Topológia a funkcionálna analýza

Pavel Chalmovianský

Zoznam základných pojmov z všeobecnej topológie a teórie Banachových a Hilbertových priestorov. Predmet sa vyučuje na študijnom odbore 9.1.1 Matematika, v študijnom programe Počítačová grafika a geometria.

Bratislava, 17. februára 2010

Autor: Pavel Chalmovianský
Názov: Topológia a funkcionálna analýza
Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK
Grafická úprava: Pavel Chalmovianský
Rok vydania: 2008
Miesto vydania: Bratislava
Vydanie: prvé
Počet strán (číslované): 81
Náklad/internetová adresa: http://www.sccg.sk/~chalmo/fat.pdf
ISBN: 978-80-89186-44-0

Obsah

Zoznam obrázkov

1. Úvod

Predmet sa vyučuje 4 hodiny týždenne, čo nie je na prednášku predstavujúcu dve rozsiahle matematické disciplíny veľa. Ponímame ho ako geometriu nekonečnorozmerného priestoru s neskoršími najmä numerickými aplikáciami v spracovaní obrazu či iných oblastiach geometrie a počítačovej grafiky. Vybrané základné topologické pojmy sa uvádzajú v prvej časti prednášky.

Topológia je veda zaoberajúca sa vlastnosťami geometrických priestorov, ktoré sa zachovávajú spojitými zobrazeniami. Špeciálne ide o také, ktoré nezávisia na metrike. Čo to presnejšie znamená, si načrtneme.

Funkcionálna analýza študuje priestory funkcií ako bodové priestory (bod je funkcia resp. nejaká trieda funkcií). Na takýchto priestoroch sa definujú „bežné“ pojmy z geometrie ako vzdialenosť, skalárny súčin, lineárna varieta a pod. Tieto geometrické pojmy majú potom nejakú interpretáciu v reči funkcií. Aj vlastnosti objektov a pojmov z geometrie sa potom dajú interpretovať v tomto jazyku. Čiastočne je prostredníkom práve jazyk topológie. Nosnou témou v tejto časti sú základné fakty najmä o Hilbertových priestoroch a pokúsime sa predstaviť ich spojenie s niektorými algoritmami.

1.1. Sylabus.

- Topologický priestor. Metrická topológia.
- Otvorené a uzavreté množiny, okolia. Vnútro a uzáver.
- Spojité zobrazenie.
- Základné konštrukcie topologických priestorov(podpriestor, konečný súčin, faktorový priestor).
- Axiómy spočítateľnosti. Oddeľovanie ($T_0 - T_4$). Súvislosť. Kompaktnosť.
- Lineárne normované priestory, lineárne spojité funkcionály a operátory, Hahnova-Banachova veta, duálne priestory, Banachove priestory, Banachova-Steinhausova veta, rozdiely medzi konečnorozmernými a nekonečnorozmernými priestormi.
- Hilbertove priestory, veta o projekciách, Rieszova veta o reprezentácii, Besselova nerovnosť, Fourierove koeficienty, ortogonálne systémy, ortonormálna báza.
- Priestory spojitých funkcií, Stonova-Weierstrassova veta, duál priestoru $C(I)$.

Táto prednáška čerpá hlavne z literatúry [**6**], [**13**], [**7**], [**14**], [**8**], [**2**], [**9**], [**17**], [**1**], [**11**], [**5**], [**20**], [**10**], [**4**], [**5**], [**19**], [**18**], [**3**], [**16**], pričom voľne sleduje najmä [**6**],[**2**] a [**8**].

K mnohým knižkám existujú vo fakultnej knižnici alebo priamo u mňa k dispozícii ruské originály alebo ruské preklady.

Časť literatúry som konzultoval s autorom sylabu prof. Milanom Medveďom a k celkovému osvetleniu, ako by mala prednáška vyzerať v širších súvislostiach štúdia zamerania Počítačová grafika a geometria, prispel aj doc. Miloš Božek, za čo im obom ďakujem.

Poďakovanie za opravu nepresností, chýb a nezrovnalostí patrí najmä študentom Elene Duškovej, Miroslave Fekiačovej a Rastislavovi Halamíčkovi.

Všetky ďalšie chyby idú na môj vrub a budem povďačný, ak ma na ne upozorníte.

KAPITOLA 1

Topológia

1. Základné pojmy

Nech X je množina. Označme $\mathcal{P}(X)$ množinu všetkých podmnožín X, teda

$$\mathcal{P}(X) = \{U : U \subseteq X\}.$$

Zopakujte si vlastnosti vzoru nejakej množiny v zobrazení f.

Nech A je množina a $\leq \subset A \times A$ je relácia s vlastnosťami

reflexivita: $a \leq a$ pre ľubovoľné $a \in A$,

antisymetria: ak $a \leq b$ a $b \leq a$, tak $a = b$ pre ľubovoľné $a, b \in A$,

tranzitívnosť: ak $a \leq b, b \leq c$, tak $a \leq c$, pre ľubovoľné $a, b, c \in A$.

Potom reláciu $\leq$ nazývame reláciou čiastočného usporiadania množiny A.

Symbolom $\Re z$ označujeme reálnu časť komplexného čísla z a analogicky $\Im z$ jeho imaginárnu zložku. Teda $z = \Re z + i\Im z$.

2. Topologický priestor

Definícia 2.1 (Topologický priestor). *Nech X je množina a $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s vlastnosťami*

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

(2) ak $U_i \in \mathcal{T}$ pre $i \in I$, tak $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,

(3) ak $U_i \in \mathcal{T}$ pre $i = 1, \ldots, n$, tak $\cap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Potom dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame topologický priestor*, pričom množinu X nazývame* nosičom priestoru*, prvky nosiča nazývame* bodmi *a $\mathcal{T}$ nazývame* systémom otvorených podmnožín alebo topológiou priestoru $(X, \mathcal{T})$*. Prvky tohoto systému nazývame* otvorené podmnožiny $(X, \mathcal{T})$.

Poznámka 2.1. *Ak bude systém otvorených množín zrejmý z kontextu, často budeme písať len o topologickom priestore X.*

Definícia 2.2 (Uzavreté podmnožiny). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Podmnožina $V \subseteq X$ sa nazýva* uzavretá*, ak existuje otvorená podmnožina $U \in \mathcal{T}$ taká, že $V = X - U$.*

Cvičenie 2.1. *Nech X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je systém podmnožín s vlastnosťami*

(1) $\emptyset \in \mathcal{S}$, $X \in \mathcal{S}$,

(2) ak $V_i \in \mathcal{S}$ *pre* $i \in I$, $I \neq \emptyset$, *tak* $\cap_{i\in I} V_i \in \mathcal{S}$,

(3) ak $V_i \in \mathcal{S}$ *pre* $i = 1, \dots, n$, *tak* $\cup_{i\in I} V_i \in \mathcal{S}$.

Nech $\mathcal{T} = \{U_V \in \mathcal{P}(X) : U = X - V, V \in \mathcal{S}\}$. *Ukážte, že* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor.*

Príklad:[Niektoré topologické priestory]

1. Nech X je množina a $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Potom $(X, \mathcal{T})$ tvoria topologický priestor. Nazývame ho *triviálny alebo antidiskrétny topologický priestor* Je to „najmenší" topologický priestor s nosičom X.
2. Nech X je množina a $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Potom $(X, \mathcal{T})$ tvoria topologický priestor. Nazývame ho *diskrétny topologický priestor.* Každá množina v tomto priestore je otvorená aj uzavretá.
3. Nech (X, d) je metrický priestor. Nech $\mathcal{T}$ je množina otvorených podmnožín tohoto priestoru. Potom $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Napr. reálny d-rozmerný priestor s euklidovskou metrikou $(\mathbb{R}^d, \|.\|_2)$.
4. Nech X je ľubovoľná množina a $\mathcal{T}$ obsahuje $\emptyset$ a všetky podmnožiny X s doplnkom konečnej kardinality v X t.j. $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \mathrm{card}(X - U) < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}\}$. Potom $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.

CVIČENIE 2.2. *Dokážte podrobne, že priestory z príkladu 2 sú topologické.*

CVIČENIE 2.3. *Nájdite všetky možné topologické priestory s jedným, dvomi a tromi bodmi.*

DEFINÍCIA 2.3 (Okolie). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor a* $x \in X$ *je bod. Hovoríme, že* $V \subseteq X$ *je* okolie bodu x, *ak existuje* $U \in \mathcal{T}$ *také, že* $x \in U \subseteq V$. *Každú množinu* $U \in \mathcal{T}$ *takú, že* $x \in U$ *nazývame* otvoreným okolím bodu x. *Ak* V *je uzavretá množina, tak ju nazývame* uzavretým okolím bodu x. *Nech* $A \subseteq X$ *je množina. Potom množinu* $V \subseteq X$ *nazývame* okolím množiny A, *ak* V *je okolím každého bodu* $x \in A$. *Analogicky hovoríme o* otvorenom *alebo* uzavretom *okolí množiny* A, *ak* V *je otvorená alebo uzavretá. Ak* U *je okolie bodu* $x \in X$, *tak hovoríme, že* $U - \{x\}$ *je* rýdze okolie *bodu* x.

POZNÁMKA 2.2. *V niektorých topologických priestoroch nemusí byť množina* $U - \{x\}$ *otvorená aj keď je množina* U *otvorená. Dozvieme sa o tom viac v časti o oddeliteľnosti bodov.*

DEFINÍCIA 2.4 (Vnútro, uzáver, hranica). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor a* $A \subseteq X$. *Množinu všetkých bodov* $x \in A$, *pre ktoré, je* A *okolím nazývame* vnútrom množiny A *a označujeme ju* $\mathrm{int}\, A$ *t.j.*

$$\mathrm{int}\, A = \{x \in A : \exists U \in \mathcal{T} \wedge x \in U \subseteq A\}. \tag{1}$$

Množinu bodov $x \in X$ *takých, že* $x \notin \mathrm{int}(X - A)$ *nazývame* uzáverom množiny A *a označujeme ju* $\mathrm{cl}\, A$. *Teda*

$$\mathrm{cl}\, A = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ platí } U \subseteq X - A \implies x \notin U\}. \tag{2}$$

Množinu bodov $\mathrm{bd}\, A = \mathrm{cl}\, A - \mathrm{int}\, A$ *nazývame* hranicou množiny A.

A $\operatorname{cl} A$ $\operatorname{int} A$ $\operatorname{bd} A$

OBR. 1. Množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ s obvyklou topológiou, jej uzáver, vnútro a hranica. Body z hranice množiny, ktoré nepatria do jednotlivých množín sú nakreslené čiarkovanou čiarou.

POZNÁMKA 2.3. *Treba si uvedomiť, že v rôznych topológiách môže mať tá istá množina rôzne vnútra, uzávery a hranice.*

V literatúre sa môžete často stretnúť s iným označením vnútra (napr. A°), uzáveru (napr. $\bar{A}$) alebo hranice (napr. ∂A) množiny A.

CVIČENIE 2.4. *Ukážte, že platia nasledujúce vzťahy. V prípade nerovnosti, nájdite príklad, ktorý demonštruje rozdiel vo výsledku operácii. Pre ľubovoľné množiny $A, B \subseteq X$ resp. $A_i \subseteq X$, $i \in I$ platí*

(1) $A \subseteq \operatorname{cl} A$, $\operatorname{int} A \subseteq A$,
(2) $A \subseteq B \implies \operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$,
(3) $A \subseteq B \implies \operatorname{cl} A \subseteq \operatorname{cl} B$,
(4) $\operatorname{cl}(\emptyset) = \emptyset$, $\operatorname{int}(\emptyset) = \emptyset$,
(5) $\operatorname{cl}(A) = X - \operatorname{int}(X - A)$,
(6) $\operatorname{bd}(A) = \operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(X - A)$,
(7) $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(A)$,
(8) $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$,
(9) $\operatorname{bd}(\operatorname{bd}(A)) = \emptyset$,
(10) $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B)$,
(11) $\operatorname{cl}(A \cap B) \subseteq \operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(B)$,
(12) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$,
(13) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$,
(14) $\operatorname{int}(\cup_{i\in I} A_i) \supseteq \cup_{i\in I} \operatorname{int}(A_i)$,
(15) $\operatorname{int}(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i)$,
(16) $\operatorname{cl}(\cup_{i\in I} A_i) \supseteq \cup_{i\in I} \operatorname{cl}(A_i)$,
(17) $\operatorname{cl}(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} \operatorname{cl}(A_i)$,

DEFINÍCIA 2.5 (Hustá množina, riedka množina, hromadný bod, izolovaný bod). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $A \subseteq X$. Nazývame ju* hustou v priestore X, *ak* $\operatorname{cl} A = X$. *Množina A sa nazýva* riedka v X, *ak* $\operatorname{cl}(X - A)$ *je hustá v X. Bod $x \in X$ sa nazýva* hromadným bodom množiny A, *ak každé rýdze okolie bodu x má neprázdny prienik s množinou A. Množinu všetkých hromadných bodov A označujeme* $\operatorname{acc}(A)$. *Bod $x \in A$ sa nazýva* izolovaným bodom množiny A, *ak* *existuje jeho rýdze okolie disjunktné s* A *t.j. existuje* $U \in \mathcal{T}$ *také, že* $x \in U$ *a* $U \cap A \subset \{x\}$.

CVIČENIE 2.5. *Nájdite takú množinu* $A \subset \mathbb{E}^2$, *že platí* $\operatorname{acc}(A) \neq \operatorname{bd} A$.

DEFINÍCIA 2.6 (Báza topológie, predbáza topológie). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor. Podmnožinu* $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ *nazývame* bázou topológie $\mathcal{T}$, *ak sa ľubovoľná neprázdna množina* $U \in \mathcal{T}$ *dá napísať v tvare* $\cup_{i \in I} V_i$, *kde* $V_i \in \hat{\mathcal{T}}$. *Podmnožinu* $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ *nazývame* predbázou topológie $\mathcal{T}$, *ak sa ľubovoľná neprázdna množina* $U \in \mathcal{T}$ *dá napísať v tvare* $\cup_{i \in I} \cap_{j_i=1}^{n_i} V_{j_i}$, *kde* $n_i \in \mathbb{N}$ *a* $V_{j_i} \in \hat{\mathcal{T}}$.

POZNÁMKA 2.4. *Pomocou predbázy resp. bázy môžeme definovať topológiu, ak ku nej pridáme prázdnu množinu.*

CVIČENIE 2.6. *Dokážte, že* $\tilde{\mathcal{T}}$ *je predbázou topológie* $\mathcal{T}$ *práve vtedy, keď* $\hat{\mathcal{T}} = \{\cap_{j=1}^{n} V_j : V_1, \dots, V_n \subseteq \tilde{\mathcal{T}}\}$ *je bázou topológie* $\mathcal{T}$.

CVIČENIE 2.7. *Ukážte, že ľubovoľná báza* $\tilde{\mathcal{T}}$ *topológie topológie* $\mathcal{T}$ *má nasledujúce dve vlastnosti*

1. *pre ľubovoľné* $U_1, U_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$ *a* $x \in U_1 \cap U_2$ *existuje* $U \in \tilde{\mathcal{T}}$ *taká, že* $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$,
2. *pre ľubovoľné* $x \in X$ *existuje* $U \in \tilde{\mathcal{T}}$ *taká, že* $x \in U$.

DEFINÍCIA 2.7 (Báza okolí). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor a* $x \in X$. *Hovoríme, že systém množín* $\{U_i\}_{i \in I}$ *tvorí bázu okolí bodu* x, *ak každé okolie bodu* x *obsahuje niektorú množinu systému a každá množina systému obsahuje nejaké okolie bodu* x.

DEFINÍCIA 2.8 (Spočítateľnosť priestoru, separabilnosť). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor. Nazývame ho* priestorom spĺňajúcim prvú axiómu spočítateľnosti, *ak pre ľubovoľný bod* $x \in X$ *existuje postupnosť jeho okolí* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ *taká, že ku každému okoliu* U *bodu* x *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *také, že* $U_n \subseteq U$. *Hovoríme, že topologický priestor* spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti, *ak má spočítateľnú bázu topológie. Topologický priestor sa nazýva* separabilný, *ak má spočítateľnú hustú podmnožinu.*

CVIČENIE 2.8. *Ukážte, že opísaním bázy okolí každého bodu sa dá jednoznačne definovať topológia celého priestoru.*

Príklad:

1. Každý metrický priestor spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti. Stačí zobrať pre ľubovoľný bod $x \in X$ postupnosť $(B_{\frac{1}{n}}(x))_{n=1}^{\infty}$.
2. Topologický (ani metrický) priestor nemusí spĺňať druhú axiómu spočítateľnosti. Zoberme nespočítateľnú množinu (napr. $\mathbb{R}$) s diskrétnou metrikou.

Definícia 2.9 (Spojité zobrazenie). *Nech* $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ *sú topologické priestory. Zobrazenie* $f\colon X\to Y$ *sa nazýva* spojité, *ak pre ľubovoľnú množinu* $U\in\mathcal{U}$ *je množina* $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$.

Veta 2.1 (Ekvivalentné podmienky spojitosti). *Nech* $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ *sú topologické priestory a* $f\colon X\to Y$ *je zobrazenie. Potom sú ekvivalentné tvrdenia*

1. *f je spojité*
2. *vzor ľubovoľnej množiny z predbázy (bázy) Y je otvorený v X*
3. *existujú systémy okolí $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ v X a $\{\mathcal{D}(y)\}_{y\in Y}$ v Y také, že pre ľubovoľný bod $x\in X$ a $V\in\mathcal{D}(f(x))$ existuje $U\in\mathcal{B}(x)$, pre ktoré platí $f(U)\subseteq V$.*
4. *vzor ľubovoľnej uzavretej množiny je uzavretá množina*
5. *pre ľubovoľnú množinu $A\subseteq X$ platí $f(\mathrm{cl}(A))\subseteq\mathrm{cl}(f(A))$*
6. *pre ľubovoľnú množinu $B\subseteq Y$ platí $\mathrm{cl}(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$*
7. *pre ľubovoľnú množinu $B\subseteq Y$ platí $f^{-1}(\mathrm{int}(B))\subseteq\mathrm{int}(f^{-1}(B))$*

Dôkaz: Tvrdenie $1\implies 2$ je zrejmé priamo z definície predbázy (bázy) a spojitosti zobrazenia (pozri obr 2).

Dôkaz tvrdenia $2\implies 3$ začneme výberom systémov okolí (pozri obr. 3). Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie Y. Nech $\mathcal{B}(x)$ sú všetky okolia bodu $x\in X$ a $\mathcal{D}(y)$ sú všetky okolia bodu $y\in Y$. Pre ľubovoľné $V\in\mathcal{D}(f(x))$ existuje množina $W\in\mathcal{B}$ také, že $f(x)\in W\subseteq V$. Potom $f^{-1}(W)$ je otvorená v X, $x\in f^{-1}(W)$. Položme $U=f^{-1}(W)$. Potom $f(U)\subseteq V$.

Dôkaz tvrdenia $3\implies 4$. Nech $U\subseteq Y$ je uzavretá množina (pozri obr. 4). Potom $Y-U$ je otvorená a $f^{-1}(Y-U)=X-f^{-1}(U)$. Ukážeme, že toto je otvorená množina. Pre každý bod $x\in f^{-1}(Y-U)$ a $V\in\mathcal{D}(f(x))$, $V\subseteq Y-U$ máme otvorenú množinu $U_x\subseteq U'_x\in\mathcal{B}(x)$, pričom $f(U'_x)\subseteq V$. Potom zjednotenie $\cup_{x\in f^{-1}(Y-U)}U_x=f^{-1}(Y-U)$. Teda je to otvorená množina.

Dôkaz tvrdenia $4\implies 5$. Podľa predpokladu je $f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$ uzavretá množina. Naviac $A\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$, takže aj $\mathrm{cl}(A)\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$. A teda $f(\mathrm{cl}(A))\subseteq(\mathrm{cl}(f(A)))$ (pozri obr. 5).

Dôkaz tvrdenia $5\implies 6$. Nech $A=f^{-1}(B)$. Potom $f(\mathrm{cl}(A))\subseteq\mathrm{cl}(f(A))$, teda $f(\mathrm{cl}(f^{-1}(B)))\subseteq\mathrm{cl}(f\circ f^{-1}(B))\subseteq\mathrm{cl}(B)$. Z vlastností vzoru teda máme $\mathrm{cl}(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$.

Dôkaz tvrdenia $6\implies 7$. Nech $U=Y-B$. Potom $\mathrm{cl}(f^{-1}(U))\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(U))$. Teda môžeme písať

$$\begin{aligned} X-\mathrm{int}\,f^{-1}(B) &= \mathrm{cl}(X-f^{-1}(B))=\mathrm{cl}(f^{-1}(U))\subseteq\\ &\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}\,U)=f^{-1}(Y-\mathrm{int}\,B)=X-f^{-1}(\mathrm{int}\,B). \end{aligned}$$

Toto dáva inklúziu $f^{-1}(\mathrm{int}\,B)\subseteq\mathrm{int}\,f^{-1}(B)$.

Dôkaz tvrdenia $7\implies 1$. Pre ľubovoľnú otvorenú množinu platí $U=\mathrm{int}\,U$. Takže $f^{-1}(U)=f^{-1}(\mathrm{int}\,U)\subseteq\mathrm{int}\,f^{-1}(U)$. Keďže $\mathrm{int}\,f^{-1}(U)\subseteq f^{-1}(U)$, máme rovnosť týchto dvoch množín. Teda f je spojité. $\square$

Obr. 2. Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na predbáze.

Obr. 3. Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na bázach okolí $\mathbf{x}$ a $f(\mathbf{x})$

Obr. 4. Spojitosť zobrazenia je ekvivalentná spojitosti na uzavretých množinách.

Obr. 5. Obraz bodov uzáveru množiny v spojitom zobrazení je pod uzáverom obrazu tejto množiny. Neznamená to však, že obraz hranice je hranica!

Poznámka 2.5. *Tvrdenie 3 sa používa ako definícia spojitosti zobrazenia v bode x, pričom zobrazenie je spojité, ak je spojité v každom svojom bode.*

Tvrdenie 5 sa dá interpretovať tak, že body z uzáveru množiny („blízke“ k množine) sa v spojitom zobrazení zobrazia do uzáveru obrazu tejto množiny (t.j. na „blízke“ body k obrazu množiny).

Cvičenie 2.9. *Nájdite príklad spojitého zobrazenia topologických priestorov, kde sa hranica nezobrazí na hranicu. Zmení sa niečo, ak pridáme požiadavku surjektívnosti a/alebo injektívnosti zobrazenia?*

VETA 2.2 (Skladanie spojitých zobrazení). *Nech X, Y, Z sú topologické priestory. Nech $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ sú spojité zobrazenia, potom $g \circ f\colon X \to Z$ je spojité zobrazenie.*

Dôkaz: Nech W je otvorená množina v Z. Potom $V = g^{-1}(W) \subseteq Y$ je otvorená, a teda $U = f^{-1}(V) \subseteq X$ je otvorená. Keďže platí $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = U$, tak je podľa definície zložené zobrazenie spojité. □

CVIČENIE 2.10. *Dokážte, že $f\colon X \to Y$ je spojité v bode $a \in X$ práve vtedy, keď ku každému okoliu V bodu $f(a) \in Y$ existuje také okolie U bodu $a \in X$, že $f(U) \subseteq V$.*

CVIČENIE 2.11. *(Systém borelovských množín) Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je systémom množín splňajúcim nasledujúce podmienky*

(1) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$,
(2) ak $A \in \mathcal{S}$, tak aj $X - A \in \mathcal{S}$,
(3) ak $A_i \in \mathcal{S}$, $i \in \mathbb{N}$, tak $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{S}$.

Takýto systém nazývame systémom borelovských množín *na topologickom priestore X. Neuzavretú množinu tvaru $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{S}$, pre A_i uzavreté, nazývame F_σ množina. Neotvorenú množinu tvaru $\cap_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{S}$, pre B_i otvorené, nazývame G_σ množina. Ukážte, že platí*

(1) doplnok F_σ množiny je G_σ množina,
(2) vzor F_σ množiny v spojitom zobrazení je F_σ množina,
(3) vzor G_σ množiny v spojitom zobrazení je G_σ množina,
(4) množina $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ je F_σ množina,
(5) množina $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ nie je G_σ množina.

DEFINÍCIA 2.10 (Otvorené a uzavreté zobrazenie). *Zobrazenie $f\colon X \to Y$ sa nazýva* otvorené *(*uzavreté*), ak obrazom otvorenej (uzavretej) množiny v X je otvorená (uzavretá) množina v Y.*

VETA 2.3 (Ekvivalentná podmienka uzavretosti(otvorenosti) spojitého zobrazenia). *Spojité zobrazenie $f\colon X \to Y$ je uzavreté (otvorené) vtedy a len vtedy, ak pre ľubovoľnú množinu $B \subseteq Y$ a pre ľubovoľnú otvorenú(uzavretú) množinu $A \subseteq X$ takú, že $f^{-1}(B) \subseteq A$ existuje otvorená(uzavretá) množina C spĺňajúca $B \subseteq C \subseteq Y$ a $f^{-1}(C) \subseteq A$ (pozri obr. 6).*

Dôkaz: Nech f je otvorené zobrazenie a A, B sú ako z nutnej podmienky. Potom $X - A$ je otvorená, a teda $f(X - A)$ je otvorená v Y. Keďže $f^{-1}(B) \subseteq A$, tak $f(X-A) \cap B = \emptyset$. Položme $C = Y - f(X-A)$. Zrejme $B \subseteq C$ a $f^{-1}(C) \subseteq A$.

Nech teraz platí nutná podmienka z tvrdenia. Potom zoberme ľubovoľnú otvorenú množinu $U \subseteq X$. Množina $A = X - U$ je uzavretá a obsahuje množinu $f^{-1}(B)$ pre $B = Y - f(U)$. Takže existuje uzavretá množina

OBR. 6. Ekvivalentná podmienka otvorenosti resp. uzavretosti zobrazenia.

$C \subseteq Y$, $f^{-1}(C) \subseteq A$ a $B \subseteq C$. Teda platí $f(U) \subseteq Y - C$ a $f^{-1}(C) \subseteq A$. Z čoho máme $C \subseteq B$, a teda $f(U) = Y - C$.

Časť s uzavretým zobrazením sa dokáže analogicky. □

CVIČENIE 2.12. *Dokážte ekvivalentnú podmienku k uzavretému zobrazeniu vo vete 2.3.*

CVIČENIE 2.13. *Spojité zobrazenie* $f\colon X \to Y$ *je uzavreté vtedy a len vtedy, keď pre každý bod* $y \in Y$ *a každú otvorenú množinu* $U \subseteq X$, $f^{-1}(y) \subseteq U$ *existuje okolie* V *bodu* y*, že platí* $f^{-1}(V) \subseteq U$. *Dokážte!*

DEFINÍCIA 2.11 (Homeomorfizmus). *Zobrazenie* $f\colon X \to Y$ *sa nazýva homeomorfizmus, ak je bijektívne, spojité a* f^{-1} *je spojité.*

CVIČENIE 2.14. *Dokážte, že relácia topologických priestorov „byť homeomorfný“ je relácia ekvivalencie.*

CVIČENIE 2.15. *Nech* $f\colon X \to Y$ *je bijektívne zobrazenie topologických priestorov. Potom sú ekvivalentné nasledujúce tvrdenia*

(1) f *je spojité,*
(2) f *je uzavreté,*
(3) f *je otvorené,*
(4) *množina* $f(A)$ *je uzavretá v* Y *vtedy a len vtedy, keď je* A *uzavretá v* X,
(5) *množina* $f^{-1}(B)$ *je uzavretá v* X *vtedy a len vtedy, keď je* B *uzavretá v* Y,
(6) *množina* $f(A)$ *je otvorená v* Y *vtedy a len vtedy, keď je* A *otvorená v* X,
(7) *množina* $f^{-1}(B)$ *je otvorená v* X *vtedy a len vtedy, keď je* B *otvorená v* Y.

Dokážte!

POZNÁMKA 2.6. *Vzhľadom na predchádzajúcu vetu v cvičení 2.15 možno povedať, že dva homeomorfné topologické priestory majú rovnaké otvorené (a teda aj uzavreté množiny). Z hľadiska topológie ich teda nevieme rozlíšiť. Topologické vlastnosti sa preto formulujú pre triedy homeomorfných topologických priestorov. Toto je analógia k známej vete z lineárnej algebry o existencii izomorfizmu medzi ľubovoľným* n*-rozmerným vektorovým priestorom nad poľom* F *a vektorovým priestorom*

$V^n(F)$. Tvrdenia stačí naformulovať pre F^n, a potom previesť izomorfizmom do príslušného priestoru.

3. Konštrukcie topologických priestorov

Veta 3.1 (Podpriestor). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nech $Y \subseteq X$ je podmnožina. Potom $(Y, \mathcal{S})$, kde $\mathcal{S} = \{Z_U \subseteq Y : Z_U = Y \cap U, U \in \mathcal{T}\}$ je topologický priestor.*

Dôkaz: Ľahko sa presvedčíme, že táto dvojica spĺňa všetky predpoklady definície topologického priestoru. □

Definícia 3.1 (Podpriestor). *Priestor $(Y, \mathcal{S})$ z vety 3.1 nazývame* topologický podpriestor *priestoru $(X, \mathcal{T})$. Topológiu $\mathcal{S}$ nazývame* relatívnou topológiou.

Veta 3.2 (Tranzitivita relácie "byť podpriestorom"). *Nech X, Y, Z sú topologické priestory, pričom Y je podpriestorom X a Z je podpriestorom Y. Potom Z je aj podpriestorom X.*

Dôkaz: Zrejmý, keďže pre otvorenú množinu $W \subseteq Z$ existuje otvorená množina $V \subseteq Y$ a otvorená množina $U \subseteq X$ spĺňajúce rovnosť $W = V \cap Z = (U \cap Y) \cap Z$. □

Poznámka 3.1. *Na základe vety 3.2 hovoríme, že vlastnosť „byť podpriestorom" je tranzitívna.*

Cvičenie 3.1. *Nech $\mathcal{B}$ je báza topológie priestoru $(X, \mathcal{T})$. Nech $(Y, \mathcal{S})$ je podpriestor $(X, \mathcal{T})$. Potom $\mathcal{C} = \{C_U \subseteq Y : C = U \cap Y, U \in \mathcal{B}\}$ je báza topológie $\mathcal{S}$. Dokážte.*

Cvičenie 3.2. *Premyslite si, ktoré zo známych topologických vlastností priestoru sa priamo prenášajú na podpriestor. Ktoré sa prenášajú na otvorený podpriestor a ktoré na uzavretý podpriestor.*

Veta 3.3 (Súčin dvoch priestorov). *Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ sú topologické priestory. Nech $Z = X \times Y$ a $\mathcal{V}' = \{T \times U \in \mathcal{P}(X \times Y) : T \in \mathcal{T}, U \in \mathcal{U}\}$. Potom $\mathcal{V}'$ je bázou topológie $\mathcal{V}$ a $(Z, \mathcal{V})$ je topologický priestor*

Dôkaz: Stačí ukázať, že konečný prienik množín z $\mathcal{V}'$ je rovnakého typu, t.j. $(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$. Ďalej pokračujeme matematickou indukciou. □

Definícia 3.2 (Súčin dvoch topologických priestorov). *Priestor $(X \times Y, \mathcal{V})$ z vety 3.3 sa nazýva* topologickým súčinom dvoch priestorov.

Poznámka 3.2. *Podobne sa dá definovať topologický súčin konečného počtu k topologických priestorov, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.*

Obr. 7. Suma topologických priestorov $\mathbf{p}_0 \oplus \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{e}_0 \oplus \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2 \oplus \mathbf{f}$ dáva trojuholník ako disjunktné zjednotenie vrcholov, otvorených hrán a otvorenej steny. Analogicky sa dá postupovať aj pre simplexy vyšších dimenzií.

Cvičenie 3.3. *Nech X, Y sú topologické priestory, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Potom ak A a B sú uzavreté, tak $A \times B$ je uzavretá v $X \times Y$. Naviac, pre ľubovoľné množiny platí* $\mathrm{cl}(A \times B) = \mathrm{cl}(A) \times \mathrm{cl}(B)$. *Dokážte!*

Definícia 3.3 (Suma priestorov). *Nech $\{X_s\}_{s \in S}$ je systém po dvoch disjunktných topologických priestorov. Potom $X = \cup_{s \in S} X_s$ s topológiou danou množinami $U \subseteq X$ takými, že $U \cap X_s$ je otvorená v X_s pre všetky $s \in S$ nazývame* sumou topologických priestorov $\{X_s\}_{s \in S}$. *Označujeme $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ (pozri obr. 7).*

Poznámka 3.3. *Predchádzajúca definícia sa dá ľahko realizovať aj pre priestory, ktoré nie sú disjunktné. Stačí každý podpriestor "vynásobiť" vhodnou množinou. Napr. pre systém podpriestor $\{X_i\}_{i \in I}$ zoberieme systém homeomorfných priestorov $\{X_i \times i\}_{i \in I}$. Tieto sú už po dvoch disjunktné.*

Cvičenie 3.4. *Množina $A \subseteq \bigoplus_{s \in S} X_s$ je uzavretá vtedy a len vtedy, ak je uzavretá každá množina $A \cap X_s$, $s \in S$. Dokážte! Ukážte, že potom je X_s ako podmnožina $\bigoplus_{s \in S} X_s$ otvorená aj uzavretá.*

Cvičenie 3.5. *Zobrazenie $f\colon \bigoplus_{s \in S} X_s \to Y$ je spojité vtedy a len vtedy, keď je spojité každé zobrazenie $f \circ i_s\colon X_s \to Y$, kde zobrazenie $i_s\colon X_s \to \bigoplus_{s \in S} X_s$je prirodzené vloženie. Dokážte!*

Cvičenie 3.6. *Simplex v $\mathbb{R}^d$ je daný ako množina bodov, ktorá je konvexným obalom $d+1$ lineárne nezávislých bodov (neležia v jednej nadrovine). Opíšte rozklad simplexu na otvorené steny podobne ako na obr. 7. Opíšte nerovnosťami jednotlivé podpriestory, z ktorých sa skladá d-rozmerný simplex.*

Definícia 3.4 (Súčin priestorov). *Nech $\{X_s\}_{s \in S}$ je systém topologických priestorov. Potom $X = \Pi_{s \in S} X_s$ s topológiou generovanou množinami, ktoré sú vzormi otvorených množín v priestoroch X_s v projekciách $\pi_s\colon X \to X_s$, $\pi_s(x) = x_s$ (t.j. tieto zobrazenia sú spojité a topológia na X je minimálna taká – najhrubšia) nazývame* súčinom topologických priestorov $\{X_s\}_{s \in S}$.

POZNÁMKA 3.4. *Existencia neprázdneho súčinu topologických priestorov je ekvivalentná axióme výberu.*

VETA 3.4 (Kanonická báza topológie súčinu priestorov). *Nech* $X = \Pi_{s\in S}X_s$. *Potom všetky podmnožiny* X *tvaru* $\Pi_{s\in S}W_s$, *kde každé* W_s *je otvorené v* X_s *a až na konečný počet* $s \in S$ *je* $W_s = X_s$ *tvoria bázu topológie* X.

Dôkaz: Nech $\mathcal{T}$ je systém podmnožín X z tvrdenia vety. Je zrejmé, že pre otvorené $W_t \subseteq X_s$ je $\pi^{-1}(W_t) = \Pi_{s\in S}\tilde{X}_s$, kde $\tilde{X}_s = X_s$ pre $s \neq t$ a $\tilde{X}_t = W_t$. Takže každá topológia X, v ktorej všetky $\pi_s, s \in S$ sú spojité obsahuje $\mathcal{T}$. Naviac, $\mathcal{T}$ spĺňa axiómy bázy topológie. □

VETA 3.5 (Uzáver súčinu množín). *Pre ľubovoľný systém množín* $\{A_s\}_{s\in S}$, *kde* $A_s \subseteq X_s$ *platí v* $\Pi_{s\in S}X_s$, *že* $\mathrm{cl}(\Pi_{s\in S}A_s) = \Pi_{s\in S}\,\mathrm{cl}(A_s)$.

Dôkaz: Ak $x \in \mathrm{cl}(A)$, kde $A = \Pi_{s\in S}A_s$, tak ľubovoľná množina W z bázy $X = \Pi_{s\in S}X_s$ obsahujúca x musí mať neprázdny prienik s A. Teda $\Pi_{s\in S}A_s \cap \Pi_{s\in S}W_s = \Pi_{s\in S}A_s \cap W_s \neq \emptyset$, a teda pre každé $s \in S$ a ľubovoľnej otvorenej množiny W_s s-tej súradnice bodu x je $W_s \cap A_s \neq \emptyset$ v X_s. To je vtedy a len vtedy, keď $x \in \Pi_{s\in S}\,\mathrm{cl}(A_s)$. □

VETA 3.6 (Spojitosť zobrazenia súčinu priestorov). *Nech* $Y = \Pi_{s\in S}Y_s$. *Zobrazenie* $f\colon X \to Y$ *je spojité vtedy a len vtedy, keď je spojité každé zobrazenie* $\pi_s \circ f\colon X \to Y_s$ *pre* $s \in S$.

Dôkaz: Nutná podmienka je zrejmá z definície súčinu topologických priestorov.

Množina v $U \subseteq Y$ je otvorená, ak sa dá napísať v tvare $U = \cap_{i=1}^{n}\pi_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$ pre nejaké $s_1, \ldots, s_n \in S$. Z vlastností vzoru je potom $f^{-1}(U) = \cap_{i=1}^{n}(\pi_{s_i} \circ f)^{-1}(W_{s_i})$, ktorá je otvorená. □

DEFINÍCIA 3.5 (Faktorový priestor). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $\sim$ *je relácia ekvivalencie na* X *a* $X/_\sim$ *je rozklad množiny* X *definovaný touto reláciou. Nech* $\pi\colon X \to X/_\sim$ *je projekcia* $a \mapsto [a]$, *kde* $[a]$ *je trieda ekvivalencie v relácii* $\sim$. *Definujeme* $\mathcal{T}_\sim = \{V \subseteq X/_\sim : \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$. *Potom* $(X/_\sim, \mathcal{T}_\sim)$ *nazývame* faktorovým podpriestorom $(X, \mathcal{T})$ podľa relácie $\sim$.

CVIČENIE 3.7. *Množina* $F \subseteq X/_\sim$ *je uzavretá vtedy a len vtedy, keď* $\pi^{-1}(F)$ *je uzavretá v* X. *Dokážte!*

VETA 3.7. *Zobrazenie* $f\colon X/_\sim \to Y$ *je spojité vtedy a len vtedy, ak je spojité zobrazenie* $\pi \circ f$.

Dôkaz: Stačí si uvedomiť ako je definovaná topológia na $X/_\sim$ a použiť vzťah $(\pi \circ f)^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$. □

POZNÁMKA 3.5. *Z definície priamo vidno, že projekcia* π *na faktorový priestor je spojité zobrazenie.*

DEFINÍCIA 3.6 (Faktorová topológia). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor a* $f\colon X \to Y$ *je zobrazenie. Potom* $\mathcal{T}_f = \{V \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ *sa nazýva* faktorovou topológiou *na priestore* Y *určenou zobrazením* f*. Spojité surjektívne zobrazenie* $f\colon X \to Y$ *sa nazýva* faktorové*, ak topológia* Y *je faktorová vzhľadom na* f*.*

CVIČENIE 3.8. *Spojité surjektívne zobrazenie* $f\colon X \to Y$*, ktoré je otvorené alebo uzavreté, je aj faktorové.*

Príklad: V nasledujúcich príkladoch faktorových topológií konštruujeme rôzne plochy zo štvorca.

1. Zlepením dvoch protiľahlých hrán štvorca v rovnakom smere dostaneme plochu homeomorfnú s valcovou plochou.
2. Zlepením dvoch protiľahlých hrán štvorca v opačnom smere dostaneme plochu, ktorá sa nazýva Möbiov[1] pásik. Möbiov pásik je jednostranná plocha s hranicou homeomorfnou kružnici.
3. Zlepením dvoch dvojíc protiľahlých hrán štvorca v rovnakom smere dáva torus (alebo anuloid). Jedným zlepením dostaneme valcovú plochu a zlepením jej okrajov v rovnakom smere dostaneme torus.
4. Zlepením dvoch párov protiľahlých hrán štvorca, pričom prvú dvojicu zlepíme v rovnakom smere a druhú v opačnom smere dostaneme Kleinovu[2] fľašu. Jedným zlepením dostaneme valcovú plochu a zlepením jej okrajov v protismere dostaneme Kleinovu fľašu.
5. Zlepením dvoch párov protiľahlých hrán štvorca, pričom oba páry zlepíme v opačnom smere, dostávame projektívnu rovinu.

CVIČENIE 3.9. *Nájdite parametrické vyjadrenia plôch homeomorfných s plochami v príklade 3.*

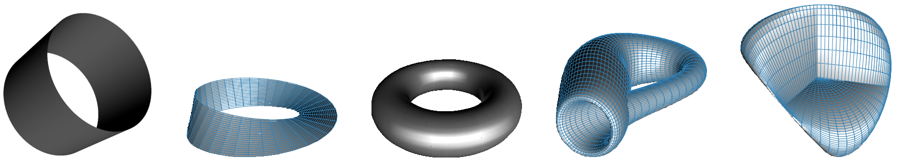
VETA 3.8. *Nech* X, Y, Z *sú topologické priestory,* Y *je faktorový podpriestor* X *a* Z *je faktorový podpriestor* Y*. Potom* Z *je faktorový podpriestor* X*.*

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že zložením spojitých projekcií $\pi_Y\colon X \to Y$ a $\pi_Z\colon Y \to Z$ dostaneme spojitú projekciu $X \to Z$. □

---

[1] August Ferdinand Möbius (1790-1868), potomok Martina Luthera, Gaußov a Pfaffov žiak, pracoval v matematike i astronómii. Zaoberal sa trigonometrickými rovnicami, analytickou geometriou, zaviedol projektívne súradnice a zaoberal sa barycentrickými súradnicami. prispel aj do teórie geometrických transformácií. Je po ňom pomenovaných niekoľko matematických objektov – Möbiov pásik (hoci ho neobjavil), Möbiova inverzia.

[2] Felix Klein (1849–1925), nemecký matematik. Položil základy modernej (neeuklidovskej) geometrie vyhlásením tzv. erlangenského programu. Je po ňom pomenovaných niekoľko geometrických objektov – Kleinova fľaša, Kleinova kvadrika,...



OBR. 8. Faktorové priestory vzniknuté niektorými "zlepeniami“ hrán štvorca a ich niektoré priemety do $\mathbb{R}^3$.

DEFINÍCIA 3.7 (Axiómy oddeliteľnosti). *Topologický priestor* $(X, \mathcal{T})$ *sa nazýva*

- T_0**-priestor:** *ak pre ľubovoľné jeho dva body* $x \neq y$, *existuje otvorená množina* $U \in \mathcal{T}$ *taká, že buď* $x \in U$ *a* $y \notin U$ *alebo* $y \in U$ *a* $x \notin U$,
- T_1**-priestor:** *ak pre ľubovoľné jeho dva body* $x \neq y$, *existujú otvorené množiny* $U, V \in \mathcal{T}$ *také, že* $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ *a* $x \notin V$,
- T_2**-priestor, Hausdorffov**[3] **priestor:** *ak pre ľubovoľné jeho dva body* $x \neq y$, *existujú disjunktné otvorené množiny* $U, V \in \mathcal{T}$ *také, že* $x \in U$ *a* $y \in V$,
- T_3**-priestor, regulárny priestor:** *ak je* T_1*-priestor a pre ľubovoľný bod* $x \in X$ *a každú uzavretú množinu* $R \subseteq X$, $x \notin R$ *existujú disjunktné otvorené množiny* $U, V \in \mathcal{T}$ *také, že* $x \in U$ *a* $R \subseteq V$,
- $T_{3\frac{1}{2}}$**-priestor, úplne regulárny priestor, tichonovovský**[4]**:** *ak je* T_1*-priestor a pre ľubovoľný bod* $x \in X$ *a každú uzavretú množinu* $R \subseteq X$, $x \notin R$ *existuje spojité zobrazenie* $f\colon X \to [0, 1]$, *pričom* $f(x) = 0$ *a* $f(R) \subseteq \{1\}$,
- T_4**-priestor, normálny priestor:** *ak je* T_1*-priestor a pre ľubovoľné dve disjunktné uzavreté množiny* $R, S \subseteq X$ *existujú disjunktné otvorené množiny* $U, V \in \mathcal{T}$ *také, že* $R \subseteq U$ *a* $S \subseteq V$.

---

[3] Felix Hausdorff (1868–1942), nemecký matematik, vyštudoval aplikovanú matematiku so zameraním na astronómiu, neskôr pracoval v teórii množín a topológii, kde dosiahol výrazné úspechy. Z pojmov nesúcich jeho meno sú známe Hausdorffova (fraktálna) dimenzia a Hausdorffov priestor. Svoj život ukončil spolu s niekoľkými rodinnými príslušníkmi po ozname o internácii.

[4] Andrej Nikolajevič Tichonov (1906–1993) – sovietsky matematik s tematicky širokým záberom od topológie, funkcionálnej analýzy, teórie diferenciálnych rovníc až po numerické metódy riešenia. Je po ňom pomenovaná metóda regularizácie zle podmienených úloh a trieda úplne regulárnych topologických priestorov.

POZNÁMKA 3.6. *Azda najdôležitejší typ priestoru je T_2-priestor. Veľa výsledkov topológie a analytických disciplín sa formuluje a platí len pre takéto priestory. V algebrickej geometrii, kde sa takéto priestory prirodzene nevyskytujú sa hľadá vhodná charakteristika (separabilita, iná ako sme definovali vyššie), ktorá nahrádza takýto pojem.*

VETA 3.9 (Hierachia axióm oddeliteľnosti). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický T_i-priestor pre $i = 1, 2, 3, 4$, potom je aj T_{i-1}-priestor. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor je aj T_3-priestor.*

Dôkaz: Urobíme napr. dôkaz $T_1 \implies T_0$. Keďže platí pre pevný bod $x \in X$ a ľubovoľný $y \in X$, že existuje otvorená množina $U_y \in \mathcal{T}$ neobsahujúca x, ale obsahujúca y. A to je práve hľadaná množina U z definície T_0-priestoru.

Uvedomme si, že v T_1 priestore je jednobodová množina $\{x\}$ uzavretá pre ľubovoľné $x \in X$, lebo $\cup_{y \in X - \{x\}} U_y = X - \{x\}$ je otvorená.

□

POZNÁMKA 3.7. *Platí aj tvrdenie, že každý T_4 priestor je úplne regulárny ako uvidíme neskôr vo vete 3.14.*

CVIČENIE 3.10. *Dokončite dôkaz vety 3.9 pre ostatné typy priestorov.*

Príklad:[Kontrapríklady k hierarchii T_i priestorov]

(1) Triviálny (antidiskrétny) priestor s aspoň dvoma bodmi nie je T_0 priestorom.

(2) Nech X je ľubovoľná množina s aspoň 2 prvkami a $x_0 \in X$. Potom pre $\emptyset \neq A \subseteq X$ položme $\operatorname{cl} A = A \cup \{x_0\}$ a $\operatorname{cl} \emptyset = \emptyset$. Takýmto systémom uzavretých množín definujme topológiu na X. Ľahko sa vidí, že priestor je T_0, ale nie je T_1. Žiadna otvorená množina okrem celého priestoru totiž neobsahuje x_0.

(3) Nech X je ľubovoľná nekonečná množina. Systém otvorených množín definujme $\{\emptyset\} \cup \{V \subseteq X : \operatorname{card}(X - V) < \aleph_0\}$. Tento priestor je T_1-priestorom, ale nie je T_2-priestorom.

(4) Nech $X = \mathbb{R}$ a $Z \subseteq X$, $Z = \{\frac{1}{z} : z \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Pre ľubovoľné $x \in X$ zoberme $U_i(x) = (x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i})$ a báza okolí bodu x je $\mathcal{B}(x) = \{U_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ pre $x \neq 0$ a $\mathcal{B}(0) = \{U_i(0) - Z\}_{i \in \mathbb{N}}$. Priestor X s takto generovanou topológiou je Hausdorffov. Množina Z je uzavretá a $0 \notin Z$. Ale ľubovoľné dve otvorené množiny $U_1, U_2 \subseteq X$ také, že $0 \in U_1$ a $Z \subseteq U_2$ majú neprázdny prienik. Takže tento priestor nie je T_3.

(5) Nech $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Označme $\Gamma_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Pre ľubovoľný bod z $\Gamma - \Gamma_0$ definujme bázu okolí tohoto bodu pomocou euklidovskej topológie tejto polroviny. Pre bod $a = (x, 0) \in \Gamma_0$ definujeme bázu okolí ako $\{B((x, r), r) \cup \{a\}\}_{r > 0}$. Takto definovaná množina tvorí bázu

Obr. 9. Nemyckého rovina je príkladom priestoru, ktorý je úplne regulárny, ale nie je normálny. Rovnako je príkladom toho, že podpriestorom separabilného priestoru nemusí byť separabilný priestor. Na obrázku vidíme bázu okolí dvoch typov bodov (vpravo) a funkciu reprezentovanú zmenou intenzity šedého odtieňa (vľavo) demonštrujúcu na jednom bázovom okolí, že tento priestor je úplne regulárny.

okolí. Priestor sa nazýva Moorovou[5] alebo Nemyckého[6] rovinou. V tomto priestore je Γ_0 uzavretou podmnožinou.

Nemyckého rovina je úplne regulárny priestor. Nech množina $U(a)$ je prvok bázy okolí bodu $a \in \Gamma$ a pre $b \in U(a) - \{a\}$ je b' bod prieniku priamky ab a hranice $U(a)$. Potom funkcia

$$f(b) = \begin{cases} 0, & \text{ak} \quad b = a \\ 1, & \text{ak} \quad b \in \Gamma - U(a) \\ \frac{|ab|}{|ab'|}, & \text{ak} \quad b \in U(a) - \{a\} \end{cases} \tag{3}$$

je spojité zobrazenie $f\colon \Gamma \to I$.

Je zrejmé, že $\operatorname{acc}(\Gamma_0) = \emptyset$. Naviac to platí pre ľubovoľnú $A \subseteq \Gamma_0$. A keďže Γ_0 je diskrétny podpriestor Γ, tak A je uzavretá podmnožina Γ_0.

Množina $C \subseteq \Gamma - \Gamma_0$ bodov s racionálnymi súradnicami je hustá v Γ.

Ak je Γ normálny priestor, tak pre ľubovoľné $A \subseteq \Gamma$ existujú otvorené množiny U_A a V_A také, že $A \subseteq U_A$, $\Gamma_0 - A \subseteq V_A$ a $U_A \cap V_A = \emptyset$. Nech $C_A = U_A \cap C$ a nech $A, B \subseteq \Gamma_0$ sú také, že $A - B \neq \emptyset$. Potom $\emptyset \neq A - B \subseteq \operatorname{cl}(U_A) \cap V_B$ a naviac $\operatorname{cl}(U_B) \cap V_B = \emptyset$, lebo $U_B \cap V_B = \emptyset$. Takže $\operatorname{cl}(U_A) \neq \operatorname{cl}(U_B)$. Z toho priamo máme aj $\operatorname{cl}(C_A) \neq \operatorname{cl}(C_B)$, a teda $C_A \neq C_B$. Teda pre rôzne množiny A, B sú rôzne aj C_A a C_B.

To vedie k sporu, lebo podmnožín C je len $2^{\aleph_0}$, zatiaľčo podmnožín Γ_0 je $2^{\mathfrak{c}}$.

---

[5] Moore, Robert Lee (1882–1974) – americký matematik venujúci sa všeobecnej topológii. Známa je jeho metóda vyučovania matematiky.

[6] Nemyckij, Viktor Vladimirovič, (1900-1967) – sovietsky matematik, pracoval v Moskovskej univerzite, zaoberal sa kavlitatívnou teóriou diferenciálnych rovníc, nelineárnych operátorových rovníc, teóriou funkcií jednej premennej a topológiou.

VETA 3.10 (O uzavretosti množiny rovnosti dvoch zobrazení). *Nech* $f, g\colon X \to Y$ *sú spojité zobrazenia a* Y *je Hausdorffov topologický priestor. Potom množina* $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *je uzavretá v* X.

Dôkaz: Ukážeme, že $A = X - \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je otvorená. K bodom $f(x) \neq g(x)$ existujú otvorené množiny U_x a V_x, $U_x \cap V_x = \emptyset$, $f(x) \in U_x$, $g(x) \in V_x$. Množina $f^{-1}(U_x) \cap f^{-1}(V_x)$ je otvorené okolie bodu x a je celé podmnožinou A. □

POZNÁMKA 3.8. *Špeciálnym prípadom predchádzajúcej vety je tvrdenie, že implicitne definovaná krivka v euklidovskej rovine alebo plocha v euklidovskom trojrozmernom priestore je uzavretá množina. Stačí ako druhú funkciu vziať nulovú funkciu. Ako je to s implicitne definovanou krivkou v trojrozmernom euklidovskom priestore?*

VETA 3.11 (Ekvivalentná podmienka regulárnosti). T_1*- priestor* X *je regulárny vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľný bod* $x \in X$ *a jeho otvorené okolie* $V \subseteq X$ *existuje okolie* $U \subseteq X$ *bodu* x *také, že* $\operatorname{cl} U \subseteq V$.

Dôkaz: V regulárnom priestore X zoberme $x \in X$ a uzavretú množinu $F = X - V$. Potom existujú otvorené okolia $U_1, U_2 \subseteq X$ také, že $x \in U_1$, $F \subseteq U_2$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Je zrejmé, že okolie $\operatorname{cl} U_1 \subseteq X - U_2 \subseteq V$, keďže $X - U_1$ je uzavretá.

Ak platí nutná podmienka z tvrdenia, tak uzavretú množinu $F \subseteq X$, $x \notin F$ zoberme $V = X - F$. Potom existuje okolie $U_1 \subseteq X$ bodu x také, že $\operatorname{cl} U_1 \subseteq V$. Vezmime za $U_2 = X - \operatorname{cl} U_1$. Zrejme $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ a $x \in U_1$ a $F \subseteq U_2$. □

CVIČENIE 3.11. *Dokážte vetu 3.11 za predpokladu, že* V *je okolie z nejakej pevne zvolenej predbázy* X.

VETA 3.12 (O regularite Hausdorffovho priestoru). *Hausdorffov priestor je regulárny práve vtedy, keď uzavreté okolia ľubovoľného bodu tvoria bázu okolí.*

Dôkaz: Nech X je regulárny, potom pre $x \in X$ a otvorenú množinu U, $x \in U$ platí, že k $R = X - U$ existujú disjunktné otvorené množiny $V, W \subseteq X$ také, že $x \in V$ a $R \subseteq W$ (pozri obr. 10). To ale znamená, že množina $X - W \subseteq X - R = U$ je uzavretá a obsiahnutá v okolí U. Takže uzavreté množiny tvoria bázu okolí bodu x.

Nech má bod x Hausdorffovho priestoru bázu okolí z uzavretých množín. Nech R je uzavretá množina a $x \notin R$. Potom k otvorenej množine $X - R$ existuje uzavretá množina S, $x \in S \subseteq X - R$. Množina S obsahuje otvorenú podmnožinu V, $x \in V \subseteq S$. Potom otvorené disjunktné množiny V a $X - \operatorname{cl}(V) \supseteq X - S \subseteq R$ oddeľujú x a R. □

DÔSLEDOK 3.1. *Podpriestor regulárneho priestoru je tiež regulárny.*

OBR. 10. Uzavreté množiny tvoria bázu okolí v Hausdorffovom priestore práve vtedy, keď je regulárny.

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že uzavretý systém okolí bodu x z pôvodného priestoru sa stane základom systému okolí tohoto bodu v podpriestore.

□

VETA 3.13 (Ekvivalentná podmienka úplnej regulárnosti). *T_1 priestor X je úplne regulárny práve vtedy, keď pre ľubovoľný bod $x \in X$ a jeho otvorené okolie $V \subseteq X$ existuje spojitá funkcia $f\colon X \to I$ taká, že $f(x) = 0$ a $f(X - V) \subseteq \{1\}$.*

Dôkaz: Nutná podmienka je zrejmá z definície úplne regulárneho priestoru, lebo $X - V$ je uzavretá množina a $x \notin X - V$.

Postačujúca je zrejmá z toho istého dôvodu. □

CVIČENIE 3.12. *Urobte dôkaz vety 3.13 za predpokladu, že V je z nejakej predbázy topológie na X.*

VETA 3.14 (Urysonova[7] lema). *Nech A, B sú dve disjunktné uzavreté podmnožiny normálneho priestoru X. Potom existuje spojitá funkcia $f\colon X \to I$ taká, že $f(x) = 0$ pre $x \in A$ a $f(x) = 1$ pre $x \in B$.*

Dôkaz: Náčrt dôkazu je nasledujúci. Ku každému racionálnemu číslu $r \in [0,1]$ zostrojíme otvorenú množinu U_r s vlastnosťami

(1) $A \subseteq U_r$, $B \subseteq X - U_r$,
(2) $\mathrm{cl}(U_r) \subseteq U_s$ pre $r < s$.

Funkciu $f\colon X \to I$ zostrojíme predpisom

$$f(x) = \inf\{r : x \in U_r\}. \tag{4}$$

Množiny U_r zostrojíme induktívne. Nech $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je postupnosť všetkých racionálnych čísel taká, že $r_0 = 0$ a $r_1 = 1$. Keďže X je normálny, existujú otvorené disjunktné U, V, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Položme $U_0 = U$, $U_1 = X - B$. Je zrejmé, že spĺňajú podmienku (1). Podmienka (2) platí, lebo $A \subseteq U_0 \subseteq X - V = \mathrm{cl}(X - V) \subseteq X - B = U_1$. Takže $\mathrm{cl}(U_0) \subset U_1$.

Majme zostrojenú postupnosť množín U_{r_i} pre $i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, ktoré spĺňajú podmienky (1) a (2).

---

[7] Pavel Samuilovič Uryson (1898–1924) – ruský matematik rozvíjajúci najmä teóriu dimenzie a teóriu metrizovateľných priestorov.

Nech $s = \max\{r_i : r_{n+1} > r_i : i = 0, \dots, n\}$ a $t = \min\{r_i : r_{n+1} < r_i : i = 0, \dots, n\}$. Potom $\mathrm{cl}(U_s) \subseteq U_t$. Teda k množinám $\mathrm{cl}(U_s)$ a $X - U_t$ existujú disjunktné otvorené podmnožiny U,V také, že $\mathrm{cl}(U_s) \subseteq U$ a $X - U_t \subseteq V$. Keďže $\mathrm{cl}(U) \subseteq X - V \subseteq U_t$, tak položme $U_{r_{n+1}} = U$.

Teraz ešte treba ukázať, že f je spojité zobrazenie. Z definície funkcie je zrejmé, že $f^{-1}([0, a)) = \cup_{r<a} U_r$ a $f^{-1}((b, 1]) = \cup_{r>b} X - \mathrm{cl}(U_r)$, čo sú otvorené množiny a množiny $[0, a)$, $(b, 1]$ tvoria bázu v $[0, 1]$. □

Poznámka 3.9. *Urysonova lema teda vraví, že normálny priestor je úplne regulárny.*

Cvičenie 3.13. *Podmnožina A normálneho topologického priestoru X je uzavretá G_σ vtedy a len vtedy, keď existuje spojitá funkcia $f\colon X \to I$ taká, že $A = f^{-1}(0)$. Dokážte!*

Cvičenie 3.14. *Podmnožina A normálneho topologického priestoru X je otvorená F_σ vtedy a len vtedy, keď existuje spojitá funkcia $f\colon X \to I$ taká, že $A = f^{-1}((0, 1])$. Dokážte!*

Cvičenie 3.15. *Nech X je T_1-priestor a pre ľubovoľnú uzavretú množinu $F \subseteq X$ a otvorenú množinu $G \subseteq X$, $F \subseteq G$ existuje postupnosť otvorených množín $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ takých, že $F \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ a $\mathrm{cl}(G_i) \subseteq G$ pre $i \in \mathbb{N}$. Potom je priestor X normálny. Dokážte!*

Cvičenie 3.16. *Regulárny priestor spĺňajúci druhú axiómu spočítateľnosti je normálny. Dokážte!*

Cvičenie 3.17. *Nech $A \subseteq X$ je hustá podmnožina. Nech $f\colon A \to Y$ je spojité zobrazenie, ktoré sa spojito predĺži (dodefinuje) na zobrazenie z $f\colon X \to Y$. Ak Y je Hausdorffov priestor, tak predĺženie je jednoznačné. Dokážte!*

Veta 3.15 (Podpriestory T_i priestorov). *Podpriestor T_i priestoru je T_i priestor pre $i \le 3\frac{1}{2}$.*

Dôkaz: Ide o jednoduché cvičenie. □

Veta 3.16 (Súčin T_i priestorov). *Súčin T_i-priestorov je T_i-priestor pre $i \le 3\frac{1}{2}$. Obrátene, ak súčin priestorov je T_i priestor, tak všetky priestory v systéme sú T_i.*

Dôkaz: Pre T_1 priestor tvrdenie vyplýva napr. z toho, že množina $\Pi_{s\in S} A_s$ pre $\emptyset \ne A_s \subseteq X_s$ je uzavretá vtedy a len vtedy, keď je A_s uzavretá v X_s pre každé $s \in S$. Stačí si potom zobrať množinu obsahujúcu bod $\{x\}$.

Pre $i = 0, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ sú dôkazy podobné. Ukážeme, že súčin $X = \Pi_{s\in S} X_s$ tichonovovských priestorov je tichonovovský. Nech všetky X_s sú úplne regulárne, tak pre $x = \{x_s\}_{s\in S} \in X$ a uzavretú (kanonickú) množinu $F = \Pi_{s\in S} F_s$, kde $F_s = X_s$ pre $s \ne t$ a F_t je neprázdna uzavretá v X_t, existuje funkcia $f_t\colon X_t \to [0,1]$ taká, že $f_t(x_t) = 0$ a $f_t(F_t) \subseteq \{1\}$. Potom $f \circ \pi_t$ je hľadané zobrazenie pre x a F.

Ak $X = \Pi_{s\in S} X_s$, kde všetky priestory X_s sú neprázdne, zoberme bod $x = \{x_s\}_{s\in S} \in X$ a položme $X_t^* = \Pi_{s\in S} A_s$, kde $A_s = \{x_s\}$ pre $s \neq t$ a $A_t = X_t$. Je zrejmé, že X_t^* je homeomorfný s X_t a je podpriestorom X. Naviac je to uzavretý podpriestor, ak $i \geq 1$. Takže X_s je podľa vety 3.15 T_i-priestorom. □

Príklad: Priestory $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, $[0,1]^n$, $(\mathbb{S}^1)^2$ sú súčiny priestorov.

Definícia 3.8 (Graf zobrazenia). *Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie topologických priestorov. Potom množinu $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ nazývame* grafom *zobrazenia f.*

Veta 3.17 (Vlastnosti grafu spojitého zobrazenia). *Nech $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom je $\Gamma(f)$ homeomorfný obraz X v homeomorfizme $h\colon X \to X \times Y$ danom $h(x) = (x, f(x))$ pre $x \in X$. Podobne zúženie projekcie $\pi_X\colon X \times Y \to X$ na $\Gamma(f)$ je homeomorfizmus. Ak Y je hausdorffovský, tak $\Gamma(f)$ je uzavretá podmnožina $X \times Y$.*

Dôkaz: Prvé dve tvrdenia sa dokážu priamočiaro, pričom zobrazenia h a π_X sú navzájom inverzné. Tretia časť je zrejmá z faktu, že $\Gamma(f) = (f \times id_Y)^{-1}(\Delta)$, kde $\Delta = \{(y,y) \in Y \times Y : y \in Y\}$ je diagonála. Tá je uzavretá podľa vety 3.10, teda aj jej vzor v spojitom zobrazení. □

4. Konvergencia a limity v topologických priestoroch

Definícia 4.1 (Usmernená množina). *Nech $(D, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina taká, že pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in D$, existuje $\gamma \in D$, $\alpha \leq \gamma$ a $\beta \leq \gamma$. Hovoríme, že D je* usmernená.

Definícia 4.2 (Sieť). *Nech X je topologický priestor a $(D, \leq)$ je usmernená množina. Potom funkciu $\phi\colon D \to X$ nazývame* sieťou.

Definícia 4.3. *Nech $\phi\colon D \to X$ je sieť a $A \subseteq X$. Hovoríme, že sieť je* často v A, *ak pre ľubovoľné $\alpha \in D$ existuje $\beta \in D$, $\alpha \leq \beta$ a $\phi(\beta) \in A$. Hovoríme, že* horná časť ϕ sa nachádza v A, *ak existuje $\alpha \in D$, že pre všetky $\beta \in D$, $\alpha \leq \beta$ platí $\phi(\beta) \in A$.*

Definícia 4.4 (Konvergencia siete, limita). *Bod $x \in X$ nazývame* limitou konvergentnej siete *$\phi\colon D \to X$, ak pre ľubovoľné okolie U bodu x existuje $\delta_0 \in D$ také, že pre všetky $\delta \in D$, $\delta_0 \leq \delta$ platí $\phi(\delta) \in U$, teda že horná časť ϕ je v U. Množina všetkých limitných bodov siete sa označuje $\lim_{\delta\in D} \phi(\delta)$ alebo často len $\lim x_\delta$, kde $x_\delta = \phi(\delta)$.*

Poznámka 4.1. *Pre postupnosti, na ktoré sme zvyknutí z reálnej analýzy, je $D = \mathbb{N}$ a $\leq$ je obvyklé usporiadanie prirodzených čísel.*

Limitou siete vo všeobecnom topologickom priestore môže byť aj množina s viacerými bodmi.

VETA 4.1 (Ekvivalentná podmienka spojitosti). *Zobrazenie* $f\colon X \to Y$ *je spojité, ak pre ľubovoľnú sieť* ϕ *konvergujúcu k bodu* $x \in X$*, je sieť* $f \circ \phi$ *konvergentná k bodu* $f(x)$*.*

Dôkaz: Nech f je spojité zobrazenie a ϕ konverguje k $x \in X$. Potom pre ľubovoľné otvorené okolie V bodu $f(x)$ je $f^{-1}(V)$ otvorená v X, obsahuje x a horná časť ϕ je v nej. To znamená, že horná časť $f \circ \phi$ je vo V.

Nech f nie je spojité. Potom existuje otvorená množina $V \subseteq Y$, že $U = f^{-1}(V)$ nie je otvorená. Nech $x \in U - \operatorname{int} U$. Vezmime systém D všetkých otvorených okolí bodu x s usporiadaním $A \leq B \iff B \subseteq A$. Pre každé okolie $A \in D$ bodu x Množina $A \cap X - U$ je neprázdna (inak by $x \in \operatorname{int} U$). Takže položme $\phi(A) = y$, kde $y \in A \cap X - U$. Zrejme ϕ konverguje k x, ale $f \circ \phi(A) \notin V$ pre žiadne A, a teda táto sieť nekonverguje ku $f(x) \in V$. □

VETA 4.2 (Jednoznačnosť limity v hausdorffovských priestoroch). *Topologický priestor je hausdorffovský práve vtedy, keď ľubovoľná sieť má práve jednu limitu.*

Dôkaz: Ak sú body oddeliteľné disjunktnými otvorenými množinami, tak horná časť siete môže byť len v jednej z týchto množín.

Nech body $x, y \in X$ nie sú oddeliteľné dvoma disjunktnými otvorenými množinami. Potom ľubovoľné okolie bodu x obsahuje aj bod y. Nech D je množina všetkých otvorených okolí bodov x a y s usporiadaním daným inklúziou t.j. $A \leq B \iff B \subseteq A$ a $w_A \in A$. Je zrejmé, že $\{x, y\} \subseteq \lim w_A$. □

VETA 4.3 (Uzavretosť množiny pomocou limít). *Bod* $x \in \operatorname{cl}(A)$ *práve vtedy, keď existuje sieť prvkov množiny* A *konvergujúca k bodu* x*.*

Dôkaz: Ide o ľahké cvičenie. □

CVIČENIE 4.1. *Sformulujte niektoré vlastnosti postupností z reálnej analýzy vo forme viet o sieťach a pokúste sa ich dokázať.*

CVIČENIE 4.2. *Ukážte, že systém okolí vybraného bodu* $x \in X$ *je usmernená množina vzhľadom na obrátenú inklúziu* $A \leq B \leftrightarrow B \subset A$*.*

DEFINÍCIA 4.5 (Finálne zobrazenie). *Nech* D *a* D' *sú usmernené množiny a* $h\colon D \to D'$ *je zobrazenie. Nazývame ho* finálnym*, ak pre ľubovolné* $d' \in D'$ *existuje* $d \in D$ *také, že pre všetky* $a \in D$ *také, že* $a \geq d$ *je* $h(a) \geq d'$*.*

DEFINÍCIA 4.6 (Podsieť). *Podsieťou siete* $\mu\colon D' \to X$ *nazývame zobrazenie* $\mu \circ h$*, kde* $h\colon D \to D'$ *je finálne zobrazenie.*

VETA 4.4. *Sieť* $\mu\colon D \to X$ *sa nachádza často v každom okolí bodu* $x \in X$ *práve vtedy, keď má konvergentnú podsieť k bodu* x*.*

Dôkaz: Zostrojme usmernenú množinu $D' = \{(\alpha, U)\}_{\alpha \in D}$, kde U je okolie x, pričom $x_\alpha = \mu(\alpha) \in U$. Usporiadanie na týchto dvojiciach je generované predpisom $(\alpha, U) \leq (\alpha', U')$ práve vtedy, keď $\alpha \leq \alpha'$ a $U' \subseteq U$.

Zrejme ku každým dvom prvkom $(\alpha, U), (\beta, V) \in D'$ existuje v D' prvok $(\gamma, U \cap V)$, ktorý je od oboch väčší. Prvok $\gamma \in D$ vyberiem tak, aby $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ a $x_\gamma \in U \cap V$, čo sa dá vďaka usmerneniu D a vlastnosti, že μ je často v okolí x. To znamená, že D' je usmernená množina.

Zobrazenie $D' \to D$ také, že $(\alpha, U) \mapsto \alpha$ je finálne. Takže $\{x_{(\alpha,U)}\}$ je podsieťou $\{x_\alpha\}$. Ukážeme, že konverguje ku x.

Zoberme ľubovoľné okolie O bodu x. Potom v ňom existuje podľa predpokladu nejaký prvok x_β zo siete μ. Ak $(\alpha, U) \geq (\beta, O)$, tak $x_{(\alpha,U)} = x_\alpha \in U \subseteq O$. To znamená, že horná časť siete je tam. □

Cvičenie 4.3. *Nech D je čiastočne usporiadaná množina. Definujme na D bázu otvorených množín $B = \{U \subset D : U$ je horná časť $D\}$. Ukážte, že takto je možné definovať na D topológiu. Ukážte, že finálne zobrazenie je spojité zobrazenie medzi dvoma usmernenými množinami s takouto topológiou.*

Definícia 4.7 (Univerzálna sieť). *Sieť sa nazýva* univerzálna*, ak pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq X$ je horná časť siete v A alebo v $X - A$.*

Veta 4.5 (Obraz univerzálnej siete). *Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie a $\mu : D \to X$ je univerzálna sieť. Potom $f \circ \mu$ je univerzálna sieť v Y.*

Dôkaz: Dôkaz je zrejmý z toho, že $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ pre ľubovoľné $B \subseteq Y$. □

Cvičenie 4.4. *Ukážte, že postupnosť je univerzálna vtedy a len vtedy, keď je konštantná až na konečný počet členov (horná časť je konštantná).*

Veta 4.6 (Zornova[8] lema). *Každá čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každý reťazec je zhora ohraničený, má aspoň jeden maximálny prvok.*

Poznámka 4.2. *Zornova lema je tvrdenie, ktoré sa obyčajne dokazuje v teórii množín. Je ekvivalentná axióme výberu, ktorá má niektoré neintuitívne dôsledky v matematike (napr. Banachov-Tarského paradox o rozklade gule). Niekedy sa nazýva aj princíp maximality.*

Cvičenie 4.5. *Podsieť univerzálnej siete je univerzálna. Dokážte!*

---

[8] Max August Zorn (1908–1993) Pôvodom nemecký matematik žijúci v USA. Zaoberal sa algebrou, teóriou grúp a numerickou matematikou. Zornovu lemu objavil v roku 1935 nezávisle od Kuratowského, ktorý ju objavil v roku 1922.

Cvičenie 4.6. *Každá univerzálna sieť sa nachádza často buď v A alebo v $X - A$. Dokážte!*

Veta 4.7 (O existencii univerzálnej podsiete). *Každá sieť má univerzálnu podsieť.*

Dôkaz: Majme sieť $\mu\colon P \to X$. Nech $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(X)$ je nejaký systém podmnožín $A \subseteq X$ takých, že μ je často v A a $\mathcal{C}$ je uzavretý na prienik. Dva takéto systémy sú prirodzene usporiadané inklúziou podmnožín $\mathcal{P}(X)$. Reťazec (lineárne usporiadaná množina takýchto systémov) dáva po zjednotení opäť takúto množinu, takže podľa Zornovej lemy, existuje v tejto čiastočne usporiadanej množine maximálny prvok. Označme ho $\mathcal{D}$.

Definujme podobne ako v dôkaze vety 4.4 podsieť. Na $P_0 = \{(\alpha, A) \in P \times \mathcal{D} : \mu(\alpha) = x_\alpha \in A\}$ máme čiastočné usporiadanie dané predpisom $(\alpha, A) \leq (\alpha', A')$ práve vtedy, keď $\alpha \leq \alpha'$ a $A' \subseteq A$. Je zrejmé, že ide o usmernenú množinu a že zobrazenie $\phi\colon P_0 \to P$ dané predpisom $\phi((\alpha, A)) = \alpha$ je finálne.

Potom $\nu\colon P_0 \to X$ dané $\nu = \phi \circ \mu$ alebo podrobnejšie predpisom $y_{(\alpha,A)} = \nu((\alpha, A)) = x_\alpha$ je podsieť μ. Ukážeme, že je univerzálna.

Nech $U \subseteq X$ je množina, v ktorej sa často nachádza ν (a teda aj μ). Potom pre ľubovoľné $A \in \mathcal{D}$ máme nejaké $(\alpha, A) \in P_0$ a k nemu existuje $(\beta, B) \in P_0$, $(\beta, B) \geq (\alpha, A)$ a $y_{(\beta,B)} \in U$. Takže ν sa často nachádza aj v $U \cap A$, lebo $x_\beta \in B \subseteq A$. Keďže systém $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} \cup \{U \cap A : A \in \mathcal{D}\} \cup \{U\}$ je uzavretý na prienik a ν je v každej z množín často a $\mathcal{D}$ bol maximálny, tak $U \in \mathcal{D}$.

Ak ν je často aj v $X - U$, tak $X - U \in \mathcal{D}$, a teda $\emptyset \in \mathcal{D}$. Spor s definíciou takého systému. To znamená, že horná časť siete ν je v U. Takže ν je univerzálna. □

Cvičenie 4.7. *Ukážte, že spojité zobrazenie $f\colon X \to Y$, kde Y je regulárny možno definovať hodnotami na hustej podmnožine $H \subseteq X$. Teda ukážte, že ak f je ľubovoľné zobrazenie, ktoré spĺňa, že pre ľubovoľnú sieť $\{x_\alpha\}$, kde $x_\alpha \in H$ a $\lim x_\alpha = x \in X$ je $\lim f(x_\alpha) = f(x) \in Y$, tak potom f je spojité. Ťažšia časť cvičenia je ukázať, že ak priestor Y nie je regulárny, tak to nemusí platiť.*

5. Kompaktné priestory

Definícia 5.1 (Pokrytie). *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je systém podmnožín X. Hovoríme, že ide o* pokrytie, *ak $X = \cup_{S \in \mathcal{S}} S$. Ak $\mathcal{S}$ je systém otvorených (uzavretých) podmnožín X. Nazývame ho* otvoreným(uzavretým) pokrytím *priestoru X. Ak $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ sú pokrytia priestoru X a $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, tak hovoríme, že $\mathcal{S}'$ je* podpokrytie *pokrytia $\mathcal{S}$.*

Definícia 5.2 (Kompaktný priestor). *Priestor X sa nazýva kompaktný, ak ľubovoľné otvorené pokrytie obsahuje konečné podpokrytie X.*

DEFINÍCIA 5.3 (Centrovaný systém). *Systém $\mathcal{S}$ podmnožín priestoru X sa nazýva* centrovaný, *ak každý neprázdny konečný podsystém $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ má neprázdny prienik t.j. $\cap_{S\in\mathcal{S}'} S \neq \emptyset$.*

VETA 5.1 (Ekvivalentná podmienka kompaktnosti). *Priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý neprázdny centrovaný systém uzavretých množín $\mathcal{S}$ má neprázdny prienik.*

Dôkaz: Ide o preformulovanie definície kompaktnosti v „reči" uzavretých množín. □

DEFINÍCIA 5.4 (Kompaktná podmnožina). *Množina $A \subseteq X$ sa nazýva* kompaktnou, *ak podpriestor A je kompaktný.*

VETA 5.2. *Uzavretá podmnožina kompaktného priestoru je kompaktná.*

Dôkaz: Stačí napr. k ľubovoľnému otvorenému pokrytiu $\mathcal{S}$ uzavretej množiny $A \subseteq X$ pridať otvorenú množinu $X - A$. Takýto systém je pokrytím celého priestoru. Vyberieme konečný podsystém, a potom z neho prípadne odstránime množinu $X - A$. □

Príklad:

1. Ľubovoľný konečný priestor je kompaktný.
2. Interval $[0, 1]$ s obvyklou topológiou je kompaktný. Nech $\mathcal{S}$ je otvorené pokrytie takéhoto priestoru. Potom zostrojme $J = \{x \in [0, 1] : [0, x] \quad \text{sa dá pokryť konečným podpokrytím} \quad \mathcal{S}\}$. Množina J je uzavretý interval. Nech $m = \sup J$. Ak $m < 1$, tak v $\mathcal{S}$ existuje otvorená množina, ktorá obsahuje m, a teda aj nejaký interval $(m-\epsilon, m+\epsilon)\cap[0, 1]$. Takže dostaneme spor, lebo všetky čísla tvaru $m + \epsilon$, také, že sú z $[0, 1]$ sú aj z J.

CVIČENIE 5.1. *Nech A je kompaktný podpriestor topologického priestoru X. Potom z ľubovoľného systému $\{U_s\}_{s\in S}$ otvorených podmnožín X takých, že $A \subseteq \cup_{s\in S} U_s$ možno vybrať konečné podpokrytie A.*

VETA 5.3. *Ak X je Hausdorffov priestor, tak kompaktná množina $A \subseteq X$ je uzavretá.*

Dôkaz: Nech $x \in X - A$. Potom ku každému $y \in A$ existujú otvorené množiny U_y, V_y také, že $U_y \cap V_y = \emptyset$ a naviac $y \in U_y$, $x \in V_y$. Zo systému $\{U_y\}_{y\in A}$ vyberieme konečné podpokrytie A, a to znamená, že $A \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ a bod x je aj s otvoreným okolím $V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$ mimo tejto množiny. Takže $X - A$ je otvorená. □

VETA 5.4 (Obraz kompaktného priestoru). *Spojitý obraz kompaktného priestoru je kompaktný.*

Dôkaz: Nech X je kompaktný priestor, $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazenie a $A = f(X) \subseteq Y$. Z otvoreného pokrytia $\{U_s\}_{s\in S}$ množiny A dostaneme otvorené pokrytie $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in S}$ priestoru X. Jeho konečné podpokrytie nám dá aj konečné podpokrytie A zodpovedajúcimi množinami. □

Veta 5.5. *Ak X je kompaktný, Y je Hausdorffov a $f\colon X \to Y$ je spojité bijektívne zobrazenie, tak je aj homeomorfizmom.*

Dôkaz: Treba ukázať, že f^{-1} je spojité. Nech $U \subseteq X$ je uzavretá, potom je podľa vety 5.2 aj kompaktná. Takže jej obraz je podľa vety 5.4 kompaktná množina v Y, a teda podľa vety 5.3 aj uzavretá. □

Veta 5.6. *Kompaktný Hausdorffov priestor je normálny.*

Dôkaz: Nech A je uzavretá množina a $x \notin A$. Potom A je kompaktná. K bodu $y \in A$ a x existujú otvorené disjunktné množiny U_y, V_y také, že $y \in U_y$ a $x \in V_y$. Takže zo systému $\{U_y\}_{y\in A}$ pokrývajúceho A môžeme vybrať konečné podpokrytie. A máme, že priestor je regulárny, lebo $A \subseteq U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$ a bod $x \in V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$, čo sú otvorené disjunktné množiny.

Analogicky, pre B uzavreté a disjunktné s A môžeme pre každý bod $x \in A$ zostrojiť disjunktné otvorené oddeľujúce množiny. A rovnakou úvahou dospejeme k tomu, že existujú oddeľujúce disjunktné otvorené množiny nad A a B. Teda X je normálny. □

Definícia 5.5 (Vlastné zobrazenie). *Zobrazenie $f\colon X \to Y$ sa nazýva* vlastné, *ak pre ľubovoľnú kompaktnú množinu $A \subseteq Y$ je $f^{-1}(A)$ kompaktná v X.*

Veta 5.7. *Nech $f\colon X \to Y$ je uzavreté zobrazenie a $f^{-1}(y)$ je kompaktná množina v X pre ľubovoľné $y \in Y$. Potom je f vlastné.*

Dôkaz: Nech B je kompaktná v Y a $A = f^{-1}(B)$. Nech $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ je otvorené pokrytie A. Potom pre $y \in B$ existuje konečné podpokrytie $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}$ každej množiny $f^{-1}(y) \subseteq A$. Zoberme $V_y = u\cup_{U\in\mathcal{U}_y} U$. Množina $f(X - V_y)$ je uzavretá v Y, a teda $W_y = Y - f(X - V_y)$ je otvorená, pričom $f^{-1}(W_y) \subseteq V_y$. Množina B sa dá pokryť konečným podpokrytím $B \subseteq W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n}$. Takže $A \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} = \cup_{i=1}^{n} \cup_{U\in\mathcal{U}_{y_i}} U$. □

Veta 5.8 (Ekvivalentné podmienky kompaktnosti). *Nech X je topologický priestor. Potom sú ekvivalentné nasledujúce podmienky.*

1. *X je kompaktný.*
2. *Každý centrovaný systém uzavretých podmnožín X má neprázdny prienik.*
3. *Každá univerzálna sieť v X konverguje.*
4. *Každá sieť v X má konvergentnú podsieť.*

Dôkaz: Tvrdenia (1) a (2) sú ekvivalentné podľa 5.1.

Teraz ukážeme, že (1) $\Longrightarrow$ (3). Nech $\{x_\alpha\}$ je univerzálna sieť, ktorá nekonverguje. Potom pre ľubovoľné $x \in X$ a existuje okolie U_x také, že horná časť siete nie je v U_x. Potom $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ pre nejaké body $x_1, \ldots, x_n$. To znamená, že horná časť siete nie je ani v jednej z týchto množín, spor.

Platnosť (3) $\Longrightarrow$ (4) je zrejmá.

Na záver ukážeme implikáciu (4) $\Longrightarrow$ (2). Nech $\mathcal{F} = \{C\}$ je centrovaný systém uzavretých množín. Vložíme tam ešte všetky ďalšie konečné prieniky množín z $\mathcal{F}$. Potom $\mathcal{F}$ je čiastočne usporiadaná množina pomocou inklúzie a je usmernená. Takže sieť $\{x_C\}_{C\in\mathcal{F}}$, kde $x_C \in C$, má konvergentú podsieť. Nech je daná finálnym zobrazením $h\colon D \to \mathcal{F}$. Nech $\lim x_{h(\alpha)} = x$. Potom pre ľubovoľné $C \in \mathcal{F}$ existuje $\beta \in D$také, že pre $\gamma \geq \beta$ je $h(\gamma) \subseteq C$, a teda $x_{h(\gamma)} \in h(\gamma) \subseteq C$. Keďže C je uzavretá, tak $x \in C$. Takže $x \in \cap_{C\in\mathcal{F}} C$. □

Cvičenie 5.2. *Sieť* $\mu\colon D \to X$ *v súčine priestorov* $X = \Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ *konverguje práve vtedy, keď pre každé* $\alpha \in I$ *konverguje sieť* $\pi_\alpha \circ \mu$. *Dokážte.*

Veta 5.9 (Tichonovova). *Súčin ľubovoľného systému kompaktných priestorov* X_α, $\alpha \in I$ *je kompaktný priestor.*

Dôkaz: Nech $X = \Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ a $\mu\colon D \to X$ je univerzálna sieť. Potom $\pi_\alpha \circ \mu$ je univerzálna sieť v každom priestore X_α, Takže konverguje ku prvku $x_\alpha \in X_\alpha$. To znamená, že sieť μ konverguje k bodu $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$. To znamená, že X je kompaktný. □

Cvičenie 5.3. *Suma konečného systému kompaktných priestorov* X_α, $\alpha \in I$ *je kompaktný priestor. Dokážte!*

Cvičenie 5.4. *Nájdite príklad nekonečného systému kompaktných priestorov, ktorých suma dá nekompaktný priestor.*

Cvičenie 5.5. *Podpriestor euklidovského priestoru* $\mathbb{R}^n$ *je kompaktný práve vtedy, keď je uzavretý a ohraničený.*

6. Súvislé priestory

Definícia 6.1 (Súvislosť. Lineárna súvislosť). *Topologický priestor sa nazýva* súvislý, *ak nie je zjednotením dvoch neprázdnych disjunktných otvorených podmnožín. Priestor* X *sa nazýva* lineárne súvislý, *ak pre ľubovoľné body* $x, y \in X$ *existuje spojité zobrazenie* $f\colon [0,1] \to X$ *také, že* $f(0) = x$ *a* $f(1) = y$.

Príklad: Diskrétny priestor s aspoň dvoma bodmi nie je súvislý. Zjednotenie disjunktných otvorených intervalov $\mathbb{R}$ je nesúvislé.

Veta 6.1 (O obraze súvislého priestoru). *Nech X je súvislý, $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom $f(X)$ je súvislý podpriestor Y.*

Dôkaz: Nech $f(X)$ nie je súvislý, potom existujú dve otvorené disjunktné množiny $U_1, U_2 \subseteq Y$ také, že $f(X) \subseteq U_1 \cup U_2$. To ale znamená, že $X \subseteq f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$, pričom $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$, čo je spor.

$\square$

Cvičenie 6.1. *Ukážte, že v súvislom priestore X sú $\emptyset$ a X jediné jeho podmnožiny, ktoré sú aj otvorené aj uzavreté.*

Cvičenie 6.2. *Ukážte, že spojité zobrazenie súvislého priestoru X do diskrétneho priestoru D je konštantné.*

Veta 6.2. *Ak $\{Y_i\}_{i\in I}$ je systém súvislých množín v priestore X, pričom každé dve majú neprázdny prienik. Potom $\cup_{i\in I} Y_i$ je súvislý.*

Dôkaz: Nech $Y = \cup_{i\in I} Y_i$ nie je súvislý, potom existujú dve otvorené množiny U, V, $U \cap V = \emptyset$, $Y \subseteq U \cup V$. To znamená, že buď sú všetky Y_i podmnožinou jednej množiny (napr. U) alebo je nejaká Y_i rozdelená v oboch množinách. Oba tieto závery vedú k sporu s predpokladmi. $\square$

Veta 6.3. *Priestor, ktorý má hustý súvislý podpriestor, je tiež súvislý.*

Dôkaz: Ide o jednoduché cvičenie. $\square$

Veta 6.4. *Ak sa v priestore X pre každé dva body nachádza súvislý podpriestor, ktorý ich obsahuje, tak aj X je súvislý.*

Dôkaz: Zoberme pevný bod $x_0 \in X$ a zoberme pre ľubovoľný bod $x \in X$ podpriestor Y_x taký, že je súvislý a obsahuje oba body. Potom systém $\{c_x\}_{x\in X-x_0}$ spĺňa predpoklady vety 6.2. Teda X je súvislý. $\square$

Definícia 6.2 (Komponent súvislosti). *Maximálna (v zmysle inklúzie množín) súvislá otvorená podmnožina priestoru X sa nazýva* komponentom súvislosti *priestoru X.*

Cvičenie 6.3. *Ukážte, že $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ je súvislý.[Návod: Postupujte sporom.]*

Veta 6.5. *Každý lineárne súvislý priestor je aj súvislý.*

Dôkaz: Sporom, keby bol nesúvislý, zoberieme body z dvoch rôznych komponentov súvislosti $x \in U_1, y \in U_2$. Potom $0 \in f^{-1}(U_1)$ a $1 \in f^{-1}(U_2)$ sú dve otvorené disjunktné množiny pokrývajúce $[0,1]$, čo nie je možné, pretože $[0,1]$ je súvislý. $\square$

Príklad:[Súvislý priestor, ktorý nie je lineárne súvislý] Priestor $X = [0,0]^\top \cup \Gamma(x \mapsto \sin\frac{1}{x}) \subseteq \mathbb{R}^2$ je súvislý, ale nie je lineárne súvislý.

Veta 6.6 (Súčin súvislých priestorov). *Súčin $\Pi_{s\in S} X_s$, $s \in S$ pre $X_s \neq \emptyset$ je súvislý práve vtedy, keď sú všetky X_s súvislé.*

Dôkaz: Ak je $X = \Pi_{s\in S} X_s$ súvislý, tak sú aj X_s, lebo π_s sú spojité zobrazenia.

V konečnom prípade priestorov $X_1, \dots X_n$ sa to pre súčin ľahko ukáže matematickou indukciou z faktu, že body $(x_1, \dots, x_n)$ a $(y_1, \dots, y_n)$ možno pokryť súvislým podpriestorom $X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times \{y_n\} \cup X_1 \times \dots \times \{x_{n-1}\} \times X_n$.

Nech $a = \{a_s\} \in X$ je pevne vybraný bod. Nech $\mathcal{T}$ je systém konečných podmnožín množiny S. Potom pre pre $T \in \mathcal{T}$ máme množinu $Q_T = \Pi_{s\in S} A_s$, kde $A_s = \{a_s\}$ pre $s \notin T$ a inak $A_s = X_s$ pre $s \in T$. Je zrejmé, že $a \in \cap_{T\in\mathcal{T}} Q_T$ a že každé Q_T je súvislý priestor. Takže $Q = \cup_{T\in\mathcal{T}} Q_T$ je súvislý. Naviac $Q \subseteq X$ je hustá. Takže aj X je súvislý.

□

Príklad: $\mathbb{R}^d$, $[a, b]^d$ sú súvislé priestory pre ľubovoľné kardinálne číslo d.

7. Lokálne euklidovské priestory

Definícia 7.1 (Lokálne definované zobrazenie). *Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je jeho otvorené pokrytie. Nech $\mathcal{F} = \{f_S\colon S \to Y : S \in \mathcal{S}\}$ je systém zobrazení takých, že $f_{S_1}|_{S_1\cap S_2} = f_{S_2}|_{S_1\cap S_2}$ pre ľubovoľné $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$. Hovoríme, že zobrazenia sú* koordinované. *Potom zobrazenie $f\colon X \to Y$ dané*

$$f(x) = f_S(x), \quad x \in S \tag{5}$$

nazývame zlepením koordinovaného systému zobrazení $\mathcal{F}$. *Označujeme to $\nabla_{S\in\mathcal{S}} f_S$.*

Veta 7.1 (Spojitosť koordinovaného zobrazenia). *Nech $\{U_s\}_{s\in S}$ je otvorené pokrytie X a $\{f_s\}_{s\in S}$ je koordinovaný systém spojitých zobrazení na ňom. Potom zlepenie tohoto systému zobrazení je spojité zobrazenie.*

Dôkaz: Nech $U \subseteq Y$ je otvorená, potom $f^{-1}(U) = \cup_{s\in S} f_s^{-1}(U)$ je otvorená. □

Cvičenie 7.1. *Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je spojité vtedy a len vtedy, ak každý bod $x \in X$ má okolie U_x, na ktorom je toto zobrazenie spojité. Dokážte!*

Cvičenie 7.2. *Nech $\{F_s\}_{s\in S}$ je lokálne konečné uzavreté pokrytie X (každý bod má okolie, ktoré má prienik len s konečným počtom množín z pokrytia) a $\{f_s\}_{s\in S}$ je koordinovaný systém spojitých zobrazení na ňom. Potom zlepenie tohoto systému zobrazení je spojité.*

Cvičenie 7.3. *Nech X je topologický priestor, $\{U_s\}_{s\in S}$ je pokrytie X a $\{f_s\}_{s\in S}$ je koordinovaný systém spojitých zobrazení na ňom taký, že $\nabla_{s\in S} f_s$ je spojitý systém. Ak sú všetky zobrazenia otvorené (uzavreté* *a systém* $\{f_s(U_s)\}_{s\in S}$ *lokálne konečný), tak aj zlepené zobrazenie je otvorené(uzavreté).*

DEFINÍCIA 7.2 (Varieta). T_2*-priestor* X *spĺňajúci druhú axiómu spočítateľnosti, kde pre ľubovoľný bod* $x \in X$ *existuje okolie* $U_x \subseteq X$ *homeomorfné s* $\mathbb{R}^d$ *nazývame* euklidovskou[9] varietou. *Homeomorfizmus* $\phi_x \colon U_x \to \mathbb{R}^d$, *kde* U_x *je okolie bodu* x *nazývame* súradnicovým zobrazením *tohto okolia. Zobrazenie* $\phi_{xy} \colon \phi_x(U_x \cap U_y) \to \phi_y(U_x \cap U_y)$ *dané* $\phi_{xy} = \phi_y \circ \phi_x^{-1}$ *nazývame* zmenou súradníc

DEFINÍCIA 7.3 (Zobrazenie variety). *Nech* X *je euklidovská varieta a* $\mathcal{U} = \{U_x\}$ *je pokrytie* X *otvorenými okoliami homeomorfnými s* $\mathbb{R}^d$. *Nech* $\mathcal{F}$ *je systém koordinovaných zobrazení na* $\mathcal{U}$ *do priestoru* Y. *Zlepenie tohoto systému zobrazení nazývame* zobrazením variety X do Y.

DEFINÍCIA 7.4 (Funkcionálna štruktúra priestoru). *Nech* $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor.* Funkcionálnou štruktúrou na X *je zobrazenie* $F_X \colon \mathcal{T} \to \sqcup_{U\in\mathcal{T}} C^0(U, \mathbb{R})$, *pričom*

1. *(1)* $F_X(U) \subseteq C^0(U, \mathbb{R})$ *je podalgebra všetkých reálnych spojitých funkcií na* U,
2. *(2) všetky konštantné funkcie na* U *sú z* $F_X(U)$,
3. *(3)* $V \subseteq U$, *tak pre ľubovoľné* $f \in F_X(U)$ *je* $f|_V \in F_X(V)$,
4. *(4) ak* $f \in C^0(U, \mathbb{R})$, $U = \cup_{i\in I} U_i$ *a* $f|_{U_i} \in F_X(U_i)$, *tak* $f \in F_X(U)$.

   Dvojicu (X, F_X) *nazývame* funkcionálne štrukturovaný priestor.

Príklad: Najbežnejší príklad je $X = \mathbb{R}^n$ a $F_X(U) = C^0(U, \mathbb{R})$, reálny n-rozmerný priestor so všetkými spojitými funkciami nad každou z otvorených množín. Ďalšie príklady

- $F_X(U) = C^k(U)$, $k \geq 0$, všetky C^k funkcie na U,
- $F_X(U) = C^\infty(U)$, všetky funkcie ľubovoľne diferencovateľné
- $F_X(U) = C^\omega(U)$, všetky analytické funkcie na U (t.j. v každom bode U a nejakom jeho okolí sa dajú rozvinúť do konvergentného Taylorovho radu).

POZNÁMKA 7.1. *Funkcionálne štrukturované priestory slúžia ako dôležitý odrazový mostík pre priestory vyskytujúce sa napr. v algebrickej geometrii. Teória schém je ich priamym zovšeobecnením.*

DEFINÍCIA 7.5 (Morfizmus štrukturovaných priestorov). *Pod* morfizmom dvoch štrukturovaných priestorov (X, F_X), (Y, F_Y) *rozumieme zobrazenie* $\phi \colon X \to Y$, *ktoré* $f \in F_Y(U)$ *priradí zobrazenie* $f \circ \phi \in F_X(\phi^{-1}(U))$. *Ak je takéto zobrazenie bijektívne a* ϕ^{-1} *je tiež morfizmom, tak hovoríme, že* ϕ *je* izomorfizmus štrukturovaných priestorov.

---

[9] Euklides (asi 325 p.n.l–asi 265p.n.l) – grécky matematik, ktorý vydal dielo Základy pojednávajúce o geometrii budovanej axiomaticky. Jeho spôsob budovania matematickej teórie je vzorom pre ostatné disciplíny. Časť matematiky bola ovplyvnená problémom V. postulátu o rovnobežkách, ktorá sa objasnila až objavením neeuklidovskej geometrie v 19. storočí.

Definícia 7.6 (Diferencovateľná varieta). *Hausdorffov priestor spĺňajúci druhú axiómu spočítateľnosti s funkcionálnou štruktúrou* (M^n, F), *ktorý je lokálne izomorfný s* $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$ *nazývame* n-rozmernou diferencovateľnou varietou. *Morfizmus dvoch diferencovateľných variet nazývame* diferencovateľné zobrazenie.. *Izomorfizmus dvoch diferencovateľnýh variet nazývame* difeomorfizmus.

Definícia 7.7 (Diferencovateľná varieta s hranicou). *Hausdorffov priestor spĺňajúci druhú axiómu spočítateľnosti s funkcionálnou štruktúrou* (M^n, F), *ktorý je lokálne izomorfný buď* $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$ *alebo* $(\mathbb{R}^n_{\geq}, C^\infty)$ *nazývame* n-rozmernou diferencovateľnou varietou s hranicou. *Hranicu tvoria všetky body s okolím druhého typu.*

Poznámka 7.2. *Lokálna izomorfnosť sa dá podrobnejšie vysvetliť tak, že každý* $\mathbf{x} \in M$ *má v* M *otvorené okolie* U *také, že* $(U, F_U) \cong (V, C^\infty_V)$.

Príklad: Torus $\mathbb{T}^2$, sféra $\mathbb{S}^2$, projektívna rovina $\mathbb{RP}^2$.

Cvičenie 7.4. *Nech* X^* *je priestor zložený z dvoch typov bodov –* $X^* = X_1 \cup X_2$. *Podpriestor* $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ *a* $X_2 = \{(x, \phi) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$, *kde dvojica* (x, ϕ) *zodpovedá polpriamke začínajúcej v bode* $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ *so smerovým vektorom* $(\cos\phi, \sin\phi)$. *Bázou okolí prvého typu bodov je obvyklá euklidovská dvojrozmerná topológia. Bázou bodu z množiny* X_2 *je systém okolí generovaný nasledujúcimi množinami:*

pre $(x, \phi) \in X_2$ *zoberme* ϕ_1, ϕ_2 *také, že* $0 < \phi_1 < \phi < \phi_2 < \pi$, $\epsilon > 0$ *a definujme okolie* $U(\phi_1, \phi_2, \epsilon) = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in X_1 : (\bar{x} - x)^2 + \bar{y}^2 < \epsilon^2\} \cup \{(x, \psi) \in X_2 : \phi_1 < \psi < \phi_2\}$.

Zrejme ide o podpriestor, kde každý bod X_1 *má euklidovské okolie dimenzie 2 a každý bod* X_2 *má okolie ako hraničný bod euklidovskej polroviny.*

Zoberme priestor X, *ktorý dostaneme spojením dvoch kópií takýchto priestorov pozdĺž svojich hraníc.*

Ukážte, že priestor spĺňa všetky vlastnosti definície diferencovateľnej variety okrem druhej axiómy spočítateľnosti, má hustú spočítateľnú podmnožinu, má nespočítateľnú diskrétnu podmnožinu a nie je normálny.

8. Bairove priestory

Táto časť obsahuje niektoré doplnky ku vetám z funkcionálnej analýzy.

Definícia 8.1 (Bairov[10] priestor. Bairove kategórie.). *Nech* X *je topologický priestor. množina* $A \subseteq X$ *sa nazýva* reziduálna, *ak* $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_i$, *kde* A_i *je otvorená a hustá v* X. *Priestor* X *sa nazýva* Bairov, *ak každá reziduálna množina je hustá.*

---

[10] Baire, René-Louis, (1974–1932), francúzsky matematik a súčasník Henriho Léona Lebesguea a Emila Borela. Jeho práca sa týkala najmä teórie množín a základov matematiky. Je po ňom pomenovaných niekoľko pojmov ako Bairova kcd ategória, Bairova miera, Bairova množina, Bairova funkcia.

Množina $B \subseteq X$ *sa nazýva* množina prvej Bairovej kategórie*, ak* $B = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$*, kde* C_n *je uzavretá a* $\operatorname{int} C_n = \emptyset$*. Ak množina nie je prvej Bairovej kategórie, tak hovoríme, že je* druhej Bairovej kategórie*.*

Množina sa nazýva riedka*, ak* $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(B)) = \emptyset$*.*

VETA 8.1 (Bairovskosť niektorých úplných priestorov). *Úplné pseudometrické a lokálne kompaktné priestory sú bairovské.*

Dôkaz: Je zatiaľ mimo rozsah tohoto textu. Možno ho nájsť napr. v [**11**],[**2**].

$\square$

POZNÁMKA 8.1. *Bairovský priestor je druhej Bairovej kategórie.*

KAPITOLA 2

Funkcionálna analýza

1. Lineárne normované priestory

Funkcionálna analýza sa zaoberá geometriou priestorov funkcií. Primárnym objektom sú priestory s nekonečnou dimenziou (napr. všetky reálne funkcie nad intervalom $[0,1]$), ale pre účely numerických výpočtov sa treba obmedziť na niektoré ich konečnorozmerné podpriestory (napr. priestor všetkých polynómov stupňa nanajvýš k). V týchto podpriestoroch hľadáme buď presné riešenia úloh alebo ich vhodné aproximácie. Vlastnosti vyplývajúce z konečnej resp. najmä nekonečnej dimenzie môžu niekedy odporovať intuícii. Aj preto treba postupy pri budovaní teórie dôkladne zdôvodniť.

V celom texte sa výsledky formulujú nad poľom F. Ak nie je špecifikované inak, tak $F = \mathbb{R}$ alebo $F = \mathbb{C}$.

Definícia 1.1 (Norma. Priestor s normou.). *Nech X je reálny (komplexný) vektorový priestor (nie nutne konečnorozmerný). Zobrazenie $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ s vlastnosťami*

- **pozitívna (semi)definitnosť:** $\|\vec{\mathbf{x}}\| \geq 0$ *pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{x}} \in X$ *a* $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 0$ *práve vtedy, keď* $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ *(druhá časť za spojkou „a“ pri semidefinitnosti nemusí platiť),*
- **homogénnosť:** $\|\lambda\vec{\mathbf{x}}\| = |\lambda|\|\vec{\mathbf{x}}\|$, *pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{x}} \in X$ *a* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(*$\lambda \in \mathbb{C}$*),*
- **trojuholníková nerovnosť:** $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|+\|\vec{\mathbf{y}}\|$ *pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in X$.

nazývame (polo)normou *na priestore X. Hovoríme, že X je* vektorový priestor s normou (polonormou)*, ak je na ňom definovaná norma (polonorma).*

Príklad: Reálny d-rozmerný priestor $\mathbb{R}^d$ s *euklidovskou normou* $\|\vec{\mathbf{x}}\|_2 = \sqrt{|x^1|^2 + \cdots + |x^d|^2}$, kde $\vec{\mathbf{x}} = (x^1, \ldots, x^d)$ a $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$.

Na $\mathbb{R}^d$ máme veľa noriem. Špeciálne každý výraz tvaru

$$\|\vec{\mathbf{x}}\|_p = \sqrt[p]{|x^1|^p + \cdots + |x^d|^p}, \quad p > 1 \tag{6}$$

definuje normu na $\mathbb{R}^d$. Nazývame ju *euklidovskou p-normou.* Špeciálne pre $p = 1$ sa táto norma definuje pomocou výrazu

$$\|\vec{\mathbf{x}}\|_1 = |x^1| + \cdots + |x^d| \tag{7}$$

a podobne pre $p = \infty$

$$\|\vec{\mathbf{x}}\|_\infty = \sup_i |x^i|. \tag{8}$$

Komplexný d-rozmerný priestor $\mathbb{C}^d$ s *hermitovskou normou* $\|\vec{\mathbf{z}}\|_2 = \sqrt{z^1\bar{z}^1 + \cdots + z^d\bar{z}^d}$, kde $\vec{\mathbf{z}} = (z^1, \dots, z^d)$ a $z^i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, d$, kde $\bar{z}$ je komplexne združené číslo ku z.

Príklad:[$\|\vec{\mathbf{x}}\|_p$ je norma.] Nech $p = 1$, potom je zrejmé, že $\|.\|_1$ spĺňa všetky vlastnosti normy. Pre $p > 1$ a $p = \infty$ je zrejmá pozitívna definitnosť a homogénnosť. Ukážeme, že platí aj trojuholníková nerovnosť. Dôkaz sa skladá z ukázania troch nerovností

Youngova[1] nerovnosť:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \geq 0 \tag{9}$$

Hölderova[2] nerovnosť:

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}} \quad \text{alebo} \quad \|\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}\|_1 \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|_p \|\vec{\mathbf{y}}\|_q \tag{10}$$

Minkowského[3] nerovnosť:

(11)

$$(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{d} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{alebo} \quad \|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|_p \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|_p + \|\vec{\mathbf{y}}\|_p,$$

kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Všimnite si, že v alternatívnom zápise Hölderovej nerovnosti, $\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}$ **nie je** skalárny súčin vektorov ale vektor, ktorého súradnice sú $x_i y_i$.

Najprv dokážeme Youngovu nerovnosť. Ľahko nahliadneme, že platí pre $a = 0$ alebo $b = 0$. Takisto platí rovnosť v prípade, že $a^p = b^q$, lebo $ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{p}} a^{\frac{p}{q}} = a^{p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Nech teda $a^p \neq b^q$. Potom platí $\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q$. Funkcia $\ln(x)$ je rastúca, takže $\ln a^p \neq \ln b^q$. Funkcia e^x je ostro konvexná na $\mathbb{R}$. Takže platí $e^{(1-t)x + ty} < (1-t)e^x + te^y$. Potom

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} < \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

---

[1] William Henry Young (1863–1942) – britský matematik, ktorý pracoval v teórii miery a Fourierovych radov. Nezávislo objavil ekvivalentnú formuláciu Lebesguovho integrálu dva roky po Lebesguovi. Vydal aj knižku elementárnej geometrie. K výskumu sa dostal najmä pod vplyvom svojej manželky a stretnutí s Felixom Kleinom.

[2] Otto Hölder (1859–1937) – nemecký matematik zaoberajúci sa teóriou Fourierovych radov a neskôr teóriou grúp. Je po ňom pomenovaná známa nerovnosť a veta z oblasti kompozičných radov grúp (Jordanova-Hölderova veta).

[3] Hermann Minkowski (1864–1909| – v Rusku narodený nemecký matematik so širokým záberom. Blízky spolupracovník a priateľ Hilberta. Počas svojho života publikoval práce z teórie kvadratických foriem, neeuklidovských priestorov, geometrie foriem, matematickej fyziky a teórie čísel. Je po ňom pomenovaný časopriestor, Minkowského súčet, niekoľko nerovností.

Teraz ukážeme Hölderovu nerovnosť. Ak $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ alebo $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}$, tak sa (ne)rovnosť ukáže ľahko. V opačnom prípade

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} |x_i||y_i| &= \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|}{\|\vec{\mathbf{x}}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\vec{\mathbf{y}}\|_q}\right) \|\vec{\mathbf{x}}\|_p \|\vec{\mathbf{y}}\|_q \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^p}{p\|\vec{\mathbf{x}}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|\vec{\mathbf{y}}\|_q^q}\right) \|\vec{\mathbf{x}}\|_p \|\vec{\mathbf{y}}\|_q \\
&= \left(\frac{\|\vec{\mathbf{x}}\|_p^p}{p\|\vec{\mathbf{x}}\|_p^p} + \frac{\|\vec{\mathbf{y}}\|_q^q}{q\|\vec{\mathbf{y}}\|_q^q}\right) \|\vec{\mathbf{x}}\|_p \|\vec{\mathbf{y}}\|_q = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \|\vec{\mathbf{x}}\|_p \|\vec{\mathbf{y}}\|_q = \\
&= \|\vec{\mathbf{x}}\|_p \|\vec{\mathbf{y}}\|_q.
\end{aligned}$$

Poslednou nerovnosťou je Minkowského nerovnosť. Ak $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\| = 0$, tak nerovnosť triviálne platí. Nech teda $\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\| > 0$. Potom

$$\begin{aligned}
\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|_p^p &= \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{d} (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1} \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= (\|\vec{\mathbf{x}}\|_p + \|\vec{\mathbf{y}}\|_p) \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|\vec{\mathbf{x}}\|_p + \|\vec{\mathbf{y}}\|_p) \|x_i + y_i\|_p^{p-1},
\end{aligned}$$

lebo $(p-1)q = p$ a $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$. Skrátením $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|_p^{p-1}$ dostávame výsledok.

CVIČENIE 1.1. *Dokážte Youngovu nerovnosť pomocou faktu, že* $f(t) = \frac{t^p}{p} - t + \frac{1}{q}$ *má pre* $t \geq 0$ *minimum v bode 1, kde* $p > 1$ *a* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

CVIČENIE 1.2. *Dokážte Youngovu nerovnosť pomocou geometrickej úvahy o obsahu obdĺžnika so stranami dĺžok* $a > 0$, $b > 0$. *V karteziánskej súradnicovej sústave zobrazte funkciu* $h(x) = x^{p-1}$. *Obsah útvaru ohraničený osou* x, *funkciou* $h(x)$ *a priamky* $x = 0, x = a$, *je* $\frac{a^p}{p}$. *Ako je to s obsahom útvaru ohraničeným funkciou* $h(x)$, $y = b$, $x = 0$ *a* $x = a$? *Aký je jeho vzťah ku* $\frac{b^q}{q}$? *Nakreslite si k tomu obrázok. Predpokladáme, že* $p > 1$ *a* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Príklad:[L^p- priestory] Pre tých, ktorí nemali teóriu miery je pripravený stručný prehľad výsledkov v Dodatku A. Ako dobrá prvá aproximácia postačí predstavovať si známy Riemanov[4] integrál na „pekných” funkciách. Lebesguov[5] integrál je jeho rozšírenie, ktoré funguje aj na „menej pekných” funkciách, ktoré sa líšia od pekných v zanedbateľnej množine (môže však byť prekvapivo veľká, napr. pre $S = \mathbb{R}$, to môže byť $\mathbb{Q}$).

Nech (S, μ) je merateľný priestor a f je merateľná komplexná funkcia na S a platí $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$, kde $p \geq 1$. Pre $p = \infty$ položme $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \quad \text{pre skoro všetky} \quad x \in S\}$. Potom množina všetkých takýchto funkcií tvorí vektorový priestor s operáciami definovanými po bodoch priestoru S.

Musíme teda ukázať, že $\lambda f \in L^p(S, \mu)$ pre $\lambda \in \mathbb{C}$ a $f \in L^p(S, \mu)$, čo je zrejmé. A treba aj, že pre $f, g \in L^p(S, \mu)$ aj $f + g \in L^p(S, \mu)$. Tento fakt zabezpečujú postupne Hölderova nerovnosť a Minkowského nerovnosť v potrebnej podobe pre $1 \leq p \leq \infty$. Ostatné prípady sa dajú ukázať analogicky.

Hölderovu nerovnosť stačí ukázať pre funkcie f, g také, že $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Tie funkcie, ktoré majú nenulovú normu, možno vydeliť touto normou (je to reálna konštanta). Tie, ktoré majú nulovú normu, spĺňajú túto nerovnosť automaticky.

Z Youngovej nerovnosti pre $|f(x)g(x)|$ máme po integrácii

$$\int_S |f(x)g(x)| d\mu \leq \int_S \frac{1}{p} |f(x)|^p d\mu + \int_S \frac{1}{q} |g(x)|^q d\mu \leq 1 = \|f\|_p \|q\|_q,$$

takže $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, čo je Hölderova nerovnosť.

Na dôkaz Minkowského nerovnosti použijeme Hölderovu nerovnosť pri prechode medzi druhým a tretím riadkom nasledujúcich nerovností.

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p &= \int_S |f + g|^p d\mu \leq \int_S (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu = \\
&= \int_S |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int_S |g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \\
&\leq \Big(\big(\int_S |f|^p d\mu \big)^{\frac{1}{p}} + \big(\int_S |g|^p d\mu \big)^{\frac{1}{p}} \Big) \Big(\int_S (|f + g|^{p-1})^q d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} = \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

---

[4] Bernhard Riemann (1826–1866) – nemecký matematik s významnými príspevkami k analýze a diferenciálnej geometrii. Jeho výsledky sú v mnohých oblastiach prelomové a jeho meno nesie veľa matematických pojmov ako Riemannova sféra, Riemannova plocha, Riemannov tenzor krivosti, Riemanova geometria, Riemannov integrál, Riemannova Rochova veta, Riemannova hypotéza a iné.

[5] Henri Léon Lebesgue (1875–1941) – francúzsky matematik známy najmä teóriou integrovania. Zovšeobecnil integrovanie funkcií aj pre tie, ktoré majú množinu nespojitosti s nulovou Lebesguovov mierou. Zaoberal sa aj teóriou Fourierovych radov.

Teraz stačí už len skrátiť $\|f+g\|_p^{p-1}$, ak je táto hodnota nenulová. Ak $\|f+g\|_p = 0$, tak tvrdenie platí triviálne.

Ďalej si musíme uvedomiť, že $\|\cdot\|_p$ je polonorma na $L^p(S,\mu)$, takže normu dostaneme až vtedy, keď zoberieme vektorový priestor $L^p(S,\mu)/\ker\|\cdot\|_p$. Tento priestor sa nazýva *Lebesguov p-priestor.*

CVIČENIE 1.3. *Odvoďte z predchádzajúceho výsledku Hölderovu a Minkowského nerovnosť pre* $\mathbb{R}^n$ *použitím špeciálnych funkcií pre* $S = [0,1]$ *a mieru* μ *odvodenú od euklidovskej normy.*

Príklad:[ℓ^p-priestory] Priestor

$$\ell^p(\mathbb{C}) = \{(a_i)_{i=0}^{\infty} : a_i \in \mathbb{C}, \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\} \tag{12}$$

so sčítaním postupností po členoch s rovnakým indexom a násobením skalárom po členoch je spolu s normou $\|a\|_p = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i^p)^{\frac{1}{p}}$ lineárny normovaný priestor pre $1 \le p < \infty$. Pre $p = \infty$ definujeme $\|a\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}_0} |a_i|$. Opäť ide o lineárny normovaný priestor.

CVIČENIE 1.4. *Ukážte, že* $\ell^p(\mathbb{C})$ *a aj* $\ell^p(\mathbb{R})$ *je lineárny priestor s normou uvedenou v predchádzajúcom príklade.*

DEFINÍCIA 1.2 (Skalárny súčin v reálnom vektorovom priestore). *Nech* X *je reálny vektorový priestor. Zobrazenie* $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ *s vlastnosťami*

linearita: $\langle \vec{\mathbf{x}}, \alpha\vec{\mathbf{y}} + \beta\vec{\mathbf{z}} \rangle = \alpha\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle + \beta\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}} \rangle$,
symetria: $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle$,
pozitívna definitnosť: $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle \ge 0$ *a* $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle = 0$ *práve vtedy, keď* $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$

platnými pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}} \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *nazývame* reálny skalárny súčin.

Príklad: Štandardný skalárny súčin na $\mathbb{R}^d$ je daný výrazom

$$\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = x^1y^1 + \cdots + x^dy^d. \tag{13}$$

POZNÁMKA 1.1. *Linearita platí v druhej premennej v reálnom skalárnom súčine. Ako je to v prvej premennej?*

DEFINÍCIA 1.3 (Skalárny súčin v komplexnom vektorovom priestore). *Nech* X *je komplexný vektorový priestor. Zobrazenie* $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ *s vlastnosťami*

pololinearita: $\langle \vec{\mathbf{x}}, \alpha\vec{\mathbf{y}} + \beta\vec{\mathbf{z}} \rangle = \overline{\alpha}\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle + \overline{\beta}\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}} \rangle$,
polosymetria: $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = \overline{\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle}$,
pozitívna definitnosť: $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle \ge 0$ *a* $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle = 0$ *práve vtedy, keď* $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$

platnými pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}} \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *nazývame* komplexný (hermitovský) skalárny súčin.

POZNÁMKA 1.2. *Pololinearita platí v druhej premennej komplexného skalárneho súčinu. Ako je to v prvej premennej?*

Hovoríme, že reálny skalárny súčin je bilineárny a komplexný skalárny súčin je polobilineárny.

Príklad: Štandardný skalárny súčin na $\mathbb{C}^d$ je daný výrazom

$$\langle \vec{\mathbf{z}}, \vec{\mathbf{w}} \rangle = z^1\overline{w^1} + \cdots + z^d\overline{w^d}. \tag{14}$$

CVIČENIE 1.5. *Zistite, čo dostaneme použitím vlastností reálneho (komplexného) skalárneho súčinu pre výraz* $\langle \alpha\vec{\mathbf{y}} + \beta\vec{\mathbf{z}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle$.

VETA 1.1 (Norma indukovaná skalárnym súčinom). *Nech* $\langle .,. \rangle$ *je reálny (komplexný) skalárny súčin na priestore* X. *Potom* $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle}$ *pre* $\vec{\mathbf{x}} \in X$ *je norma na* X.

Dôkaz: Pozitívna definitnosť tohoto zobrazenia vyplýva bezprostredne z pozitívnej definitnosti skalárneho súčinu.

Homogénnosť dostávame použitím semibilinearity a semisymetrie, lebo

$$\|\lambda\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \langle \lambda\vec{\mathbf{x}}, \lambda\vec{\mathbf{x}} \rangle = \lambda\langle \vec{\mathbf{x}}, \lambda\vec{\mathbf{x}} \rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle = |\lambda|^2\|\vec{\mathbf{x}}\|.$$

Analogicky v reálnom prípade.

Tretiu časť ukážeme pomocou Cauchy[6]-Schwarz[7]-Buňakovského[8] nerovnosti (CSB)

$$|\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle| \leq \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in X. \tag{15}$$

Keďže

$$0 \leq \langle \alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}}, \alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}} \rangle = |\alpha|^2\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle + 2\Re(\alpha\overline{\beta}\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle) + |\beta|^2\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle,$$

môžeme použitím $\alpha = \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$ a $\beta = -\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$ dostať

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle|^2\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle - 2\Re(\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle\overline{\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle}\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle) + |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle|^2\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = \\ &= |\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle|^2\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle - |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle|^2\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle, \end{aligned}$$

čo pre $\vec{\mathbf{y}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ dáva po skrátení výrazom $\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$ CSB nerovnosť. Pre $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}$ platí táto nerovnosť triviálne.

---

[6] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – francúzsky matematik s obrovskou výkonnosťou (takmer 800 prác) z oblasi reálnej a komplexnej analýzy, teórie svetla, matematickej fyziky a teoretickej mechaniky. Je po ňom pomenovaných veľa pojmov ako Cauchyho integrálna veta, Cauchyho-Kovalevskej veta o existencii riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc, Cauchyho-Riemanove podmienky, cauchyovská postupnosť.

[7] Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) – nemecký matematik, zaoberal sa teóriou minimálnych plôch, konformnými zobrazeniami, Riemanovým zobrazením jednoducho súvislej množiny. Schwarzova minimálna plocha ako aj Cauchyho-Schwarzova-Buňakovského nerovnosť je niekoľko pojmov, ktorými ovplyvnil viacerých významných matematikov.

[8] Viktor Jakovlevič Buňakovskij (1804-1889) – ruský matematik, vyštudoval u Cauchyho. Pracoval v oblasti teórie čísel, geometrie a aplikovanej matematiky.

OBR. 1. Rovnobežníkové pravidlo hovorí (v euklidovskom prípade) o vzťahu obsahov štvorcov nad stranami a uhlopriečkami rovnobežníka.

Počítajme teraz

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\rangle = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\Re(\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\rangle) + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \leq \\ &\underbrace{\leq}_{\text{CSB nerovnosť}} \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 = (\|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|)^2.\end{aligned}$$

Keďže oba výrazy sú nezáporné, odmocnením dostávame trojuholníkovú nerovnosť. □

DEFINÍCIA 1.4 (Norma indukovaná skalárnym súčinom). *Normu z vety 1.1 nazývame* norma indukovaná skalárnym súčinom $\langle .,. \rangle$.

VETA 1.2 (Polarizácia a rovnobežníkové pravidlo). *Nech X je lineárny priestor a $\langle .,. \rangle$ je skalárny súčin na tomto priestore. Potom pre reálny skalárny súčin platí polarizačný vzťah*

$$4\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\rangle = \|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\|^2 \tag{16}$$

a v komplexnom prípade

$$4\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\rangle = \|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\|^2 + i\|\vec{\mathbf{x}}+i\vec{\mathbf{y}}\|^2 - i\|\vec{\mathbf{x}}-i\vec{\mathbf{y}}\|^2 \tag{17}$$

a v oboch prípadoch platí rovnobežníkové pravidlo(pozri obr. 1)

$$\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\|^2 = 2\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{y}}\|^2. \tag{18}$$

Dôkaz: Priame rozpísanie podľa pravidiel skalárneho súčinu. □

Označme v ďalšom texte otvorenú guľu, uzavretú guľu a sféru s polomerom ϵ symbolmi

$$\begin{aligned} B_\epsilon(\vec{\mathbf{x}}) &= \{\vec{\mathbf{y}} \in X : \|\vec{\mathbf{y}}-\vec{\mathbf{x}}\| < \epsilon\}, \\ D_\epsilon(\vec{\mathbf{x}}) &= \{\vec{\mathbf{y}} \in X : \|\vec{\mathbf{y}}-\vec{\mathbf{x}}\| \leq \epsilon\}, \\ S_\epsilon(\vec{\mathbf{x}}) &= \{\vec{\mathbf{y}} \in X : \|\vec{\mathbf{y}}-\vec{\mathbf{x}}\| = \epsilon\}. \end{aligned}$$

VETA 1.3 (Metrizácia vektorového priestoru s normou. Zúplnenie.). *Každý vektorový priestor s normou je aj metrický priestor s metrikou $d(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\|$. Každý vektorový priestor X s normou sa dá zúplniť na $\tilde{X}$, pričom X je hustý v $\tilde{X}$.*

Dôkaz: Je zrejmé, že d je metrika. Každý metrický priestor X vieme zúplniť na $\tilde{X}$ tak, aby $X \subseteq \tilde{X}$ bol v tomto priestore hustý a na ňom definujeme normu pomocou $\|\vec{\mathbf{x}}\| = d(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{0}})$. Homogénnosť tohoto výrazu dostaneme limitným prechodom a z hustoty X v $\tilde{X}$. Ostatné vlastnosti normy sú zrejmé. □

Veta 1.4 (Báza topológie indukovanej normou). *Nech X je normovaný vektorový priestor. Potom $\tilde{\mathcal{B}} = \{B_\epsilon(\vec{\mathbf{x}}) : \vec{\mathbf{x}} \in X, \epsilon > 0\}$ je báza topológie na X.*

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že konečný prienik takýchto množín je buď prázdny alebo obsahuje bod $\vec{\mathbf{y}}$ a s ním aj nejakú množinu z $\tilde{\mathcal{B}}$. Na korektný dôkaz potrebujeme trojuholníkovú nerovnosť.

Ak totiž $\vec{\mathbf{y}} \in B_{\epsilon_1}(\vec{\mathbf{x}}_1) \cap B_{\epsilon_2}(\vec{\mathbf{x}}_2)$, tak $B_\epsilon(\vec{\mathbf{y}}) \subset B_{\epsilon_1}(\vec{\mathbf{x}}_1) \cap B_{\epsilon_2}(\vec{\mathbf{x}}_2)$, kde $\epsilon = \min\{\epsilon_1 - \|\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{x}}_1\|, \epsilon_2 - \|\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{x}}_2\|\}$. □

Definícia 1.5 (Banachov[9] priestor). *Úplný vektorový priestor s normou $(X, \|.\|)$ nazývame* Banachov priestor*.*

Príklad:[Priestor ohraničených funkcií] Nech X je množina. Označme $B(X, F) = \{f \colon X \to F : \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\}$. Ide o ohraničené funkcie na X. Zrejme $B(X, F)$ je vektorový priestor s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Naviac ide o Banachov priestor.

Nech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská postupnosť v $B(X, F)$. Potom pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, že pre $m, n > N(\epsilon)$ platí $\|f_n - f_m\| < \epsilon$. Ukážeme, že má limitu v $B(X, F)$.

Keďže $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pre $g \in B(X, F)$, tak $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská postupnosť v F, lebo $|f_n(x) - f_m(m)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\|$, a teda má v F limitu. Označme ju $f(x)$. Máme teda $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon$ a pre $m \to \infty$ dostaneme $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon$, teda $f_n - f \in B(X, F)$, čo znamená, že $f \in B(X, F)$. Naviac $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Teda $B(X, F)$ je úplný.

Aký priestor dostaneme, keď $X = \mathbb{N}$?

Príklad:[Priestor spojitých ohraničených funkcií] Nech X je topologický priestor. Označme $CB(X, F) = \{f \colon X \to F : \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty, \quad \text{f} \quad \text{je spojitá}\}$. Norma je indukovaná z $B(X, F)$. Potom $CB(X, F)$ je uzavretý podpriestor $B(X, F)$, lebo cauchyovská postupnosť v tomto priestore má bodovú limitu a tá je vzhľadom na metriku rovnomernou limitou spojitých funkcií, čo znamená spojitosť limitnej funkcie. Teda $CB(X, F)$ je Banachov priestor.

Ak X je kompaktný, potom $CB(X, F) = C(X, F)$ (priestor spojitých funkcií na X) je Banachov. (Konvergentná postupnosť spojitých

---

[9] Stefan Banach (1892-1945), poľský matematik a univerzitný profesor v Ľvove. Výrazná postave v oblasti funkcionálnej analýzy a teórie lineárnych operátorov. Je po ňom pomenovaný Banachov priestor, Banachova veta o pevnom bode, Hahn-Banachova veta a ďalšie pojmy. Známy je aj Banachov-Tarského paradox.

OBR. 2. Cauchyovská postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nekonvergujúca v $C([a,b],\mathbb{R})$ s L^1 normou.

funkcií na kompaktnom priestore konverguje rovnomerne k svojej limite, a teda limita je spojitá funkcia. Spojitý obraz kompaktného priestoru je kompaktný, teda je uzavretý a ohraničený v F.)

Typický príklad je $C[0,1]$ so suprémovou metrikou.

Príklad:[Neúplný vektorový priestor] Nech $C([a,b],\mathbb{R})$ je priestor spojitých reálnych funkcií na $[a,b]$. Uvažujme L^1 normu. Postupnosť funkcií (pozri obr. 2)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, \frac{a+b}{2}), \\ \frac{x-\frac{1}{2}(a+b)}{\frac{a+b}{2n}} & x \in [\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2n}), \\ 1 & x \in [\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2n}, b], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Je zrejmé, že postupnosť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská, ale jej limita je nespojitá.

DEFINÍCIA 1.6 (Lineárne nezávislá množina). *Nech X je vektorový priestor nad poľom F. Množinu $B \subseteq X$ nazývame* lineárne nezávislou, *ak z rovnosti $c_1\vec{\mathbf{x}}_1 + \cdots + c_n\vec{\mathbf{x}}_n = \vec{\mathbf{0}}$ vyplýva, že $c_1 = \cdots = c_n = 0$, kde $c_1, \ldots, c_n \in F$ a $\vec{\mathbf{x}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_n \in B$ sú ľubovoľné.*

DEFINÍCIA 1.7 (Algebrická báza). *Nech X je lineárny priestor. Množinu $H \subseteq X$ nazývame* algebrickou bázou *priestoru X, ak každý prvok X možno napísať pomocou prvkov tejto bázy ako jednoznačnú konečnú lineárnu kombináciu. Často sa táto báza nazýva aj Hamelova.*[10]

VETA 1.5 (Existencia Hamelovej bázy). *Nech X je vektorový priestor nad poľom. Nech množina $B_0 \subseteq X$ je lineárne nezávislá. Potom existuje algebrická báza B priestoru X taká, že $B_0 \subseteq B$.*

Dôkaz: Nech $\mathcal{B} = \{B \subseteq X : B_0 \subseteq B, B \text{ je lineárne nezávislá}\}$. Na $\mathcal{B}$ máme čiastočné usporiadanie dané reláciou $B \preceq B'$ práve vtedy, keď $[B] \subseteq [B']$ t.j. keď báza B generuje podpriestor priestoru generovaného bázou B'. Je zrejmé, že reťazec $\{B_i\}_{i\in I}$ je zhora ohraničený priestorom generovaným množinou $\cup_{i\in I} B_i$. Podľa Zornovej lemy teda existuje maximálny prvok. Nech je to množina H.

---

[10] Georg Karl Wilhelm Hamel (1877–1954) nemecký matematik s prácami v oblasti teórie funkcií, mechaniky a základov matematiky. Prácu o báze publikoval v r. 1905.

Ukážeme sporom, že generuje celý priestor. Keby negenerovala napr. prvok $\vec{\mathbf{x}} \in X$, tak $H \cup \{\vec{\mathbf{x}}\}$ je z $\mathcal{B}$ a dostávame spor s maximalitou množiny H.

Množina H je aj lineárne nezávislá. Nech $c_1\vec{\mathbf{x}}_1 + \cdots + c_n\vec{\mathbf{x}}_n = \vec{\mathbf{0}}$. Potom existujú množiny $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ z reťazca také, že $\vec{\mathbf{x}}_i \in B_i$. Keďže sú lineárne usporiadané, nech napr. B_n obsahuje všetky $\vec{\mathbf{x}}_i$. Potom sú ale koeficienty $c_1 = \cdots = c_n = 0$. □

DEFINÍCIA 1.8 (Lineárne zobrazenie). *Nech X, Y sú lineárne priestory nad poľom F. Zobrazenie $f\colon X \to Y$ sa nazýva* lineárne, *ak spĺňa $f(\alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}}) = \alpha f(\vec{\mathbf{x}}) + \beta f(\vec{\mathbf{y}})$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in F$ a $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in X$. Množinu všetkých lineárnych zobrazení z priestoru X do priestoru Y označujeme $L_a(X, Y)$. Ak $Y = F$, tak zobrazenia nazývame* lineárne funkcionály.

POZNÁMKA 1.3. *Existencia lineárneho zobrazenia medzi priestormi X a Y je zaručená napr. vďaka existencii Hamelovej bázy. Stačí predpísať obraz každému prvku bázy a zvyšok je určený pomocou linearity tohoto zobrazenia.*

VETA 1.6 (Ekvivalentné podmienky spojitosti lineárneho zobrazenia). *Nech $f\colon X \to Y$ je lineárne. Potom sú ekvivalentné nasledujúce podmienky*

(1) f je spojité zobrazenie
(2) f je spojité zobrazenie v $\vec{\mathbf{0}}$
(3) existuje $M > 0$ také, že $\|f(\vec{\mathbf{x}})\| \le M\|\vec{\mathbf{x}}\|$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in X$.

Dôkaz: Z prvej podmienky je zrejmá druhá a z druhej prvá, pretože bázové okolie $B_\epsilon(\vec{\mathbf{y}})$ ľubovoľného bodu $\vec{\mathbf{y}} \in Y$ vieme napísať ako $\vec{\mathbf{y}} + B_\epsilon(\vec{\mathbf{0}})$. Z linearity zobrazenia f je teda $f^{-1}(B_\epsilon(\vec{\mathbf{y}})) \subseteq f^{-1}(\vec{\mathbf{y}}) + f^{-1}(B_\epsilon(\vec{\mathbf{0}}))$, čo otvorená množina v X.

Tretia podmienka zrejme dáva ľahko druhú. Ak platí druhá podmienka, tak existuje $\delta > 0$, že $B_\delta(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(\vec{\mathbf{0}}))$ pre ľubovoľné $\epsilon > 0$. Z lineárnosti máme pre $\vec{\mathbf{x}} \in X$, $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 1$, že $\|f(\vec{\mathbf{x}})\| \le \frac{\epsilon}{\delta}$. Položme $M = \frac{\epsilon}{\delta}$. Potom pre ľubovoľný nenulový vektor $\vec{\mathbf{x}} \in X$ máme $\|f(\frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|})\| \le M$, teda $\|f(\vec{\mathbf{x}})\| \le M\|\vec{\mathbf{x}}\|$. □

POZNÁMKA 1.4. *Treba si uvedomiť, že $\|f(\vec{\mathbf{x}})\|$ je norma v Y a $\|\vec{\mathbf{x}}\|$ je norma v X.*

DEFINÍCIA 1.9 (Priestor spojitých lineárnych zobrazení). *Množinu všetkých spojitých lineárnych zobrazení z priestoru X do priestoru Y označujeme $L(X, Y)$.*

CVIČENIE 1.6. *Dokážte, že $L(X, Y)$ je spolu s operáciou násobenia skalárom z poľa F vektorový priestor.*

CVIČENIE 1.7. *Ak* $f \in L(X,Y)$, $g \in L(Y,Z)$, *tak* $g \circ f \in L(X,Z)$. *Dokážte.*

DEFINÍCIA 1.10 (Topológia indukovaná normou. Ekvivalencia noriem). *Nech* X *je normovaný vektorový priestor. Potom topológiu danú bázou z vety 1.4 nazývame* topológiou na X indukovanou normou $\|.\|$. *Dve normy* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *na vektorovom priestore* X *sa nazývajú* ekvivalentné, *ak indukujú tú istú topológiu na* X.

VETA 1.7 (O ekvivalencii noriem). *Dve normy* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *na vektorovom priestore* X *sú ekvivalentné, ak existujú reálne konštanty* $c_1, c_2 > 0$ *také, že pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{x}} \in X$ *platí*

$$c_1\|\vec{\mathbf{x}}\|_1 \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|_2 \leq c_2\|\vec{\mathbf{x}}\|_1. \tag{19}$$

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, ako je definovaná báza topológie indukovanej normou. Nech $\tilde{\mathcal{T}}_i$ je báza indukovaná normou $\|.\|_i$ pre $i = 1, 2$. Ľahko vidno z nerovností (19), že pre $U_1 \in \tilde{\mathcal{T}}_1$ je $U_1 = \cup_{U\in\tilde{\mathcal{T}}_2, U\subseteq U_1} U$ a rovnako pre $U_2 \in \tilde{\mathcal{T}}_2$ je $U_2 = \cup_{U\in\tilde{\mathcal{T}}_1, U\subseteq U_2} U$. To znamená, že $\tilde{\mathcal{T}}_1$ a $\tilde{\mathcal{T}}_2$ sú bázami rovnakej topológie. □

VETA 1.8 (Ekvivalencia noriem v konečnorozmernom prípade). *Nech* X *je konečnorozmerný reálny alebo komplexný vektorový priestor. Potom sú ľubovoľné dve normy ekvivalentné.*

Dôkaz: Nech $\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$ báza priestoru $\mathbb{R}^n$ a $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{\mathbf{e}}_i$. Na $\mathbb{R}^n$ je $\|\vec{\mathbf{x}}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ normou. Ukážeme, že každá iná norma je s ňou ekvivalentná.

Nech $\|\cdot\|$ je ľubovoľná norma na $\mathbb{R}^n$. Potom zobrazenie $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ dané $\phi(\vec{\mathbf{x}}) = \|\sum_{i=1}^n x_i\vec{\mathbf{e}}_i\|$ je spojité v norme $\|\cdot\|_1$, lebo

$$\begin{aligned} \big|\|\vec{\mathbf{x}}\| - \|\vec{\mathbf{y}}\|\big| &\leq \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\|\vec{\mathbf{e}}_i\| \leq \max_i \|\vec{\mathbf{e}}_i\| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ &\leq M\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|_1. \end{aligned}$$

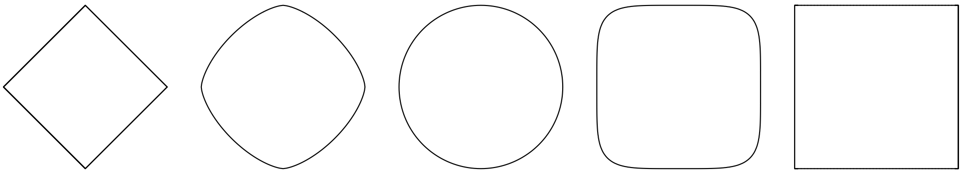
Po zúžení na jednotkovú guľovú plochu v norme $\|.\|_1$ je tiež spojité, kladné, a teda dosahuje kladné minimum M_1 a maximum M_2. Potom môžeme písať pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in X$, že

$$M_1\|\vec{\mathbf{x}}\|_1 \leq \|\vec{\mathbf{x}}\| \leq M_2\|\vec{\mathbf{x}}\|_1, \tag{20}$$

a teda normy sú ekvivalentné.

Analogicky možno dôkaz vykonať aj pre komplexný priesto $\mathbb{C}^n$. □

DÔSLEDOK 1.1 (Úplnosť konečnorozmerných priestorov s normou). *Konečnorozmerný reálny alebo komplexný vektorový priestor je úplný vzhľadom na ľubovoľnú normu.*



$p = 1$ $p = 1.5$ $p = 2$ $p = 5$ $p = \infty$

Obr. 3. Jednotkové kružnice v rôznych p-normách v $\mathbb{R}^2$.

Dôkaz: Vieme, že euklidovská norma (resp. metrika) je úplná, teda aj každá iná norma je úplná. □

Cvičenie 1.8. *Ukážte, že ekvivalentnosť všetkých noriem v* $\mathbb{R}^n$ *znamená aj ekvivalentnosť všetkých noriem v* $\mathbb{C}^k$.

Poznámka 1.5. *Jednotková guľová nadplocha v* $\mathbb{R}^n$ *sa dá pre rôzne* p*-normy ilustrovať. Prípad* $n = 2$ *možno pre niektoré* p *vidieť na obrázku*

Veta 1.9 (Kompaktnosť jednotkovej guľovej plochy). *Jednotková guľová plocha vo vektorovom priestore s normou je kompaktná vtedy a len vtedy, ak je priestor konečnorozmerný.*

Dôkaz: V konečnorozmernom priestore je jednotková guľová plocha uzavretá a ohraničená, takže je aj kompaktná.

Ak by bola kompaktná aj v nekonečnorozmernom priestore Y, môžeme ju pokryť konečným počtom gúľ $\{B_{\frac{1}{2}}(\vec{\mathbf{x}}_1), \dots, B_{\frac{1}{2}}(\vec{\mathbf{x}}_n)\}$, kde $\vec{\mathbf{x}}_i \in S_1(\vec{\mathbf{0}})$. Nech $X = [\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n]$. Je izomorfný s $\mathbb{C}^n$ (alebo $\mathbb{R}^n$). Je to teda úplný podpriestor Y, takže je uzavretý v Y. Ukážeme, že $X = Y$.

Ak totiž existuje $\vec{\mathbf{v}} \in Y - X$, tak z uzavretosti X je $d = \inf\{\|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{x}}\| : \vec{\mathbf{x}} \in X\} > 0$. Zoberme $r > d$, potom $U = D_r(\vec{\mathbf{v}}) \cap X \neq \emptyset$ (pozri obr. 4). Keďže U je uzavretá a ohraničená množina, tak je kompaktná. Naviac hodnota d sa nadobúda pre nejaký vektor $\vec{\mathbf{e}}_0 \in U$, lebo zobrazenie $\vec{\mathbf{e}} \mapsto \|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}\|$ je spojité. Teda pre nejaké $\vec{\mathbf{x}}_i$ platí

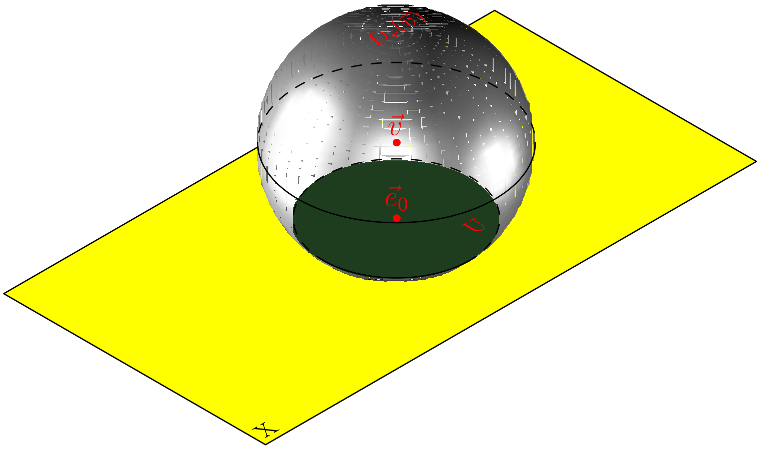
$$\left\|\frac{\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}_0}{\|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}_0\|} - \vec{\mathbf{x}}_i\right\| < \frac{1}{2}, \tag{21}$$

čo znamená, že

$$\|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}_0 - \|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}_0\|\vec{\mathbf{x}}_i\| < \frac{1}{2}\|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}_0\| = \frac{d}{2}.$$

Keďže $\vec{\mathbf{e}}_0 + \|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}_0\|\vec{\mathbf{x}}_i \in X$, máme $\|\vec{\mathbf{v}} - (\vec{\mathbf{e}}_0 + \|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{e}}_0\|\vec{\mathbf{x}}_i)\| < \frac{d}{2}$, spor s definíciou d. □

Cvičenie 1.9. *Aké normy existujú v* $\mathbb{R}$ *a v* $\mathbb{C}$*?*



Obr. 4. Jednotková guľová plocha vo vektorovom priestore s nekonečnou dimenziou nie je kompaktná.

Obr. 5. Deformácia jednotkovej gule lineárnym zobrazením a jej súvis s normou tohoto zobrazenia. V prípade konečnorozmerného priestoru je norma zobrazenia určená vektorom s maximálnou normou, ktorý je v obraze $D_1(\vec{\mathbf{0}})$.

Definícia 1.11 (Norma lineárneho zobrazenia). *Nech* $f\colon X \to Y$ *je lineárne zobrazenie. Reálne číslo*

$$\|f\| = \sup_{\|\vec{\mathbf{x}}\| \leq 1} \|f(\vec{\mathbf{x}})\| \tag{22}$$

nazývame normou lineárneho zobrazenia

Cvičenie 1.10. *Nech* f *je lineárne zobrazenie. Ukážte, že*

$$\|f\| = \sup_{\|\vec{\mathbf{x}}\| = 1} \|f(\vec{\mathbf{x}})\| \tag{23}$$

$$= \inf\{M \in \mathbb{R} : \|f(\vec{\mathbf{x}})\| \leq M\|\vec{\mathbf{x}}\| \quad \textit{pre všetky} \quad \vec{\mathbf{x}} \in X\}. \tag{24}$$

Poznámka 1.6. *Geometrická interpretácia tohoto faktu súvisí s deformáciou jednotkovej guľovej plochy lineárnym zobrazením. Norma je určená suprémom (maximom v prípade konečnorozmerného priestoru) zmien normy vektora (pozri obr. 5). Skúste si nakresliť podobné obrázky v iných normách.*

Definícia 1.12 (Duálne priestory). *Priestor* $L(X, F)$ *nazývame prvým duálom priestoru* X. *Označujeme ho* X^* *alebo* $X^{(1)}$. *Priestor* $X^{(n)} = (X^{(n-1)})^*$ *nazývame* n*-tý algebrický duál priestoru* X. *Budeme označovať* $X^{**} = X^{(2)}$ *resp.* $X^{***} = X^{(3)}$.

Veta 1.10 (Duál Banachovho priestoru). *Duálny priestor Banachovho priestoru je Banachov priestor s normou z definície 1.11 na funkcionáloch.*

Dôkaz: Treba ukázať, že ide o vektorový priestor s normou $\|f\|$, čo sa ľahko overí pomocou priameho výpočtu.

Ďalej treba overiť úplnosť tohoto priestoru. Nech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská postupnosť lineárnych funkcionálov. To znamená, že $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ pre dostatočne veľké $m, n \in \mathbb{N}$. Keďže máme $|f_n(\vec{\mathbf{x}}) - f_m(\vec{\mathbf{x}})| \leq \|f_n - f_m\|\|\vec{\mathbf{x}}\|$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in X$, postupnosť $\{f_n(\vec{\mathbf{x}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská v F. Z úplnosti F máme limitu tejto postupnosti pre každé $\vec{\mathbf{x}} \in X$. Definujme $f\colon X \to F$ tak, že $f(\vec{\mathbf{x}}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\vec{\mathbf{x}})$. Je zrejmé, že toto zobrazenie je lineárne. Ukážeme, že je spojité a že $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, t.j. je limitou danej cauchyovskej postupnosti funkcionálov.

Pre $\|\vec{\mathbf{x}}\| \leq 1$ a pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje pre $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, že pre $m, n > N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ platí $\|f_n(\vec{\mathbf{x}}) - f_m(\vec{\mathbf{x}})\| < \epsilon$. V limite pre $m \to \infty$ dostaneme, že $\|f_n(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{x}})\| \leq \epsilon$. Teda $f_n - f \in L(X, F)$ a aj $f \in L(X, F)$.

Naviac pre $n > N(\epsilon)$ je $\|f_n - f\| \leq \epsilon$, teda $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. □

Cvičenie 1.11. *Dokážte tvrdenie, že* $L(X, Y)$ *je Banachov, ak* Y *je Banachov.*

Veta 1.11 (Hahnova[11]-Banachova). *Nech* X *je vektorový priestor nad poľom* F *(*$\mathbb{R}$ *alebo* $\mathbb{C}$*) s polonormou* $\|.\|$. *Nech* $Y \subseteq X$ *je vektorový podpriestor a* $f \in Y^*$ *spĺňa nerovnosť* $|f(\vec{\mathbf{y}})| \leq \|\vec{\mathbf{y}}\|$ *pre všetky* $\vec{\mathbf{y}} \in Y$. *Potom existuje zobrazenie* $f'\colon X \to F$ *také, že* $f'|_Y = f$ *a* $|f'(\vec{\mathbf{x}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|$ *pre všetky* $\vec{\mathbf{x}} \in X$.

Dôkaz: Dôkaz sa spraví špeciálne pre pole reálnych čísel $F = \mathbb{R}$ a špeciálne pre pole komplexných čísel $F = \mathbb{C}$ prípad. Pre reálny prípad najskôr rozšírime Y o jednu dimenziu. Nech $Y' = Y \oplus [\vec{\mathbf{e}}_0]$ pre $\vec{\mathbf{e}}_0 \in X - Y$. Z linearity f platí

$$f(\vec{\mathbf{e}}_1) + f(\vec{\mathbf{e}}_2) = f(\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2) \leq \|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2\| \leq \|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_0\| + \|\vec{\mathbf{e}}_2 - \vec{\mathbf{e}}_0\|,$$

teda

$$f(\vec{\mathbf{e}}_2) - \|\vec{\mathbf{e}}_2 - \vec{\mathbf{e}}_0\| \leq \|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_0\| - f(\vec{\mathbf{e}}_1),$$

---

[11] Hans Hahn (1879–1934) – rakúsky matematik, prispel do oblasti variačného počtu, funkcionálnej analýzy, teórie peanovských kontinuí, teórie miery. Bol spoluzakladateľom viedenského krúžku logického pozitivizmu.

pričom po prejdení k suprému na ľavej strane a infímu na pravej strane nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} m &= \sup\{f(\vec{\mathbf{e}}_2) - \|\vec{\mathbf{e}}_2 - \vec{\mathbf{e}}_0\| : \vec{\mathbf{e}}_2 \in Y\} \leq \\ &\leq \inf\{\|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_0\| - f(\vec{\mathbf{e}}_1) : \vec{\mathbf{e}}_1 \in Y\} = M. \end{aligned}$$

Nech $a \in [m, M]$. Položme pre ľubovoľný prvok $\vec{\mathbf{e}} + t\vec{\mathbf{e}}_0 \in Y'$, $\vec{\mathbf{e}} \in Y$ hodnotu $f'(\vec{\mathbf{e}} + t\vec{\mathbf{e}}_0) = f(\vec{\mathbf{e}}) + ta$, $t \in \mathbb{R}$. Je zrejmé, že ide o lineárne zobrazenie a $f'|_Y = f$. Naviac platia nerovnosti

$$\begin{aligned} f'(\vec{\mathbf{e}} + t\vec{\mathbf{e}}_0) &= f(\vec{\mathbf{e}}) + ta \leq f(\vec{\mathbf{e}}) + t(\|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_0\| - f(\vec{\mathbf{e}}_1)) \leq \|\vec{\mathbf{e}} + t\vec{\mathbf{e}}_0\|, \\ f'(\vec{\mathbf{e}} - t\vec{\mathbf{e}}_0) &= f(\vec{\mathbf{e}}) - ta \leq f(\vec{\mathbf{e}}) + t(\|\vec{\mathbf{e}}_1 - \vec{\mathbf{e}}_0\| - f(\vec{\mathbf{e}}_1)) \leq \|\vec{\mathbf{e}} - t\vec{\mathbf{e}}_0\|, \end{aligned}$$

kde $t > 0$ a $\vec{\mathbf{e}}_1 = t^{-1}\vec{\mathbf{e}}$. Analogické nerovnosti možno ukázať aj pre $-f(\vec{\mathbf{e}} + t\vec{\mathbf{e}}_0)$ a $-f(\vec{\mathbf{e}} - t\vec{\mathbf{e}}_0)$ a z predpokladu platia pre $t = 0$. Máme teda pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ platnosť nerovnosti

$$|f'(\vec{\mathbf{e}}_1 + t\vec{\mathbf{e}}_0)| \leq \|\vec{\mathbf{e}}_1 + t\vec{\mathbf{e}}_0\|.$$

Nech $\mathcal{S}$ je množina všetkých rozšírení g zobrazenia f na vektorové podpriestory Z, $Y \subseteq Z \subseteq X$ t.j. také, že $g|_Y = f$, pričom $|g(\vec{\mathbf{x}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|$ pre všetky $\vec{\mathbf{x}} \in Z$. Všetky takéto zobrazenia sú čiastočne usporiadané reláciou $\leq$, v ktorej pre $g\colon G \to \mathbb{R}$ a $g'\colon G' \to \mathbb{R}$ platí $g \leq g'$ práve vtedy, keď $G \subseteq G'$ ako podpriestor a $g'|_G = g$. Zrejme každý reťazec $\{g_i\colon G_i \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ takýchto zobrazení je zhora ohraničený lineárnym funkcionálom $g\colon \cup_{i\in I} G_i \to \mathbb{R}$ definovaným predpisom $g(\vec{\mathbf{x}}) = g_i(\vec{\mathbf{x}})$ pre $\vec{\mathbf{x}} \in G_i$.. Podľa princípu maximality teda existuje v $\mathcal{S}$ maximálny prvok, t.j. zobrazenie $f'\colon X \to \mathbb{R}$. Keby totiž to zobrazenie malo menší definičný obor, tak by sme ho vedeli o nejaký vektor rozšíriť a dostali by sme spor s maximalitou f'.

Komplexný prípad dokážeme pomocou reálneho. Každé komplexne lineárne zobrazenie môžeme napísať ako $f = \Re f + i\Im f$. Z linearity vyplýva, že $f(i\vec{\mathbf{x}}) = \Re f(i\vec{\mathbf{x}}) + i\Im f(i\vec{\mathbf{x}}) = -\Im f(\vec{\mathbf{x}}) + i\Re f(\vec{\mathbf{x}})$. Teda $\Im f(\vec{\mathbf{x}}) = -\Re f(i\vec{\mathbf{x}})$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in Y$.

Označme $g = \Re f$, pričom ho chápeme ako zobrazenie z reálneho vektorového priestoru X (zúžime koeficienty z $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$). Zrejme ide o lineárne zobrazenie nad $\mathbb{R}$.

Keďže g sa dá rozšíriť na X na zobrazenie $g'\colon X \to \mathbb{R}$ tak, že $|g'(\vec{\mathbf{x}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|$ pre $\vec{\mathbf{x}} \in X$, definujme $f'\colon X \to \mathbb{C}$ pomocou predpisu $f'(\vec{\mathbf{e}}) = g'(\vec{\mathbf{e}}) - ig'(i\vec{\mathbf{e}})$. Je to komplexne lineárne zobrazenie. Zostáva ukázať, že $|f'(\vec{\mathbf{x}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|$.

Pre ľubovoľné komplexné číslo z platí $z = |z|e^{i\arg z}$. Teda $f'(\vec{\mathbf{x}}) = e^{i\theta}|f'(\vec{\mathbf{x}})|$, kde $\theta = \arg f'(\vec{\mathbf{x}})$. To znamená, že $f'(\vec{\mathbf{x}}e^{-i\theta}) \in \mathbb{R}$. Keďže

$$|f'(\vec{\mathbf{x}})| = |f'(\vec{\mathbf{x}}e^{-i\theta})| = |g'(\vec{\mathbf{x}}e^{-i\theta})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|,$$

tak máme požadované rozšírenie aj v tomto prípade. □

CVIČENIE 1.12. *Nech* X *je vektorový priestor nad* $\mathbb{C}$. *Nech* X_r *je vektorový priestor* X *nad* $\mathbb{R}$ *(t.j. koeficienty v lineárnych kombináciách smú byť len reálne, ale samotné súradnice vektorov môžu byť aj komplexné). Ukážte, že zobrazenie* $f\colon X \to \mathbb{C}$ *je komplexne lineárne práve vtedy, keď existuje jednoznačne definované zobrazenie* $g\colon X_r \to \mathbb{R}$ *také, že* $f(\vec{\mathbf{x}}) = g(\vec{\mathbf{x}}) - ig(i\vec{\mathbf{x}})$. *Ukážte, že* $g = \Re f$.

DÔSLEDOK 1.2 (Existencia rozšírenia funkcionálu s rovnakou normou). *Nech* $(X, \|.\|)$ *je vektorový priestor s normou,* $Y \subseteq X$ *je jeho vektorový podpriestor a* $f \in Y^*$. *Potom existuje* $f' \in X^*$ *také, že* $f'|_Y = f$ *a* $\|f'\| = \|f\|$.

Dôkaz:[Rozšírenie lineárneho zobrazenia so zachovaním normy] Nech $f \neq \vec{\mathbf{0}}$. Potom $\|\vec{\mathbf{x}}\|_f = \|f\|\|\vec{\mathbf{x}}\|$ je norma na X. Naviac $|f(\vec{\mathbf{x}})| \leq \|f\|\|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|_f$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in X$.

Takže v tejto norme máme podľa Hahn-Banachovej vety jeho rozšírenie $f'\colon X \to F$, pričom $|f'(\vec{\mathbf{x}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|_f$. To znamená, že $\|f'\| \leq \|f\|$. Na druhej strane f' je rozšírenie f, takže $\|f\| \leq \|f'\|$. □

POZNÁMKA 1.7. *Hanhnova-Banachova veta a jej dôsledok vraví, že každý spojitý lineárny funkcionál na podpriestore* Y *možno rozšíriť na spojitý lineárny funkcionál na celom priestore* X, *pričom norma pôvodného funkcionálu sa zachová.*

DÔSLEDOK 1.3. *Nech* X *je priestor s normou a* $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. *Potom existuje* $f \in X^*$ *taký, že* $f(\vec{\mathbf{x}}) \neq 0$.

Dôkaz: Stačí zostrojiť nenulové zobrazenie na podpriestore generovanom vektorom $\vec{\mathbf{x}}$ (napr. $f(\vec{\mathbf{x}}) = \|\vec{\mathbf{x}}\|$) a použiť Hahn-Banachovu vetu. □

POZNÁMKA 1.8. *Predchádzajúci výsledok sa dá preformulovať aj takto: Ak* $f(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ *pre všetky* $f \in X^*$, *tak* $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. *Hovoríme aj, že* X^* *oddeľuje vektory* X.

VETA 1.12 (Banachova-Schauderova[12] o otvorenom zobrazení). *Nech* X, Y *sú Banachove priestory a* $f \in L(X, Y)$ *je surjektívne zobrazenie. Potom* f *je otvorené zobrazenie.*

Dôkaz: Ukážeme, že pre nejaké $\epsilon > 0$ platí $B_\epsilon(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq f(\mathrm{cl}(B_1(\vec{\mathbf{0}})))$ (pozri obr. 6)

Keďže platí, že $X = \cup_{n\geq 1} B_{nr}(\vec{\mathbf{0}})$ pre ľubovoľné $r > 0$, tak $Y = \cup_{n\geq 1} f(B_{nr}(\vec{\mathbf{0}}))$, a teda aj $Y = \cup_{n\geq 1} \mathrm{cl}(f(B_{nr}(\vec{\mathbf{0}})))$. Keďže Y je úplný, tak aspoň jedna z množín $\mathrm{cl}(f(B_{nr}(\vec{\mathbf{0}})))$ pre $n \in \mathbb{N}_0$ má neprázdne

---

[12] Juliusz Pawel Schauder (1899–1943) – matematik žijúci v Ľvove, pracoval v oblasti funkcionálnej analýzy a topológie, pričom jeho výsledky viedli k novej metóde existencie riešenia pre zložité parciálne diferenciálne rovnice. Spolupracoval s Jeanom Lerayom. Známy je ich stupeň, Schauderova veta o pevnom bode a ďalšie. Zomrel pravdepodobne pri nemeckých protižidovských raziách.

Obr. 6. Banachova-Schauderova veta o otvorenom zobrazení.

vnútro (lebo Y je 2. Bairovej kategórie). Naviac zobrazenie $\vec{\mathbf{x}} \mapsto n\vec{\mathbf{x}}$ je homeomorfizmus priestoru X na seba, takže $\mathrm{cl}(f(B_r(\vec{\mathbf{0}})))$ obsahuje nejakú otvorenú množinu $V \subseteq Y$.

Najskôr ukážeme, že existuje $\omega > 0$, pre ktoré $B_\omega(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq \mathrm{cl}(f(B_r(\vec{\mathbf{0}}))$. Nech $\vec{\mathbf{v}} \in V$ a $B_\lambda(\vec{\mathbf{v}}) \subseteq \mathrm{cl}(f(B_r(\vec{\mathbf{0}}))$. Zo surjektívnosti máme $f(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{v}}$. Nech $\|\vec{\mathbf{u}}\| < mr$ pre nejaké $m \in \mathbb{R}$.

Zoberme $\vec{\mathbf{y}} \in B_\lambda(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq Y$. Potom existuje $\vec{\mathbf{x}} \in X$ také, že $f(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{y}}$ a platí $\|\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{y}}\| < \lambda$, teda $\|\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{v}}\| \in B_\lambda(\vec{\mathbf{v}}) \subseteq \mathrm{cl}(f(B_r(\vec{\mathbf{0}}))$. Z uzavretosti máme teda postupnosť prvkov $\vec{\mathbf{v}}_i \in f(B_r(\vec{\mathbf{0}}))$ takú, že $\lim_{i\to\infty} \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{v}}$. Nech $\vec{\mathbf{u}}_i \in B_r(\vec{\mathbf{0}})$ je také, že $f(\vec{\mathbf{u}}_i) = \vec{\mathbf{v}}_i$. Teda $\vec{\mathbf{y}} = \lim_{i\to\infty} \vec{\mathbf{v}}_i - \vec{\mathbf{v}} = \lim_{i\to\infty} f(\vec{\mathbf{u}}_i) - f(\vec{\mathbf{u}}) = \lim_{i\to\infty} f(\vec{\mathbf{u}}_i - \vec{\mathbf{u}})$. Keďže $\|\vec{\mathbf{u}}_i - \vec{\mathbf{u}}\| \le \|\vec{\mathbf{u}}_i\| + \|\vec{\mathbf{u}}\| < r(1+m)$. Teda $f(\vec{\mathbf{u}}_n - \vec{\mathbf{u}}) \in f(B_{(1+m)r}(\vec{\mathbf{0}}))$, čo znamená, že $B_\lambda(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq \mathrm{cl}(f(B_{(1+m)r}(\vec{\mathbf{0}})))$. Teda pre $\omega = \frac{\lambda}{1+m}$ máme požadovaný výsledok.

Teraz ukážeme, že $\vec{\mathbf{0}} \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(B_r(\vec{\mathbf{0}})))$ pre nejaké $r > 0$.

Nech $\epsilon(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Teda $\sum_{n\ge 0} \epsilon(n) = 1$. Z predchádzjúceho výsledku máme, že pre každé $\epsilon(n) > 0$ máme $\eta(n) > 0$ také, že $B_{\eta(n)}(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq \mathrm{cl}(f(B_{\epsilon(n)}(\vec{\mathbf{0}})))$. Zrejme $\eta(n) \to 0$ (keďže f je spojité a $\epsilon(n)$ konverguje k 0). Ukážeme, že $B_{\eta(0)}(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq f(\mathrm{cl}(B_1(\vec{\mathbf{0}})))$.

Pre $\vec{\mathbf{v}} \in B_{\eta(0)}(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq \mathrm{cl}(f(B_{\epsilon(0)}(\vec{\mathbf{0}})))$ existuje $\vec{\mathbf{e}}_0 \in B_{\epsilon(0)}(\vec{\mathbf{0}})$ také, že $\|\vec{\mathbf{v}} - f(\vec{\mathbf{e}}_0)\| < \eta(1)$, takže $\vec{\mathbf{v}} - f(\vec{\mathbf{e}}_0) \in \mathrm{cl}(f(B_{\epsilon(1)}(\vec{\mathbf{0}})))$. Teda existuje $\vec{\mathbf{e}}_1 \in B_{\epsilon(1)}(\vec{\mathbf{0}})$ také, že $\|\vec{\mathbf{v}} - f(\vec{\mathbf{e}}_0) - f(\vec{\mathbf{e}}_1)\| < \eta(2)$, atď. Pomocou matematickej indukcie zostrojíme postupnosť $\vec{\mathbf{e}}_n \in B_{\epsilon(n)}(\vec{\mathbf{0}})$ a $\|\vec{\mathbf{v}} - -f(\vec{\mathbf{e}}_0) - \cdots - f(\vec{\mathbf{e}}_n)\| < \eta(n+1)$. Rad $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{\mathbf{e}}_n$ je konvergentný, lebo $\|\sum_{i=n+1}^{m} \vec{\mathbf{e}}_i\| \le \sum_{i=n+1}^{m} \|\vec{\mathbf{e}}_i\| \le 1$. Keďže Y je úplný, máme $\vec{\mathbf{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\mathbf{e}}_n$. Potom $f(\vec{\mathbf{e}}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\vec{\mathbf{e}}_n) = \vec{\mathbf{v}}$, pričom $\|\vec{\mathbf{e}}\| \le 1$. Takže pre $\vec{\mathbf{v}} \in B_{\eta(0)}(\vec{\mathbf{0}})$ máme $\vec{\mathbf{v}} = f(\vec{\mathbf{e}})$ a $\|\vec{\mathbf{e}}\| \le 1$. Teda $B_{\eta(0)}(\vec{\mathbf{0}}) \subseteq f(\mathrm{cl}(B_1(\vec{\mathbf{0}})))$.

Je zrejmé, že uzáveru pod zobrazením f sa môžeme zbaviť vhodnou voľbou postupnosti $\epsilon(n)$.

Ak U je otvorená v X, tak ju môžeme napísať ako zjednotenie otvorených gúľ okolo každého bodu. Obraz takejto gule obsahuje otvorenú guľu okolo príslušného bodu. Takže obraz je tiež otvorená množina. □

Dôsledok 1.4 (Banachova o lineárnom izomorfizme). *Spojitý lineárny izomorfizmus Banachových priestorov je homeomorfizmom.*

Dôkaz: Stačí ukázať, že f^{-1} je spojité, čo je priamy dôsledok vety o otvorenom zobrazení. $\square$

VETA 1.13 (O uzavretom grafe). *Nech X, Y sú Banachove priestory. Zobrazenie $f \in L(X, Y)$ je spojité práve vtedy, keď jeho graf*

$$\Gamma_f = \{(\vec{\mathbf{x}}, f(\vec{\mathbf{x}})) \in X \times Y : \vec{\mathbf{x}} \in X\} \tag{25}$$

je uzavretý podpriestor priestoru $X \times Y$.

Dôkaz: Treba ukázať, že ide o vektorový podpriestor. To sa dá priamym výpočtom. Uzavretosť vyplýva z vety 3.17, lebo X, Y sú metrické priestory, a teda T_4-priestory.

Ak Γ_f je uzavretý, tak je Banachov a projekcia π_X daná $(\vec{\mathbf{x}}, f(\vec{\mathbf{x}})) \mapsto \vec{\mathbf{x}}$ je spojitý izomorfizmus. Inverzné zobrazenie je tiež spojité podľa vety o otvorenom zobrazení. Keďže projekcia $\pi_Y : \Gamma(f) \to Y$ je tiež spojitá, tak máme $\vec{\mathbf{x}} \mapsto (\vec{\mathbf{x}}, f(\vec{\mathbf{x}})) \mapsto f(\vec{\mathbf{x}})$ spojité zobrazenie. $\square$

VETA 1.14 (Banachova-Steinhausova[13]). *Nech X je Banachov priestor a Y je vektorový priestor s normou. Nech $f_i \in L(X, Y)$, $i \in I$. Ak pre ľubovoľný $\vec{\mathbf{x}} \in X$ je $\{\|f_i(\vec{\mathbf{x}})\|\}_{i\in I}$ ohraničená v Y, tak $\{\|f_i\|\}_{i\in I}$ je ohraničená v $\mathbb{R}$.*

Dôkaz: Nech zobrazenie $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ je definované

$$\phi(\vec{\mathbf{x}}) = \sup_{i\in I} \|f_i(\vec{\mathbf{x}})\|.$$

Potom množina

$$S_n = \{\vec{\mathbf{x}} \in X\colon \phi(\vec{\mathbf{x}}) \le n\} = \cap_{i\in I}\{\vec{\mathbf{x}} \in X\colon \|f_i(\vec{\mathbf{x}})\| \le n\}$$

je uzavretá (lebo je prienikom uzavretých množín). Zrejme platí $X = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Keďže X je 2. Bairovej kategórie, tak aspoň jedna množina z S_n (nech je to napr. S_M) má neprázdne vnútro. Teda existuje $r > 0$ a $\vec{\mathbf{x}}_0 \in X$ také, že $\phi(\vec{\mathbf{x}}) \le M$ pre $\vec{\mathbf{x}} \in \mathrm{cl}(B_r(\vec{\mathbf{x}}_0))$.

Nech $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 1$. Potom $\|f_i(r\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}_0)\| \le \phi(r\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}_0) \le M$ pre ľubovoľné $i \in I$. Takže platí

$$\|f_i(\vec{\mathbf{x}})\| = \frac{1}{r}\|f_i(r\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}_0 - \vec{\mathbf{x}}_0)\| \le \frac{1}{r}\|f_i(r\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}_0)\| + \frac{1}{r}\|f_i(\vec{\mathbf{x}}_0)\| \le \frac{2M}{r}.$$

Takže $\|f_i\| \le \frac{2M}{r}$. $\square$

---

[13] Hugo Dionyzy Steinhaus (1887–1972) – matematik pochádzajúci z Galície (časť Poľska) študoval v Ľvove, Mníchove a Göttingene. Spolu so Stefanom Banachom a Ottom Nikodymom založili Krakowskú matematickú spoločnosť, neskôr pretransformovanú do Poľskej matematickej spoločnosti. Pracoval v teórii pravdepodobnosti, teórii hier, teórii trigonometrických radov. Je jedným zo spoluautorov známej Škótskej knihy problémov, písanej v kaviarni Scottish Café v Ľvove ako aj novým pokračovaním tejto tradície po skončení 2. svetovej vojny.

Dôsledok 1.5. *Ak* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ *je silno konvergentná postupnosť (t.j.* $\lim_{n\to\infty} f_n(\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}})$ *existuje pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{x}} \in X$*), tak* $f \in L(X,Y)$*.*

Dôkaz: Zobrazenie f je lineárne. Keďže $\{f_n(\vec{\mathbf{x}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentná, je ohraničená pre $\vec{\mathbf{x}} \in X$, takže podľa Banachovej-Steinhausovej vety je $\{\|f_n(\vec{\mathbf{x}})\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ zhora ohraničená nejakým $M > 0$. Teda

$$\|f(\vec{\mathbf{x}})\| = \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|\|\vec{\mathbf{x}}\| \leq M\|\vec{\mathbf{x}}\|.$$

Teda $f \in L(X,Y)$. □

2. Hilbertove priestory

Definícia 2.1 (Hilbertov[14] priestor). *Úplný vektorový priestor s normou* $(X, \|.\|)$ *nazývame* reálnym (komplexným) Hilbertovým priestorom, *ak jeho norma je indukovaná reálnym (komplexným) skalárnym súčinom na* X*.*

Poznámka 2.1. *Vďaka skalárnemu súčinu vieme povedať o Hilbertovom priestore viac. Ukáže, sa, že jeho štruktúra je vo veľa smeroch podobná na štruktúru konečnorozmerného vektorového priestoru.*

Definícia 2.2 (Kolmosť, ortogonálny doplnok). *Dva vektory lineárneho priestoru so skalárnym súčinom sa nazývajú* kolmé *alebo* ortogonálne, *ak ich skalárny súčin je* 0*. Zapisujeme to* $\vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{y}}$*.*

Hovoríme, že $\vec{\mathbf{x}} \in X$ *je* ortogonálny *na* $A \subseteq X$*, ak* $\vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{a}}$ *pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{a}} \in A$*. Hovoríme, že* $A \subseteq X$ *je* ortogonálna*, ak pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{x}} \in A$ *platí* $\vec{\mathbf{x}} \perp A - \{\vec{\mathbf{x}}\}$*. Ak v ortogonálnej množine naviac* $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 1$ *pre každé* $\vec{\mathbf{x}} \in A$*, tak hovoríme o* ortonormálnej *množine. Podmnožiny* $A, B \subseteq X$ *sa nazývajú* navzájom ortogonálne*, ak pre ľubovoľný* $\vec{\mathbf{a}} \in A$ *platí* $\vec{\mathbf{a}} \perp B$*.*

Nech $A \subseteq X$ *je neprázdna množina vektorov. Potom množinu* $A^\perp = \{\vec{\mathbf{x}} \in X : \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = 0,$ *pre všetky* $\vec{\mathbf{y}} \in A\}$ *nazývame* ortogonálny doplnok *A v X.*

Cvičenie 2.1. *Dokážte nasledujúce tvrdenia. Ak* $A \perp B$*, tak* $B \perp A$*. Ak* $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}}$*, tak* $\|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{b}}\|^2$*. Ak* $\vec{\mathbf{a}} \perp A$*, tak* $\vec{\mathbf{a}} \perp \mathrm{cl}([A])$*. Ak* $A \perp B$*, tak* $\mathrm{cl}([A]) \perp \mathrm{cl}([B])$*.*

Cvičenie 2.2. *Ak ortogonálna množina neobsahuje* $\vec{\mathbf{0}}$*, tak je lineárne nezávislá.*

---

[14] David Hilbert (1862–1943), nemecký matematik. Považuje sa za jedného z najvplyvnejších matematikov prelomu 19. a 20. storočia. Axiomatizoval geometriu, položil základy funkcionálnej analýzy a teórie invariantov. Jeho menonesú pojmy ako Hilbertova báza, Hilbertov polynóm, Hilbertov priestor, Hilbertova Nullstellensatz a mnohé ďalšie. Známy je aj jeho zoznam 23 problémov prednesenom na 2. kongrese matematikov v roku 1900 v Paríži, ktorými do veľkej miery udal tón rozvoja matematiky v 20. storočí.

Cvičenie 2.3. *Každá spočítateľná lineárne nezávislá množina sa dá nahradiť ortonormálnou, pričom obe generujú rovnaký podpriestor.*

Cvičenie 2.4. *Ak* $B \perp A$*, tak* $B \subseteq A^{\perp}$.

Cvičenie 2.5. *Ukážte, že v nekonečnorozmernom Hilbertovom priestore možno z postupnosti* $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$*, kde* $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *je ortonormálna báza nejakého podpriestoru, možno vybrať nekonvergentnú podpostupnosť. Uvedomte si, že v konečnorozmernom priestore to nejde.*

Cvičenie 2.6. *Ukážte, že* $\ell^2(F)$ *je separabilný. [Návod: Uvážte všetky postupnosti s nanajvýš konečným počtom nenulových racionálnych členov.]*

Veta 2.1. *Nech* X *je Hilbertov priestor. Zobrazenia* $\phi_{\vec{\mathbf{y}}}, \psi_{\vec{\mathbf{y}}}\colon X \to F$ *dané predpismi* $\phi_{\vec{\mathbf{y}}}(\vec{\mathbf{x}}) = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$ *a* $\psi_{\vec{\mathbf{y}}}(\vec{\mathbf{x}}) = \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} \rangle$ *sú spojité na* X.

Dôkaz: Stačí použiť CSB nerovnosť. □

Veta 2.2 (Ekvivalentná podmienka pre Hilbertov priestor). *Banachov priestor* X *s normou* $\|\cdot\|$ *je Hilbertov práve vtedy, keď v ňom platí rovnobežníková identita* (18).

Dôkaz: Zrejme stačí ukázať, že z platnosti tejto identity vieme definovať skalárny súčin, ktorý nám indukuje danú normu.

Pomocou polarizačnej rovnosti (16) v reálnom Banachovom priestore alebo (17) v komplexnom definujme zobrazenie $\phi(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})\colon X \times X \to F$. Ukážeme, že spĺňa všetky vlastnosti skalárneho súčinu.

Zrejme $\phi(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) \geq 0$ pre $\vec{\mathbf{x}} \in X$ a je to nulový výraz len pre nulový vektor. Rovnako ľahko sa ukáže (polo)symetria.

Podobne pre reálny prípad máme použitím rovnobežníkovej identity (pozri obr. 7)

$$\begin{aligned}
4\phi(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}) &= \|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{z}}\|^2 = \\
&= 2\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{z}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{z}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{z}}\|^2 = \\
&= 2\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{z}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{z}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{y}}\|^2 = \\
&= \|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{z}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{z}}\|^2 = \\
&= \|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{z}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{z}}\|^2 = \\
&= 4\phi(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) + 4\phi(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}}).
\end{aligned}$$

Takže výraz je aditívny v druhej premennej. Analogicky by sme postupovali pri aditívnosti v prvej premennnej.

Definujme ďalej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že $f(\alpha) = \phi(\alpha\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$. Keďže pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí $f(\alpha + \beta) = \phi((\alpha + \beta)\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \phi(\alpha\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) + \phi(\beta\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = f(\alpha) + f(\beta)$, je funkcia f riešením Cauchyho funkcionálnej rovnice $F(x+y) = F(x)+F(y)$. Naviac je to spojité riešenie tejto rovnice. Vie sa, že to je práve vtedy, keď $f(\alpha) = \alpha f(1)$. Takže $\phi(\alpha\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \alpha\phi(1\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$. Podrobnejšiu informáciu o Cauchyho funkcionálnej rovnici možno nájsť napr. v [**11**, str. 286/197].

Obr. 7. Rovnobežníky v rovnobežnostene určenom vektormi $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$,, $\vec{\mathbf{z}}$, pomocou ktorých sa ukazuje aditívnosť.

Podobne postupujeme aj s vektorovými priestormi nad poľom komplexných čísel. □

Cvičenie 2.7. *Ukážte, že* $\mathbb{R}^n$ *nie je Hilbertov priestor s normou* $\|\cdot\|_1$.

Príklad:[Niektoré Hilbertove priestory.] Všetky konečnorozmerné euklidovské priestory (t.j. s normou $\|.\|_2$) sú Hilbertove. Priestor $\ell^2(F)$ je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle a, b\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\bar{b}_i$, kde $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ a $b = \{b_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Poznámka 2.2. *Všimnite si, že dva topologicky ekvivalentné Banachove priestory (aj konečnorozmerné) môžu byť rozlíšené vlastnosťou, či norma pochádza zo skalárneho súčinu alebo nie.*

Veta 2.3 (Vlastnosti ortogonálneho doplnku). *Nech* X *je Hilbertov priestor. Pre ľubovoľnú* $A \subseteq X$ *je* $A^{\perp}$ *uzavretý lineárny podpriestor a* $A \subseteq A^{\perp\perp}$. *Pre* $A \subseteq B \subseteq X$ *je* $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. *Naviac* $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

Dôkaz: Keďže $\phi_{\vec{\mathbf{a}}}(\vec{\mathbf{x}}) = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}, \rangle$ je spojité, tak $A^{\perp} = \cap_{\vec{\mathbf{a}} \in A} \phi_{\vec{\mathbf{a}}}^{-1}(0)$. Takže $A^{\perp}$ je prienikom uzavretých množín, a teda je uzavretá. Fakt, že $A^{\perp}$ je vektorový podpriestor X sa dokáže priamo.

Vlastnosť $A \subseteq B$ dáva zrejme $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, keďže všetky vektory kolmé na B sú kolmé špeciálne aj na vektory v A.

Poslednú vlastnosť z tvrdenia dostaneme kombináciou predchádzajúcich. Keďže $A^{\perp} \subseteq (A^{\perp})^{\perp\perp}$ a $A \subseteq A^{\perp\perp}$ dáva pomocou druhej vlastnosti z tejto vety, že $(A^{\perp\perp})^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. Takže skombinovaním tých to dvoch inklúzií platí rovnosť. □

Cvičenie 2.8. *Ukážte, že v Hilbertovom priestore* X *pre ľubovoľnú množinu* $A \subset X$ *platí* $(A^{\perp})^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^{\perp}$.

Veta 2.4 (O existencii a jednoznačnosti najbližšieho prvku). *Nech* X *je Hilbertov priestor.*

1. *Potom pre vektorový podpriestor* $Y \subseteq X$ *a ľubovoľnú dvojicu* $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{b}}) \in X \times Y$ *máme* $\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\| = \inf\{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}\| : \vec{\mathbf{a}} \in Y\}$ *práve vtedy, keď* $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}} \in Y^{\perp}$.

(2) Ak $A \subseteq X$ *je neprázdna, konvexná podmnožina* X*, tak pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{x}} \in X$ *existuje nanajvýš jedno* $\vec{\mathbf{b}} \in A$ *také, že* $\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\| = \inf\{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}\| : \vec{\mathbf{a}} \in A\}$.

(3) Ak A *je naviac úplná, tak existuje prvok* $\vec{\mathbf{b}} \in A$ *z predchádzajúcej časti.*

(4) Ak $Y \subseteq X$ *je úplný vektorový podpriestor* X*, tak* $Y^{\perp\perp} = Y$.

Dôkaz: Počítajme $\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{a}} \in Y$, teda presnejšie jeho reálnu časť. Pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ máme

$$\begin{aligned}
\Re\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle &= \frac{1}{2\lambda}(\lambda\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle + \overline{\lambda\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle}) = \\
&= \frac{1}{2\lambda}(\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \lambda\vec{\mathbf{a}} \rangle + \overline{\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \lambda\vec{\mathbf{a}} \rangle}) = \\
&= \frac{1}{2\lambda}(\langle \vec{\mathbf{x}} - (\vec{\mathbf{b}} - \lambda\vec{\mathbf{a}}), \vec{\mathbf{x}} - (\vec{\mathbf{b}} - \lambda\vec{\mathbf{a}}) \rangle - \\
&\quad -\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}} \rangle - \lambda^2\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle) = \\
&= \frac{1}{2\lambda}(\|\vec{\mathbf{x}} - (\vec{\mathbf{b}} - \lambda\vec{\mathbf{a}})\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\|^2 - \lambda^2\|\vec{\mathbf{a}}\|^2).
\end{aligned}$$

Takže pre $\lambda > 0$ máme

$$\Re\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \geq \frac{1}{2\lambda}(\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\| - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\| - \lambda^2\|\vec{\mathbf{a}}\|^2) = -\frac{\lambda}{2}\|\vec{\mathbf{a}}\|^2$$

a pre $\lambda < 0$ analogicky $\Re\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \leq -\frac{\lambda}{2}\|\vec{\mathbf{a}}\|^2$. To znamená, že $\Re\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle = 0$. Ak X je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, tak sme už hotoví.

Ak X je priestor nad $\mathbb{C}$, tak ešte treba zistiť hodnotu $\Im\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle$. Platí ale $\Im\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = \Re\langle \vec{\mathbf{x}}, i\vec{\mathbf{y}} \rangle$. Takže v našom prípade je aj imaginárna zložka nulová, lebo $\Re\langle \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}, i\vec{\mathbf{a}} \rangle = 0$.

Obrátene, ak $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}} \in Y^{\perp}$, tak $\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\| \geq \inf\{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}\| : \vec{\mathbf{a}} \in Y\}$ a $\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}\|^2$, čo dáva, že $\vec{\mathbf{b}}$ realizuje vzdialenosť $\vec{\mathbf{x}}$ ku Y, a teda platí rovnosť.

Jednoznačnosť najbližšieho bodu ku konvexnej množine A sa ukáže ľahko. Ak $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in A$ sú dva také body, že $\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}\| = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\|$, tak máme

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\|^2 = \\
&= 2\|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}\| - \|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \\
&= 4\|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) - \vec{\mathbf{x}}\|^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

pričom sme použili rovnobežníkové pravidlo, fakt, že $\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \in A$ a predpoklad, že $\vec{\mathbf{a}} \in A$ je najbližšie ku $\vec{\mathbf{x}}$. Teda $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Existenciu najbližšieho bodu dokážeme pomocou postupnosti $\{\vec{\mathbf{a}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergujúcej k tomuto prvku. Nech $\vec{\mathbf{a}}_n \in A$ je taký prvok, že $\|\vec{\mathbf{a}}_n -$

$\vec{\mathbf{x}}\| \le d+\frac{1}{n}$, kde $d=\inf\{\|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{x}}\| : \vec{\mathbf{a}}\in A\}$. Táto postupnosť je cauchyovská, lebo

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathbf{a}}_n-\vec{\mathbf{a}}_m\|^2 &= 2\|\vec{\mathbf{a}}_n-\vec{\mathbf{x}}\|^2+2\|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}_m\|^2-\|\vec{\mathbf{a}}_n+\vec{\mathbf{a}}_m-2\vec{\mathbf{x}}\|^2\le\\ &\le 2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2-4\|\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}}_n+\vec{\mathbf{a}}_m)-\vec{\mathbf{x}}\|^2\le\\ &\le 4d^2+4d\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)-4d^2.\end{aligned}$$

Teda existuje $\lim_{n\to\infty}\vec{\mathbf{a}}_n=\vec{\mathbf{a}}^*\in A$ a $\|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}^*\|=d$, lebo norma je spojitá vďaka trojuholníkovej nerovnosti.

Na dôkaz poslednej časti stačí použiť predchádzajúce výsledky, keďže vektorový priestor Y je konvexná množina. Platí $Y\subseteq Y^{\perp\perp}$. Ak $\vec{\mathbf{b}}\in Y^{\perp\perp}$, tak podľa tretej a prvej časti vety existuje $\vec{\mathbf{b}}_Y\in Y$ také, že $\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{b}}_Y\in Y^{\perp}$. Keďže $\vec{\mathbf{b}}_Y\in Y\subseteq Y^{\perp\perp}$ a $\vec{\mathbf{b}}\in Y^{\perp\perp}$, tak $\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{b}}_Y\in Y^{\perp\perp}$. Teda $\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{b}}_Y\perp\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{b}}_Y$, čo znamená, že $\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}_Y$. □

POZNÁMKA 2.3. *Predchádajúca veta vraví, že pre úplný vektorový podpriestor $Y\subseteq X$ Hilbertovho priestoru existuje dobre definovaná ortogonálna projekcia $\pi_Y(\vec{\mathbf{x}})=\vec{\mathbf{b}}$ pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}}\in X$. Označme $d(\vec{\mathbf{x}},Y)=\|\vec{\mathbf{x}}-\pi_Y(\vec{\mathbf{x}})\|$.*

CVIČENIE 2.9 (O sčítavaní absolútnych hodnôt nekonečnej množiny čísel). *Nech A je množina a $\mathcal{S}$ je systém jej konečných neprázdnych podmnožín. Nech $x_a\in F$ pre ľubovoľné $a\in A$, kde $F=\mathbb{R}$ alebo $F=\mathbb{C}$. Ukážte, že $\mathcal{S}$ je usmernená množina vzhľadom na inklúziu, a naviac $\sum_{a\in A}|x_a|$ existuje vtedy a len vtedy, keď $\sum_{s\in S}|x_s|\le M$ pre ľubovoľné $S\in\mathcal{S}$. Ak $L=\sup_{S\in\mathcal{S}}\sum_{s\in S}|x_s|$, tak $L=\sum_{a\in A}|x_a|$. Ukážte, že množina tých $a\in A$ s vlastnosťou $x_a\neq 0$, je spočítateľne veľká.*

VETA 2.5 (O najbližšom prvku vyjadrenom v ortonormálnej množine.). *Nech X je Hilbertov priestor a $A\subseteq X$ je neprázdna, konečná a ortonormálna. Potom pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}}\in X$ je $d(\vec{\mathbf{x}},[A])=\|\vec{\mathbf{x}}-\sum_{\vec{\mathbf{a}}\in A}\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}\rangle\vec{\mathbf{a}}\|=\sqrt{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2-\sum_{\vec{\mathbf{a}}\in A}|\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}\rangle|^2}$.*

Dôkaz: Nech $A=\{\vec{\mathbf{a}}_1,\dots,\vec{\mathbf{a}}_n\}$. Potom pre $\vec{\mathbf{a}}\in[A]$ máme $\vec{\mathbf{a}}=\alpha_1\vec{\mathbf{a}}_1+\dots+\alpha_n\vec{\mathbf{a}}_n$ pre nejaké $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$. Takže $\langle\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{x}}\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle\vec{\mathbf{a}}_i,\vec{\mathbf{x}}\rangle$. Ďalej

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}\|^2 &= \langle\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{a}}\rangle=\langle\vec{\mathbf{x}}-\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{\mathbf{a}}_i,\vec{\mathbf{x}}-\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{\mathbf{a}}_i\rangle=\\ &= \langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}\rangle-\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle\vec{\mathbf{a}}_i,\vec{\mathbf{x}}\rangle-\sum_{i=1}^n\bar{\alpha}_i\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}_i\rangle+\sum_{i=1}^n\alpha_i\bar{\alpha}_i=\\ &= \|\vec{\mathbf{x}}\|^2-\sum_{i=1}^n|\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}|^2+\sum_{i=1}^n(\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}_i\rangle-\alpha_i)(\overline{\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}_i\rangle}-\bar{\alpha}_i).\end{aligned}$$

Tento výraz je minimálny práve vtedy, keď $\alpha_i = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}}_i \rangle$. □

Dôsledok 2.1 (Besselova[15] nerovnosť). *Ak* $A \subseteq X$ *je neprázdna ortonormálna podmnožina a* $\vec{\mathbf{x}} \in X$*, tak existuje súčet* $\sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle|^2$ *a naviac platí, že* $\sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle|^2 \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|^2$*. Zrejme* $A \cap (X - \{\vec{\mathbf{x}}\}^{\perp})$ *je spočítateľná.*

Dôkaz: Pre každú konečnú podmnožinu A platí podľa predchádzajúcej vety nerovnosť z tvrdenia. Konečné podmnožiny množiny A tvoria usmernenú množinu vzhľadom na inklúziu. Potom existuje $\lim_{B \subseteq A} \sum_{\vec{\mathbf{b}} \in B} |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{b}} \rangle|^2$ a zrejme platí nerovnosť z tvrdenia aj pre limitu.

Naviac, pre $n \in \mathbb{N}$ je množina $\vec{\mathbf{a}} \in A$ takých, že $|\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle| > \frac{1}{n}$ konečná, takže $A \cap \{X - \{\vec{\mathbf{x}}\}^{\top}\}$ je spočítateľná. □

Definícia 2.3 (Rozvoj podľa ortonormálnej množiny). *Nech A je ortonormálna množina v Hilbertovom priestore X nad F. Hovoríme, že* $\vec{\mathbf{x}}$ *má* rozvoj podľa A*, ak* $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} \alpha_{\vec{\mathbf{a}}} \vec{\mathbf{a}}$ *pre nejaké* $\alpha_{\vec{\mathbf{a}}} \in F$.

Veta 2.6 (O koeficientoch rozvoja podľa ortonormálnej množiny). *Nech A je je ortonormálna podmnožina X a* $\vec{\mathbf{x}} \in X$ *je Hilbertov priestor. Nech* $\vec{\mathbf{x}}$ *má rozvoj podľa A. Potom* $\alpha_{\vec{\mathbf{a}}} = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle$ *pre ľubovoľné* $\vec{\mathbf{a}} \in A$.

Dôkaz: Pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{a}} \in A$ a $\epsilon > 0$ existuje konečná podmnožina $B \subseteq A$ taká, že $\vec{\mathbf{a}} \in B$ a $\|\vec{\mathbf{x}} - \sum_{\vec{\mathbf{b}} \in B} \alpha_{\vec{\mathbf{b}}} \vec{\mathbf{b}}\| < \epsilon$. Potom

$$\begin{aligned} |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle - \alpha_{\vec{\mathbf{a}}}| &= |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle - \langle \sum_{\vec{\mathbf{b}} \in B} \alpha_{\vec{\mathbf{b}}} \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle| = \\ &= |\langle \vec{\mathbf{x}} - \sum_{\vec{\mathbf{b}} \in B} \alpha_{\vec{\mathbf{b}}} \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle| \leq \|\vec{\mathbf{x}} - \sum_{\vec{\mathbf{b}} \in B} \alpha_{\vec{\mathbf{b}}} \vec{\mathbf{b}}\| \|\vec{\mathbf{a}}\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Teda pre $\epsilon \to 0$ máme $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle = \alpha_{\vec{\mathbf{a}}}$. □

Veta 2.7 (O existencii rozvoja podľa ortonormálnej množiny). *Nech* $A \subseteq X$ *je ortonormálna podmnožina v Hilbertovom priestore X. potom* $\vec{\mathbf{x}}$ *má rozvoj podľa A práve vtedy, keď* $\vec{\mathbf{x}} \in \mathrm{cl}([A])$.

Dôkaz: Ak $\vec{\mathbf{x}} \in \mathrm{cl}([A])$, tak existuje postupnosť $\{\vec{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{\mathbf{x}}_k \in [A]$ a $\lim_{k \to \infty} \|\vec{\mathbf{x}}_k - \vec{\mathbf{x}}\| = 0$. Ukážeme, že $\vec{\mathbf{x}}$ má rozvoj podľa A.

Nech $\mathcal{S}$ je systém konečných podmnožín A. Nech $\epsilon > 0$. Potom existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $\|\vec{\mathbf{x}}_k - \vec{\mathbf{x}}\| < \epsilon$. Keďže $\vec{\mathbf{x}}_k \in [A]$, tak existuje konečná podmnožina $B \in \mathcal{S}$ taká, že $\vec{\mathbf{x}}_k \in [B]$. Teda $d(\vec{\mathbf{x}}, [B]) =$

---

[15] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) – nemecký astronóm a matematik, ktorý opísal polohu a pohyb viac ako 50000 hviezd. Zmeral aj vzdialenosť hviezdy 61 Cygni použitím paralaxy. Zaoberal sa aj problémom vzájomného pohybu troch telies. Pri svojich výpočtoch využil okrem iného aj Besselovu funkciu. Významnejšie výsledky dosiahol aj v geodézii. Hoci sa mu formálne vzdelávanie ukončilo v 14. rokoch, jeho výsledky a spôsob práce mali významný vplyv na vzdelávanie na univerzitách.

$\|\vec{\mathbf{x}} - \sum_{\vec{\mathbf{b}}\in B}\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{b}}\rangle\vec{\mathbf{b}}\| \le \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_k\| < \epsilon$. Takže pre ľubovoľné konečné $D \in \mathcal{S}$, $B \subseteq D$ máme $d(\vec{\mathbf{x}},[D]) \le \|\vec{\mathbf{x}} - \sum_{\vec{\mathbf{b}}\in B}\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{b}}\rangle\vec{\mathbf{b}}\| < \epsilon$. Takže $\lim_{S\in\mathcal{S}} \|\sum_{\vec{\mathbf{b}}\in B}\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{b}}\rangle\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{x}}\| = 0$.

Obrátene, nech $\vec{\mathbf{x}}$ má rozvoj podľa A, teda $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{\vec{\mathbf{a}}\in A}\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}\rangle\vec{\mathbf{a}}$. Potom ku $k \in \mathbb{N}$ existuje konečná podmnožina $B_k \in \mathcal{S}$, že $\|\vec{\mathbf{x}} - \sum_{\vec{\mathbf{b}}\in B_k}\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{b}}\rangle\vec{\mathbf{b}}\| < \frac{1}{k}$. Položme $\vec{\mathbf{x}}_k = \sum_{\vec{\mathbf{b}}\in B_k}\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{b}}\rangle\vec{\mathbf{b}}$. Zrejme $\lim_{k\to\infty}\vec{\mathbf{x}}_k = \vec{\mathbf{x}}$. □

VETA 2.8 (Rieszova[16]-Fischerova[17]). *Nech A je ortonormálna podmnožina Hilbertovho priestoru X nad F a $\{\alpha_{\vec{\mathbf{a}}}\}_{\vec{\mathbf{a}}\in A}$ je postupnosť prvkov F. Potom existuje $\vec{\mathbf{x}} \in X$ taký, že $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{\vec{\mathbf{a}}\in A}\alpha_{\vec{\mathbf{a}}}\vec{\mathbf{a}}$ práve vtedy, keď existuje $\sum_{\vec{\mathbf{a}}\in A}|\alpha_{\vec{\mathbf{a}}}|^2$.*

Dôkaz: Z predchádzajúcich výsledkov máme, že z existencie rozvoja podľa ortonormálnej množiny je $\alpha_{\vec{\mathbf{a}}} = \langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}\rangle$ a existuje $\sum_{\vec{\mathbf{a}}\in A}|\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}}\rangle|^2$.

Obrátene, ak existuje $\sum_{\vec{\mathbf{a}}\in A}|\alpha_{\vec{\mathbf{a}}}|^2$, tak pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ máme konečnú podmnožinu $D_\epsilon \subset A$ takú, že pre $B \subseteq A - D_\epsilon$ je $\sum_{\vec{\mathbf{b}}\in B}|\alpha_{\vec{\mathbf{b}}}|^2 < \epsilon$. Takže $\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{\vec{\mathbf{b}}\in D_\epsilon}\alpha_{\vec{\mathbf{b}}}\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{x}}$. □

VETA 2.9 (Rieszova veta o reprezentácii lineárnych funkcionálov). *Nech X je Hilbertov priestor nad F a $f\colon X \to F$. Potom f je spojitý vtedy a len vtedy, keď existuje prvok $\vec{\mathbf{y}} \in X$ taký, že $f(\vec{\mathbf{x}}) = \langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\rangle$. Vtedy $\|f\| = \|\vec{\mathbf{y}}\|$.*

Dôkaz: Ak $f(\vec{\mathbf{x}}) = \langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\rangle$, tak ide zrejme o lineárny funkcionál. Keďže $|\vec{\mathbf{f}}| \le \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\|$ (podľa CSB nerovnosti), tak $\|f\| \le \|\vec{\mathbf{y}}\|$. Ale pre $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ máme $|f(\vec{\mathbf{y}})| = \|\vec{\mathbf{y}}\|^2$, čo dáva rovnosť $\|f\| = \|\vec{\mathbf{y}}\|$.

Obrátene, ak f je spojitý funkcionál, tak $\ker f = f^{-1}(0) \subseteq X$ je uzavretý podpriestor. Ak $(\ker f)^\perp = \{\vec{\mathbf{0}}\}$, tak sme hotoví, lebo $f(\vec{\mathbf{x}}) = \langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{0}}\rangle$. Ak $(\ker f)^\perp \ne \{\vec{\mathbf{0}}\}$, tak existuje $\vec{\mathbf{0}} \ne \vec{\mathbf{n}} \in (\ker f)^\perp$ a môžeme predpokladať, že $f(\vec{\mathbf{n}}) = 1$. Potom pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in X$ máme $f(\vec{\mathbf{x}} - f(\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{n}}) = f(\vec{\mathbf{x}}) - f(\vec{\mathbf{x}})f(\vec{\mathbf{n}}) = 0$. Teda $\vec{\mathbf{x}} - f(\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{n}} \in \ker f$. Takže

$$\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{n}}\rangle - f(\vec{\mathbf{x}})\langle\vec{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{n}}\rangle = 0. \tag{26}$$

Teda $f(\vec{\mathbf{x}}) = \langle\vec{\mathbf{x}},\frac{\vec{\mathbf{n}}}{\langle\vec{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{n}}\rangle}\rangle$. Jednoznačnosť platí, keďže z $\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{n}}\rangle - \langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{m}}\rangle = 0$ máme $\langle\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{n}} - \vec{\mathbf{m}}\rangle$ pre každé $\vec{\mathbf{x}} \in x = 0$. Špeciálne pre $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{n}} - \vec{\mathbf{m}}$ dostávame, že $\vec{\mathbf{n}} - \vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{0}}$. □

---

[16] Frigyes Riesz (1880–1956) – maďarský matematik, je jedným zo zakladateľov funkcionálnej analýzy, jeho výsledky sa týkajú Lebesguovho integrálu, operátorového kalkulu, ergodickej teórie, topológie a ďalších oblastí. Za svoju prácu dostal niekoľko ocenení.

[17] Enrst Sigismund Fischer (1875–1954) – rakúsky matematik pracujúci najmä v nemecku, zaoberal sa hlavne ortonormálnymi postupnosťami funkcií, determinantami a konečnými abelovskými grupami.

DEFINÍCIA 2.4 (Totálna množina). *Podmnožinu A v Hilbertovom priestore X nazývame* totálnou*, ak* $A^{\perp} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$.

VETA 2.10 (Existencia totálnej ortonormalnej množiny). *Ak A je ortonormálna množina v Hilbertovom priestore X, tak existuje totálna ortonormálna nadmnožina A.*

Dôkaz: Treba použiť obvyklým spôsobom princíp maximality. □

DEFINÍCIA 2.5 (Báza Hilbertovho priestoru). *Totálnu ortonormálnu podmnožinu Hilbertovho priestoru X nazývame* bázou.

POZNÁMKA 2.4. *V prípade nekonečnorozmerného priestoru reprezentujú pojmy báza a algebrická báza rozdielne koncepty generovania prvkov Hilbertovho vektorového priestoru.*

VETA 2.11 (Ekvivalentné podmienky totálnosti). *Nech A je ortonormálna množina v Hilbertovom priestore X. Potom sú ekvivalentné nasledujúce tvrdenia*

(1) *A je totálna,*
(2) *$X = \mathrm{cl}([A])$,*
(3) *pre každé $\vec{\mathbf{x}} \in X$ platí $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \vec{\mathbf{a}}$,*
(4) *pre každé $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in X$ platí $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle = \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \overline{\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle}$,*
(5) *pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in X$ platí Parsevalova[18] idenita o norme $\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle|^2$.*

Dôkaz: Dôkaz prevedieme ukázaním piatich implikácií. Nech platí (1), potom $Y = \mathrm{cl}([A])$ je uzavretý v X, takže pre ľubovoľné $\vec{\mathbf{x}} \in X$ existuje kolmý priemet $\vec{\mathbf{x}}$ do Y. Označme ho $\vec{\mathbf{u}}$. Zrejme $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{u}} \in Y^{\perp}$. Keďže $A \subseteq Y$, tak máme $Y^{\perp} \subseteq A^{\perp} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$. Teda $X \subseteq Y$. Triviálne $Y \subseteq X$, teda $X = \mathrm{cl}([A])$ a platí (2).

Fakt, že z (2) vyplýva (3) sme ukázali v predchádzajúcich vetách.

Nech platí (3). Potom pre $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ je tvrdenie (4) zrejmé. Nech teda $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ a $\vec{\mathbf{y}} = \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \vec{\mathbf{a}}$. Potom pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ existuje konečná množina $B \subseteq A$, že pre ľubovoľnú konečnú podmnožinu $C \subseteq A$ takú, že $B \subseteq C \subseteq A$ máme $\|\vec{\mathbf{y}} - \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in C} \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \vec{\mathbf{a}}\| < \frac{\epsilon}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$. Teda

$$\begin{aligned} |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle - \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in C} \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \overline{\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle}| &= |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle - \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in C} \langle \vec{\mathbf{x}}, \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \vec{\mathbf{a}} \rangle| = \\ &= |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} - \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in C} \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \vec{\mathbf{a}} \rangle| \leq \\ &\leq \|\vec{\mathbf{x}}\| \|\vec{\mathbf{y}} - \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in C} \langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \vec{\mathbf{a}}\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Teda $\lim_{B \subseteq A} \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in B} \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle \overline{\langle \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle}$ existuje a je to $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle$. A máme (4).

---

[18] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836) – francúzsky matematik, o ktorom sa veľa nevie. Žil počas francúzskej revolúcie a bol väznený. Známych je len päť jeho publikácií.

Platnosť (5) dostaneme z platnosti (4), ak $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}}$.

Ak platí (5), tak pre $\vec{\mathbf{x}} \in A^{\perp}$ je $\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle = 0$ a $\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \sum_{\vec{\mathbf{a}} \in A} |\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle|^2 = 0$. Teda $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Teda A je totálna. □

POZNÁMKA 2.5. *Parsevalova rovnosť sa často v literatúre označuje aj ako Plancherelova*[19]. *Ide vlastne o rozšírenú Pythagorovu vetu.*[20]

3. Vybrané lineárne transformácie a ortogonálne bázy

V aplikáciách, najmä v spracovaní signálu alebo obrazu sa často vyskytujú niektoré lineárne transformácie. Uvedieme si ich jednoduchú podobu aj s niektorými ich vlastnosťami. Viac sa možno dočítať napr. v [**15**].

3.1. Laplaceova transformácia. Nech $f\colon [0, \infty) \to F$ je funkcia. Laplaceova[21] transformácia je definovaná pomocou vzťahu

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{st} f(t) \mathrm{d}t, \tag{27}$$

kde predpokladáme, že integrál existuje pre ľubovoľné $s \in F$. Táto transformácia je zrejme lineárna, t.j. $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$.

Laplaceova transformácia má aplikácie pri riešení diferenciálnych rovníc.

3.2. Fourierova transformácia. Fourierova[22] transformácia priradí funkcii $f \in L^2(-\pi, \pi)$ rad, ktorý vo vhodnom zmysle konverguje práve k tejto funkcii. Dá sa ukázať, že v bodoch, kde je f spojitá, je táto konvergencia bodová.

Ide o transformáciu definovanú pomocou vzťahu

$$\mathcal{F}[f](t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}, \tag{28}$$

---

[19] Michel Plancherel (1885–1967) – švajčiarsky matematik pôsobiaci v Zürichu na ETH. Zaoberal sa Fourierovou teóriou, teóriou miery a aplikáciami v teórii hyperbolických a parabolických diferenciálnych rovníc. Výsledky publikoval aj v oblastiach ergodických systémov a algebier.

[20] Pythagoras zo Sámu (asi 569 p.n.l–475 p.n.l.) – z jeho života sa veľa nevie, hoci sa považuje za dôležitú postavu v dejinách matematiky i filozofie. Bol mladším súčasníkom Thálesa i Anaximandra z Milétu. Podľa Aristotela, veril, že všetko sa dá redukovať na čísla. Mnoho javov posudzoval cez numerológiu. Veta z geometrie pomenovaná po ňom bola známa už v Babylóne o tisíc rokov skôr. Výsledky, ktoré sa mu pripisujú, patria do kategórie geometrických tvrdení.

[21] Pierre-Simon Laplace (1749–1827) –francúzsky matematik so širokým záberom pracujúci najmä v oblasti pravdepodobnosti a nebeskej mechaniky, ale aj matematickej fyziky. Je po ňom pomenovaných niekoľko pojmov ako Laplaceov operátor, Laplaceova rovnica, Laplaceova transformácia.

[22] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – francúzky matematik zaoberajúci sa teóriou šírenia tepla. Riešenie našiel pomocou trigonometrických funkcií.

kde $c_n = \frac{1}{2\pi}\langle f(t), e^{int}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$ sú koeficienty priemetu funkcie f do ortonormálnej množiny

$$A = \{\tfrac{1}{2\pi}e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{29}$$

Táto transformácia je zrejme lineárna a jej aplikácie v spracovaní signálu a obrazu, keď sa zovšeobecní na viacrozmerné priestory, je nezastupiteľná.

Pokiaľ potrebujeme interval $[a, b]$, tak sa použije lineárna substitúcia tvaru $t \mapsto -\pi + \frac{x-a}{b-a}2\pi$.

3.3. Diskrétna Fourierova transformácia. Jeden z pohľadov na túto transformáciu, že ide o aproximáciu Fourierovho radu konečnou sumou. Táto transformácia má však aj ďalšie zaujímavé vlastnosti, ktoré sa objavujú v rôznych oblastiach matematiky (napr. teória čísel, kódovania, grúp a pod).

Fixujme $n \in \mathbb{N}$. Pre jednoduchosť skúmajme túto transformáciu na intervale $[0, 2\pi)$ a zoberme do úvahy body $X_n = \{x_k = k\frac{2\pi}{n} : k = 0, \ldots, n-1\}$. Definujme priestor X všetkých funkcií $f\colon X_n \to \mathbb{C}$. Ide o konečnorozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{C}$, pričom báza i skalárny súčin sú definované prirodzene, t.j. funkcie $e_i(x_j) = \delta_{ij}$ pre $i = 0, \ldots, n-1$ tvoria ortonormálnu bázu vzhľadom na skalárny súčin

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\overline{g(x_i)}. \tag{30}$$

Označme $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Ide o primitívnu jednotku na jednotkovej komplexnej kružnici. Potom máme danú nasledujúcu množinu funkcií

$$\phi_r(x_k) = e^{irk\frac{2\pi}{n}} \quad r = 0, \ldots, n-1. \tag{31}$$

Ľahko sa ukáže, že táto množina funkcií je ortogonálna v našom konečnorozmernom priestore funkcií a $\|\phi_r\|^2 = n$.

Reprezentácia ľubovoľnej funkcie $f \in X$ v takejto báze je potom daná

$$f = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\langle f, \phi_r\rangle\phi_r. \tag{32}$$

Označme $\hat{f}(r) = \frac{1}{n}\langle f, \phi_r\rangle$. Potom môžeme písať

$$f(x_k) = \sum_{r=0}^{n-1}\hat{f}(r)\phi_r(x_k) = \sum_{r=0}^{n-1}\hat{f}(r)e^{irx_k}. \tag{33}$$

Na rýchle numerické vyčísľovanie $\hat{f}(r)$ sa používa známa Hornerova[23] schéma, keďže platí, že

---

[23] William George Horner (1786–1837) – britský matematik zaoberajúci sa elementárnou geometriou a riešením algebraických a funkcionálnych rovníc. Metóda známa pod jeho menom bola publikovaná už v roku 1820 londýnskym hodinárom Theophilom Holdredom.

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(\omega_n^{-r})^k. \tag{34}$$

Cvičenie 3.1. *Ukážte tvrdenia o diskrétnej Fourierovej transformácii.*

3.4. Transformácia $\mathcal{Z}$. Zoberieme postupnosť čísel $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a priradíme jej Laurentov[24] rad

$$\mathcal{Z}[a] = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}. \tag{35}$$

Zrejme $\mathcal{Z}$-transformácia je lineárna. Táto transformácia sa často používa v kombinatorike pri tvorbe tzv. vytvárajúcich funkcií pre niektoré kombinatorické postupnosti. Pomocou nich sa dajú dokázať mnohé kombinatorické identity.

3.5. Legendrove polynómy. Ortonormalizovaním množiny polynómov $1, x, x^2, \dots$ dostávame ortonormálnu bázu priestoru $L^2(-1,1)$. Prvky tejto bázy sa nazývajú Legendrove[25] polynómy a majú tvar

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n. \tag{36}$$

Tento tvar sa nazýva aj Rodriguesov[26] vzorec.

3.6. Laguerrove polynómy. Polynómy tvaru

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}x^n e^{-x} \tag{37}$$

tvoria ortonormálnu bázu v $L^2(0,\infty)$ s váhovaným skalárnym súčinom

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Nazývame ich Laguerrove[27] polynómy.

---

[24] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854) – práce tohoto francúzkeho vojaka boli často odmietnuté na publikáciu Akadémiou vied, hoci významné osobnosti ako Cauchy ich odporúčali. Zaoberal sa aj teóriou svetla.

[25] Adrien-Marie Legendre (1752–1833) – francúzsky matematik a fyzik začal svoju karéru vyriešením úlohy Berlínskej akadémie o pohybe projektilu vystreleného z dela. Zaoberal sa teóriou čísel (π nie je racionálne, beta a gama funkcia), eliptickými funkciami, geometriou (je kniha sa stala nadlho učebnicou elementárnej geometrie).

[26] Benjamin Olinde Rodrigues (1795–1851) – stal sa bankárom, keďže pochádzal zo židovskej rodiny a po skončení doktorátu z matematiky mu katolícka hierarchia robila problémy s umiestnením v akademickej sfére. Jeho práce upadli do zabudnutia a poznáme ich hlavne vďaka Heinrichovi Heinemu a Leonardovi Carlitzovi.

[27] Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886) – francúzsky matematik pracujúci v oblasti analýzy a geometrie. Veľa jeho výsledkov a pojmov bolo zovšeobecnených

3.7. Hermitove polynómy. Polynómy tvaru

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{39}$$

tvoria ortogonálnu bázu v $L^2(0,\infty)$ s váhovaným skalárnym súčinom

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)} e^{-x^2} \mathrm{d}x. \tag{40}$$

Nazývame ich Hermitove[28] polynómy. Norma Hermitovho polynómu je

$$\|H_n\|^2 = n!2^n\sqrt{\pi}. \tag{41}$$

3.8. Čebyševove polynómy. Polynómy tvaru

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \tag{42}$$

tvoria ortogonálnu bázu v $L^2(-1,1)$ s váhovaným skalárnym súčinom

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x. \tag{43}$$

Nazývame ich Čebyševove[29] polynómy. Norma Čebyševovho polynómu je

$$\|T_0\| = \pi, \quad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} \quad n > 0. \tag{44}$$

Lieom, Cayleym a Kleinom. Napriek podlomenému zdraviu napísal 140 prác. Bol známy ako detailista.

[28] Charles Hermite (1822–1901) – francúzky matematik, priatelil sa z významnými matematikmi svojej doby – Bertrandom, Jacobim, Cauchym. Zaoberal sa teóriou čísel (e je trancendentné), teóriou kvadratických foriem a invariantov, eliptickými funkciami. Jeho meno nesú pojmy hermitovská matica, hermitovský priestor, Hermitova differenciálna rovnica, hermitov polynóm a ďalšie.

[29] Pafnutij Ľvovič Čebyšev (1821–1894) – vynikajúci ruský matematik pracujúci v teórii čísel, teórii integrovania, teórii aproximácie, teória pravdepodobnosti. Jeho práca bola ocenená mnohými cenami. Ako prvý spomína pojem náhodnej premennej, pojem ortogonálnych polynómov. Mal bohaté zahraničné styky so špičkovými matematikmi.

DODATOK A

Prehľad základných pojmov a faktov z teórie miery

Uvediem prehľad základných pojmov z teórie miery a Lebesguovho integrálu. Stručne sa dá povedať, že ide o zovšeobecnenie toho, čo poznáme pod pojmom dĺžka, obsah a objem resp. jordanovská[1] miera pre $\mathbb{R}^n$, pričom nám to umožní merať aj zložitejšie štrukturované nmožiny. Lebesguesov integrál je potom analógia Riemanovho integrálu postaveného nad touto mierou. Pričom táto analógia je rozšírením Riemanovho integrálu.

Podrobnejšie sa o tejto téme dá dočítať napr. v [**12**]. Táto časť je len informatívna a pochádza z [**3**]. Budeme sa zaoberať len mierou na $\mathbb{R}^d$, hoci mnohé z definícií sa dajú povedať oveľa všeobecnejšie. Vyskúšajte si to ako cvičenie.

1. Lebesguova miera

Nech $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ je množina spĺňajúca nasledujúce podmienky

(1) $\emptyset \in \Sigma$
(2) ak, $A \in \Sigma$, tak aj $\mathbb{R}^d - A \in \Sigma$
(3) ak $A_i \in \Sigma$, $i = 0, 1, \ldots$, tak aj $\cup_{i=0}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Potom Σ nazývame *σ-algebrou* podmnožín $\mathbb{R}^d$. Zrejme $\mathbb{R}^d \in \Sigma$, $\cap_{i=0}^{\infty} A_i \in Sigma$ a $A - B \in \Sigma$, ak $A_i, A, B \in \Sigma$.

Nezápornou (komplexnou) mierou na Σ nazývame funkciu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ takú, že je spočítateľne aditívna t.j.

$$\mu(\cup_{i_0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i), \tag{45}$$

pričom $A_i \in \Sigma$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$.

Pre komplexnú mieru vyžadujeme, aby rad (45) bol absolútne konvergentný.

Pre nezápornú mieru $A \subseteq B$ dáva $\mu(A) \leq \mu(B)$. Takisto platí, že pre $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots$ je $\mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

---

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) – francúzsky matematik, ktorý podstatnú časť svojho výskumu robil popri inžinierskom zamestnaní. Prispel do teórie konečných grúp, lineárnej a multilineárnej algebry, teórie čísel, topológie mnohostenov, diferenciálnych rovníc a mechaniky. Zaviedol pojem homotopie. Známa je jeho veta o jednoducho uzavretej krivke v rovine, Jordanova normálna forma matice, Jordanov-Hölderov kompozičný rad grupy.

VETA 1.1. *V* $\mathbb{R}^d$ *existuje* σ*-algebra* $\mathcal{B}$ *podmnožín* $\mathbb{R}^n$ *a nezáporná miera na nej taká, že spĺňa nasledujúce podmienky*

(1) otvorené množiny sú v $\mathcal{B}$*,*
(2) ak $A \subseteq B$*,* $B \in \mathcal{B}$ *a* $\mu(B) = 0$*, tak* $A \in \mathcal{B}$ *a* $\mu(A) = 0$*,*
(3) $A = \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i] \in \mathcal{B}$ *a* $\mu(A) = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i)$*,*
(4) μ *je invariantná vzhľadom na zhodné transformácie* $\mathbb{R}^d$*.*

Množiny v $\mathcal{B}$ sa nazývajú *lebesgueovsky merateľné množiny* a funkcia μ sa nazýva *lebesgueovska miera.*

Ak nejaká vlastnosť platí pre množinu A s výnimkou bodov v $B \subseteq A$, pričom $\mu(B) = 0$, tak hovoríme, že platí *skoro všade na* A. Spočítateľné množiny majú mieru 0. Existujú aj nepočítateľné množiny nulovej miery.

Funkcia $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sa nazýva *merateľnou*, ak množina $\{x \in A : f(x) > a\}$ je merateľnou pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$. Merateľné funkcie majú nasledujúce vlastnosti.

VETA 1.2. *(1) Ak* f *je merateľná, tak aj* $|f|$ *je merateľná.*
(2) Ak f, g *sú merateľné, tak aj* $f + g$ *a* fg *sú merateľné.*
(3) Ak $\{f_n\}_n \in \mathbb{N}$ *sú merateľné funkcie, tak aj* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$*,* $\inf_{n\in\mathbb{N}}$*,* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *a* $\liminf_{n\in\mathbb{N}}$ *sú merateľné.*
(4) Ak f *je spojitá a definovaná na merateľnej množine, tak je merateľná.*
(5) Ak $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* g *je reálna merateľná funkcia, tak* $f \circ g$ *je merateľná funkcia.*
(6) Ak f *je merateľná funkcia a* $f(x) = 0$ *pre* $\mathbb{R}^d - A$ *takú, že* $\mu(A) < \infty$*, tak pre ľubovoľné* $\epsilon > 0$ *existuje funkcia* $g \in C^0(A)$ *taká, že* $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ *a* $\mu\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\} < \epsilon$*.*

POZNÁMKA 1.1. *Posledné tvrdenie sa často označuje ako Luzinova*[2] *veta.*

Pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sa funkcia ξ_A definovaná

$$\xi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{46}$$

nazýva *charakteristickou funkciou množiny* A. Reálna funkcia s na $\mathbb{R}^d$ sa nazýva *jednoduchá alebo schodovitá*, ak má nanajvýš konečný počet hodnôt. Zrejme je tvaru $s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \xi_{A_j}$ pre množiny $A_i = \{x \in \mathbb{R}^d : s(x) = a_i\}$. Taká funkcia je merateľná práve vtedy, keď sú všetky A_i merateľné.

---

[2] Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883–1950) – ruský matematik pracujúci v oblasti teórie miery, topológie. Doktorát mu bol udelený za diplomovú prácu. Je zakladateľom moskovskej školy teórie funkcií. Zaoberal sa výsledkami, ktoré možno dosiahnuť bez axiómy výberu.

VETA 1.3 (O aproximácii schodovitými funkciami). *Nech* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *je funkcia,* $A \subseteq \mathbb{R}^d$*. Potom existuje postupnosť schodovitých funkcií* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ktorá bodovo konverguje k* f*. Ak* f *je ohraničená, dá sa postupnosť vybrať tak, že konvergencia je rovnomerná. Ak* f *je merateľná, dajú sa vybrať merateľné aj funkcie* s_n*. Ak je nezáporná, funkčné hodnoty postupnosti môžu tvoriť neklesajúcu postupnosť v každom bode* A*.*

2. Lebesguov integral

Nech μ je Lebesguova miera na $\mathbb{R}^d$. Nech f je merateľná funkcia na $A \subseteq \mathbb{R}^d$ s hodnotami v $\mathbb{R}$. Definujeme postupne *Lebesguov integral.* Ak f je schodovitá, tak

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i). \tag{47}$$

Ak f je nezáporná a merateľná, tak definujeme

$$\int_A f d\mu = sup_s \int_A s\, d\mu, \tag{48}$$

kde s je schodovitá merateľná funkcia, nulová mimo A a $0 \leq s(x) \leq f(x)$ pre $x \in A$.

Ak f je merateľná, tak $f = f^+ - f^-$, kde $f^+ = \max\{0, f\}$ a $f^- = \max\{0, -f\}$. Potom definujeme

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu. \tag{49}$$

Literatúra

[1] `http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman.html`.

[2] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.

[3] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[4] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[5] Bohuslav Balcar and Petr Štěpánek. *Teorie množin*. Academia [Publishing House of the Czech Academy of Sciences], Prague, 1986.

[6] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.

[7] Ronald A. DeVore and George G. Lorentz. *Constructive approximation*, volume 303 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[8] Ryszard Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.

[9] Paul Richard Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17.

[10] Fečkan M. Funkcionálna analýza. Poznámky z prednášky, 2005.

[11] L. Mišík. *Funkcionálna analýza*. Alfa, 1989.

[12] Beloslav Riečan and Tibor Neubrunn. *Teória miery*. VEDA Vydavatel'stvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava, 1992.

[13] Georgi E. Shilov. *Elementary functional analysis*. Dover Publications Inc., New York, 1996. Revised English edition translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Corrected reprint of the 1974 English translation.

[14] Činčura J. Všeobecná topológia. Poznámky z prednášky, 1993.

[15] Anders Vretblad. *Fourier analysis and its applications*, volume 223 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[16] Šalát T. Švec M. and Neubrunn T. *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*. Alfa/SNTL, Bratislava, 1987.

[17] http://www.wikipedia.org/.

[18] Берже, М. *Геометрия, Том второй*. Мир, Москва, 1984.

[19] Берже, М. *Геометрия, Том первый*. Мир, Москва, 1984.

[20] Кириллов А. and Гвисяни А. *Теоремы и проблемы функционфльного анальыза*. Мир, Москва, 1983.

Register pojmov

Register autorov