

OBRAZOVÉ TRANSFORMÁCIE

Motivácia – na zlepšenie obrazu sa používajú frekvenčné metódy a priestorové metódy.

Fourierova transformácia

Jednorozmerný spojitý prípad

Nech $f(x)$ je spojitá funkcia reálnej premennej x . Fourierovou transformáciou tejto funkcie sa nazýva funkcia $F(u)$, definovaná ako

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp[-i2\pi ux] dx .$$

Ak je dané $F(u)$, potom získame $f(x)$ pomocou inverznej Fourierovej transformácie

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \exp[i2\pi ux] du .$$

Obrazové funkcie, s ktorými pracujeme sú reálne, ich Fourierove transformácie sú vo všeobecnosti komplexné, t.j.

$$F(u) = R(u) + i I(u) ,$$

kde $R(u)$ a $I(u)$ sú reálna a imaginárna zložka. Často sa píše tento vzťah v tvare

$$F(u) = |F(u)| e^{i\phi(u)} ,$$

kde

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad (\text{to je Fourierove spektrum})$$

a

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right] \quad (\text{to je fázový uhol}).$$

Premenná u sa nazýva frekvenčná premenná.

S použitím Eulerovej formuly napíšeme $\exp[-i2\pi ux]$ ako $\cos 2\pi ux - i \sin 2\pi ux$, potom FT možno interpretovať ako nekonečnú sumu kosínusových a sínusových prvkov. Príklad jednoduchej funkcie a jej Fourierovho spektra.

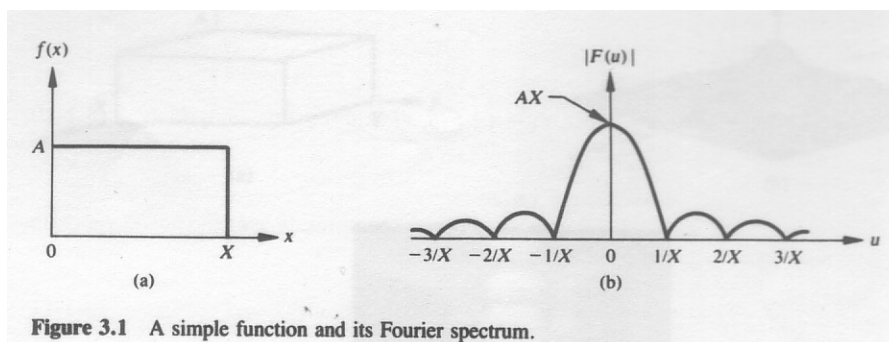


Figure 3.1 A simple function and its Fourier spectrum.

$$F(u) = \frac{A}{\pi u} \sin(\pi u X) e^{-i\pi u X}$$

a

$$|F(u)| = AX \left| \frac{\sin(\pi u X)}{(\pi u X)} \right|.$$

Dvojrozmerný spojitý prípad

Fourierovu transformáciu možno ľahko zovšeobecniť na funkcie s dvoma premennými.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-i 2\pi(ux + vy)] dx dy$$

a

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \exp[i 2\pi(ux + vy)] du dv.$$

Podobne ako v jednorozmernom prípade je definované aj Fourierovo spektrum a fázový uhol.

Uvedieme podobný príklad a jeho Fourierovu transformáciu a jej spektrum.

$$F(u, v) = AXY \left[\frac{\sin(\pi u X) e^{-i\pi u X}}{(\pi u X)} \right] \left[\frac{\sin(\pi v Y) e^{-i\pi v Y}}{(\pi v Y)} \right]$$

$$|F(u, v)| = AXY \left| \frac{\sin(\pi u X)}{(\pi u X)} \right| \left| \frac{\sin(\pi v Y)}{(\pi v Y)} \right|$$

Spektrum je zobrazené ako jasová funkcia, kde jas je priamo úmerný amplitúde. Ďalej sú uvedené ďalšie príklady funkcií a ich spektier.

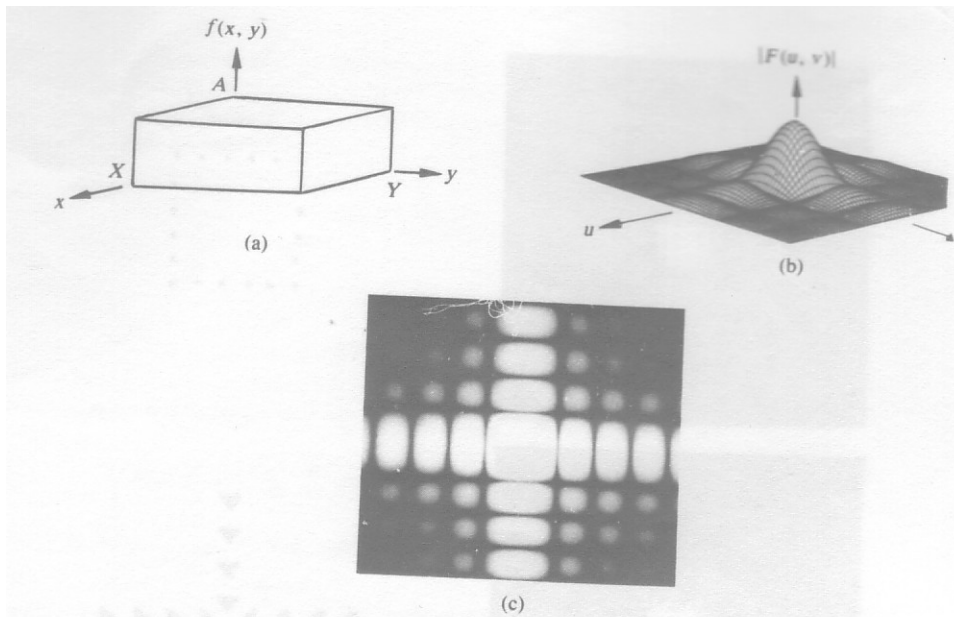


Figure 3.2 (a) A two-dimensional function, (b) its Fourier spectrum, and (c) the spectrum displayed as an intensity function.

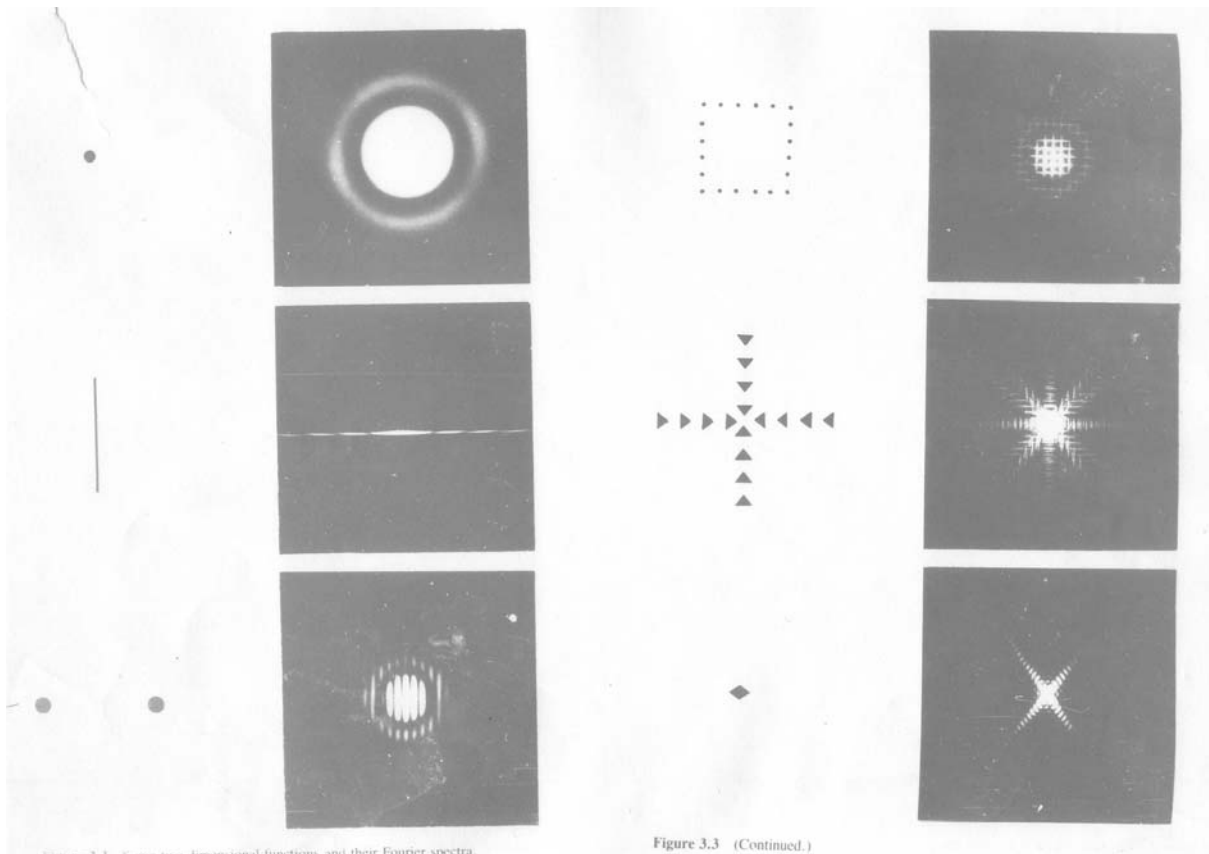


Figure 3.3 (Continued.)

Diskrétna Fourierova transformácia dvojrozmerná

Obrazovú funkciu f budeme reprezentovať ako maticu $M \times N$. Transformačné matice $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ rozmeru $M \times M$ a $N \times N$ budú transformovať obraz na maticu F rozmeru $M \times N$.

$$F = \mathbf{P} f \mathbf{Q},$$

čo možno napísať ako

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} P(u, m) f(m, n) Q(n, v),$$

kde $u = 0, 1, \dots, M-1$ a $v = 0, 1, \dots, N-1$.

Ak $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ sú nesingulárne (nemajú nulový determinant), potom existujú aj inverzné matice $\mathbf{P}^{-1}$ a $\mathbf{Q}^{-1}$ a inverznú transformáciu možno vypočítať ako

$$f = \mathbf{P}^{-1} F \mathbf{Q}^{-1}.$$

Matica je symetrická, ak $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$. Matica je ortogonálna, ak $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je identická matica. Pre každú symetrickú, reálnu a ortogonálnu maticu platí, že $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}$

Uvažujme transformačnú maticu rozmeru $J \times J$ ako

$$\phi_{JJ}(k, l) = \frac{1}{J} \exp \left[-i \frac{2\pi}{J} kl \right], \quad \text{kde } k, l = 0, 1, \dots, J-1.$$

Diskrétnu Fourierovu transformáciu možno definovať pomocou transformačných matíc $\mathbf{P} = \phi_{MM}$ a $\mathbf{Q} = \phi_{NN}$.

Potom

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-i 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right]$$

a inverzná FT

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[i 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right].$$

Tento vzťah možno interpretovať tak, že obrazová funkcia $f(m, n)$ je lineárnou kombináciou periodických členov $\exp \left[i 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right]$ a $F(u, v)$ sú váhy.

Jadrom diskkrétnej transformácie je člen

$$\exp \left[-i 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right].$$

Pri implementácii FT vychádzame z toho, že jej rovnicu možno modifikovať na

$$F(u, v) \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-i2\pi mnv}{N}\right) f(m, n) \right] \exp\left(\frac{-i2\pi mu}{M}\right),$$

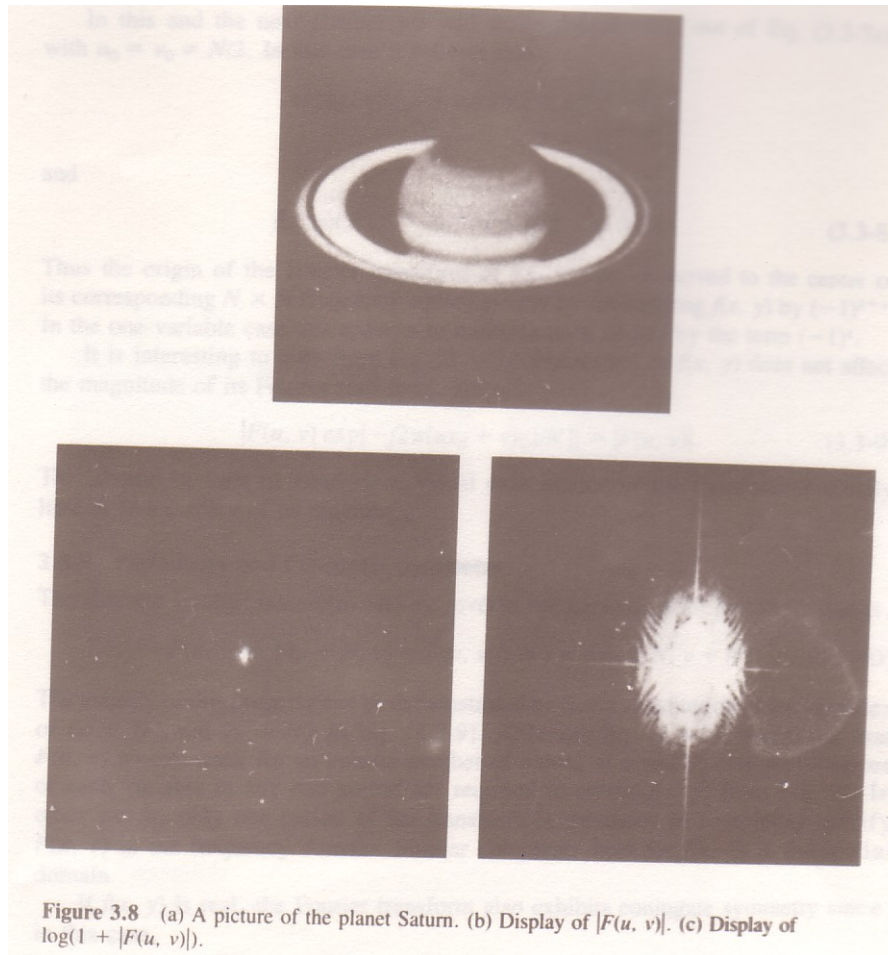
kde člen v hranatých zátvorkách zodpovedá jednorozmernej FT m-tého riadku a možno ho vypočítať s použitím FFT, ktorá má zložitosť $N \log N$ namiesto N^2 . Zrýchlenie, ktoré sa takto dosiahne, ilustruje nasledovná tabuľka.

Table 3.1 A Comparison of N^2 versus $N \log_2 N$ for Various Values of N

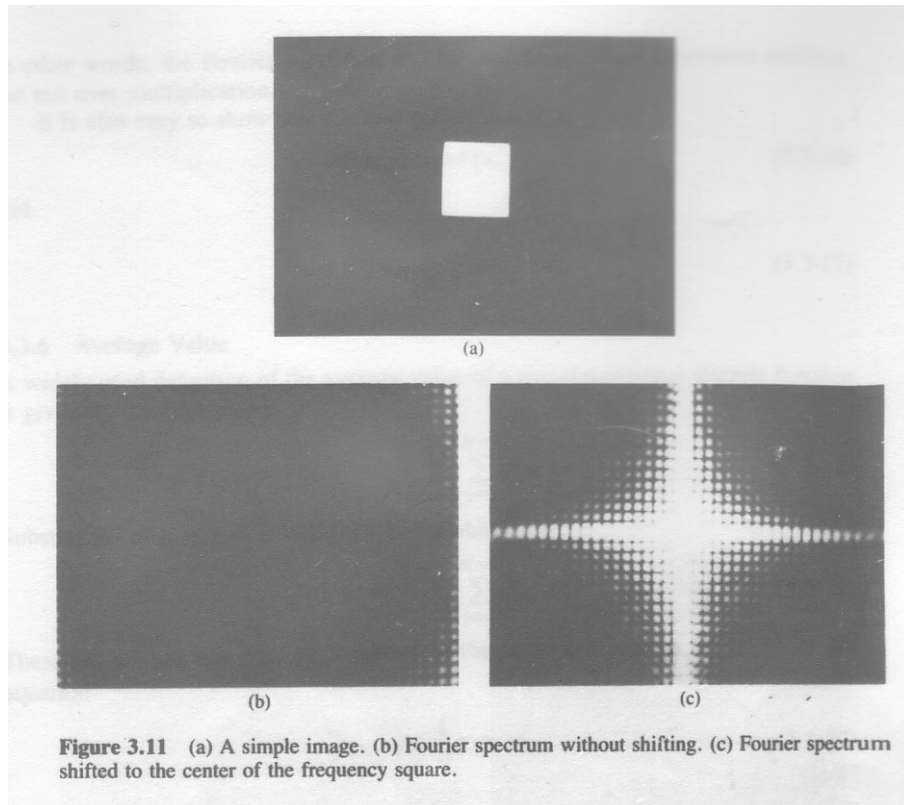
N	N^2 (Direct FT)	$N \log_2 N$ (FFT)	Computational Advantage ($N/\log_2 N$)
2	4	2	2.00
4	16	8	2.00
8	64	24	2.67
16	256	64	4.00
32	1,024	160	6.40
64	4,096	384	10.67
128	16,384	896	18.29
256	65,536	2,048	32.00
512	262,144	4,608	56.89
1024	1,048,576	10,240	102.40
2048	4,194,304	22,528	186.18
4096	16,777,216	49,152	341.33
8192	67,108,864	106,496	630.15

Vlastnosti DFT

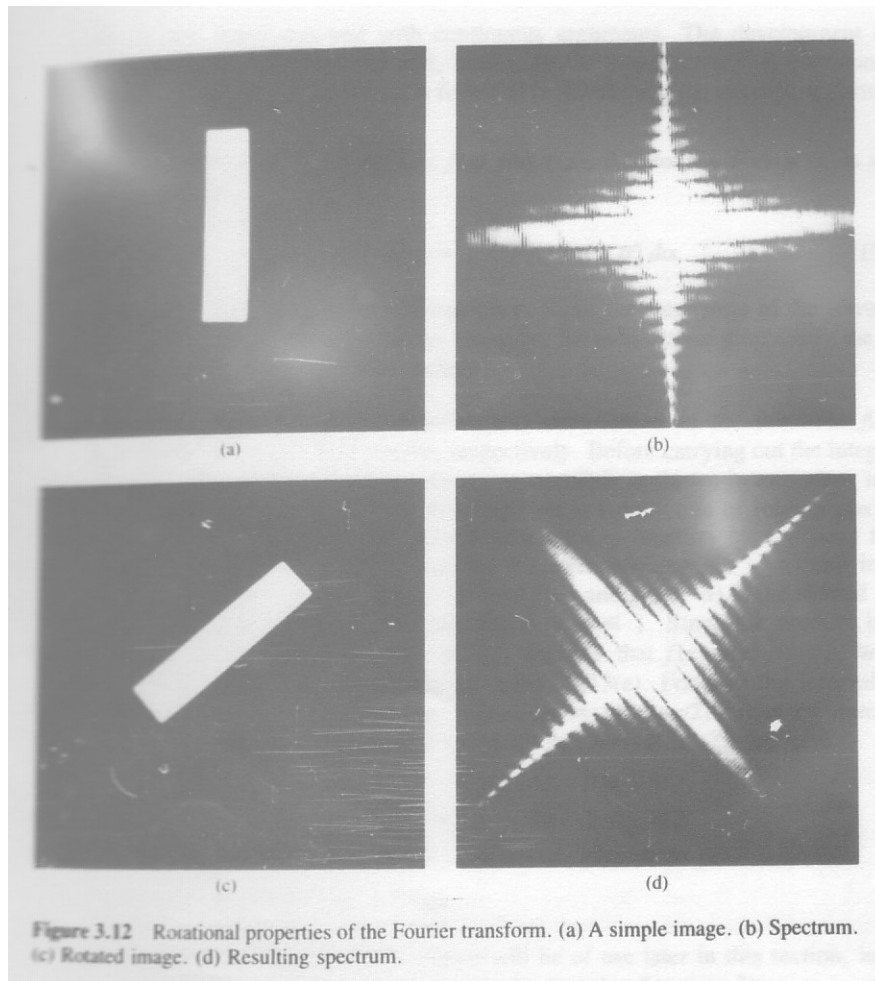
Odozvu FT lepšie vnímame, ak použijeme logaritmus Fourierovho spektra, inak ho monitory neodkážu zobrazit' dostatočne.



FT – je periodická s periódou N , to znamená, že na jej určenie stačí jedna perióda vo frekvenčnej oblasti.



Ak otočíme obrazovú funkciu o nejaký uhol, otočí sa FT o ten istý uhol a naopak.



FT je distributívna vzhľadom na sčítanie, ale nie vzhľadom na násobenie.

FT a konvolučná teoréma. V predspracovaní obrazu často robíme konvolúciu dvoch obrazových funkcií (obrazu a nejakej konvolučnej masky), pričom na zrýchlenie výpočtu (najmä pre masky väčšie ako 7×7) možno použiť FT. Ak máme konvolúciu dvoch funkcií $f(x) * g(x)$, potom ich FT je funkcia $F(u)G(u)$. Ak teda urobím súčin FT vo frekvenčnej oblasti a z toho inverznú transformáciu, dostaneme výsledok konvolúcie príslušných funkcií. Analogicky konvolúcia vo frekvenčnej oblasti sa dá redukovať na násobenie v obrazovej oblasti.

Ak konvolúciu zapíšeme ako

$$g(a,b) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) h(a-m, b-n),$$

potom ich FT sú vo vzťahu

$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v), \text{ to je násobenie po zložkách.}$$

Potom

$$g(a,b) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u,v) H(u,v) \exp \left[i2\pi \left(\frac{au}{M} + \frac{bv}{N} \right) \right].$$

Zhrnutie: FT možno reprezentovať množinou ortogonálnych sínusových vlnových foriem, jej koeficienty sa nazývajú frekvenčné komponenty a vlnové formy sú usporiadané podľa frekvencie.

Hadamardova transformácia

Ak $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ sú Hadamardove matice, potom F sa nazýva Hadamardova transformácia. Idea spočíva v nahradení sínusových foriem štvorcovými formami, ktoré sú organizované do Hadamardových matic, ktoré sú symetrickými maticami rozmeru $J \times J$, pričom všetky ich hodnoty sú ± 1 . Hadamardova matica rozmeru 2×2 je

$$\mathbf{H}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hadamardova matica rozmeru 2^k je

$$\mathbf{H}_{2^k 2^k} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{JJ} & \mathbf{H}_{JJ} \\ \mathbf{H}_{JJ} & -\mathbf{H}_{JJ} \end{bmatrix}$$

Potom

$$f = \frac{1}{MN} \mathbf{H}_{MM} F \mathbf{H}_{NN}$$

Diskrétna kosínusová transformácia

Najčastejšie používaná je DCT II, v ktorej bázové vektory sú vzorkované kosínusové funkcie. Ak uvažujeme štvorcový obrázok, potom transformačnú maticu možno napísať ako

$$C_{NN}(k, l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{pre } l = 0$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left[\frac{(2k+1)l\pi}{2N} \right] \quad \text{pre ostatné } k, l$$

Potom

$$F = C_{NN} f C_{NN}^T \quad \text{a} \quad f = C_{NN}^T F C_{NN}$$

Wavelety (Vlnkové transformácie)

To je ďalší prístup ku dekompozícii zložitých signálov na sumu bázových funkcií, v tomto sú podobné na FT, ale sú aj rozdielne. Fourierove funkcie sú lokalizované vo frekvencii, ale nie v priestore, v tom zmysle, že izolujú frekvencie, ale nie ich výskyt v čase. To znamená malá zmena vo frekvencii spôsobí zmenu v celom časopriestore. Wavelety sú lokálne aj vo frekvencii aj v čase a preto lepšie analyzujú dáta v rozličných rozlíšeníach ako jednoduché sínusy a kosínusy. Predstavte si, že chcete modelovať funkciu so strmým vrcholom, lepšie to dokážu wavelety ako funkcie na báze sínusov a kosínusov.

Použitie diskretných obrazových transformácií

- **na kódovanie obrazu** (napr. DCT II je základom normy JPEG)
- **na frekvenčné filtrovanie**, kde bežnú konvolúciu prevedieme na násobenie Fourierových transformácií a inverznou FT dostaneme výsledok.

Základné príklady sú nízkofrekvenčný, vysokofrekvenčný a pásmovofrekvenčný filter. **Nízkofrekvenčný** filter je taký, že frekvenčná transfer funkcia $H(u,v)$ má malé hodnoty ďalej od počiatku súradníc (takže má malé transfer hodnoty pre vysoké frekvencie) a zvyšok hodnoty pre body blízke počiatku (to sú nízke frekvencie). Potláča vysoké frekvencie a zachováva nízke, správa sa ako vyhladzovací filter.

Vysokofrekvenčný filter sa správa opačne, čiže posilňuje vysoké frekvencie a potláča nízke frekvencie, má ostriaci charakter.

Pásmový filter je konštruovaný podobne, so zvýraznením určitého pásma a potlačením ostatných frekvencií.

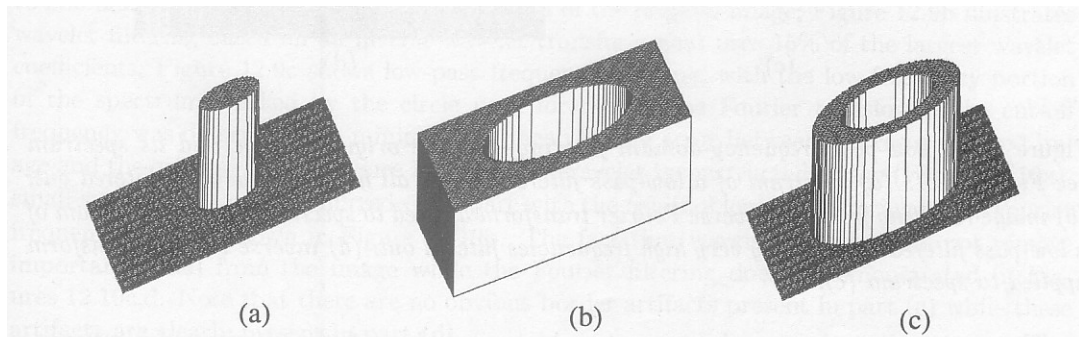
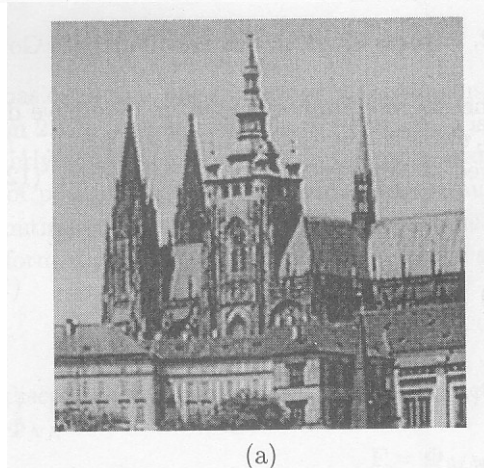


Figure 12.4: Frequency filters displayed in 3D: (a) low-pass filter; (b) high-pass filter; (c) band-pass filter.



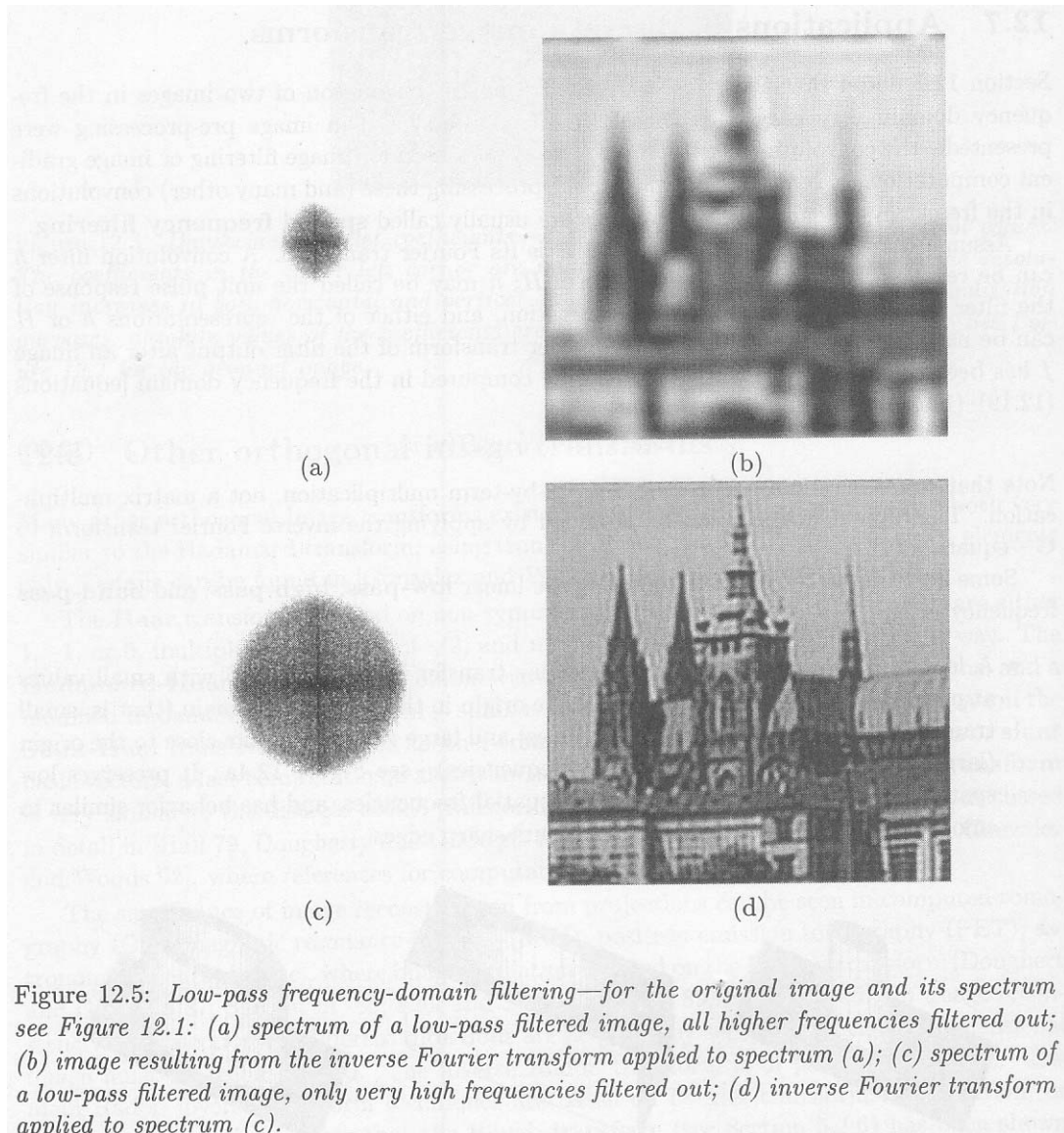
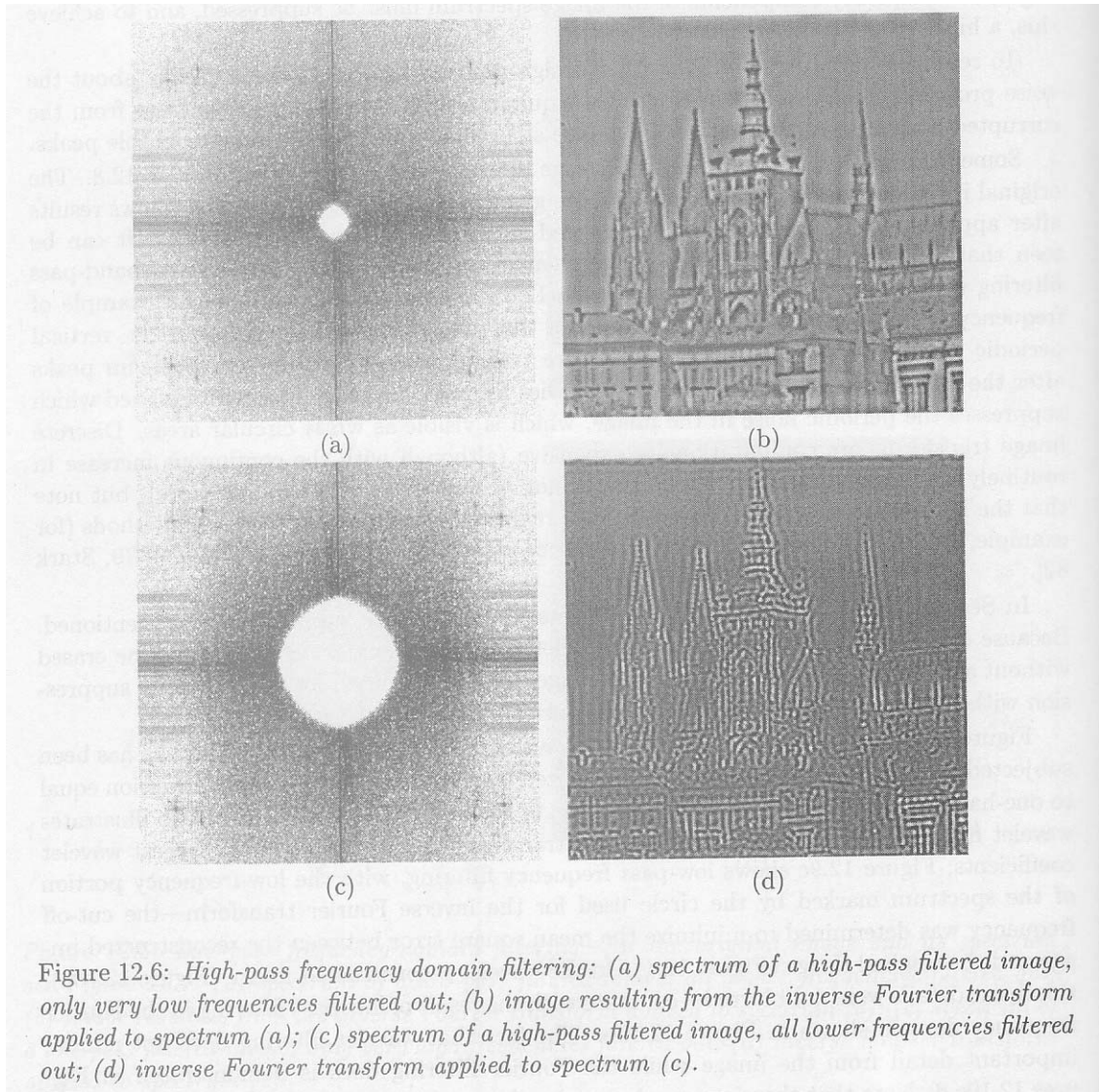
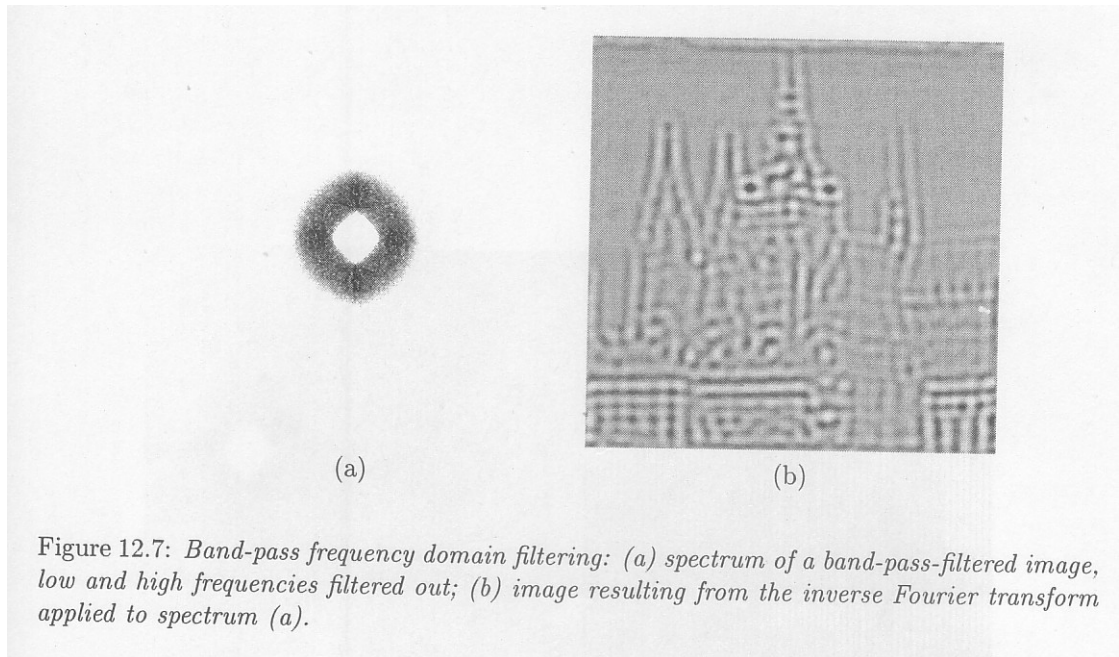


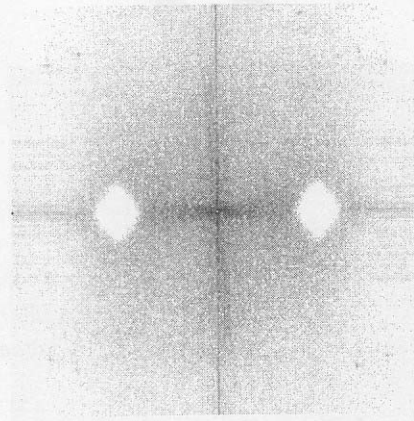
Figure 12.5: *Low-pass frequency-domain filtering—for the original image and its spectrum see Figure 12.1: (a) spectrum of a low-pass filtered image, all higher frequencies filtered out; (b) image resulting from the inverse Fourier transform applied to spectrum (a); (c) spectrum of a low-pass filtered image, only very high frequencies filtered out; (d) inverse Fourier transform applied to spectrum (c).*



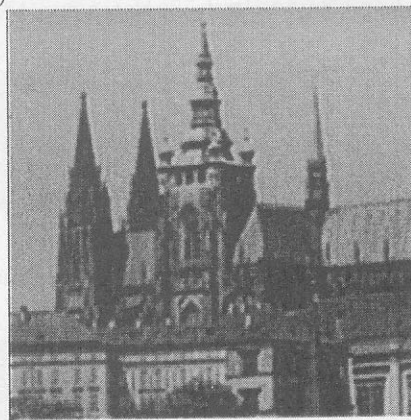




(a)



(b)



(c)

Figure 12.8: *Periodic noise removal: (a) noisy image; (b) image spectrum used for image reconstruction—note that the areas of frequencies corresponding with periodic vertical lines are filtered out; (c) filtered image.*