Y$. Z linearít f pre ľubovoľné $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in Y$ platí

$$f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \leq \|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\| \leq \|\vec{e}_1 + \vec{e}_0\| + \|\vec{e}_2 - \vec{e}_0\|,$$

teda

$$f(\vec{e}_2) - \|\vec{e}_2 - \vec{e}_0\| \leq \|\vec{e}_1 + \vec{e}_0\| - f(\vec{e}_1),$$

pričom po prejdení k suprému na ľavej strane a infímu na pravej strane nerovnosti dostaneme

$$m = \sup_{\vec{e}_2 \in Y} \{f(\vec{e}_2) - \|\vec{e}_2 - \vec{e}_0\|\} \leq \inf_{\vec{e}_1 \in Y} \{\|\vec{e}_1 + \vec{e}_0\| - f(\vec{e}_1)\} = M.$$

Nech $a \in [m, M]$. Položme pre ľubovoľný prvok $\vec{e} + t\vec{e}_0 \in Y'$, $\vec{e} \in Y$ hodnotu $f'(\vec{e} + t\vec{e}_0) = f(\vec{e}) + ta$, $t \in \mathbb{R}$. Je zrejmé, že ide o lineárne zobrazenie a $f'|_Y = f$. Naviac platia nerovnosti

$$\begin{aligned} f'(\vec{e} + t\vec{e}_0) &= f(\vec{e}) + ta \leq f(\vec{e}) + t(\|\vec{e}_1 + \vec{e}_0\| - f(\vec{e}_1)) \leq \|\vec{e} + t\vec{e}_0\|, \\ f'(\vec{e} - t\vec{e}_0) &= f(\vec{e}) - ta \leq f(\vec{e}) + t(\|\vec{e}_1 - \vec{e}_0\| - f(\vec{e}_1)) \leq \|\vec{e} - t\vec{e}_0\|, \end{aligned}$$

kde $t > 0$ a $\vec{e}_1 = t^{-1}\vec{e}$. Analogické nerovnosti možno ukázať aj pre $-f(\vec{e} + t\vec{e}_0)$ a $-f(\vec{e} - t\vec{e}_0)$ a z predpokladu platia pre $t = 0$. Máme

¹¹Hans Hahn (1879–1934) – rakúsky matematik, prispel do oblasti variačného počtu, funkcionálnej analýzy, teórie peanovských kontinuí, teórie miery. Bol spoluzakladateľom viedenského krúžku logického pozitivizmu.

teda pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ platnosť nerovnosti

$$|f'(\vec{e}_1 + t\vec{e}_0)| \leq \|\vec{e}_1 + t\vec{e}_0\|.$$

Nech $\mathcal{S}$ je množina všetkých rozšírení g zobrazenia f na vektorové podpriestory $Z, Y \subseteq Z \subseteq X$ t.j. také, že $g|_Y = f$, pričom $|g(\vec{x})| \leq \|\vec{x}\|$ pre všetky $\vec{x} \in Z$. Všetky takéto zobrazenia sú čiastočne usporiadané reláciou $\leq$, v ktorej pre $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ a $g': G' \rightarrow \mathbb{R}$ platí $g \leq g'$ práve vtedy, keď $G \subseteq G'$ ako podpriestor a $g'|_G = g$. Zrejme každý reťazec $\{g_i: G_i \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ takýchto zobrazení je zhora ohraničený lineárnym funkcionálom $g: \cup_{i \in I} G_i \rightarrow \mathbb{R}$ definovaným predpisom $g(\vec{x}) = g_i(\vec{x})$ pre $\vec{x} \in G_i$. Podľa princípu maximality teda existuje v $\mathcal{S}$ maximálny prvok, t.j. zobrazenie $h: X \rightarrow \mathbb{R}$. Keby totiž to zobrazenie malo menší definičný obor, tak by sme ho vedeli o nejaký vektor rozšíriť a dostali by sme spor s maximalitou h .

Komplexný prípad dokážeme pomocou reálneho. Každé komplexne lineárne zobrazenie môžeme napísať ako $f = \Re f + i\Im f$. Z linearity vyplýva, že $f(i\vec{x}) = \Re f(i\vec{x}) + i\Im f(i\vec{x}) = -\Im f(\vec{x}) + i\Re f(\vec{x})$. Teda $\Im f(\vec{x}) = -\Re f(i\vec{x})$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in Y$.

Označme $g = \Re f$, pričom ho chápeme ako zobrazenie z reálneho vektorového priestoru X (zúžime koeficienty z $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$). Zrejme ide o lineárne zobrazenie nad $\mathbb{R}$.

Keďže g sa dá rozšíriť na X na zobrazenie $g': X \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $|g'(\vec{x})| \leq \|\vec{x}\|$ pre $\vec{x} \in X$, definujme $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ pomocou predpisu $h(\vec{e}) = g'(\vec{e}) - ig'(i\vec{e})$. Je to komplexne lineárne zobrazenie. Zostáva ukázať, že $|h(\vec{x})| \leq \|\vec{x}\|$.

Pre ľubovoľné komplexné číslo z platí $z = |z|e^{i \arg z}$. Teda $h(\vec{x}) = e^{i\theta}|h(\vec{x})|$, kde $\theta = \arg h(\vec{x})$. To znamená, že $h(\vec{x}e^{-i\theta}) \in \mathbb{R}$. Keďže

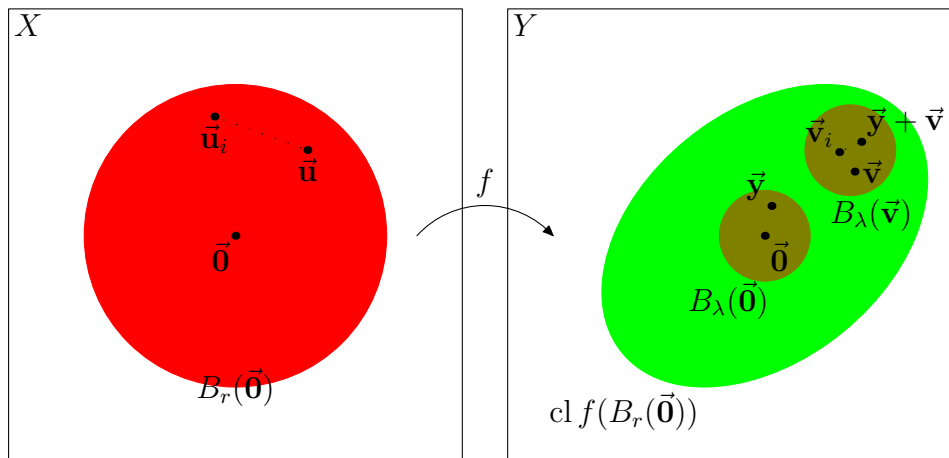
$$|h(\vec{x})| = |h(\vec{x}e^{-i\theta})| = |g'(\vec{x}e^{-i\theta})| \leq \|\vec{x}\|,$$

tak máme požadované rozšírenie aj v tomto prípade. $\square$

CVIČENIE 1.14. *Nech X je vektorový priestor nad $\mathbb{C}$. Nech X_r je vektorový priestor X nad $\mathbb{R}$ (t.j. koeficienty v lineárnych kombináciách smú byť len reálne, ale samotné súradnice vektorov môžu byť aj komplexné). Ukážte, že zobrazenie $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ je komplexne lineárne práve vtedy, keď existuje jednoznačne definované zobrazenie $g: X_r \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) - ig(i\vec{x})$. Ukážte, že $g = \Re f$.*

DÔSLEDOK 1.2 (Existencia rozšírenia funkcionálu s rovnakou normou). *Nech $(X, \|\cdot\|)$ je vektorový priestor s normou, $Y \subseteq X$ je jeho vektorový podpriestor a $f \in Y^*$. Potom existuje $f' \in X^*$ také, že $f'|_Y = f$ a $\|f'\| = \|f\|$.*

Dôkaz: Nech $f \neq \vec{0}$. Potom $\|f\|\|\vec{x}\|$ je norma na X . Navyiac $|f(\vec{x})| \leq \|f\|\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|_f$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in Y$.



OBR. 6. Banachova-Schauderova veta o otvorenom zobrazení.

Takže v tejto norme máme podľa Hahn-Banachovej vety jeho rozšírenie $f': X \rightarrow F$, pričom $|f'(\vec{x})| \leq \|\vec{x}\|_f$. To znamená, že $\|f'\| \leq \|f\|$. Na druhej strane f' je rozšírenie f , takže $\|f\| \leq \|f'\|$. $\square$

POZNÁMKA 1.7. *Hahnova-Banachova veta a jej dôsledok vraví, že každý spojitý lineárny funkcionál na podpriestore Y možno rozšíriť na spojitý lineárny funkcionál na celom priestore X , pričom norma pôvodného funkcionálu sa zachová.*

DÔSLEDOK 1.3. *Nech X je priestor s normou a $\vec{x} \neq \vec{0}$. Potom existuje $f \in X^*$ taký, že $f(\vec{x}) \neq 0$.*

Dôkaz: Stačí zostrojiť nenulové zobrazenie na podpriestore generovanom vektorom $\vec{x}$ (napr. $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$) a použiť Hahn-Banachovu vetu. $\square$

POZNÁMKA 1.8. *Predchádzajúci výsledok sa dá preformulovať aj takto: Ak $f(\vec{x}) = 0$ pre všetky $f \in X^*$, tak $\vec{x} = \vec{0}$. Hovoríme aj, že X^* oddeľuje vektory X .*

VETA 1.12 (Banachova-Schauderova¹² o otvorenom zobrazení). *Nech X, Y sú Banachove priestory a $f \in L(X, Y)$ je surjektívne zobrazenie. Potom f je otvorené zobrazenie.*

Dôkaz: Ukážeme, že pre nejaké $\epsilon > 0$ platí $B_\epsilon(\vec{0}) \subseteq f(\text{cl}(B_1(\vec{0})))$ (pozri obr. 6)

¹²Juliusz Pawel Schauder (1899–1943) – matematik žijúci v Lvove, pracoval v oblasti funkcionálnej analýzy a topológie, pričom jeho výsledky viedli k novej metóde existencie riešenia pre zložité parciálne diferenciálne rovnice. Spolupracoval s Jeanom Lerayom. Známy je ich stupeň, Schauderova veta o pevnom bode a ďalšie. Zomrel pravdepodobne pri nemeckých protizidovských raziách.

Keďže platí, že $X = \cup_{n \geq 1} B_{nr}(\vec{0})$ pre ľubovoľné $r > 0$, tak $Y = \cup_{n \geq 1} f(B_{nr}(\vec{0}))$, a teda aj $Y = \cup_{n \geq 1} \text{cl}(f(B_{nr}(\vec{0})))$. Keďže Y je úplný, tak aspoň jedna z množín $\text{cl}(f(B_{nr}(\vec{0})))$ pre $n \in \mathbb{N}$ má neprázdne vnútro (lebo Y je 2. Bairovej kategórie). Navyiac zobrazenie $\vec{x} \mapsto n\vec{x}$ je homeomorfizmus priestoru X na seba, takže $\text{cl}(f(B_r(\vec{0})))$ obsahuje nejakú otvorenú množinu $V \subseteq Y$.

Najskôr ukážeme, že existuje $\omega > 0$, pre ktoré $B_\omega(\vec{0}) \subseteq \text{cl}(f(B_r(\vec{0})))$. Nech $\vec{v} \in V$ a $B_\lambda(\vec{v}) \subseteq \text{cl}(f(B_r(\vec{0})))$. Zo surjektívnosti máme $f(\vec{u}) = \vec{v}$. Nech $\|\vec{u}\| < mr$ pre nejaké $m \in \mathbb{R}$.

Zoberme $\vec{y} \in B_\lambda(\vec{0}) \subseteq Y$. Potom existuje $\vec{x} \in X$ také, že $f(\vec{x}) = \vec{y}$ a platí $\|\vec{y} + \vec{v} - \vec{v}\| = \|\vec{y}\| < \lambda$, teda $\|\vec{y} + \vec{v}\| \in B_\lambda(\vec{v}) \subseteq \text{cl}(f(B_r(\vec{0})))$. Z uzavretosti máme teda postupnosť prvkov $\vec{v}_i \in f(B_r(\vec{0}))$ takú, že $\lim_{i \rightarrow \infty} \vec{v}_i = \vec{y} + \vec{v}$. Nech $\vec{u}_i \in B_r(\vec{0})$ je také, že $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$. Teda $\vec{y} = \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{v}_i - \vec{v} = \lim_{i \rightarrow \infty} f(\vec{u}_i) - f(\vec{u}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(\vec{u}_i - \vec{u})$. Keďže $\|\vec{u}_i - \vec{u}\| \leq \|\vec{u}_i\| + \|\vec{u}\| < r(1 + m)$. Teda $f(\vec{u}_i - \vec{u}) \in f(B_{(1+m)r}(\vec{0}))$, čo znamená, že $B_\lambda(\vec{0}) \subseteq \text{cl}(f(B_{(1+m)r}(\vec{0})))$. Teda pre $\omega = \frac{\lambda}{1+m}$ máme požadovaný výsledok.

Teraz ukážeme, že $\vec{0} \in \text{int}(\text{cl}(f(B_r(\vec{0}))))$ pre nejaké $r > 0$.

Nech $\epsilon(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Teda $\sum_{n \geq 0} \epsilon(n) = 1$. Z predchádzajúceho výsledku máme, že pre každé $\epsilon(n) > 0$ máme $\eta(n) > 0$ také, že $B_{\eta(n)}(\vec{0}) \subseteq \text{cl}(f(B_{\epsilon(n)}(\vec{0})))$. Zrejme $\eta(n) \rightarrow 0$ (keďže f je spojitý a $\epsilon(n)$ konverguje k 0). Ukážeme, že $B_{\eta(0)}(\vec{0}) \subseteq f(\text{cl}(B_1(\vec{0})))$.

Pre $\vec{v} \in B_{\eta(0)}(\vec{0}) \subseteq \text{cl}(f(B_{\epsilon(0)}(\vec{0})))$ existuje $\vec{e}_0 \in B_{\epsilon(0)}(\vec{0})$ také, že $\|\vec{v} - f(\vec{e}_0)\| < \eta(1)$, takže $\vec{v} - f(\vec{e}_0) \in \text{cl}(f(B_{\epsilon(1)}(\vec{0})))$. Teda existuje $\vec{e}_1 \in B_{\epsilon(1)}(\vec{0})$ také, že $\|\vec{v} - f(\vec{e}_0) - f(\vec{e}_1)\| < \eta(2)$, atď. Pomocou matematickej indukcie zostrojíme postupnosť $\vec{e}_n \in B_{\epsilon(n)}(\vec{0})$ a $\|\vec{v} - f(\vec{e}_0) - \dots - f(\vec{e}_n)\| < \eta(n+1)$. Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{e}_n$ je konvergentný, lebo $\|\sum_{i=n+1}^m \vec{e}_i\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|\vec{e}_i\| \leq 1$. Keďže X je úplný, máme $\vec{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{e}_n$. Potom $f(\vec{e}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\vec{e}_n) = \vec{v}$, pričom $\|\vec{e}\| \leq 1$. Takže pre $\vec{v} \in B_{\eta(0)}(\vec{0})$ máme $\vec{v} = f(\vec{e})$ a $\|\vec{e}\| \leq 1$. Teda $B_{\eta(0)}(\vec{0}) \subseteq f(\text{cl}(B_1(\vec{0})))$.

Je zrejmé, že uzáveru pod zobrazením f sa môžeme zbaviť vhodnou voľbou postupnosti $\epsilon(n)$.

Ak U je otvorená v X , tak ju môžeme napísať ako zjednotenie otvorených gúl okolo každého bodu. Obraz takejto gule obsahuje otvorenú guľu okolo príslušného bodu. Takže obraz je tiež otvorená množina. $\square$

DÔSLEDOK 1.4 (Banachova o lineárnom izomorfizme). *Spojité lineárny izomorfizmus Banachových priestorov je homeomorfizmom.*

Dôkaz: Stačí ukázať, že f^{-1} je spojitý, čo je priamy dôsledok vety o otvorenom zobrazení. $\square$

VETA 1.13 (O uzavretom grafe). *Nech X, Y sú Banachove priestory. Zobrazenie $f \in L_a(X, Y)$ je spojité práve vtedy, keď jeho graf*

$$(25) \quad \Gamma_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in X \times Y : \vec{x} \in X\}$$

je uzavretý podpriestor priestoru $X \times Y$.

Dôkaz: Treba ukázať, že ide o vektorový podpriestor. To sa dá priamym výpočtom. Uzavretosť vyplýva z vety 3.16 v kapitole 1, lebo X, Y sú metrické priestory, a teda T_4 -priestory.

Ak Γ_f je uzavretý, tak je Banachov a projekcia π_X daná $(\vec{x}, f(\vec{x})) \mapsto \vec{x}$ je spojité izomorfizmus. Inverzné zobrazenie je tiež spojité podľa vety o lineárnom izomorfizme. Keďže projekcia $\pi_Y : \Gamma(f) \rightarrow Y$ je tiež spojité, tak máme $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, f(\vec{x})) \mapsto f(\vec{x})$ spojité zobrazenie. $\square$

VETA 1.14 (Banachova-Steinhausova¹³). *Nech X je Banachov priestor a Y je vektorový priestor s normou. Nech $f_i \in L(X, Y)$, $i \in I$. Ak pre ľubovoľný $\vec{x} \in X$ je $\{\|f_i(\vec{x})\|\}_{i \in I}$ ohraničená v Y , tak $\{\|f_i\|\}_{i \in I}$ je ohraničená v $\mathbb{R}$.*

Dôkaz: Nech zobrazenie $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ je definované

$$\phi(\vec{x}) = \sup_{i \in I} \|f_i(\vec{x})\|.$$

Potom množina

$$S_n = \{\vec{x} \in X : \phi(\vec{x}) \leq n\} = \cap_{i \in I} \{\vec{x} \in X : \|f_i(\vec{x})\| \leq n\}$$

je uzavretá (lebo je prienikom uzavretých množín). Zrejme platí $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Keďže X je 2. Bairovej kategórie, tak aspoň jedna množina z S_n (nech je to napr. S_M) má neprázdne vnútro. Teda existuje $r > 0$ a $\vec{x}_0 \in X$ také, že $\phi(\vec{x}) \leq M$ pre $\vec{x} \in \text{cl}(B_r(\vec{x}_0))$.

Nech $\|\vec{x}\| = 1$. Potom $\|f_i(r\vec{x} + \vec{x}_0)\| \leq \phi(r\vec{x} + \vec{x}_0) \leq M$ pre ľubovoľné $i \in I$. Takže platí

$$\|f_i(\vec{x})\| = \frac{1}{r} \|f_i(r\vec{x} + \vec{x}_0 - \vec{x}_0)\| \leq \frac{1}{r} \|f_i(r\vec{x} + \vec{x}_0)\| + \frac{1}{r} \|f_i(\vec{x}_0)\| \leq \frac{2M}{r}.$$

Takže $\|f_i\| \leq \frac{2M}{r}$. $\square$

DÔSLEDOK 1.5. *Ak $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L(X, Y)$ je silno konvergentná postupnosť (t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x}) = f(\vec{x})$ existuje pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$), tak $f \in L(X, Y)$.*

¹³Hugo Dionyzy Steinhaus (1887–1972) – matematik pochádzajúci z Galície (časť Poľska) študoval v Lvove, Mníchove a Göttingene. Spolu so Stefanom Banachom a Ottom Nikodymom založili Krakowskú matematickú spoločnosť, neskôr pretransformovanú do Polskej matematickej spoločnosti. Pracoval v teórii pravdepodobnosti, teórii hier, teórii trigonometrických radov. Je jedným zo spoluautorov známej Škótskej knihy problémov, písanej v kaviarni Scottish Café v Lvove ako aj novým pokračovaním tejto tradície po skončení 2. svetovej vojny.

Dôkaz: Zobrazenie f je lineárne. Keďže $\{f_n(\vec{x})\}_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentná, je ohraničená pre $\vec{x} \in X$, takže podľa Banachovej-Steinhausovej vety je $\{\|f_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ zhora ohraničená nejakým $M > 0$. Teda

$$\|f(\vec{x})\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \|\vec{x}\| \leq M \|\vec{x}\|.$$

Teda $f \in L(X, Y)$. □

POZNÁMKA 1.9. *Pripomeňme, že $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} a_m)$.*

2. Hilbertove priestory

DEFINÍCIA 2.1 (Hilbertov¹⁴ priestor). *Úplný vektorový priestor s normou $(X, \|\cdot\|)$ nazývame reálnym (komplexným) Hilbertovým priestorom, ak jeho norma je indukovaná reálnym (komplexným) skalárnym súčinom na X .*

POZNÁMKA 2.1. *Vďaka skalárnemu súčinu vieme povedať o Hilbertovom priestore viac. Ukáže sa, že jeho štruktúra sa vo veľkých smeroch podobá na štruktúru konečnorozmerného vektorového priestoru.*

DEFINÍCIA 2.2 (Kolmost, ortogonálny doplnok). *Dva vektory lineárneho priestoru so skalárnym súčinom sa nazývajú kolmé alebo ortogonálne, ak ich skalárny súčin je 0. Zapisujeme to $\vec{x} \perp \vec{y}$.*

Hovoríme, že $\vec{x} \in X$ je ortogonálny na $A \subseteq X$, ak $\vec{x} \perp \vec{a}$ pre ľubovoľné $\vec{a} \in A$. Hovoríme, že $A \subseteq X$ je ortogonálna, ak pre ľubovoľné $\vec{x} \in A$ platí $\vec{x} \perp A - \{\vec{x}\}$. Ak v ortogonálnej množine navyše $\|\vec{x}\| = 1$ pre každé $\vec{x} \in A$, tak hovoríme o ortonormálnej množine. Podmnožiny $A, B \subseteq X$ sa nazývajú navzájom ortogonálne, ak pre ľubovoľný $\vec{a} \in A$ platí $\vec{a} \perp B$.

Nech $A \subseteq X$ je neprázdna množina vektorov. Potom množinu $A^\perp = \{\vec{x} \in X : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \text{ pre všetky } \vec{y} \in A\}$ nazývame ortogonálny doplnok A v X .

CVIČENIE 2.1. *Dokážte nasledujúce tvrdenia. Ak $A \perp B$, tak $B \perp A$. Ak $\vec{a} \perp \vec{b}$, tak $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$. Ak $\vec{a} \perp A$, tak $\vec{a} \perp \text{cl}([A])$. Ak $A \perp B$, tak $\text{cl}([A]) \perp \text{cl}([B])$.*

CVIČENIE 2.2. *Ak ortogonálna množina neobsahuje $\vec{0}$, tak je lineárne nezávislá.*

CVIČENIE 2.3. *Každá spočítateľná lineárne nezávislá množina sa dá nahradiť ortonormálnou, pričom obe generujú rovnaký podpriestor.*

¹⁴David Hilbert (1862–1943), nemecký matematik. Považuje sa za jedného z najvplyvnejších matematikov prelomu 19. a 20. storočia. Axiomatizoval geometriu, položil základy funkcionálnej analýzy a teórie invariantov. Jeho meno nesú pojmy ako Hilbertova báza, Hilbertov polynóm, Hilbertov priestor, Hilbertova Nullstellsatz a mnohé ďalšie. Známy je aj jeho zoznam 23 problémov prednesený na 2. kongrese matematikov v roku 1900 v Paríži, ktorými do veľkej miery udal tón rozvoja matematiky v 20. storočí.

CVIČENIE 2.4. Ak $B \perp A$, tak $B \subseteq A^\perp$.

CVIČENIE 2.5. Ukážte, že v nekonečnorozmernom Hilbertovom priestore možno z postupnosti $\{\vec{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, kde $\{\vec{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je ortonormálna báza nejakého podpriestoru, možno vybrať nekonvergentnú podpostupnosť. Uvedomte si, že v konečnorozmernom priestore to nejde.

CVIČENIE 2.6. Ukážte, že $\ell^2(F)$ je separabilný. [Návod: Uvážte všetky postupnosti s nanajvyš konečným počtom nenulových racionálnych členov.]

META 2.1. Nech X je Hilbertov priestor. Zobrazenia $\phi_{\vec{y}}, \psi_{\vec{y}}: X \rightarrow F$ dané predpismi $\phi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ a $\psi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ sú spojité na X . Zobrazenie $\phi_{\vec{y}}$ je lineárne, zobrazenie $\psi_{\vec{y}}$ je pololineárne v prípade $F = \mathbb{C}$ a lineárne v prípade $F = \mathbb{R}$.

Dôkaz: Stačí použiť vlastnosti skalárneho súčinu, CSB nerovnosť a fakt, že $z \mapsto \bar{z}$ je spojité zobrazenie. $\square$

META 2.2 (Ekvivalentná podmienka pre Hilbertov priestor). Banachov priestor X s normou $\|\cdot\|$ je Hilbertov práve vtedy, keď v ňom platí rovnobežníková identita (18).

Dôkaz: Zrejme stačí ukázať, že z platnosti tejto identity vieme definovať skalárny súčin, ktorý nám indukuje danú normu.

Pomocou polarizačnej rovnosti (16) v reálnom Banachovom priestore alebo (17) v komplexnom definujeme zobrazenie $\phi(\vec{x}, \vec{y}): X \times X \rightarrow F$. Ukážeme, že spĺňa všetky vlastnosti skalárneho súčinu.

Zrejme $\phi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ pre $\vec{x} \in X$ a je to nulový výraz len pre nulový vektor. Rovnako ľahko sa ukáže (polo)symetria.

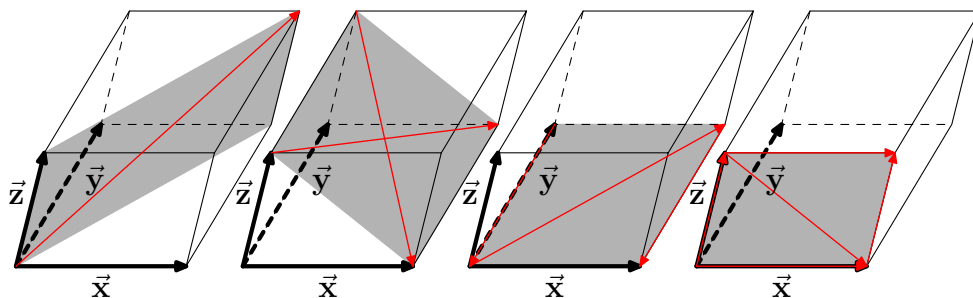
Podobne pre reálny prípad máme použitím rovnobežníkovej identity (pozri obr. 7)

$$\begin{aligned}
 4\phi(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) &= \|\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}\|^2 = \\
 &= 2\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + 2\|\vec{z}\|^2 - \|\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}\|^2 = \\
 &= 2\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + 2\|\vec{z}\|^2 - 2\|\vec{x} - \vec{z}\|^2 - 2\|\vec{y}\|^2 = \\
 &= \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + 2\|\vec{z}\|^2 + 2\|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{x} - \vec{z}\|^2 = \\
 &= \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} + \vec{z}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{z}\|^2 = \\
 &= 4\phi(\vec{x}, \vec{y}) + 4\phi(\vec{x}, \vec{z}).
 \end{aligned}$$

Takže výraz je aditívny v druhej premennej. Analogicky by sme postupovali pri aditívnosti v prvej premennej.

Definujeme ďalej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $f(\alpha) = \phi(\alpha\vec{x}, \vec{y})$ pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$. Keďže pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí $f(\alpha + \beta) = \phi((\alpha + \beta)\vec{x}, \vec{y}) = \phi(\alpha\vec{x}, \vec{y}) + \phi(\beta\vec{x}, \vec{y}) = f(\alpha) + f(\beta)$, je funkcia f riešením Cauchyho funkcionálnej rovnice $F(x + y) = F(x) + F(y)$. Navyše je to spojité riešenie tejto rovnice. Určíme ho na hustej podmnožine $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Zrejme

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1).$$



OBR. 7. Rovnobežníky v rovnobežnostene určenom vektormi $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, pomocou ktorých sa ukazuje aditívnosť. Červeným sú vyznačené vektory, ktoré sú v zmysle rovnobežníkového pravidla nahradené novými.

Analogicky matematickou indukciou dostávame, že $f(n) = nf(1)$ pre celé nezáporné n . Keďže $f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$, tak $f(-n) = -nf(1)$. Podobne $f(1) = f(n \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$. Takže $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}f(1)$. Zostáva si analogicky uvedomiť, že $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$. Zo spojitosti rovnaký algebraický vzťah platí pre všetky reálne čísla, t.j. $f(\alpha) = \alpha f(1)$. Takže $\phi(\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha \phi(1 \vec{x}, \vec{y})$. Podrobnejšiu informáciu o Cauchyho funkcionálnej rovnici možno nájsť napr. v [13, str. 286/197].

Podobne postupujeme aj s vektorovými priestormi nad poľom komplexných čísel. $\square$

CVIČENIE 2.7. Ukážte, že $\mathbb{R}^n$ nie je Hilbertov priestor s normou $\|\cdot\|_1$.

CVIČENIE 2.8. Ak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je riešenie Cauchyho funkcionálnej rovnice na $\mathbb{Q}$, tak je tvaru $f(x) = cx$ pre vhodné $c \in \mathbb{R}$. Keďže je $\mathbb{Q}$ hustá v $\mathbb{R}$, jediné spojité zobrazenia majú takýto tvar.

CVIČENIE 2.9. Ak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je riešenie Cauchyho funkcionálnej rovnice, ktoré nie je tvaru $f(x) = cx$ pre žiadne $c \in \mathbb{R}$, tak graf takejto funkcie je hustý v $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topológiou.

Príklad:[Niektoré Hilbertove priestory.] Všetky konečnorozmerné euklidovské priestory (t.j. s normou $\|\cdot\|_2$) sú Hilbertove. Priestor $\ell^2(F)$ je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle a, b \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \bar{b}_i$, kde $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $b = \{b_i\}_{i=0}^{\infty}$.

POZNÁMKA 2.2. Všimnite si, že dva topologicky ekvivalentné Banachove priestory (aj konečnorozmerné) môžu byť rozlíšené vlastnosťou, či norma pochádza zo skalárneho súčinu alebo nie.

VETA 2.3 (Vlastnosti ortogonálneho doplnku). Nech X je Hilbertov priestor. Pre ľubovoľnú $A \subseteq X$ je $A^\perp$ uzavretý lineárny podpriestor a $A \subseteq A^{\perp\perp}$. Pre $A \subseteq B \subseteq X$ je $B^\perp \subseteq A^\perp$. Navyše $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

Dôkaz: Keďže $\phi_{\vec{a}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ je spojitý, tak $A^\perp = \bigcap_{\vec{a} \in A} \phi_{\vec{a}}^{-1}(0)$. Takže $A^\perp$ je prienikom uzavretých množín, a teda je uzavretá. Fakt, že $A^\perp$ je vektorový podpriestor X sa dokáže priamo.

Vlastnosť $A \subseteq B$ dáva zrejme $B^\perp \subseteq A^\perp$, keďže všetky vektory kolmé na B sú kolmé špeciálne aj na vektory v A .

Poslednú vlastnosť z tvrdenia dostaneme kombináciou predchádzajúcich. Keďže $A^\perp \subseteq (A^\perp)^{\perp\perp}$ a $A \subseteq A^{\perp\perp}$ dáva pomocou druhej vlastnosti z tejto vety, že $(A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp$. Takže skombinovaním týchto dvoch inklúzií platí rovnosť. $\square$

CVIČENIE 2.10. Ukážte, že v Hilbertovom priestore X pre ľubovoľnú množinu $A \subset X$ platí $(A^\perp)^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^\perp$.

VETA 2.4 (O existencii a jednoznačnosti najbližšieho prvku). *Nech X je Hilbertov priestor.*

- (1) *Potom pre vektorový podpriestor $Y \subseteq X$ a ľubovoľnú dvojicu $(\vec{x}, \vec{b}) \in X \times Y$ máme $\|\vec{x} - \vec{b}\| = \inf\{\|\vec{x} - \vec{a}\| : \vec{a} \in Y\}$ práve vtedy, keď $\vec{x} - \vec{b} \in Y^\perp$.*
- (2) *Ak $A \subseteq X$ je neprázdna, konvexná podmnožina X , tak pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ existuje nanaľvýš jedno $\vec{b} \in A$ také, že $\|\vec{x} - \vec{b}\| = \inf\{\|\vec{x} - \vec{a}\| : \vec{a} \in A\}$.*
- (3) *Ak A je navyše uzavretá, tak existuje prvok $\vec{b} \in A$ z predchádzajúcej časti.*
- (4) *Ak $Y \subseteq X$ je úplný vektorový podpriestor X , tak $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Dôkaz: Počítajme $\langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle$ pre ľubovoľné $\vec{a} \in Y$, teda presnejšie jeho reálnu časť. Pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ máme

$$\begin{aligned} \Re \langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle &= \frac{1}{2\lambda} (\lambda \langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle + \overline{\lambda \langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle}) = \\ &= \frac{1}{2\lambda} (\langle \vec{x} - \vec{b}, \lambda \vec{a} \rangle + \overline{\langle \vec{x} - \vec{b}, \lambda \vec{a} \rangle}) = \\ &= \frac{1}{2\lambda} (\langle \vec{x} - (\vec{b} - \lambda \vec{a}), \vec{x} - (\vec{b} - \lambda \vec{a}) \rangle - \\ &\quad - \langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{x} - \vec{b} \rangle - \lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle) = \\ &= \frac{1}{2\lambda} (\|\vec{x} - (\vec{b} - \lambda \vec{a})\|^2 - \|\vec{x} - \vec{b}\|^2 - \lambda^2 \|\vec{a}\|^2). \end{aligned}$$

Takže pre $\lambda > 0$ máme

$$\Re \langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle \geq \frac{1}{2\lambda} (\|\vec{x} - \vec{b}\| - \|\vec{x} - \vec{b}\| - \lambda^2 \|\vec{a}\|^2) = -\frac{\lambda}{2} \|\vec{a}\|^2$$

a pre $\lambda < 0$ analogicky $\Re \langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle \leq -\frac{\lambda}{2} \|\vec{a}\|^2$. Keďže λ môže byť ľubovoľne blízko 0, platí $\Re \langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0$. Ak X je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, tak sme už hotoví.

Ak X je priestor nad $\mathbb{C}$, tak ešte treba zistiť hodnotu $\Im\langle \vec{x} - \vec{b}, \vec{a} \rangle$. Platí ale $\Im\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \Re\langle \vec{x}, i\vec{y} \rangle$. Takže v našom prípade je aj imaginárna zložka nulová, lebo $\Re\langle \vec{x} - \vec{b}, i\vec{a} \rangle = 0$.

Obrátene, ak $\vec{x} - \vec{b} \in Y^\perp$, tak $\|\vec{x} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{b}\|^2 + \|\vec{b} - \vec{a}\|^2$ a $\|\vec{x} - \vec{b}\| \geq \inf_{\vec{a} \in Y} \|\vec{x} - \vec{a}\|$, čo dáva, že $\vec{b}$ realizuje vzdialenosť $\vec{x}$ ku Y , a teda platí rovnosť z tvrdenia.

Jednoznačnosť najbližšieho bodu ku konvexnej množine A sa ukáže ľahko. Ak $\vec{a}, \vec{b} \in A$ sú dva také body, že $\|\vec{x} - \vec{a}\| = \|\vec{x} - \vec{b}\|$, tak máme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{b}\|^2 = \\ &= 2\|\vec{a} - \vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} - \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{x}\|^2 = \\ &= 4\|\vec{a} - \vec{x}\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{x}\right\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

pričom sme použili rovnobežníkové pravidlo, fakt, že $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \in A$ a predpoklad, že $\vec{a} \in A$ je najbližšie ku $\vec{x}$. Teda $\vec{a} = \vec{b}$.

Existenciu najbližšieho bodu dokážeme pomocou postupnosti $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergujúcej k tomuto prvku. Nech $\vec{a}_n \in A$ je taký prvok, že $\|\vec{a}_n - \vec{x}\| \leq d + \frac{1}{n}$, kde $d = \inf\{\|\vec{a} - \vec{x}\| : \vec{a} \in A\}$. Táto postupnosť je cauchyovská, lebo

$$\begin{aligned} \|\vec{a}_n - \vec{a}_m\|^2 &= 2\|\vec{a}_n - \vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} - \vec{a}_m\|^2 - \|\vec{a}_n + \vec{a}_m - 2\vec{x}\|^2 \leq \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(\vec{a}_n + \vec{a}_m) - \vec{x}\right\|^2 \leq \\ &\leq 4d^2 + 4d\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + 2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right) - 4d^2. \end{aligned}$$

Teda existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a}^* \in A$ a $\|\vec{x} - \vec{a}^*\| = d$, lebo norma je spojitá vďaka trojuholníkovej nerovnosti.

Na dôkaz poslednej časti stačí použiť predchádzajúce výsledky, keďže vektorový priestor Y je konvexná množina. Platí $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$. Ak $\vec{b} \in Y^{\perp\perp}$, tak podľa tretej a prvej časti vety existuje $\vec{b}_Y \in Y$ také, že $\vec{b} - \vec{b}_Y \in Y^\perp$. Keďže $\vec{b}_Y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$ a $\vec{b} \in Y^{\perp\perp}$, tak $\vec{b} - \vec{b}_Y \in Y^{\perp\perp}$. Teda $\vec{b} - \vec{b}_Y \perp \vec{b} - \vec{b}_Y$, čo znamená, že $\vec{b} = \vec{b}_Y$. $\square$

POZNÁMKA 2.3. *Predchádzajúca veta vraví, že pre úplný vektorový podpriestor $Y \subseteq X$ Hilbertovho priestoru existuje dobre definovaná ortogonálna projekcia $\pi_Y(\vec{x}) = \vec{b}$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$. Označme $d(\vec{x}, Y) = \|\vec{x} - \pi_Y(\vec{x})\|$.*

CVIČENIE 2.11. *Ukážte, že $\Im(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) = \Re(\langle \vec{x}, i\vec{y} \rangle)$.*

CVIČENIE 2.12 (O sčítaní absolútnych hodnôt nekonečnej množiny čísel). *Nech A je množina a $\mathcal{S}$ je systém jej konečných neprázdnych podmnožín. Nech $x_a \in F$ pre ľubovoľné $a \in A$, kde $F = \mathbb{R}$ alebo $F = \mathbb{C}$. Ukážte, že $\mathcal{S}$ je usmernená množina vzhľadom na inklúziu, a naviac*

$\sum_{a \in A} |x_a|$ existuje vtedy a len vtedy, keď $\sum_{s \in S} |x_s| \leq M$ pre ľubovoľné $S \in \mathcal{S}$. Ak $L = \sup_{S \in \mathcal{S}} \sum_{s \in S} |x_s|$, tak $L = \sum_{a \in A} |x_a|$. Ukážte, že množina tých $a \in A$ s vlastnosťou $x_a \neq 0$, je spočítateľne veľká.

VETA 2.5 (Vzdialenosť od konečnorozmerného podpriestoru). *Nech X je Hilbertov priestor a $A \subseteq X$ je neprázdna, konečná a ortonormálna. Potom pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ je $d(\vec{x}, [A]) = \|\vec{x} - \sum_{\vec{a} \in A} \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}\| = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 - \sum_{\vec{a} \in A} |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle|^2}$.*

Dôkaz: Nech $A = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$. Potom pre $\vec{a} \in [A]$ máme $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ pre nejaké $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$. Takže $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle$. Ďalej

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{a}\|^2 &= \langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a} \rangle = \langle \vec{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i, \vec{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i \rangle = \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle - \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i = \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^n (\langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle - \alpha_i) (\overline{\langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle} - \bar{\alpha}_i). \end{aligned}$$

Tento výraz je minimálny práve vtedy, keď $\alpha_i = \langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle$. □

DÔSLEDOK 2.1 (Besselova¹⁵ nerovnosť). *Ak $A \subseteq X$ je neprázdna ortonormálna podmnožina a $\vec{x} \in X$, tak existuje súčet $\sum_{\vec{a} \in A} |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle|^2$ a navyše platí, že $\sum_{\vec{a} \in A} |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$. Zrejme $A \cap (X - \{\vec{x}\}^\perp)$ je spočítateľná.*

Dôkaz: Pre každú konečnú podmnožinu A platí podľa predchádzajúcej vety nerovnosť z tvrdenia. Konečné podmnožiny množiny A tvoria usmernenú množinu vzhľadom na inklúziu. Potom existuje (v zmysle kapitoly 4 z topológie resp. cvičenia 2.12) $\lim_{B \subseteq A} \sum_{\vec{b} \in B} |\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle|^2$ a zrejme platí nerovnosť z tvrdenia aj pre limitu.

Navyše, pre $n \in \mathbb{N}$ je množina $\vec{a} \in A$ takých, že $|\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle| > \frac{1}{n}$ konečná, takže $A \cap (X - \{\vec{x}\}^\perp)$ je spočítateľná. □

POZNÁMKA 2.4. *Besselova nerovnosť hovorí o vzdialenosti vektora od podpriestoru generovaného ortonormálnou množinou A .*

¹⁵Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) – nemecký astronóm a matematik, ktorý opísal polohu a pohyb viac ako 50000 hviezd. Zmeral aj vzdialenosť hviezd 61 Cygni použitím paralaxy. Zaoberal sa aj problémom vzájomného pohybu troch telies. Pri svojich výpočtoch využil okrem iného aj Besselovu funkciu. Významnejšie výsledky dosiahol aj v geodézii. Hoci sa mu formálne vzdelávanie ukončilo v 14. rokoch, jeho výsledky a spôsob práce mali významný vplyv na vzdelávanie na univerzitách.

DEFINÍCIA 2.3 (Rozvoj podľa ortonormálnej množiny). *Nech A je ortonormálna množina v Hilbertovom priestore X nad F . Hovoríme, že $\vec{x}$ má rozvoj podľa A , ak $\vec{x} = \sum_{\vec{a} \in A} \alpha_{\vec{a}} \vec{a}$ pre nejaké $\alpha_{\vec{a}} \in F$. Koeficienty $\alpha_{\vec{a}}$ sa nazývajú aj Fourierove¹⁶ koeficienty.*

POZNÁMKA 2.5. *Pod Fourierovým koeficientom vektora $\vec{w}$ vzhľadom na nenulový vektor $\vec{v}$ rozumieme $\frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$. To znamená, že $\vec{w} = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} + \vec{u}$, kde $\vec{u} \in \vec{v}^\perp$. Ak $\|\vec{v}\| = 1$, ide o $\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$.*

VETA 2.6 (O koeficientoch rozvoja podľa ortonormálnej množiny). *Nech A je ortonormálna podmnožina X a $\vec{x} \in X$ je Hilbertov priestor. Nech $\vec{x}$ má rozvoj podľa A . Potom $\alpha_{\vec{a}} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ pre ľubovoľné $\vec{a} \in A$.*

Dôkaz: Pre ľubovoľné $\vec{a} \in A$ a $\epsilon > 0$ existuje konečná podmnožina $B \subseteq A$ taká, že $\vec{a} \in B$ a $\|\vec{x} - \sum_{\vec{b} \in B} \alpha_{\vec{b}} \vec{b}\| < \epsilon$. Potom

$$\begin{aligned} |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle - \alpha_{\vec{a}}| &= |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle - \langle \sum_{\vec{b} \in B} \alpha_{\vec{b}} \vec{b}, \vec{a} \rangle| = \\ &= |\langle \vec{x} - \sum_{\vec{b} \in B} \alpha_{\vec{b}} \vec{b}, \vec{a} \rangle| \leq \|\vec{x} - \sum_{\vec{b} \in B} \alpha_{\vec{b}} \vec{b}\| \|\vec{a}\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Teda pre $\epsilon \rightarrow 0$ máme $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \alpha_{\vec{a}}$. □

VETA 2.7 (O existencii rozvoja podľa ortonormálnej množiny). *Nech $A \subseteq X$ je ortonormálna podmnožina v Hilbertovom priestore X . potom $\vec{x}$ má rozvoj podľa A práve vtedy, keď $\vec{x} \in \text{cl}([A])$.*

Dôkaz: Ak $\vec{x} \in \text{cl}([A])$, tak existuje postupnosť $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^\infty$, $\vec{x}_k \in [A]$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}\| = 0$. Ukážeme, že $\vec{x}$ má rozvoj podľa A .

Nech $\mathcal{S}$ je systém konečných podmnožín A . Nech $\epsilon > 0$. Potom existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $\|\vec{x}_k - \vec{x}\| < \epsilon$. Keďže $\vec{x}_k \in [A]$, tak existuje konečná podmnožina $B \in \mathcal{S}$ taká, že $\vec{x}_k \in [B]$. Teda $d(\vec{x}, [B]) = \|\vec{x} - \sum_{\vec{b} \in B} \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b}\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_k\| < \epsilon$. Takže pre ľubovoľné konečné $D \in \mathcal{S}$ také, že $B \subseteq D$ máme $d(\vec{x}, [D]) \leq \|\vec{x} - \sum_{\vec{b} \in B} \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b}\| < \epsilon$. Takže $\lim_{S \in \mathcal{S}} \|\sum_{\vec{b} \in S} \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b} - \vec{x}\| = 0$.

Obrátene, nech $\vec{x}$ má rozvoj podľa A , teda $\vec{x} = \sum_{\vec{a} \in A} \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}$. Potom ku $k \in \mathbb{N}$ existuje konečná podmnožina $B_k \in \mathcal{S}$, že $\|\vec{x} - \sum_{\vec{b} \in B_k} \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b}\| < \frac{1}{k}$. Položme $\vec{x}_k = \sum_{\vec{b} \in B_k} \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b}$. Zrejme $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}$. □

¹⁶Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – francúzsky matematik zaoberajúci sa teóriou šírenia tepla. Riešenie našiel pomocou trigonometrických funkcií.

VETA 2.8 (Rieszova¹⁷-Fischerova¹⁸). *Nech A je ortonormálna podmnožina Hilbertovho priestoru X nad F a $\{\alpha_{\vec{a}}\}_{\vec{a} \in A}$ je postupnosť prvkov F . Potom existuje $\vec{x} \in X$ taký, že $\vec{x} = \sum_{\vec{a} \in A} \alpha_{\vec{a}} \vec{a}$ práve vtedy, keď existuje $\sum_{\vec{a} \in A} |\alpha_{\vec{a}}|^2$.*

Dôkaz: Z existencie rozvoja podľa ortonormálnej množiny je $\alpha_{\vec{a}} = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ a existuje $\sum_{\vec{a} \in A} |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle|^2$.

Obrátene, ak existuje $\sum_{\vec{a} \in A} |\alpha_{\vec{a}}|^2$, tak pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ máme konečnú podmnožinu $D_\epsilon \subset A$ takú, že pre $B \subseteq A - D_\epsilon$ je $\sum_{\vec{b} \in B} |\alpha_{\vec{b}}|^2 < \epsilon$ (uvedomme si, že špeciálne v konečnorozmerných priestoroch môže nastať aj prípad $D_\epsilon = A$). Takže $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\vec{b} \in D_\epsilon} \alpha_{\vec{b}} \vec{b} = \vec{x}$. $\square$

VETA 2.9 (Rieszova veta o reprezentácii lineárnych funkcionálov). *Nech X je Hilbertov priestor nad F a $f: X \rightarrow F$ je lineárny funkcionál. Potom f je spojitý vtedy a len vtedy, keď existuje jednoznačne určený prvok $\vec{y} \in X$ taký, že $f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. Vtedy $\|f\| = \|\vec{y}\|$.*

Dôkaz: Ak $f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, tak ide zrejme o lineárny funkcionál. Keďže $|\vec{f}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ (podľa CSB nerovnosti), tak $\|f\| \leq \|\vec{y}\|$. Ale pre $\vec{x} = \vec{y}$ máme $|f(\vec{y})| = \|\vec{y}\|^2$, čo dáva rovnosť $\|f\| = \|\vec{y}\|$.

Obrátene, ak f je spojitý funkcionál, tak $\ker f = f^{-1}(0) \subseteq X$ je uzavretý podpriestor. Ak $(\ker f)^\perp = \{\vec{0}\}$, tak sme hotoví, lebo $f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle$. Ak $(\ker f)^\perp \neq \{\vec{0}\}$, tak existuje $\vec{0} \neq \vec{n} \in (\ker f)^\perp$ a môžeme predpokladať, že $f(\vec{n}) = 1$. Potom pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ máme $f(\vec{x} - f(\vec{x})\vec{n}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x})f(\vec{n}) = 0$. Teda $\vec{x} - f(\vec{x})\vec{n} \in \ker f$. Takže

$$(26) \quad \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle - f(\vec{x})\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Teda $f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \frac{\vec{n}}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \rangle$. Jednoznačnosť platí, keďže z $\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{m} \rangle = 0$ máme $\langle \vec{x}, \vec{n} - \vec{m} \rangle$ pre každé $\vec{x} \in X = 0$. Špeciálne pre $\vec{x} = \vec{n} - \vec{m}$ dostávame, že $\vec{n} - \vec{m} = \vec{0}$. $\square$

DEFINÍCIA 2.4 (Totálna množina). *Podmnožinu A v Hilbertovom priestore X nazývame totálnou, ak $A^\perp = \{\vec{0}\}$.*

VETA 2.10 (Existencia totálnej ortonormalnej množiny). *Ak A je ortonormálna množina v Hilbertovom priestore X , tak existuje totálna ortonormálna nadmnožina A .*

Dôkaz: Treba použiť obvyklým spôsobom princíp maximality. $\square$

¹⁷Frigyes Riesz (1880–1956) – maďarský matematik, je jedným zo zakladateľov funkcionálnej analýzy, jeho výsledky sa týkajú Lebesguovho integrálu, operátorového kalkulu, ergodickej teórie, topológie a ďalších oblastí. Za svoju prácu dostal niekoľko ocenení.

¹⁸Ernst Sigismund Fischer (1875–1954) – rakúsky matematik pracujúci najmä v Nemecku, zaoberal sa hlavne ortonormálnymi postupnosťami funkcií, determinantami a konečnými abelovskými grupami.

DEFINÍCIA 2.5 (Báza Hilbertovho priestoru). *Totálnu ortonormálnu podmnožinu Hilbertovho priestoru X nazývame bázou.*

POZNÁMKA 2.6. *V prípade nekonečnorozmerného priestoru reprezentujú pojmy báza a algebraická báza rozdielne koncepty generovania prvkov Hilbertovho vektorového priestoru.*

META 2.11 (Ekvivalentné podmienky totálnosti). *Nech A je ortonormálna množina v Hilbertovom priestore X . Potom sú ekvivalentné nasledujúce tvrdenia*

- (1) A je totálna,
- (2) $X = \text{cl}([A])$,
- (3) pre každé $\vec{x} \in X$ platí $\vec{x} = \sum_{\vec{a} \in A} \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}$,
- (4) pre každé $\vec{x}, \vec{y} \in X$ platí $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{\vec{a} \in A} \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \overline{\langle \vec{y}, \vec{a} \rangle}$,
- (5) pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ platí Parsevalova¹⁹ identita o norme $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{\vec{a} \in A} |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle|^2$.

Dôkaz: Dôkaz prevedieme ukázaním piatich implikácií. Nech platí (1), potom $Y = \text{cl}([A])$ je uzavretý v X , takže pre ľubovoľné $\vec{x} \in X$ existuje kolmý priemet $\vec{x}$ do Y . Označme ho $\vec{u}$. Zrejme $\vec{x} - \vec{u} \in Y^\perp$. Keďže $A \subseteq Y$, tak máme $Y^\perp \subseteq A^\perp = \{\vec{0}\}$. Teda $X \subseteq Y$. Triviálne $Y \subseteq X$, teda $X = \text{cl}([A])$ a platí (2).

Fakt, že z (2) vyplýva (3) sme ukázali v predchádzajúcich vetách.

Nech platí (3). Potom pre $\vec{x} = \vec{0}$ je tvrdenie (4) zřejmé. Nech teda $\vec{x} \neq \vec{0}$ a $\vec{y} = \sum_{\vec{a} \in A} \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{a}$. Potom pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje konečná množina $B \subseteq A$, že pre ľubovoľnú konečnú podmnožinu $C \subseteq A$ takú, že $B \subseteq C \subseteq A$ máme $\|\vec{y} - \sum_{\vec{a} \in C} \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{a}\| < \frac{\epsilon}{\|\vec{x}\|}$. Teda

$$\begin{aligned} |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \sum_{\vec{a} \in C} \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \overline{\langle \vec{y}, \vec{a} \rangle}| &= |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \sum_{\vec{a} \in C} \langle \vec{x}, \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{a} \rangle| = \\ &= |\langle \vec{x}, \vec{y} - \sum_{\vec{a} \in C} \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{a} \rangle| \leq \\ &\leq \|\vec{x}\| \|\vec{y} - \sum_{\vec{a} \in C} \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{a}\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Teda $\lim_{B \subseteq A} \sum_{\vec{a} \in B} \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \overline{\langle \vec{y}, \vec{a} \rangle}$ existuje a je to $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. A máme (4).

Platnosť (5) dostaneme z platnosti (4), ak $\vec{y} = \vec{x}$.

Ak platí (5), tak pre $\vec{x} \in A^\perp$ je $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0$ a $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{\vec{a} \in A} |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle|^2 = 0$. Teda $\vec{x} = \vec{0}$. Teda A je totálna. $\square$

¹⁹Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836) – francúzsky matematik, o ktorom sa veľa nevie. Žil počas francúzskej revolúcie a bol väznený. Známych je len päť jeho publikácií.

POZNÁMKA 2.7. Parsevalova rovnosť sa často v literatúre označuje aj ako Plancherelova²⁰. Ide vlastne o rozšírenú Pythagorovu vetu.²¹

3. Spojité funkcie na kompaktnej množine

Nasledujúca veta hovorí, že polynomicke funkcie môžu na kompaktnej množine aproximovať spojitú funkciu akokoľvek presne. Budeme sa zaoberať analogickým typom viet a hľadať podmienky na množinu funkcií, ktorá spĺňa analogickú vlastnosť.

VETA 3.1 (Stoneova-Weierstrassova). *Nech K je kompaktná podmnožina $\mathbb{R}^n$, $f: K \rightarrow F$ je spojitá funkcia s hodnotami v Banachovom priestore $F = \mathbb{R}$ alebo $F = \mathbb{C}$. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje polynóm $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ a platí $\max_{x \in K} \|f(x) - Q(x)\| \leq \varepsilon$.*

Nech X je vektorový priestor nad poľom F (v našom prípade $F = \mathbb{R}$ alebo $F = \mathbb{C}$).

DEFINÍCIA 3.1. *Reálnou (komplexnou) algebrou A funkcií na X rozumíme množinu $\{f: X \rightarrow F\} \subseteq F^X$ takú, že pre ľubovoľné $c \in F$, $f(x) = c$ je z A , ak $f, g \in A$, tak $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$.*

POZNÁMKA 3.1. *Intuitívne, algebra je vektorový priestor s násobením vektorov, ktoré sa správa „prirodzene“ vzhľadom na lineárne kombinácie vektorov.*

Príklad: Algebra všetkých polynómov viacerých premenných.

CVIČENIE 3.1. *Nech S je neprázdna množina, $\phi: S \rightarrow F$. Potom $\{a_0 + a_1\phi + \dots + a_n\phi^n : a_i \in F, i = 0, \dots, n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je algebra. Hovoríme, že je generovaná zobrazením ϕ .*

CVIČENIE 3.2. *Nech S je neprázdna množina, $\phi_1, \dots, \phi_r: S \rightarrow F$ sú zobrazenia. Potom $F[\phi_1, \dots, \phi_r] = \{\sum_{|\mathbf{i}| \leq n} a_{\mathbf{i}} \phi^{\mathbf{i}} : a_{\mathbf{i}} \in F, n \in \mathbb{N}_0\}$, kde $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \subseteq \mathbb{N}_0^r$, $|\mathbf{i}| = |i_1| + \dots + |i_r|$, $\phi^{\mathbf{i}} = \phi_1^{i_1} \dots \phi_r^{i_r}$, je algebra. Dokážte! Treba si uvedomiť, že ide o dosadenie $\phi_1, \dots, \phi_r$ do polynómov r neurčitých nad F .*

CVIČENIE 3.3. *Nech X je topologický priestor. Potom $C(X, F)$ je algebra.*

²⁰Michel Plancherel (1885–1967) – švajčiarsky matematik pôsobiaci v Zürichu na ETH. Zaoberal sa Fourierovou teóriou, teóriou miery a aplikáciami v teórii hyperbolických a parabolických diferenciálnych rovníc. Výsledky publikoval aj v oblastiach ergodických systémov a algebier.

²¹Pythagoras zo Sámu (asi 569 p.n.l.–475 p.n.l.) – z jeho života sa veľa nevie, hoci sa považuje za dôležitú postavu v dejinách matematiky i filozofie. Bol mladším súčasníkom Tháleša i Anaximandra z Milétu. Podľa Aristotela, veril, že všetko sa dá redukovať na čísla. Mnoho javov posudzoval cez numerológiu. Veta z geometrie pomenovaná po ňom bola známa už v Babylóne o tisíc rokov skôr. Výsledky, ktoré sa mu pripisujú, patria do kategórie geometrických tvrdení.

Nech $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktná množina. Nech $A \subseteq C(S, F)$. Keďže každá funkcia f je ohraničená na S , položíme $\|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|$ pre $f \in C(S, F)$. Teda $A \subseteq B(S, F)$. Čo je $\text{cl}(A)$ v $B(S, F)$? Keďže $C(S, F)$ je uzavretá v $B(S, F)$, zrejme $\text{cl}(A) \subseteq C(S, F)$. Kedy nastáva rovnosť? Hľadáme podmienky na A , za ktorých sa ľubovoľná funkcia z $C(S, F)$ dá aproximovať prvkami z A .

VETA 3.2 (Stoneova-Weierstrassova, reálna verzia). *Nech S je kompaktná množina, A je algebra reálnych spojitých funkcií na S . Nech A oddeľuje body a obsahuje konštantné funkcie. Potom rovnomerný uzáver A je práve algebra všetkých reálnych spojitých funkcií na S .*

Dôkaz: Predpokladajme, že z $f \in A$ vyplýva aj $|f| \in A$. Potom pre $f, g \in A$ je aj $\min\{f, g\} \in A$ resp. $\max\{f, g\} \in A$, pretože $\min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ a $\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$.

Nech $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom existuje $h \in A$ také, že $h(x_1) = \alpha$, $h(x_2) = \beta$. Na konštrukciu použijeme funkciu $\phi \in A$ oddeľujúcu body x_1, x_2 . Potom

$$(27) \quad h(x) = \frac{\phi(x_2) - \phi(x)}{\phi(x_2) - \phi(x_1)}\alpha + \frac{\phi(x) - \phi(x_1)}{\phi(x_2) - \phi(x_1)}\beta.$$

Nech $f \in C(S, \mathbb{R})$. Chceme nájsť $g \in A$ také, že pre ľubovoľné $y \in S$

$$(28) \quad f(y) - \varepsilon < g(y) < f(y) + \varepsilon.$$

Pre ľubovoľné $x, y \in S$ existuje $h_{x,y} \in A$ také, že $h_{x,y}(x) = f(x)$ a $h_{x,y}(y) = f(y)$. Nech x je pevné. Pre ľubovoľné $y \in S$ existuje otvorená guľa $B_{\delta(y)}(y)$ také, že pre $z \in B_{\delta(y)}(y)$ je $h_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$ (zo spojitosti $f - h_{x,y}$ v y). Z otvoreného pokrytia $\{B_{\delta(y)}(y)\}_{y \in S}$ vyberme konečné podpokrytie $B_{\delta(y_1)}(y_1), \dots, B_{\delta(y_n)}(y_n)$. Nech

$$(29) \quad h_x = \min\{h_{x,y_1}, \dots, h_{x,y_n}\} \in A.$$

Potom $h_x(z) < f(z) + \varepsilon$ pre ľubovoľné $z \in S$, $h_x(x) = f(x)$ t.j. $(h_x - f)(x) = 0$. Nech V_x je otvorená guľa so stredom x a také, že pre všetky $z \in V_x$ platí $(h_x - f)(z) > -\varepsilon$ t.j. $f(z) - \varepsilon < h_x(z)$. Z kompaktnosti S existuje konečne veľa $x_1, \dots, x_m \in S$ takých, že $V_{x_1}, \dots, V_{x_m}$ pokrývajú množinu S . Nech

$$(30) \quad g = \max\{h_{x_1}, \dots, h_{x_m}\} \in A.$$

Evidentne platí (28).

Teraz ešte zostáva ukázať, že $f \in A$ znamená aj $|f| \in A$. Keďže f je ohraničená, existuje $c > 0$ a $-c \leq f(x) \leq c$ pre ľubovoľné $x \in S$. Funkcia $f \mapsto |f|$ sa dá aproximovať polynómami na intervale $[-c, c]$ (spomeňme si napr. na Weierstrassovu vetu o aproximácii pomocou Bernsteinových polynómov). Nech $\varepsilon > 0$ a p je taký polynóm, že $|p(t) - |t|| < \varepsilon$ pre $-c \leq t \leq c$. Potom $|p(f(x)) - |f(x)|| < \varepsilon$, a teda $|f|$ sa dá aproximovať $p \circ f$. $\square$

DÔSLEDOK 3.1. *Nech $S \subset \mathbb{R}^k$ je kompaktná množina. Každá spojitá funkcia na S sa dá rovnomerne aproximovať polynómami.*

CVIČENIE 3.4. *Nech $0 < \delta < 1$ a uvažujme $|t| = \sqrt{t^2}$. Potom $(t^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \delta^{1/2-k} t^{2k}$. Ukážte, že s danou presnosťou možno $|t|$ aproximovať polynómom na kompaktnom intervale.*

CVIČENIE 3.5. *Nech $p_0(t) = 0$, $p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2)$. Ukážte, že $p_n(t) \rightarrow \sqrt{t}$ rovnomerne na $[0, 1]$, lebo $0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}$ a na tomto intervale platí $0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2}{n}$.*

DEFINÍCIA 3.2 (Samozdružená algebra). *Algebru A nad polom komplexných čísel nazývame samozdruženou, ak z $f \in A$ vyplýva aj $\bar{f} \in A$.*

VETA 3.3 (Stoneova-Weierstrassova, komplexná verzia). *Nech S je kompaktná množina, A je komplexná algebra na S . Nech A oddeľuje body S , obsahuje konštanty a je samozdružená. Potom rovnomerný uzáver A je algebra všetkých spojitých funkcií na S .*

Dôkaz: Označme $A_{\mathbb{R}}$ množinu reálnych funkcií v A . Pre $f \in A$ je $g = f + \bar{f} \in A_{\mathbb{R}}$, zrejme aj $A_{\mathbb{R}}$ oddeľuje body S . Teda $A_{\mathbb{R}}$ spĺňa podmienky reálnej verzie Stone-Weierstrassovej vety.

Nech f je komplexná funkcia na S , $f = \Re f + i\Im f$. Nech $\Re f, \Im f$ sú aproximované v $A_{\mathbb{R}}$ napr. funkciami $u, v \in A_{\mathbb{R}}$ takými, že $\|u - \Re f\| < \varepsilon$, $\|v - \Im f\| < \varepsilon$. Potom $\|f - (u + iv)\| \leq \|\Re f - u\| + \|\Im f - v\| < 2\varepsilon$. $\square$

4. Fourierove rady

V tejto a niekoľkých nasledujúcich častiach sa budeme zaoberať komplexnými funkciami z priestoru $L^2(-\pi, \pi)$. Tieto funkcie sa dajú za určitých predpokladov rovnomerne aproximovať trigonometrickými polynómami. Uvidíme aj ako je to s bodovou konvergenciou v prípadoch, keď rovnomerná konvergencia zlyháva.

V priestore $L^2(-\pi, \pi)$ je skalárny súčin definovaný predpisom

$$(31) \quad \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

CVIČENIE 4.1. *Ukážte že (31) definuje skalárny súčin na $L^2(-\pi, \pi)$.*

Označme $\chi_n(x) = e^{inx}$ pre $n \in \mathbb{Z}$. Potom platí

$$(32) \quad \langle \chi_n, \chi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx - inx} dx = 2\pi,$$

$$(33) \quad \begin{aligned} \langle \chi_n, \chi_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx - imx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n - m)x) + i \sin((n - m)x) dx = 0. \end{aligned}$$

Teda systém $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvorí ortonormálnu množinu. Fourierov koeficient vzhľadom na $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_n$ je

$$(34) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Položme $\phi_0 = 1$ a $\phi_n(x) = \cos(nx)$, $\psi_n(x) = \sin(nx)$, $\phi_{-n}(x) = \psi_n(x)$, $\psi_{-n}(x) = \phi_n(x)$ pre prirodzené $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Zrejme

$$\begin{aligned} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle &= 2\pi, \\ \langle \phi_n, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx = \pi, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)) dx = 0, \\ &\quad m, n \in \mathbb{N}, m \neq n. \end{aligned}$$

Analogicky sa dajú spočítať aj $\langle \phi_n, \phi_{-n} \rangle$, $\langle \phi_n, \phi_{-m} \rangle$ a $\langle \phi_{-n}, \phi_{-m} \rangle$ pre $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Je zrejmé, že systém $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)\}_{k \in \mathbb{N}}$ je ortonormálna množina.

Pre funkciu $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ počítajme Fourierove koeficienty

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\|\phi_0\|^2} \langle f, \phi_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \langle f, \phi_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ a_{-n} &= \frac{1}{\|\phi_{-n}\|^2} \langle f, \phi_{-n} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

vzhľadom na ϕ_n , $n \in \mathbb{Z}$. Nech $b_n = a_{-n}$ pre $n \in \mathbb{Z}$, zrejme sú to Fourierove koeficienty vzhľadom na ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$.

Študujme čiastkové sumy $s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \chi_k(x)$. Priamočiarym výpočtom získame, že $c_k = \frac{a_k}{2} - i \frac{b_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k}{2} + i \frac{b_k}{2}$ pre $k \in \mathbb{N}$. Teda

$$(35) \quad s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-n}^n a_k \phi_k(x).$$

DEFINÍCIA 4.1. *Nech $f \in F[x, y]$ je polynomická funkcia t.j. $F[x, y]$ je okruh polynomických funkcií s premennými x, y a koeficientami v F . Potom funkcia $f(\cos(t), \sin(t))$ sa nazýva trigonometrický polynóm.*

POZNÁMKA 4.1. *V literatúre sa trigonometrické polynómy často definujú tak, že ide o funkciu tvaru $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, kde $a_0, a_k, b_k \in F$, $k = 1, \dots, n$.*

CVIČENIE 4.2. *Zistite, či, definícia trigonometrického polynómu súhlasí s definíciou uvedenou v predchádzajúcej poznámke.*

V ďalších častiach tohoto textu sa budeme zaoberať Fourierovým radom $S_f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \chi_k$ resp. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_k$ a jeho čiastočnými súčtami s_n , jeho podmienkami konvergenzie a typom konvergenzie. Takýto rad nemusí nutne konvergovať resp. hodnoty v niektorých bodoch môžu byť odlišné od hodnôt funkcie f v týchto bodoch.

Uvedomme si, že použitím trigonometrických polynómov dosiahneme pre reálnu funkciu f reálne koeficienty $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$

CVIČENIE 4.3. Ak f je párna funkcia, tak $b_n = 0$ pre $n \geq 1$. Ak f je nepárna funkcia, tak $a_n = 0$ pre $n \geq 0$. Dokážte!

5. Aparát zisťovania konvergenzie Fourierových radov

Ku zisťovaniu konvergenzie budeme potrebovať niekoľko technických faktov založených na pojme konvolúcia funkcií a Diracova²² postupnosť. Ide o postupnosť funkcií, ktoré konvolúciou vedú vyextrahovať určitú hodnotu funkcie.

DEFINÍCIA 5.1 (Konvolúcia). Nech f, g sú 2π periodické funkcie, definujeme

$$(36) \quad f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Túto operáciu nazývame konvolúciou funkcií f a g . Funkciu g často nazývame konvolučným jadrom.

POZNÁMKA 5.1. Konvolúcia sa dá vnímať aj nasledujúcim spôsobom. Pre fixné x ide o skalárny súčin funkcie f a v parametri posunutej funkcie g . Takže až na násobok ide o Fourierov koeficient f vzhľadom na g . Keďže Fourierov koeficient zaznamenáva „podobnosť“ funkcie f na funkciu g , tak môžeme povedať, že konvolúcia zaznamenáva, ako sa f podobá na v parametri posunuté verzie funkcie g .

CVIČENIE 5.1. Ukážte, že konvolúcia spĺňa $f * g = g * f$, $f * (g * h) = (f * g) * h$, $f * (g + h) = f * g + f * h$.

DEFINÍCIA 5.2 (Diracova postupnosť). Postupnosť $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spojitých periodických funkcií s periodou 2π sa nazýva Diracova, ak

- (1) $K_n \geq 0$ pre $n \in \mathbb{N}$,
- (2) $\int_{-\pi}^{\pi} K_n = 1$,
- (3) Pre $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ existuje n_0 také, že pre $n \geq n_0$ platí $\int_{-\pi}^{-\delta} K_n + \int_{\delta}^{\pi} K_n < \varepsilon$.

²²Paul Dirac (1902–1984) – britsko-švajčiarsky teoretický fyzik, pracoval v oblasti kvantovej mechaniky a dostal spolu s Erwinom Schrödingerom za túto prácu Nobelovu cenu v roku 1933. Ako prvý predpovedal antihmotu. Jeho práca bola mnohokrát ocenená. Z pojmov pomenovaných jeho menom sa často používa pojem Diracovej δ -funkcie, Diracova rovnica (relativistická vlnová rovnica).

VETA 5.1 (O rovnomernej konvergencii konvolúcií). *Nech f je po častiach spojitá funkcia na $(-\pi, \pi)$, ohraničená. Pre ľubovoľné n označme $f_n = K_n * f$. Nech K je kompaktná podmnožina $(-\pi, \pi)$ a f je spojitá na nej. Potom $\{f_n\}$ konverguje ku f rovnomerne na K .*

Dôkaz: Keďže $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)f(x-t)dt$ a $f(x) = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt$, tak

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)[f(x-t) - f(x)]dt.$$

Z kompaktnosti a rovnomernej spojitosti existuje $\delta > 0$ pre zvolené $\varepsilon > 0$ také, že $|t| < \delta$ dáva $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ pre ľubovoľné $x \in K$. Nech $M \geq |f|$. Vyberme N také, že pre $n \geq N$ je

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Potom

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \leq \\ &\leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} + \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

□

POZNÁMKA 5.2. *Analogicky sa dá postupovať aj pri neohraničenom intervale, akurát treba adaptovať podmienky v definícii Diracovej postupnosti.*

6. Analýza Fejérovho jadra

V tejto časti uvedieme funkcie, ktoré tvoria Diracovu postupnosť alebo slúžia podobne ako Diracova postupnosť. Nazývame ich aj konvolučné jadrá.

Budeme používať dva druhy jadier (t.j. funkcií g) v konvolúcii. Dirichletovo²³ jadro sa definuje

$$(37) \quad D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \chi_k(x)$$

²³Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) – pracoval v oblasti teórie čísel, matematickej analýze a špeciálne sa venoval Fourierovým radom. Venoval sa aj matematickej fyzike. Medzi prvými formalizoval pojem funkcie. Jeho meno nesie viacero matematických štruktúr a pojmov ako napr. Dirichletov princíp, Dirichletova funkcia, Dirichletovo kritérium konvergence radov, Dirichletova distribúcia.

a Fejérov²⁴ (Cesarovo²⁵) jadro

$$(38) \quad K_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^m e^{ikx} = \frac{1}{n} (D_0(x) + \cdots + D_{n-1}(x)).$$

POZNÁMKA 6.1. *Pozor, v tejto časti je K_n , ako sa ukáže, už konkrétna Diracova postupnosť!*

Najskôr vypočítajme

$$\chi_k * f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = 2\pi c_k e^{ikx}.$$

Keďže konvolúcia je distributívna vzhľadom na sčítanie, tak platí nasledujúca veta.

VETA 6.1. *Nech f je periodická, po častiach spojitá funkcia. Potom*

$$D_n * f(x) = s_n(x) \quad a \quad K_n * f(x) = \frac{1}{n} (s_0(x) + \cdots + s_{n-1}(x)).$$

POZNÁMKA 6.2. *Predchádzajúcu vetu interpretujeme tak, že $K_n * f$ je priemerom čiastočného súčtu Fourierovho radu f .*

Teraz sa budeme zaoberať Fejérovým jadrom a ukážeme, že spĺňa podmienky Diracovej postupnosti. Najskôr ukážeme toto jadro v tvare zlomku elementárnych funkcií.

$$\text{VETA 6.2. Platí } K_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Dôkaz: Počítajme pomocou čiastočného súčtu geometrickej postupnosti

$$\sum_{k=-m}^m e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(m+1)x}}{1 - e^{ix}} + \frac{1 - e^{-i(m+1)x}}{1 - e^{-ix}} - 1$$

²⁴Lipót Fejér (1880–1959) (rod. Weiss) – maďarský matematik zaoberajúci sa najmä harmonickou analýzou, špeciálne Fourierovými radmi. Medzi jeho žiakov patrili John von Neumann, Paul Erdős, Pál Turán a George Pólya. Kvôli židovskému pôvodu bol nútený odísť do dôchodku počas druhej svetovej vojny a utrpel ťažké zranenia.

²⁵Ernesto Cesàro (1859–1906) – taliansky matematik pracujúci v diferenciálnej geometrii ale aj v teórii čísel. Sú po ňom pomenované špeciálne fraktálne krivky.

a dosadíme výsledok

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^m e^{ikx} &= \frac{1}{1-e^{ix}} \left(n - e^{ix} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \right) + \\
 &\quad \frac{1}{1-e^{-ix}} \left(n - e^{-ix} \frac{1-e^{-inx}}{1-e^{-ix}} \right) - n \\
 &= \frac{e^{-ix/2}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \left(n - e^{ix} \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \right) + \\
 &\quad \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \left(n - e^{-ix} \frac{1-e^{-inx}}{1-e^{-ix}} \right) - n \\
 &= \frac{1}{(2i)^2 \sin^2(x/2)} (e^{inx} + e^{-inx} - 2) \\
 &= \frac{1}{(2i)^2 \sin^2(x/2)} (e^{inx/2} - e^{-inx/2})^2 \\
 &= \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

vhodným rozšírením zlomkov pomocou $e^{\frac{ix}{2}}$, resp. $e^{-\frac{ix}{2}}$, a použitím faktu $e^{iy} - e^{-iy} = 2i \sin y$. $\square$

VETA 6.3. *Postupnosť Fejérových jadier je Diracova postupnosť.*

Dôkaz: Keďže K_n je podľa predchádzajúcej vety štvorcom reálnej funkcie, zrejme platí $K_n \geq 0$. Ďalej platí

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^m e^{ikx} dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{i0x} dx = 1
 \end{aligned}$$

použitím faktu $e^{ikx} + e^{-ikx} = 2 \cos(-kx)$ a párnosti tejto funkcie pri integrovaní.

Tretia vlastnosť Diracovej postupnosti sa ukáže tak, že pre $\varepsilon > 0$ máme

$$\frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

čo je pre fixné δ konštanta vydelená číslom n , takže pre $n \rightarrow \infty$ konverguje hodnota pravého výrazu k nule. $\square$

CVIČENIE 6.1. *Vypočítajte hodnotu posledného integrálu v predchádzajúcom dôkaze.*

DÔSLEDOK 6.1. *Funkcie $K_n * f$ konvergujú rovnomerne ku f na ľubovoľnej kompaktnej množine, na ktorej je f spojitá.*

Dôkaz: Ide o aplikáciu vety 5.1 na Fejérovu konvolučné jadro. $\square$

Táto konvergencia je aj bodová, ako ukazuje nasledujúci výpočet.

Keďže K_n je párna, jej koeficienty b_k sú nulové, takže po výpočte dostaneme $K_n = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(kx)$. Potom

$$K_n * f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k \cos(kx).$$

kde a_k sú Fourierove koeficienty f vzhľadom na ϕ_k .

POZNÁMKA 6.3. *Táto procedúra je známa ako Cesarova sumácia. Potom tvrdenie dôsledku možno formulovať aj ako vetu: Fourierov rad funkcie je Cesarovou sumou rovnomerne na ľubovoľnej kompaktnej množine, na ktorej je f spojitá.*

7. Explicitná rovnomerná aproximácia

V tejto časti ukážeme, že priestor rovnomerných limit schodovitých funkcií sa dá vygenerovať pomocou limit trigonometrických polynómov. Pracujeme s periodickými funkciami s periódou 2π . Ekvivalentne môžeme pracovať s funkciami na $\mathbb{S}^1$.

V nasledujúcich úvahách budeme súčasne využívať viacero noriem. Nech funkcia $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ má normu $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ v L^2 alebo $\|\cdot\|_1$ v L^1 priestore. Pre $M = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| = \|f\|_\infty$ zrejme platí

$$(39) \quad \|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} M^2 dx = 2\pi M^2,$$

a teda $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_\infty$ v $L^2(-\pi, \pi)$. Podobne

$$(40) \quad \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} M dx = 2\pi M.$$

Študujme, čo sa dá získať z dôsledku 6.1. Zrejme platí nasledujúce tvrdenie.

VETA 7.1 (O rovnomernej aproximácii periodických funkcií). *Spojitá periodická funkcia s periódou 2π sa dá rovnomerne aproximovať trigonometrickými polynómami*

Pripomeňme, čo je schodovitá funkcia.

DEFINÍCIA 7.1 (Schodovitá funkcia). *Funkcia sa nazýva schodovitá, ak sa dá napísať ako $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{J_i}(x)$, kde $J_0, \dots, J_n \subset \mathbb{R}$ sú intervaly a $\chi_A(X)$ je charakteristická funkcia množiny A .*

POZNÁMKA 7.1. *Dá sa bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že v definícii schodovitej funkcie sú intervaly disjunktné a pokrývajú $\mathbb{R}$.*

CVIČENIE 7.1. Ukážte, že schodovité funkcie tvoria algebru.

DEFINÍCIA 7.2 (Regulovaná funkcia). Funkcia sa nazýva regulovaná, ak je rovnomernou limitou schodovitých funkcií.

CVIČENIE 7.2. Ukážte, že regulované funkcie nad fixnou definičnou množinou tvoria algebru.

Nech E je vektorový priestor regulovaných funkcií s periódou 2π . Potom E obsahuje podpriestor po častiach spojitých periodických funkcií.

LEMA 7.1. Nech $C_0^0 \subseteq E$ je priestor spojitých periodických funkcií f takých, že $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Potom C_0^0 je $L^1(-\pi, \pi)$ a $L^2(-\pi, \pi)$ hustý v E , t.j. každý prvok E je v uzávere C_0^0 v norme L^1 aj L^2 .

Dôkaz: Nech f je rovnomerná limita schodovitých funkcií. Predpokladajme, že má reálne hodnoty (funkciu s komplexnými hodnotami vieme rozložiť na $\Re(f) + i\Im(f)$). Keďže normy v $L^1(-\pi, \pi)$ aj $L^2(-\pi, \pi)$ sú ohraničené konštantným násobkom suprémovej normy $\|\cdot\|_\infty$ a každý prvok E sa dá aproximovať schodovitou funkciou v tejto norme, môžeme aproximovať prvok E aj v L^1 , resp. L^2 norme. Stačí teda dokázať vetu pre schodovité funkcie. Každá takáto funkcia je lineárnou kombináciou charakteristických funkcií intervalov. Preto ukážeme platnosť tvrdenia pre konštantú funkciu g na intervale $(a, b) \subseteq [-\pi, \pi]$ a nulovú mimo takéhoto intervalu.

Nech $a = -\pi$ alebo $b = \pi$, $\delta > 0$, potom definujeme

$$h_\delta(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq a \text{ alebo } b \leq x \leq \pi, \\ \frac{x-a}{\delta} g((a+b)/2) & a \leq x \leq a + \delta, \\ \frac{b-x}{\delta} g((a+b)/2) & b - \delta \leq x \leq b, \\ g(x) & a + \delta \leq x \leq b - \delta. \end{cases}$$

Zrejme

$$\|g - h_\delta\|_2^2 = \int_a^b |g - h_\delta|^2 = \int_a^{a+\delta} |g - h_\delta|^2 + \int_{b-\delta}^b |g - h_\delta|^2 \leq \frac{2}{3} \delta \|g\|_\infty^2.$$

Pre $\delta \rightarrow 0$ je h_δ ľubovoľne blízko g v L^2 -norme. $\square$

VETA 7.2. Priestor trigonometrických polynómov je hustý v E v L^2 -norme.

Dôkaz: Každý prvok $f \in E$ sa dá L^2 -aproximovať spojitou funkciou g s periódou 2π . Podľa predchádzajúcej vety sa g dá rovnomerne aproximovať trigonometrickými polynómami p a máme

$$\|g - p\|_2 \leq C \|g - p\|_\infty$$

pre nejaké $C \in \mathbb{R}$. Takže g možno L^2 -aproximovať vhodným trigonometrickým polynómom s ľubovoľnou presnosťou. $\square$

VETA 7.3. Systémy $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ aj $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sú totálne v E .

Dôkaz: Treba použiť hustotu podpriestoru generovanej takýmto systémom a ekvivalentnú podmienku totálnosti z vety 2.11. $\square$

8. Bodová konvergenca

V tejto časti sa dospejeme k tomu, že v bodoch nespojitosti sa za určitých predpokladov funkcia Fourierovým radom aproximuje priemernou hodnotou limit zľava a sprava v tomto bode.

VETA 8.1. Nech $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ je postupnosť čísel taká, že $\sum_n a_n \phi_n$ rovnomerne konverguje a nech $g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n$. Potom a_n je Fourierov koeficient g vzhľadom na ϕ_n a $\sum_n a_n \phi_n$ je Fourierov rad g .

Dôkaz: Pre ľubovoľné $m \in \mathbb{Z}$ je funkcia ϕ_m ohraničená, takže

$$\sum_k a_k \phi_k \phi_m = g \phi_m$$

konverguje rovnomerne. Integrovaním člen po člene dostávame

$$a_m \langle \phi_m, \phi_m \rangle = \langle g, \phi_m \rangle.$$

$\square$

VETA 8.2. Nech f je periodická funkcia triedy C^p , $p \geq 1$. Potom existuje konštanta C (závislá na prvých p deriváciách) taká, že

$$|c_n| \leq \frac{C}{n^p} \quad \text{t.j.} \quad c_n \in \mathcal{O}(n^{-p}) \quad \text{pre} \quad n \rightarrow \infty.$$

Špeciálne, pre $p \geq 2$ Fourierove rady absolútne a rovnomerne konvergujú.

Dôkaz: Treba integrovať p -krát po častiach $[u.v]' = u'v + uv'$. $\square$

POZNÁMKA 8.1. Predchádzajúca veta hovorí, že čím je funkcia hladšia, tým rýchlejšie konvergujú jej Fourierove koeficienty k 0.

VETA 8.3. Nech f je spojitá, periodická. Nech $\{c_n\}$ sú jej Fourierove koeficienty. Nech $\sum_n c_n \chi_n$ rovnomerne konverguje. Potom Fourierov rad f konverguje rovnomerne ku f . Toto platí špeciálne pre $p \geq 2$, $f \in C^p$.

Dôkaz: Nech g je rovnomerná limita Fourierovho radu. Potom všetky Fourierove koeficienty $f - g$ sú nulové, keďže báza je totálna. $\square$

LEMA 8.1 (Riemannova-Lebesguova). *Nech $a < b$. Nech f je rovnomerná limita schodovitých funkcií na $[a, b]$. Potom*

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{iAx} dx = 0.$$

Analogické tvrdenie platí, ak zameníme e^{iAx} za $\cos(Ax)$, $\sin(Ax)$ alebo e^{-iAx} .

Dôkaz: Najskôr dokážeme tvrdenie pre f je diferencovateľná až na konečný počet bodov a derivácia je po častiach spojitá. Na každom intervale ukážeme tvrdenie. Zrejme

$$\int_a^b f(x) e^{iAx} dx = \frac{f(b) e^{iAb}}{iA} - \frac{f(a) e^{iAa}}{iA} - \frac{1}{iA} \int_a^b f'(x) e^{iAx} dx,$$

čo dáva 0 pre $A \rightarrow \infty$, keďže f' je ohraničená.

Ak f je ľubovoľná, pre $\varepsilon > 0$ existuje schodovitá funkcia g taká, že

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Potom

$$\int_a^b f(x) e^{iAx} dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) e^{iAx} dx + \int_a^b g(x) e^{iAx} dx$$

a

$$\left| \int_a^b f(x) e^{iAx} dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_a^b g(x) e^{iAx} dx \right| < 2\varepsilon$$

pre dostatočne veľké A podľa výpočtu v prvej časti dôkazu, keďže g spĺňa predpoklady. $\square$

Riemannova-Lebesguova veta slúži ako vlastnosť 3 z Diracovej postupnosti. Ľahko sa nahliadne aj, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1,$$

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{2\pi \sin \frac{x}{2}} \quad \text{pre } x \neq 2k\pi$$

$$\sum_{k=0}^m e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(m+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = -\frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{2i \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^m e^{-ikx} = \frac{1 - e^{-i(m+1)x}}{1 - e^{-ix}} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i(m+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i(m+\frac{1}{2})x}}{2i \sin \frac{x}{2}}$$

Nezápornosť Dirichletovho jadra však neplatí, ako sa ľahko možno presvedčiť z vyjadrenia $D_n(x)$.

DEFINÍCIA 8.1 (Lipschitzovská²⁶ funkcia). *Funkcia f je lipschitzovská v x , ak existuje $c > 0$ a otvorený interval I obsahujúci x taký, že $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$ pre $y \in I$.*

VETA 8.4. *Nech f je periodická, rovnomerná limita schodovitých funkcií na $[-\pi, \pi]$. Nech f spĺňa Lipschitzovu podmienku v bode x . Potom $S_f(x) \rightarrow f(x)$.*

Dôkaz: Fixujme $x \in [-\pi, \pi]$, $\varepsilon > 0$. Potom

$$\begin{aligned} D_n * f(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)[f(x-t) - f(x)]dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} D_n(t)[f(x-t) - f(x)]dt \\ &\leq 2\delta \sup_{|t| < \delta} \frac{c|t|}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} + \text{Riemann-Lebesgues}, \end{aligned}$$

lebo funkcia $\frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$ je spojitá v bode 0, a teda aj ohraničená tam. $\square$

DÔSLEDOK 8.1. *Nech f je periodická, C^2 spojitá. Potom $S_f \rightrightarrows f$.*

Dôkaz: Predchádzajúca veta dáva bodovú konvergenciu. Podľa vety Fourierov rad konverguje rovnomerne ku g . Takže $g = f$. $\square$

VETA 8.5. *Nech E je priestor po častiach spojitých periodických funkcií. Potom priestor C^∞ periodických funkcií je L^2 hustý v E .*

DEFINÍCIA 8.2 (Jednostranne lipschitzovská funkcia). *Funkcia f je lipschitzovská zľava (sprava) v x , ak existuje $c > 0$ a $\delta > 0$ také, že $|f(x+h) - f(x+)| < ch$ ($|f(x-h) - f(x-)| < ch$) pre $0 \leq h \leq \delta$, kde $f(x+)$ resp. $f(x-)$ sú limitné hodnoty funkcie f sprava resp. zľava. Definujme hodnotu $Av_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.*

VETA 8.6. *Nech f je po častiach spojitá, spĺňa pravú a ľavú Lipschitzovu podmienku v bode x . Potom Fourierov rad f konverguje ku $Av_f(x)$ v bode x .*

Dôkaz: Počítajme

$$\begin{aligned} D_n * f(x) - Av_f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - Av_f(x))D_n(t)dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} D_n(t)[f(x-t) - Av_f(x)]dt. \end{aligned}$$

²⁶Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903) – nemecký matematik, Dirichletov žiak, so širokým tematickým záberom z teórie čísel, parciálnych diferenciálnych rovníc, dynamických systémov

Druhé dva integrály sa odhadnú pomocou Riemannovej-Lebesguovej lemy. Prvý integrál odhadneme teraz pomocou $\varepsilon > 0$. Vyberme $0 < \delta < \varepsilon$, C je Lipschitzova konštanta. Keďže D_n je párna funkcia, $D_n(t) = D_n(-t)$, tak

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)D_n(t)dt = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)dt.$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)[f(x-t) - Av_f(x)]dt &= \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)\left[\frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - Av_f(x)\right]dt \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{\sin((2n+1)t)}{2}\right| C \frac{|t|}{|\sin \frac{t}{2}|} dt \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} C \frac{|t|}{|\sin \frac{t}{2}|} dt \leq 2\varepsilon CC_1 \end{aligned}$$

□

9. Vybrané lineárne transformácie a ortogonálne bázy

V aplikáciách, najmä v spracovaní signálu alebo obrazu sa často vyskytujú niektoré lineárne transformácie. Uvedieme si ich jednoduchú podobu aj s niektorými ich vlastnosťami. Viac sa možno dočítať napr. v [17].

9.1. Laplaceova transformácia. Nech $f: [0, \infty) \rightarrow F$ je funkcia. Laplaceova²⁷ transformácia je definovaná pomocou vzťahu

$$(41) \quad \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{st} f(t) dt,$$

kde predpokladáme, že integrál existuje pre ľubovoľné $s \in F$. Táto transformácia je zrejme lineárna, t.j. $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$.

Laplaceova transformácia má aplikácie pri riešení diferenciálnych rovníc.

²⁷Pierre-Simon Laplace (1749–1827) – francúzsky matematik so širokým záberom pracujúci najmä v oblasti pravdepodobnosti a nebeskej mechaniky, ale aj matematickej fyziky. Je po ňom pomenovaných niekoľko pojmov ako Laplaceov operátor, Laplaceova rovnica, Laplaceova transformácia.

9.2. Fourierova transformácia. Fourierova transformácia priradí funkcii $f \in L^2(-\pi, \pi)$ rad, ktorý vo vhodnom zmysle konverguje práve k tejto funkcii. Dá sa ukázať, že v bodoch, kde je f spojitá, je táto konvergencia bodová.

Ide o transformáciu definovanú pomocou vzťahu

$$(42) \quad \mathcal{F}[f](t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int},$$

kde $c_n = \frac{1}{2\pi} \langle f(t), e^{int} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ sú koeficienty priemetu funkcie f do ortonormálnej množiny

$$(43) \quad A = \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Táto transformácia je zrejme lineárna. Jej aplikácie v spracovaní signálu a obrazu, keď sa zovšeobecni na viacrozmerné priestory, je nezastupiteľná.

Pokiaľ potrebujeme interval $[a, b]$, tak sa použije lineárna substitúcia tvaru $t \mapsto -\pi + \frac{x-a}{b-a} 2\pi$.

9.3. Diskrétna Fourierova transformácia. Jeden z pohľadov na túto transformáciu, že ide o aproximáciu Fourierovho radu konečnou sumou. Táto transformácia má však aj ďalšie zaujímavé vlastnosti, ktoré sa objavujú v rôznych oblastiach matematiky (napr. teória čísel, kódovania, grúp a pod).

Fixujme $n \in \mathbb{N}$. Pre jednoduchosť skúmame túto transformáciu na intervale $[0, 2\pi)$ a zoberme do úvahy body $X_n = \{x_k = k \frac{2\pi}{n} : k = 0, \dots, n-1\}$. Definujme priestor X všetkých funkcií $f: X_n \rightarrow \mathbb{C}$. Ide o konečnorozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{C}$, pričom báza i skalárny súčin sú definované prirodzene, t.j. funkcie $e_i(x_j) = \delta_{ij}$ pre $i = 0, \dots, n-1$ tvoria ortonormálnu bázu vzhľadom na skalárny súčin

$$(44) \quad \langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \overline{g(x_i)}.$$

Označme $\omega_n = e^{i \frac{2\pi}{n}}$. Ide o primitívnu jednotku na jednotkovej komplexnej kružnici. Potom máme danú nasledujúcu množinu funkcií

$$(45) \quad \phi_r(x_k) = e^{irk \frac{2\pi}{n}} \quad r = 0, \dots, n-1.$$

Lahko sa ukáže, že táto množina funkcií je ortogonálna v našom konečnorozmernom priestore funkcií a $\|\phi_r\|^2 = n$.

Reprezentácia ľubovoľnej funkcie $f \in X$ v takejto báze je potom daná

$$(46) \quad f = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \langle f, \phi_r \rangle \phi_r.$$

Označme $\hat{f}(r) = \frac{1}{n} \langle f, \phi_r \rangle$. Potom môžeme písať

$$(47) \quad f(x_k) = \sum_{r=0}^{n-1} \hat{f}(r) \phi_r(x_k) = \sum_{r=0}^{n-1} \hat{f}(r) e^{irx_k}.$$

Na rýchle numerické vyčíslovanie $\hat{f}(r)$ sa používa známa Hornerova²⁸ schéma, keďže platí, že

$$(48) \quad \hat{f}(r) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) (\omega_n^{-r})^k.$$

CVIČENIE 9.1. *Ukážte tvrdenia o diskkrétnej Fourierovej transformácii.*

9.4. Transformácia $\mathcal{Z}$. Zoberieme postupnosť čísel $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a priradíme jej Laurentov²⁹ rad

$$(49) \quad \mathcal{Z}[a] = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Zrejme $\mathcal{Z}$ -transformácia je lineárna. Táto transformácia sa často používa v kombinatorike pri tvorbe tzv. vytvárajúcich funkcií pre niektoré kombinatorické postupnosti. Pomocou nich sa dajú dokázať mnohé kombinatorické identity.

9.5. Legendrove polynómy. Ortonormalizovaním množiny polynómov $1, x, x^2, \dots$ dostávame ortonormálnu bázu priestoru $L^2(-1, 1)$. Prvky tejto bázy sa nazývajú Legendrove³⁰ polynómy a majú tvar

$$(50) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Tento tvar sa nazýva aj Rodriguesov³¹ vzorec.

²⁸William George Horner (1786–1837) – britský matematik zaoberajúci sa elementárnou geometriou a riešením algebraických a funkcionálnych rovníc. Metóda známa pod jeho menom bola publikovaná už v roku 1820 londýnskym hodinárom Theophilom Holdredom.

²⁹Pierre Alphonse Laurent (1813–1854) – práce tohoto francúzskeho vojaka boli často odmietnuté na publikáciu Akadémiou vied, hoci významné osobnosti ako Cauchy ich odporúčali. Zaoberal sa aj teóriou svetla.

³⁰Adrien-Marie Legendre (1752–1833) – francúzsky matematik a fyzik začal svoju kariéru vyriešením úlohy Berlínskej akadémie o pohybe projektilu vystreleného z dela. Zaoberal sa teóriou čísel (π nie je racionálne, beta a gama funkcia), eliptickými funkciami, geometriou (jeho kniha sa stala nadhlo učebnicou elementárnej geometrie).

³¹Benjamin Olinde Rodrigues (1795–1851) – stal sa bankárom, keďže pochádzal zo židovskej rodiny a po skončení doktorátu z matematiky mu katolícka hierarchia robila problémy s umiestnením v akademickej sfére. Jeho práce upadli do zabudnutia a poznáme ich hlavne vďaka Heinrichovi Heinemu a Leonardovi Carlitzi.

9.6. Laguerrove polynómy. Polynómy tvaru

$$(51) \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}$$

tvoria ortonormálnu bázu v $L^2(0, \infty)$ s váhovaným skalárnym súčinom

$$(52) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx.$$

Nazývame ich Laguerrove³² polynómy.

9.7. Hermitove polynómy. Polynómy tvaru

$$(53) \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

tvoria ortogonálnu bázu v $L^2(0, \infty)$ s váhovaným skalárnym súčinom

$$(54) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx.$$

Nazývame ich Hermitove polynómy. Norma Hermitovho polynómu je

$$(55) \quad \|H_n\|^2 = n! 2^n \sqrt{\pi}.$$

9.8. Čebyševove polynómy. Polynómy tvaru

$$(56) \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x) =$$

tvoria ortogonálnu bázu v $L^2(-1, 1)$ s váhovaným skalárnym súčinom

$$(57) \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Nazývame ich Čebyševove³³ polynómy. Norma Čebyševovho polynómu je

$$(58) \quad \|T_0\| = \pi, \quad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} \quad n > 0.$$

³²Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886) – francúzsky matematik pracujúci v oblasti analýzy a geometrie. Veľa jeho výsledkov a pojmov bolo zovšeobecnených Lieom, Cayleym a Kleinom. Napriek podlomenému zdraviu napísal 140 prác. Bol známy ako detailista.

³³Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821–1894) – vynikajúci ruský matematik pracujúci v teórii čísel, teórii integrovania, teórii aproximácie, teória pravdepodobnosti. Jeho práca bola ocenená mnohými cenami. Ako prvý spomína pojem náhodnej premennej, pojem ortogonálnych polynómov. Mal bohaté zahraničné styky so špičkovými matematikmi.

DODATOK A

Prehľad základných pojmov a faktov z teórie miery

Uvedieme prehľad základných pojmov z teórie miery a Lebesguovho integrálu. Stručne sa dá povedať, že ide o zovšeobecnenie toho, čo poznáme pod pojmom dĺžka, obsah a objem resp. jordanovská¹ miera pre $\mathbb{R}^n$, pričom nám to umožní merať aj zložitejšie štrukturované množiny. Lebesguov integrál je potom analógia Riemannovho integrálu postaveného nad touto mierou. Pričom táto analógia je rozšírením Riemannovho integrálu.

Podrobnejšie sa o tejto téme dá dočítať napr. v [14]. Táto časť je len informatívna a pochádza z [3]. Budeme sa zaoberať len mierou na $\mathbb{R}^d$, hoci mnohé z definícií sa dajú povedať oveľa všeobecnejšie. Vyskúšajte si to ako cvičenie.

1. Lebesguova miera

Nech $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ je množina splňajúca nasledujúce podmienky

- (1) $\emptyset \in \Sigma$
- (2) ak, $A \in \Sigma$, tak aj $\mathbb{R}^d - A \in \Sigma$
- (3) ak $A_i \in \Sigma$, $i = 0, 1, \dots$, tak aj $\cup_{i=0}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Potom Σ nazývame *σ -algebrou* podmnožín $\mathbb{R}^d$. Zrejme $\mathbb{R}^d \in \Sigma$, $\cap_{i=0}^{\infty} A_i \in \Sigma$ a $A - B \in \Sigma$, ak $A_i, A, B \in \Sigma$ pre všetky $i \in \mathbb{N}$.

Nezápornou (komplexnou) mierou na Σ nazývame funkciu $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ takú, že je spočítateľne aditívna, t.j.

$$(59) \quad \mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i),$$

pričom $A_i \in \Sigma$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$.

Pre komplexnú mieru vyžadujeme, aby rad (59) bol absolútne konvergentný.

Pre nezápornú mieru $A \subseteq B$ dáva $\mu(A) \leq \mu(B)$. Takisto platí, že pre $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$ je $\mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$.

¹Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) – francúzsky matematik, ktorý podstatnú časť svojho výskumu robil popri inžinierskom zamestnaní. Prispel do teórie konečných grúp, lineárnej a multilineárnej algebry, teórie čísel, topológie mnohostenov, diferenciálnych rovníc a mechaniky. Zaviedol pojem homotopie. Známa je jeho veta o jednoducho uzavretej krivke v rovine, Jordanova normálna forma matice, Jordanov-Hölderov kompozičný rad grupy.

Topologický priestor X so σ -algebrou Σ a mierou μ na Σ nazývame *priestorom s mierou* s označením (X, Σ, μ) . Dvojicu (X, Σ) nazývame *merateľným priestorom*.

VETA 1.1. *V $\mathbb{R}^d$ existuje σ -algebra $\mathcal{B}$ podmnožín $\mathbb{R}^n$ a nezáporná miera $\mu: B \rightarrow \mathbb{R}$ na nej taká, že spĺňa nasledujúce podmienky*

- (1) *otvorené množiny sú v $\mathcal{B}$,*
- (2) *ak $A \subseteq B$, $B \in \mathcal{B}$ a $\mu(B) = 0$, tak $A \in \mathcal{B}$ a $\mu(A) = 0$,*
- (3) *$A = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \in \mathcal{B}$ a $\mu(A) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$,*
- (4) *μ je invariantná vzhľadom na zhodnostné transformácie $\mathbb{R}^d$.*

Množiny v $\mathcal{B}$ sa nazývajú *lebesgueovsky merateľné množiny* a funkcia μ sa nazýva *lebesgueovská miera*.

Ak nejaká vlastnosť platí pre množinu A s výnimkou bodov v $B \subseteq A$, pričom $\mu(B) = 0$, tak hovoríme, že platí *skoro všade na A* . Spočítateľné množiny majú mieru 0. Existujú však aj nespočítateľné množiny nulovej miery.

Funkcia $f: A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sa nazýva *merateľnou*, ak množina $f^{-1}((-a, \infty]) = \{x \in A : f(x) > a\}$ je merateľnou pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$.

VETA 1.2. *Platia nasledujúce tvrdenia o merateľných funkciách.*

- (1) *Ak f je merateľná, tak aj $|f|$ je merateľná.*
- (2) *Ak f, g sú merateľné, tak aj $f + g$ a fg sú merateľné.*
- (3) *Ak $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sú merateľné funkcie, tak aj $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ a $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ sú merateľné.*
- (4) *Ak f je spojitá a definovaná na merateľnej množine, tak je merateľná.*
- (5) *Ak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a g je reálna merateľná funkcia, tak $f \circ g$ je merateľná funkcia.*
- (6) *Ak f je merateľná funkcia a $f(x) = 0$ pre $\mathbb{R}^d - A$ takú, že $\mu(A) < \infty$, tak pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje funkcia $g \in C^0(A)$ taká, že $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$ a $\mu\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\} < \epsilon$.*

POZNÁMKA 1.1. *Posledné tvrdenie sa často označuje ako Luzinova² veta.*

Pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sa funkcia χ_A definovaná

$$(60) \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

nazýva *charakteristickou funkciou množiny A* . Reálna funkcia s na $\mathbb{R}^d$ sa nazýva *jednoduchá*, ak má nanajvýš konečný počet hodnôt a $s^{-1}(a)$

²Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883–1950) – ruský matematik pracujúci v oblasti teórie miery, topológie. Doktorát mu bol udelený za diplomovú prácu. Je zakladateľom moskovskej školy teórie funkcií. Zaoberal sa výsledkami, ktoré možno dosiahnuť bez axiómy výberu.

pre každé $a \in \mathbb{R}$ je merateľnou. Zrejme je tvaru $s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}(x)$ pre merateľné množiny $A_i = \{x \in \mathbb{R}^d : s(x) = a_i\}$. V časti literatúry sa nepožaduje merateľnosť v definícii jednoduchšej funkcie. Taká funkcia je merateľná práve vtedy, keď sú všetky A_i merateľné.

VETA 1.3 (O aproximácii schodovitými funkciami). *Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia, $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Potom existuje postupnosť schodovitých funkcií $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ktorá bodovo konverguje k f . Ak f je ohraničená, dá sa postupnosť vybrať tak, že konvergencia je rovnomerná. Ak f je merateľná, dajú sa vybrať merateľné aj funkcie s_n . Ak je nezáporná, funkčné hodnoty postupnosti môžu tvoriť neklesajúcu postupnosť v každom bode A .*

2. Lebesguov integral

Nech μ je Lebesguova miera na $\mathbb{R}^d$. Nech $f: A \subseteq \mathbb{R}^d$ je merateľná funkcia na s hodnotami v $\mathbb{R}$. Definujeme postupne hodnotu *Lebesguovho integrálu* pre funkcie s dodatočnými vlastnosťami. Ak f je jednoduchá, tak

$$(61) \quad \int_A f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Ak f je nezáporná, tak definujeme

$$(62) \quad \int_A f d\mu = \sup_s \text{jednoduchá} \left\{ \int_A s d\mu : 0 \leq s(x) \leq f(x) \text{ pre } x \in A \right\}.$$

Vo všeobecnom prípade funkcie $f = f^+ - f^-$, kde $f^+ = \max\{0, f\}$ a $f^- = \max\{0, -f\}$. Potom definujeme

$$(63) \quad \int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Ak funkcia $\int_A f d\mu < \infty$, tak hovoríme, že je *lebesguovsky integrovateľná*.

POZNÁMKA 2.1. *Treba si uvedomiť, že Lebesguovsky integrovateľné funkcie sú prvky L^1 priestoru nad príslušnou množinou.*

VETA 2.1 (Základné vlastnosti Lebesguovho integrálu). *Platia nasledujúce tvrdenia o lebesguovsky integrovateľných funkciách.*

(1) *Ak f, g sú lebesguovsky integrovateľné, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tak*

$$(64) \quad \int_A \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu.$$

(2) *Ak f, g sú lebesguovsky integrovateľné, $f \leq g$, tak*

$$(65) \quad \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

(3) Ak $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je neklesajúca postupnosť merateľných nezáporných funkcií, $f = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ je bodová limita. Potom

$$(66) \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

(4) Ak $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť merateľných nezáporných funkcií. Potom

$$(67) \quad \int_A \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int_A f_n d\mu.$$

(5) Ak $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť komplexných merateľných funkcií a $f = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n$ je bodová limita, $|f_n| \leq g$ pre lebesguovskú integrovateľnú g . Potom f je lebesguovskú integrovateľná a platí

$$(68) \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Literatúra

- [1] <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman.html>.
- [2] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.
- [3] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [4] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.
- [5] Bohuslav Balcar and Petr Štěpánek. *Teorie množin*. Academia [Publishing House of the Czech Academy of Sciences], Prague, 1986.
- [6] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.
- [7] Ronald A. DeVore and George G. Lorentz. *Constructive approximation*, volume 303 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [8] Ryszard Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.
- [9] Paul Richard Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17.
- [10] Serge Lang. *Real and functional analysis*, volume 142 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1993.
- [11] Serge Lang. *Undergraduate analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [12] Fečkan M. Funkcionálna analýza. Poznámky z prednášky, 2005.
- [13] L. Mišík. *Funkcionálna analýza*. Alfa, 1989.
- [14] Beloslav Riečan and Tibor Neubrunn. *Teória miery*. VEDA Vydavateľstvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava, 1992.
- [15] Georgi E. Shilov. *Elementary functional analysis*. Dover Publications Inc., New York, 1996. Revised English edition translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Corrected reprint of the 1974 English translation.
- [16] Činčura J. Všeobecná topológia. Poznámky z prednášky, 1993.
- [17] Anders Vretblad. *Fourier analysis and its applications*, volume 223 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [18] Šalát T. Švec M. and Neubrunn T. *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*. Alfa/SNTL, Bratislava, 1987.
- [19] <http://www.wikipedia.org/>.

Register pojmov

A

σ -algebra, 91

B

báza, 72

algebrická, 54

Hamelova, 54

okolí, 13

topológie, 13

bod

hromadný, 12

C

cesta, 38

D

difeomorfizmus, 42

F

funkcia

charakteristická

množiny, 92

integrovateľná

lebesguovsky, 93

jednoduchá, 92

merateľná, 92

schodovitá, 81

funkcionál

lineárny, 54

H

hranica

variety, 42

I

integrál

Lebesguov, 93

K

konvolúcia, 77

funkcií, 77

jadro, 77

L

lema

Zornova, 33

M

miera

komplexná, 91

lebesguovská, 92

nezáporná, 91

množina

Bairovej kategórie

druhej, 43

prvej, 43

borelovská, 17

F_σ , 17

hranica, 11

hustá, 12

kompaktná, 35

lineárne nezávislá, 53

merateľná

lebesgueovsky, 92

ortogonálna, 64

ortogonálny doplnok, 64

ortonormálna, 64

otvorená, 10

potenčná, 9

reziduálna, 43

riedka, 12, 43

splňa prvú axiómu spočítateľnosti, 14

totálna, 71

usmernená, 30

uzáver, 11

uzavretá, 10

vnútro, 11

množiny
vzájomne ortogonálne, 64

morfizmus
priestorov
štrukturovaných, 42

N

nerovnosť
Cauchy-Schwarz-Buňakovský, 51
Hölderova, 46
Minkowského, 46
Youngova, 46
norma, 45
euklidovská, 45
hermitovská, 46
homogénnosť, 45
indukovaná skalárnym súčinnom, 51
pozitívna definitnosť, 45
trojuholníková nerovnosť, 45
zobrazenia
lineárneho, 58
normy
ekvivalentné, 55

O

okolie
bodu, 11
otvorené, 11
uzavreté, 11
množiny, 11
otvorené, 11
uzavreté, 11
rýdže, 11

P

p -norma, 45
podpokrytie, 35
podpriestor
topologický, 19
pokrytie
otvorené, 35
uzavreté, 35
polarizácia, 51

polonorma, 45
polynóm
Hermitov, 89
Laguerrov, 89
Legendrov, 88
postupnosť
Diracova, 77
pozitívna
semidefinitnosť, 45
pravidlo
rovnobežníkové, 51
predbáza
topológie, 13
priestor
Bairov, 43
Banachov, 53
bod, 10
faktorový, 22
funkcionálne štrukturovaný, 41
Hausdorffov, 23
Hilbertov, 64
normálny, 24
nosič, 10
reálny
s euklidovskou metrikou, 10
regulárny, 24
sekvenciálny, 35
separabilný, 14
splňa druhú axiómu spočítateľnosti, 14
splňa prvú axiómu spočítateľnosti, 14
súvislý, 38
cestne, 38
lineárne, 38
 T_0 , 23
 T_1 , 23
 T_2 , 23
 T_3 , 24
 $T_{3\frac{1}{2}}$, 24
 T_4 , 24
topologický, 10
antidiskrétny, 10

- diskrétny, 10
 - triviálny, 10
 - topologický súčin, 19
 - úplne
 - regulárny, 24
 - vektorový
 - s normou, 45
 - s polonormou, 45
- R**
- rovina
 - Moorova, 25
 - Nemyckého, 25
 - rovnosť
 - Parsevalova, 72
 - rozvoj prvku
 - podľa ortonormálnej množiny, 70
- S**
- sieť, 30
 - často v množine, 30
 - horná časť, 30
 - konvergentná, 31
 - limita, 31
 - univerzálna, 33
 - súčin
 - skalárny
 - komplexný, 50
 - reálny, 49
 - topologických priestorov, 20
 - suma
 - topologických priestorov, 20
 - súradnice
 - zmena, 41
 - súvislosť, 38
 - komponent, 39
 - systém
 - otvorených podmnožín, 10
 - systém množín
 - centrovaný, 35
- Š**
- štruktúra
 - funkcionálna, 41
- T**
- topológia
 - faktorová, 22
 - indukovaná
 - normou, 52
 - relatívna, 19
 - transformácia
 - Fourierova, 87
 - Laplaceova, 86
 - $\mathcal{Z}$, 88
- V**
- varieta
 - diferencovateľná
 - n -rozmerná s hranicou, 42
 - hladká
 - n -rozmerná, 42
 - topologická, 41
 - vektor
 - ortogonálny na množinu, 64
 - vektory
 - kolmé, 64
 - ortogonálne, 64
 - veta
 - Banachova-Schauderova, 61
 - Banachova-Steinhausova, 63
 - Hahnova-Banachova, 59
 - o lineárnom izomorfizme, 62
 - o najbližšom prvku, 67
 - o otvorenom zobrazení, 61
 - vzdialenosť ku konečnorozmernému priestoru, 69
 - vzorec
 - rodriguesov, 88
- Z**
- zobrazenie
 - diferencovateľné, 42
 - faktorové, 22
 - graf, 30
 - kofinálne, 32
 - lineárne, 54
 - prechodové, 41
 - spojité, 14
 - vlastné, 37
 - zachovávajúce
 - usporiadanie, 32

Register autorov

A

Alexandrov, Pavel Sergejevič,
34

B

Banach, Stefan, 33, 53
Bessel, Friedrich Wilhelm, 69
Buňakovskij, Viktor Jakovlevič,
51

C

Cauchy, Augistin Louis, 51

Č

Čebyšev, Pafnutij Lvovič, 89

D

Dirac, Paul, 77
Dirichlet, Johann Peter Gustav
Lejeune , 78

F

Fejér, Lipót, 79
Fischer, Ernst Sigismund, 70
Fourier, Jean Baptiste Joseph,
70

H

Hahn, Hans, 59
Hamel, Georg Karl Wilhelm, 54
Hausdorff, Felix, 23
Hermite, Charles, 46, 50
Hilbert, David, 64
Horner, William George, 88
Hölder, Otto, 46

J

Jordan, Camille Marie Enne-
mond, 91

K

Klein, Felix, 22

L

Laguerre, Edmond Nicolas, 89
Laplace, Pierre-Simon, 86
Laurent, Pierre Alphonse, 88
Legendre, Adrien-Marie, 88
Lipschitz, Rudolf Otto Sigis-
mund, 85
Luzin, Nikolaj Nikolajevič, 92

M

Minkowski, Hermann, 46
Moore, Robert Lee, 25
Möbius, August Ferdinand, 22

N

Nemyckij, Vladimir Vladimiro-
vič, 25

P

Parseval, Marc-Antoine, 72
Plancherel, Michel, 73
Pythagoras, 73

R

Riesz, Frigyes, 70
Rodrigues, Benajmin Olinde, 88

S

Schwarz, Hermann Amandus,
51
Steinhaus, Hugo Dionyzy, 63

T

Tarski, Alfred, 33
Tichonov, Andrej Nikolajevič,
24

U

Uryson, Pavel Samuilovič, 28

Y

Young, William Henry, 46

Z

Zorn, Max August, 33

