Vybrané kapitoly z konvexnej geometrie

(pracovná verzia)

Pavel Chalmovianský

Zoznam základných pojmov ku konvexným mnohostenom a polárna transformácia. Ide o časť prednášky k predmetu Výpočtová geometria. Predmet sa vyučuje na študijnom odbore 9.1.1 Matematika, v študijnom programe Počítačová grafika a geometria.

Bratislava, 29. septembra 2008

Označenie

Nech $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Nech $P = \{f_i : f_i \colon D \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ je množina reálnych funkcií na množine D. Označme $Z(P) = \{\mathbf{x} \in D : f_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ pre všetky } f_i \in P\}$, $\mathrm{Pos}(P) = \{\mathbf{x} \in D : f_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ pre všetky } f_i \in P\}$ a $\mathrm{Neg}(P) = \{\mathbf{x} \in D : f_i(\mathbf{x}) < 0 \text{ pre všetky } f_i \in P\}$.

1. Konvexné mnohosteny

Mnohé z pojmov, ktoré tu definujeme v euklidovskom priestore fungujú rovnako v afinnom priestore. Nepotrebujeme ku nim skalárny súčin. Z hľadiska výpočtov je však skalárny súčin veľmi užitočný a v aplikáciách je často k dispozícii.

Definícia 1.1 (Lineárna kombinácia bodov). *Nech $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{E}^d$ sú body a čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sú také, že $\sum_{i=0}^n \alpha_i = c$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$. Potom výraz tvaru*

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{p}_i \tag{1}$$

nazývame lineárna kombinácia bodov.

Definícia 1.2 (Afinná kombinácia bodov). *Lineárnu kombináciu bodov nazývame* afinnou kombináciou*, ak $c = 1$ $(c = 0)$ a definujeme jej výsledok ako bod (vektor)*

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) \quad \Big(\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})\Big), \tag{2}$$

kde $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^d$ je ľubovoľný.

Cvičenie 1.1. *Ukážte, že pojem afinnej kombinácie bodov je dobre definovaný t.j. bod $\mathbf{q}$ môže byť ľubovoľný.*

Definícia 1.3 (Afinný obal množiny). *Nech $X \subset \mathbb{E}^d$ je množina bodov. Jej* afinným obalom *nazývame množinu*

$$\mathrm{aff}(X) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{p}_i, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1, \quad \mathbf{p}_i \in X, \quad i = 0, \dots, n\}. \tag{3}$$

Cvičenie 1.2. *Ukážte, že afinný obal ľubovoľnej množiny $X \neq \emptyset$ je najmenšia lineárna podvarieta $\mathbb{E}^d$ obsahujúca množinu X.*

Definícia 1.4 (Konvexná kombinácia bodov). *Afinnú kombináciu bodov $\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{p}_i$, kde $c = 1$, nazývame* konvexnou kombináciou*, ak $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, \dots, n$.*

Definícia 1.5 (Konvexná množina). *Množina X sa nazýva* konvexná*, ak pre ľubovoľné body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ je aj bod $(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in X$ pre ľubovoľné $t \in [0, 1]$.*

Definícia 1.6 (Dimenzia konvexnej množiny). Dimenziou konvexnej množiny *nazývame dimenziu jej afinného obalu t.j. $\dim K = \dim \mathrm{aff}(K)$.*

Definícia 1.7 (Konvexný obal množiny). *Nech $X \subset \mathbb{E}^d$ je množina bodov.* Konvexným obalom *tejto množiny nazveme najmenšiu (v zmysle inklúzie) konvexnú podmnožinu $Y \subset \mathbb{E}^d$ takú, že $X \subset Y$. Označujeme ju $\mathrm{conv}(X)$.*

Definícia 1.8 (Polytop). *Konvexný obal konečnej množiny bodov $X \subset \mathbb{E}^d$ sa nazýva* polytop.

Ak nepovieme inak, budeme predpokladať, že polytop K má dimenziu d.

Nech $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^d : (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0\}$ je nadrovina. Potom označíme $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^d : (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} > 0\}$ a $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^d : (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} < 0\}$. Analogicky, nech $\overline{H^+} = H \cup H^+$ a $\overline{H^-} = H \cup H^-$.

Definícia 1.9 (Oporná nadrovina, oporný polpriestor. Stena polytopu.). *Nadrovinu H nazývame* opornou ku polytopu K, *ak $H \cap K \neq \emptyset$ a $K \subset \overline{H^+}$ alebo $K \subset \overline{H^-}$. Uzavretý polpriestor ohraničený nadrovinou H, v ktorom sa nachádza K, sa nazýva* oporný polpriestor. *Prienik opornej nadroviny H a polytopu K nazývame* stenou polytopu K *a hovoríme, že nadrovina H je opornou ku K pozdĺž tejto steny.*

Steny s dimenziou k nazývame *k-steny*, špeciálne 0-steny nazývame *vrcholmi*, 1-steny nazývame *hranami*, $(d-1)$-steny nazývame *nadstenami* polytopu.

K stenám z predchádzajúcej definície obyčajne pridávame ešte tzv. *nevlastné steny*, ktorými sú polytop K resp. $\emptyset$. Dimenzie týchto stien sú dané definitoricky d resp. -1.

Hovoríme, že nadrovina H *oddeľuje* body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^d$, ak $\mathbf{x} \in \overline{H^+}$ a $\mathbf{y} \in H^-$ alebo $\mathbf{y} \in \overline{H^+}$ a $\mathbf{x} \in H^-$. Analogicky sa tento pojem prenesie na oddeľovanie množín bodov.

Vo viacerých dôkazoch budeme potrebovať pojem relatívneho vnútra steny. Je zrejmé, že v prípade, že stena $F \subset \mathbb{E}^d$ a $\dim F < d$, platí $\operatorname{int} F = \emptyset$. Na druhej strane, keď uvažujme F ako podmnožinu $\operatorname{aff}(F)$, tak existuje $\operatorname{int}_{\operatorname{aff}(F)} F \neq \emptyset$. Túto množinu nazývame *relatívne vnútro* steny F a označujeme $\operatorname{rel\,int} F$. Ide teda o vnútro množiny F v podpriestore $\operatorname{aff}(F)$, ktorý má rovnakú dimenziu ako stena F a $F \subset \operatorname{aff}(F)$.

Cvičenie 1.3. *Čo je relatívne vnútro k-rozmernej steny pre $k = -1, 0, 1, 2, \ldots, d$, ak K je konvexný obal $d + 1$ lineárne nezávislých bodov priestoru $\mathbb{E}^d$?*

Veta 1.1 (Existencia opornej nadroviny pre hraničné body). *Nech $K \subset \mathbb{E}^d$ je uzavretá ohraničená konvexná množina. Potom každý bod ∂K patrí nejakej opornej nadrovine ku K. Naviac, ak $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^d - K$, tak existuje oporná nadrovina oddeľujúca $\mathbf{y}$ a K.*

Dôkaz: Uvažujme zobrazenie $\phi\colon \mathbb{E}^d \to K$ také, že $\phi(\mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in K} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Ide o funkciu, ktorá bodu $\mathbf{x}$ priradí taký bod $f(\mathbf{x}) \in K$, že $\|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\| = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, K)$. Toto zobrazenie je dobre definované a spojité, lebo

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{4}$$

(Dokážte si to podrobne!).

Nech $B^d(\mathbf{s}, r)$ je guľa obsahujúca K vo svojom vnútri. Potom $\phi(\partial B^d(\mathbf{s}, r)) = \partial K$. (Dokážte podrobne!)

Potom nadrovina H kolmá na priamku $\mathbf{xy}$, kde $\mathbf{y} \in \partial K$ a $\mathbf{x} \in \phi^{-1}(\mathbf{y}) \cap \partial B^d(\mathbf{s}, r) \neq \emptyset$, a obsahujúca $\mathbf{y}$ je opornou nadrovinou polytopu K. $\square$

Cvičenie 1.4. *Ukážte, že funkcia ϕ z dôkazu je dobre definovaná a spojitá.*

Cvičenie 1.5. *Ukážte, že zobrazenie ϕ zobrazuje hranicu guľovej plochy obaľujúcej K na hranicu ∂K.*

Veta 1.2 (Hranica polytopu ako zjednotenie jeho vlastných stien). *Hranica polytopu P je zjednotením jeho vlastných stien t.j.*

$$\partial P = \bigcup_{F \subset P, F \neq \emptyset, F \neq P} F. \tag{5}$$

Dôkaz: Keďže každý bod z vlastnej steny F polytopu P je z hranice P, tak $\bigcup_{F\subset P} F \subset \partial P$.

Opačná inklúzia platí, pretože pre každý bod hranice K existuje oporná nadrovina, ktorá ho obsahuje podľa vety 1.1. $\square$

VETA 1.3 (Konečnosť počtu stien polytopu). *Polytop má konečný počet stien a každá stena polytopu je opäť polytop.*

Dôkaz: Nech $K = \operatorname{conv}(X)$, kde X je konečná množina bodov $\mathbb{E}^d$. Stačí ukázať, že každá stena je konvexným obalom nejakej podmnožiny X. Presnejšie pre stenu $F = H \cap K$, kde H je nadrovina oporná pozdĺž F, ide o množinu $X \cap H$. $\square$

VETA 1.4 (Vrcholy polytopu generujú polytop). *Polytop je konvexným obalom svojich vrcholov.*

Dôkaz: Nech $K = \operatorname{conv}(X)$. Vynechajme z X všetky body, ktoré sa dajú napísať ako konvexná kombinácia tých ostatných. Môžme už predpokladať, že X také body neobsahuje. Potom pre ľubovoľný bod $\mathbf{y} \in X$ platí, že $\mathbf{y} \notin \operatorname{conv}(X - \{\mathbf{y}\})$, a teda existuje nadrovina $H'_{\mathbf{y}}$ oddeľujúca $\mathbf{y}$ a $\operatorname{conv}(X - \{\mathbf{y}\})$. Nadrovina $H_{\mathbf{y}}$ rovnobežná s $H'_{\mathbf{y}}$ a prechádzajúca bodom $\mathbf{y}$ je oporná ku $\operatorname{conv}(X)$ a naviac $H_{\mathbf{y}} \cap K = \{\mathbf{y}\}$. Teda $\{\mathbf{y}\}$ je 1-stenou K a nedá sa vygenerovať inými bodmi. $\square$

VETA 1.5 (Oporné nadroviny strán generujú polytop). *Ľubovoľný polytop je prienikom konečného počtu uzavretých polpriestorov.*

Dôkaz: Nech $K \subset \mathbb{E}^d$ je polytop dimenzie d a $\{F_i : 1 \le i \le m\}$ je množina jeho nadstien. Nech nadrovina H_i je oporná nadrovina ku K pozdĺž F_i a $K \subset \overline{H_i^+}$, $i = 1, \ldots, m$. Ukážeme, že

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} \overline{H_i^+}. \tag{6}$$

Triviálne $K \subset \bigcap_{i=1}^m \overline{H_i^+}$. Ak $\mathbf{y} \notin K$, tak zoberme $\mathbf{z} \in \operatorname{int} K$ tak, aby $\mathbf{z}$ neležal v žiadnej nadrovine generovanej bodom $\mathbf{y}$ a ľubovoľnými $d-1$ vrcholmi K. Taký bod existuje, lebo K je dimenzie d a nedá sa pokryť konečným počtom nadrovín dimenzie $d-1$.

Potom $\partial K \cap \mathbf{yz}$ je bod, ktorý patrí do relatívneho vnútra niektorej steny F_i, a teda H_i oddeľuje body $\mathbf{z}$ a $\mathbf{y}$. To znamená, že $\mathbf{y} \notin \bigcap_{i=1}^m \overline{H_i^+}$. $\square$

VETA 1.6. *Ak je prienik konečného počtu uzavretých polpriestorov ohraničený, je to polytop.*

Dôkaz: Postupujme indukciou cez dimenziu prieniku. Pre $d = -1, 0, 1$ je tvrdenie jednoduché.

Nech

$$Q = \bigcap_{i=1}^{m} \overline{H_i^+} \tag{7}$$

je ohraničený. Potom $F_i = Q \cap H_i$ je nanajvýš dimenzie $d-1$, a teda podľa indukčného predpokladu ide o polytop. Nech má množinu vrcholov X_i. Ukážeme, že $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ je množina vrcholov Q.

Nech $Q' = \operatorname{conv}(X)$. Ľubovoľný bod na hranici Q je z Q'. Ak $\mathbf{x} \in \operatorname{int} Q$, tak existuje úsečka s koncovými bodmi na hranici, na ktorej leží $\mathbf{x}$. Takže $Q \subset Q'$. Na druhej strane, Q je konvexná množina a obsahuje X, takže $Q' \subset Q$. $\square$

Ak $Q = \bigcap_{i=1}^{m} \overline{H_i^+}$ dimenzie d je daný redukovaným výrazom t.j. $Q \neq \bigcap_{i \neq j}^{m} \overline{H_i^+}$, tak $F_j = Q \cap H_j u$ je $(d-1)$-stena polytopu. Relatívne vnútro steny F_j sa dá vyjadriť ako $H_j \cap (\bigcap_{i \neq j}^{m} H_i^+)$ a je neprázdne.

Ľahko vidno, že hranica polytopu K je zjednotením $(d-1)$-stien polytopu K.

CVIČENIE 1.6. *Dokážte podrobne vyššie uvedené tvrdenia!*

VETA 1.7. *Ľubovoľná vlastná stena polytopu K je stenou nejakej $(d-1)$-steny polytopu K. Naopak, ľubovoľná stena steny polytopu, je aj stenou polytopu.*

Dôkaz: Nech F je vlastná stena K, H je jej oporná nadrovina a $\mathbf{x}$ je bod v relatívnom vnútre F. Bod $\mathbf{x}$ je z hranice, a teda je z nejakej $(d-1)$-steny F_1 s opornou nadrovinou H_1. Keďže $\mathbf{x}$ je z relatívneho vnútra F, $\mathbf{x} \in H$, tak $F \subset H$. To znamená, že $F \subset F_1$. Naviac $H_1 \cap H$ je nadrovinou v H_1, ktorá je opornou nadrovinou F v F_1.

Nech teraz F_1 je stenou K a F_2 je stenou F_1. Môžeme predpokladať, že $F_2 \neq \emptyset$. Nech H_1 je opornou nadrovinou ku K pozdĺž F_1 a H_2 nadrovinou v H_1 pozdĺž F_2. Otočíme H_1 okolo H_2.

Nech $\mathbf{o}$ je začiatok $\mathbb{E}^d$ a je z $F_2 \subset F_1$. Keďže F_1 je stena polytopu K, existuje vektor $\mathbf{n}_1 \in \mathbb{V}^d$ taký, že $H_1 = Z((\mathbf{x}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_1)$ a $H_1^+ = \operatorname{Pos}((\mathbf{x}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_1)$, pričom $K \subset \overline{H_1^+}$.

Rovnako existuje vektor $\mathbf{n}_2 \in V(H_1)$ taký, že $H_2 = Z((\mathbf{x}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_2, (\mathbf{x}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_1) = Z((\mathbf{x}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_2) \cap H_1$ a $\overline{H_2^+} = H_1 \cap \operatorname{Pos}((\mathbf{x}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_2)$. Nech $\mathcal{V}(K)$ je množina vrcholov polytopu K.

Uvažujme všetky nadroviny obsahujúce H_2. Pre každý nenulový smer $\eta_1\mathbf{n}_1 + \eta_2\mathbf{n}_2$ existuje práve jedna taká nadrovina $H(\eta_1, \eta_2)$. A naopak všetky sa dajú takto zapísať. Naviac jednoznačne, ak uvažujeme s koeficientami $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{RP}^1$.

Hľadajme tú nadrovinu $H(\eta_1, \eta_2)$, ktorá zviera s nadrovinou H_1 minimálny uhol a obsahuje niektorý vrchol polytopu z množiny $\mathcal{V}(K) - \mathcal{V}(F_1)$. Pre takúto nadrovinu bude určite $\eta_2 \neq 0$. Nájdeme ju tak, že budeme počítať

$$\eta_0 = \min\{\frac{\eta_1}{\eta_2} : H(\eta_1, \eta_2) \cap (\mathcal{V}(K) - \mathcal{V}(F_1)) \neq \emptyset\} \tag{8}$$

a to je to isté ako

$$\eta_0 = \min\{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_2}{(\mathbf{v}-\mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_1} : \mathbf{v} \in H(\eta_1, \eta_2) \cap (\mathcal{V}(K) - \mathcal{V}(F_1)) \neq \emptyset\}. \tag{9}$$

(Pouvažujte, prečo používame tento komplikovanejší zápis! Ukážte, že naozaj minimalizujeme vhodný uhol.)

Zoberme $0 < \eta < \eta_0$. Potom $H(\eta, 1)$ je hľadaná nadrovina, ktorá je opornou ku K pozdĺž F_2. Stačí už len ukázať, že neobsahuje body $\mathcal{V}(K) - \mathcal{V}(F_2)$. Z definície η_0 je zrejmé, že body z $\mathcal{V}(K) - \mathcal{V}(F_1)$ sú v $H(\eta_0, 1)^+$ a z definície H_2 vidno, že aj body z $\mathcal{V}(F_1) - \mathcal{V}(F_2)$ sú v tomto otvorenom polpriestore. $\square$

VETA 1.8. *Nech K je d-polytop. Potom prienik ľubovoľnej neprázdnej množiny stien K je opäť stena K. Ľubovoľná $(d-2)$-stena K je prienikom práve dvoch $(d-1)$-stien K. Pre ľubovoľnú dvojicu nezáporných celých čísel (j, k) takých, že $0 \leq j \leq k < d$, ľubovoľná j-stena K je prienikom všetkých k-stien, ktoré ju obsahujú.*

Dôkaz: Nech $\{F_1, \ldots, F_r\} \neq \emptyset$ je množina stien polytopu K. Nech $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$. Predpokladajme, že F nie je prázdna množina, v opačnom prípade ide o stenu. Nech $\mathbf{o} \in F$. Nech $H_i = Z((\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{n}_i)$ sú oporné nadroviny K pozdĺž stien F_i, pričom $K \subset \overline{H_i^+}$ pre $i = 1, \ldots, r$. Nech $\mathbf{n} = \sum_{i=1}^r \mathbf{n}_i$. Potom $H = Z((\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{n})$ je oporná ku K pozdĺž F.

Nech teraz $\{F_1, \ldots, F_m\}$ sú všetky $(d-1)$-steny polytopu K a $\{H_1, \ldots, H_m\}$ sú ich oporné nadroviny. Nech F je $(d-2)$-stena K. Potom $F \subset F_j$ pre nejaké $j \in \{1, \ldots, m\}$ a

$$F_j = H_j \cap K = H_j \cap \left(\bigcap_{k \neq j} \overline{H_k^+} \right) = \bigcap_{k \neq j} \left(H_j \cap \overline{H_k^+} \right). \tag{10}$$

Každá $(d-2)$-stena $F \subset F_j$, sa dá vyjadriť ako

$$F = (H_j \cap H_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i,j} (H_j \cap \overline{H_k^+}) \right) = (H_j \cap H_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i,j} \overline{H_k^+} \right), \tag{11}$$

čo sa dá napísať ako

$$F = (H_i \cap H_j) \cap K = F_i \cap F_j. \tag{12}$$

K tretiemu tvrdeniu potrebujeme najskôr niekoľko pomocných faktov. Indukciou ukážeme, že každá j-stena je stenou nejakej k-steny polytopu K. Podobne sa indukciou dokáže, že ľubovoľná j-stena polytopu K sa dá napísať ako prienik všetkých $(d-1)$-stien, ktoré ju obsahujú.

Nech $0 \leq j \leq k \leq d-2$. Nech F je j-stena polytopu K. Prienik všetkých k-stien polytopu K obsahujúcich F je stenou K. Stačí ukázať, že F je prienikom niektorých k-stien polytopu K. Platí ale, že F je stenou nejakej $(k+1)$-steny G polytopu K. Teda F je prienikom všetkých k-stien steny G, ktoré ju obsahujú. Ale k-steny G sú aj k-stenami K, teda tvrdenie platí. □

Cvičenie 1.7. *Podrobne si dokážte všetky tvrdenia, ktoré sme použili v dôkaze vety 1.8.*

Cvičenie 1.8. *Premyslite si, či a ako fungujú všetky definície, vety a ich dôkazy, keď za konvexný polytop zoberieme prázdnu množinu.*

2. Polarita

Teraz si podrobnejšie opíšeme polárne zobrazenie medzi bodmi a nadrovinami priestoru $\mathbb{E}^d$.

Nech bod $\mathbf{o} \in \mathbb{E}^d$ je začiatok súradnicovej sústavy. Bijektívne zobrazenie medzi bodmi $\mathbb{E}^d - \{\mathbf{o}\}$ a nadrovinami neobsahujúcimi bod $\mathbf{o}$ dané predpisom pre $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^d, \mathbf{a} \neq \mathbf{o}$

$$\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^* = \{\mathbf{x} \in E^d; (\mathbf{a} - \mathbf{o})(\mathbf{x} - \mathbf{o}) = 1\}$$

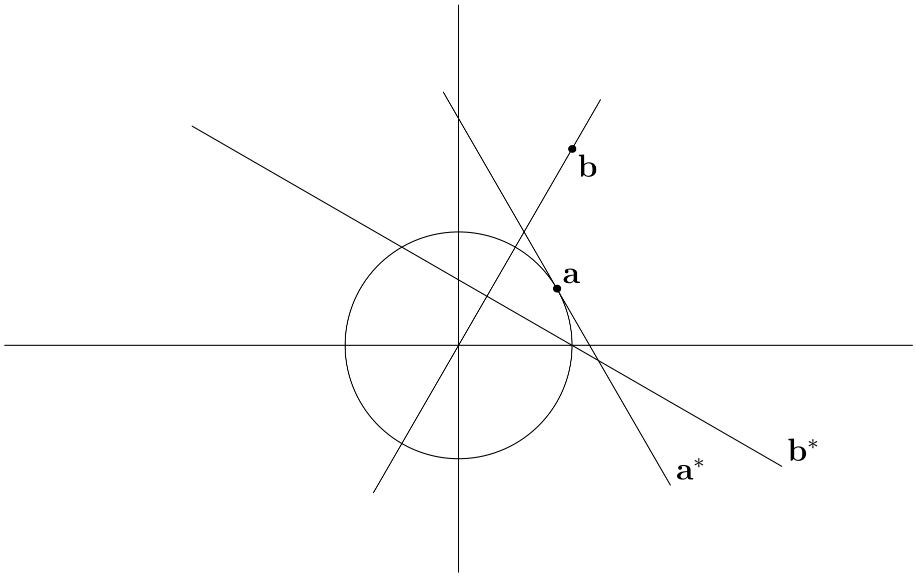
sa nazýva polarita vzhľadom na jednotkovú guľovú plochu v E^d danú rovnicou $(\mathbf{x}-\mathbf{o})(\mathbf{x}-\mathbf{o}) = 1$ (pozri obr. 1). Ďalej toto zobrazenie budeme nazývať len polaritou. Inverzné zobrazenie pre nadrovinu H takú, že $\mathbf{o} \notin H$, je dané predpisom

$$H \mapsto H^*, \text{ ak } H = \{\mathbf{x} \in E^d; (\mathbf{x} - \mathbf{o})(H^* - \mathbf{o}) = 1\}$$

Nadrovinu $\mathbf{a}^*$ budeme nazývať polárnou nadrovinou bodu $\mathbf{a}$ (vzhľadom na jednotkovú guľovú plochu) a bod H^* budeme nazývať pólom nadroviny H (vzhľadom na jednotkovú guľovú plochu).

Dôkazy dvoch nasledujúcich pomocných tvrdení sú triviálne.

Lema 2.1. *Nech $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \mathbf{o} \notin H$. Potom $\mathbf{a} \in H$ práve vtedy, keď $H^* \in \mathbf{a}^*$.*



OBRÁZOK 1. Polarita vzhľadom na jednotkovú kružnicu v rovine E^2.

Polaritu budeme využívať pre konvexné mnohosteny a s nimi spojené konštrukcie. Označme H^+ otvorený polpriestor vyťatý nadrovinou H obsahujúci bod $\mathbf{o}$. Podobne H^- označme k nemu opačný otvorený polpriestor. Teda

$$H^+ = \{\mathbf{x} \in E^d; (\mathbf{x} - \mathbf{o})(H^* - \mathbf{o}) < 1\} \quad H^- = \{\mathbf{x} \in E^d; (\mathbf{x} - \mathbf{o})(H^* - \mathbf{o}) > 1\}$$

Ďalej označme $\overline{H^+}$ uzavretý polpriestor vyťatý nadrovinou H obsahujúci bod $\mathbf{o}$ a opačný uzavretý polpriestor označme $\overline{H^-}$.

LEMA 2.2. *Bod $\mathbf{a} \in H^+$ práve vtedy, keď $H^* \in (\mathbf{a}^*)^+$. Podobne bod $\mathbf{a} \in H^-$ práve vtedy, keď $H^* \in (\mathbf{a}^*)^-$.*

Označme ďalej $P^\# = \overline{(P^*)^+}$ pre $P \in E^d$. Množinu $P^\#$ budeme nazývať polárnym obrazom bodu P. Môžme písať $P^\# = \{\mathbf{x} \in E^d; (\mathbf{x} - \mathbf{o})(\mathbf{x} - P) \leq 1\}$. Pre množinu bodov $\mathcal{A}$ je polárnym obrazom množina $\mathcal{A}^\# = \{\mathbf{y} \in E^d; (\mathbf{y} - \mathbf{o})(\mathbf{x} - \mathbf{o}) \leq 1, \text{pre každé} \mathbf{x} \in \mathcal{A}\}$. Z definície vidno, že $\mathcal{A}^\#$ je konvexná množina. Podobne, ak platí $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, tak $\mathcal{B}^\# \subset \mathcal{A}^\#$.

LEMA 2.3. *Nech P je polytop obsahujúci vo svojom vnútri bod $\mathbf{o}$. Polárny obraz $P^\#$ je polytop obsahujúci vo svojom vnútri bod $\mathbf{o}$ (pozri obr. 2).*

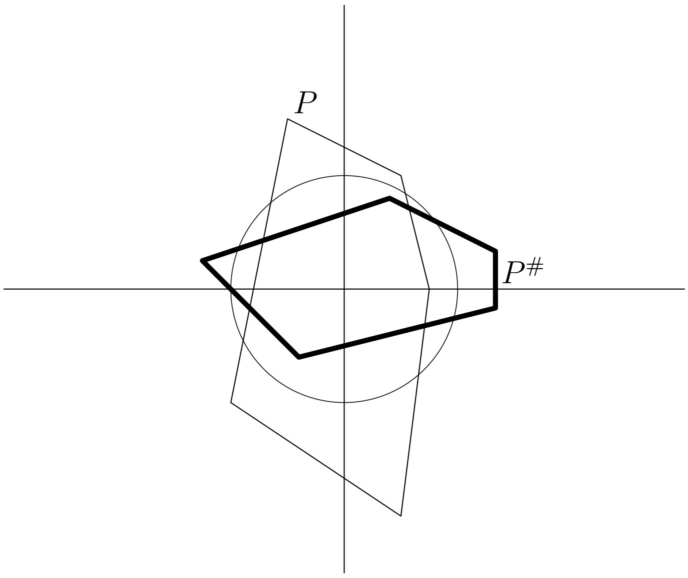
Dôkaz: Ak $P = \mathrm{conv}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, tak $P^\# \subset \bigcap_{i=1}^n \overline{(\mathbf{x}^*)^+}$. Stačí ukázať, že $\overline{(P^*)^+} \subset P^\#$. Ukážeme to tak, že z $\mathbf{y} \notin P^\#$ dokážeme $\mathbf{y} \notin \bigcap_{i=1}^n \overline{(\mathbf{x}^*)^+}$.

Nech $\mathbf{y} \notin P^\#$, potom existuje také $\mathbf{x} \in P$, že $(\mathbf{y} - \mathbf{o})(\mathbf{x} - \mathbf{o}) > 1$. Keďže bod $\mathbf{x}$ sa dá napísať ako konvexná kombinácia bodov $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, tak aspoň pre jeden bod $\mathbf{x}_i$ musí platiť $(\mathbf{y} - \mathbf{o})(\mathbf{x}_i - \mathbf{o}) > 1$, a teda $\mathbf{y} \notin \overline{(\mathbf{x}_i^*)^+}$.

Keďže $\mathbf{o} \in P$, potom existuje $\epsilon > 0$ také, že $B_\epsilon(\mathbf{o}) \subset P$. Potom ale $P^\# \subset B_{\frac{1}{\epsilon}}(\mathbf{o}) = B_\epsilon(\mathbf{o})^\#$. Teda $P^\#$ je ohraničená množina. Z ohraničenosti P analogicky vyplýva, že $\mathbf{o} \in P^\#$.

Teda $P^\#$ je neprázdny ohraničený prienik konečného počtu polpriestorov, čiže polytop.

□



OBRÁZOK 2. Polárny obraz konvexného mnohouholníka obsahujúceho počiatok sústavy súradníc

VETA 2.1. *Polárna transformácia mnohostenov je involúcia*[1] *na množine mnohostenov priestoru* E^d *obsahujúcich* $\mathbf{o}$ *vo svojom vnútri t.j.* $P^{\#\#} = P$.

Dôkaz: Priamo z definície polárnej transformácie množiny vyplýva, že $P \subset P^{\#\#}$. Ešte ukážeme, že bod $\mathbf{z}$ nepatriaci do P nepatrí ani do $P^{\#\#}$. Nech $\mathbf{z} \notin P$. Polytop možno získať ako prienik polpriestorov $P = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{(H_i)^+}$, kde $\overline{(H_i)^+}$ sú polpriestory definované opornými rovinami ku stenám polytopu P. To znamená, že jedna polrovina musí separovať $\mathbf{z}$ od P. Označme ju H_k. Pre H_k^* a každé $\mathbf{x} \in P$ potom platí $(\mathbf{x} - \mathbf{o})(H_k^* - \mathbf{o}) \leq 1$ ako aj $(\mathbf{z} - \mathbf{o})(H_k^* - \mathbf{o}) > 1$. Teda $H_k^* \in P^{\#}$, z čoho potom už vyplýva, že $\mathbf{z} \notin P^{\#\#}$. □

LEMA 2.4. *Ak* $\mathbf{a} \in E^d$ *je na hranici polytopu* P*, tak polárna nadrovina* $\mathbf{a}^*$ *k bodu* $\mathbf{a}$ *je opornou nadrovinou ku* $P^{\#}$.

Dôkaz: Pre ľubovoľný bod $\mathbf{a} \in P$ platí, že $P^{\#} \subset \overline{(\mathbf{a}^*)^+}$. Bod $\mathbf{a}$ patrí aj nejakej opornej nadrovine H k polytopu P. Potom ale $H^* \in P$ aj $H^* \in \mathbf{a}^*$. Teda $\mathbf{a}^* \cap P^{\#} \neq \emptyset$, čo znamená, že $\mathbf{a}^*$ je oporná nadrovina $P^{\#}$. □

VETA 2.2. *Medzi k-stenami polytopu* P *a* $(d-1-k)$*-stenami polytopu* $P^{\#}$ *existuje bijekcia pre* $k = 0, \ldots, d-1$.

Dôkaz: S každou stenou $F \in P$ môžme asociovať množinu $F^* = \{\mathbf{y} \in P^{\#}; (\mathbf{y} - \mathbf{o})(\mathbf{x} - \mathbf{o}) = 1, \text{pre všetky} \mathbf{x} \in F\}$. Množina F^* je stenou polytopu $P^{\#}$. (Pretože $F^* = \bigcap_{\mathbf{x} \in F}(P^{\#} \cap \mathbf{x}^*)$ a z predchádzajúcej lemy vyplýva, že $\mathbf{x}^*$ je opornou ku $P^{\#}$, teda $P^{\#} \cap \mathbf{x}^*$ je stenou $P^{\#}$. A keďže v polytope platí, že prienik stien polytopu je opäť stenou polytopu,

Ukážeme, že $F^{**} = F$. To bude mať za následok, že zobrazenie, ktoré priradí stene F stenu F^* je bijektívne. Keďže $F^{**} = \{\mathbf{x} \in P^{\#\#}; (\mathbf{x} - \mathbf{o})(\mathbf{y} - \mathbf{o}) = 1, \text{pre všetky} \mathbf{y} \in F^*\}$ a $P = P^{\#\#}$, tak $F \subset F^{**}$. Nech bod $\mathbf{x} \in P$ a $\mathbf{x} \notin F$. Nech H je opornou nadrovinou ku P obsahujúcou stenu F. Potom $\mathbf{x} \in H^+$ čiže $(\mathbf{x} - \mathbf{o})(H^* - \mathbf{o}) < 1$. Pri tom všetkom bod $H^* \in F^*$, čo znamená, že $\mathbf{x} \notin F^{**}$. Tým sme ukázali, že $F = F^{**}$.

[1]Involúcia je transformácia inverzná sama k sebe. Takéto transformácie sú významné vo veľa oblastiach.

Ešte ukážeme, že dimenzie F a F^* dávajú v súčte $d-1$. Nech dimenzia F je k. Potom v stene F existuje $k+1$ lineárne nezávislých bodov. To ale znamená, že F^* je prienikom $k+1$ nadrovín, ktorých normálové vektory sú lineárne nezávislé, teda prienik musí mať dimenziu najviac $d-1-k$. Z faktu, že $F = F^{**}$ však vyplýva, že táto dimenzia sa aj dosiahne.

□

Nás v ďalšom budú zaujímať najmä dôsledky tejto vety, ktoré sú priamo aplikovateľné v algoritmoch na prienik konvexných mnohostenov v E^3. Pomocou nich môžeme hľadanie prieniku ľahko previesť na tvorbu konvexného obalu. Po stránke asymptotickej zložitosti týmto prístupom nestratíme. Dôkazy prenechávame ako cvičenie.

DÔSLEDOK 2.1. *Platí:*

1. *Nech* $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *sú vrcholy* $P \subset \mathbb{E}^d$, *potom* $\{\mathbf{p}_1^*, \ldots, \mathbf{p}_n^*\}$ *sú oporné nadroviny polytopu* $P^\#$ *obsahujúce všetky* $(d-1)$*-steny t.j.*

$$P = \mathrm{conv}(\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}) \text{ práve vtedy, keď } P^\# = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{p}_i^{*+}}.$$

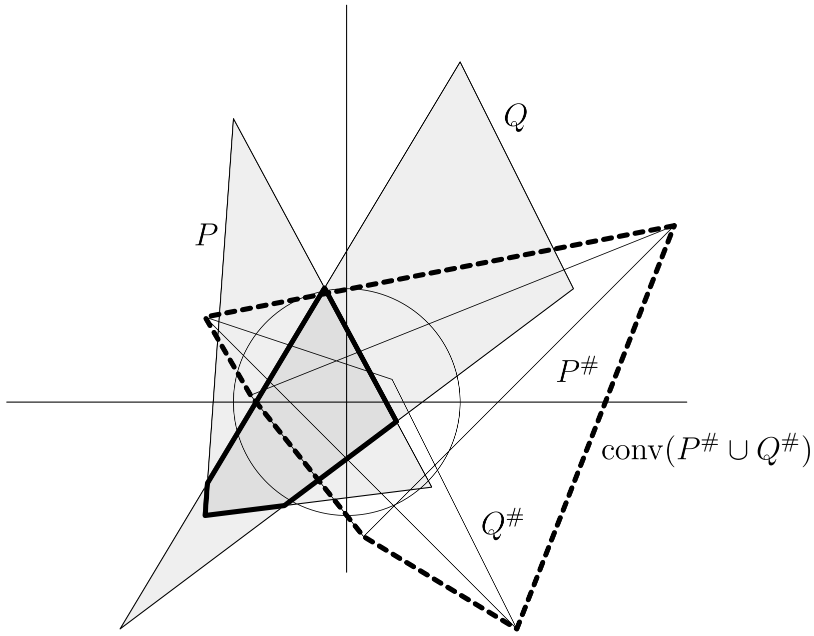
2. *Nech* $\{H_1, \ldots, H_n\}$ *sú oporné nadroviny polytopu* $P \subset E^d$ *obsahujúce všetky* $(d-1)$*-steny, potom* $\{H_1^*, \ldots, H_n^*\}$ *sú vrcholmi polytopu* $P^\#$ *t.j.*

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{H_i^+} \text{ práve vtedy, keď } P^\# = \mathrm{conv}(\{H_1^*, \ldots, H_n^*\}).$$

3. *Ak* $\mathbf{a} \in P$ *je vnútorný bod, tak* $\mathbf{a}^*$ *a* $P^\#$ *sú disjunktné.*
4. *Ak* $\mathbf{a} \notin P$, *tak* $\mathbf{a}^*$ *a* $P^\#$ *majú spoločný prienik.*
5. *Ak* $P = \mathrm{conv}(\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\})$, $Q = \mathrm{conv}(\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\})$ *a* $\mathbf{o} \in P \cap Q$, *tak platí rovnosť* $P \cap Q = \mathrm{conv}(P^\# \cup Q^\#)^\#$ *(pozri obr. 3).*

CVIČENIE 2.1. *Dokážte podrobne predchádzajúce dôsledky.*

Na obrázku 3 je ilustrovaný príklad prieniku (vytiahnuté hrubou plnou čiarou) dvoch trojuholníkov (sú kreslené čiarou prostrednej hrúbky). Ich polárne obrazy sú nakreslené tenkou čiarou. Konvexný obal zjednotenia polárnych obrazov je nakreslený čiarkovanou hrubou čiarou.



Obrázok 3. Prienik konvexných mnohouholníkov zostrojený pomocou polárnej transformácie.