Rozpoznávanie obrazcov
šk.r. 2019-20

Pravdepodobnosť

Doc. RNDr. Milan Ftáčnik, CSc.

Odbočka do matematiky

Pravdepodobnosť

- Abstraktný matematický model neurčitosti
- Modeluje deje, v ktorých hrá úlohu náhodnosť
- Dedukcia: usudzovanie zo všeobecného na konkrétne
- Populáciu poznáme – čo môžeme povedať o konkrétnej vzorke (výbere)?

Štatistika

- Zber, organizácia a analýza dát
- Zovšeobecňuje z konečných vzoriek
- Odhad parametrov, testovanie hypotéz
- Indukcia: usudzovanie z konkrétneho na všeobecné
- Vzorku poznáme - čo môžeme povedať o populácii?
- Tak fungujú experimentálne vedy

Pravdepodobnosť vs. štatistika

- Ktorú otázku si kladie pravdepodobnosť a ktorú štatistika?
- Ak sme už kúpili niekoľko rovnakých výrobkov a niektoré sa pokazili, čo vieme povedať o tomto type výrobku vo všeobecnosti?
- Ak poznáme kazivosť daného typu výrobku, čo vieme povedať o konkrétnom výrobku, ktorý si kupujeme?

História pravdepodobnosti

- Hľadanie úspechu v hazardných hrách
- Hra: Hod férovou kockou
  - Ak padne 2,3 alebo 4, vyhráte 1 Euro
  - Ak padne 5, vyhráte 2 Eurá
  - Ak padne 1 alebo 6, prehráte 3 Eurá
- Kto by hral takúto hru?

Definícia pravdepodobnosti

- Klasická (Laplaceova): Relatívna početnosť výsledku *A* v *N* pokusoch

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

- Limitná: Relatívna početnosť v nekonečne veľkom počte pokusov

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

Definícia pravdepodobnosti II

- Axiomatická (Kolmogorovova):
- Pole javov $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω, t.j. je to systém podmnožín priestoru Ω obsahujúci Ω a uzavretý voči doplnku a zjednoteniu, čiže

$$1.\ \Omega \in \mathcal{A}, \qquad 2.\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$$

$$3.\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Definícia pravdepodobnosti III

- Pravdepodobnosť je funkcia

$P\colon \mathcal{A} \to \langle 0,1 \rangle$, ktorá spĺňa

$$P(\Omega) = 1,$$

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n),$$

ak javy A_n sú po dvoch disjunktné.

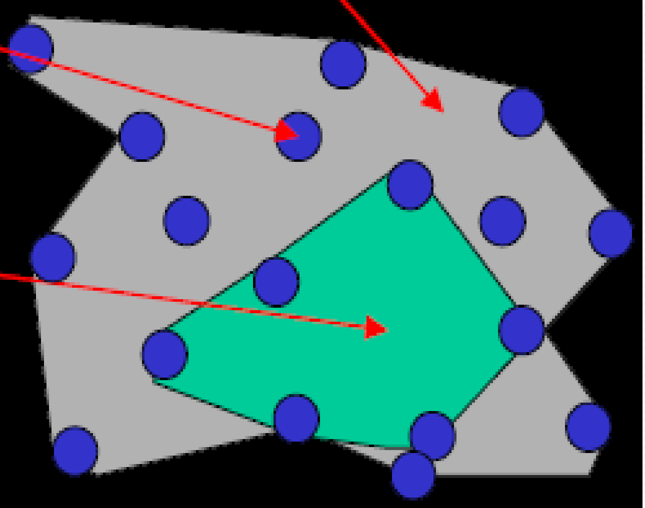
- Pravdepodobnostný priestor označujeme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ukážka

Množina všetkých možných výstupov =
výberový priestor

Jednotlivé prvky = elementárne javy

Podmnožina výberového priestoru =
(náhodný) jav



Javy

- ***Diskrétne:*** (napr. hod kockou alebo mincou, počet detí v rodine, ...)
- ***Spojité:*** (napr. rozmer výrobku, výška hráčov, ...)
- ***Kvantitatívne:*** (vyjadrujúce množstvo: 17, 42, 11)
- ***Kvalitatívne:*** (vyjadrujúce kvalitu – červený, Škoda, Slovensko)

Príklady

- 1. Tri hody mincou – výberový priestor Ω = {HHH, HHO, HOH, HOO, OHH, OHO, OOH, OOO}, javy sú

  A – aspoň 2x hlava, B – práve 2x orol

- 2. Jeden hod kockou – výberový priestor Ω = {1,2,3,4,5,6}, javy sú

  A – párne čísla, B – čísla menšie ako 5

Operácie

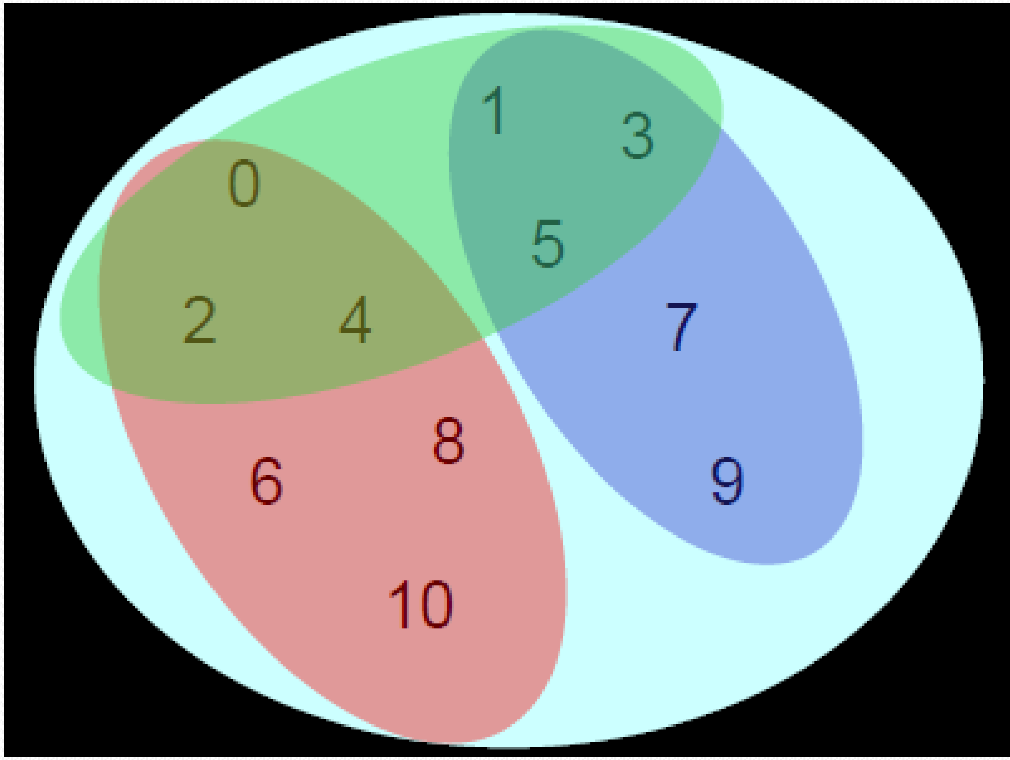
- <u>Zjednotenie</u> $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z javov
- <u>Opačný jav k *A*</u>, A^C sa nazýva aj doplnkový/komplementárny $(\Omega \setminus A)$
- <u>Prienik</u> $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď nastanú oba javy *A* a *B*
- <u>Nezlučiteľné javy</u> – keď *A* a *B* nemajú ani jeden spoločný elementárny jav

Rozklad

- **Rozkladom výberového priestoru** nazývame súbor vzájomne disjunktných neprázdnych javov, ktorých zjednotením je celý výberový priestor
- $\{A_i\}_{i=1}^{M}$
- $\forall i, j\colon\ A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^{M} A_i = \Omega$

Príklad

- Počet hláv v 10 hodoch mincou
- A = {0,2,4,6,8,10}
- B = {1,3,5,7,9}
- C = {0,1,2,3,4,5}
- $A \cup B = \Omega$
- $A \cap B = \emptyset$



- $A \cap C = \{0,2,4\}, C^C = \{6,7,8,9,10\}$

Vlastnosti

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(B \setminus A) &= P(B) - P(A \cap B) \\ A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) &= P(B) - P(A) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \end{aligned}}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^C) = 1 - P(A^C \cap B^C)$$

$$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^C) = 1 - P(A^C \cup B^C)$$

- Javy *A* a *B* nazveme nezávislé, ak platí $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Príklad

- Aká je pravdepodobnosť, že pri hode mincou padne hlava 2x za sebou?
- $P(H) = 0,5$

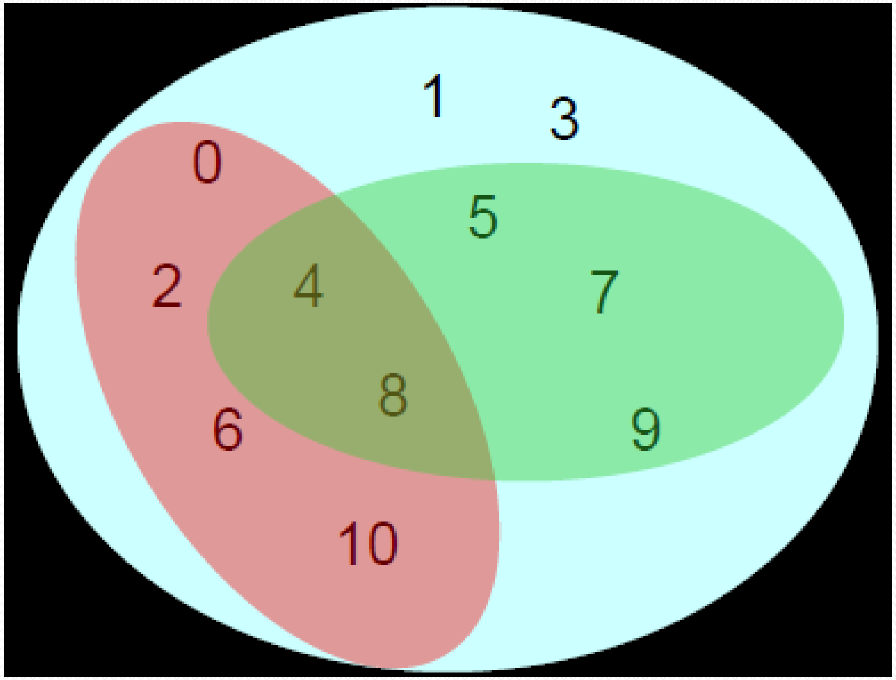
Príklad

- Aká je pravdepodobnosť, že pri hode mincou padne hlava 2x za sebou?
- $P(H) = 0{,}5$
- Výsledok druhého hodu *B* je nezávislý od výsledku prvého hodu *A*
- Preto výsledná pravdepodobnosť je $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.5.0.5 = 0{,}25$

Podmienená pravdepodobnosť

- Pravdepodobnosť, že nastane jav *A* za podmienky, že nastal jav *B*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



- A = {0,2,4,6,8,10}
- B = {4,5,7,8,9}
- $A \cap B = \{4,8\}$
- $P(A \cap B) = \frac{2}{11}, P(B) = \frac{5}{11}, P(A|B) = \frac{2}{5}$

Príklad

- V krabici sa nachádza 10 červených a 5 modrých ponožiek. Ak náhodne vytiahneme dve ponožky, aká je pravdepodobnosť, že ako druhú sme vytiahli modrú?
- Nejde o nezávislé javy
- A = jav, kedy ako prvá bola červená
- B = jav, kedy ako prvá bola modrá
- C = ako druhá vytiahnutá bola modrá ponožka

Príklad II

$$P(A) = \frac{10}{15}, P(B) = \frac{5}{15},$$

$$P(C) = P\big((C \cap A) \cup (C \cap B)\big)$$

$$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$$

$$P(C|A) = P(C \cap A)/P(A)$$

$$P(C|B) = P(C \cap B)/P(B)$$

$$P(C) = \ P(C|A).P(A)+P(C|B).P(B) =$$

$$\frac{5}{14}.\frac{10}{15} + \frac{4}{14}.\frac{5}{15} = \frac{70}{210} = \ \frac{1}{3}$$

Veta o úplnej pravdepodobnosti

- Nech $\{A_i\}_{i=1}^{M}$ je rozklad priestoru $\Omega \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} P(A_i) = 1$. Potom platí

$$P(B) = \sum_{i=1}^{M} P(B|A_i) \,.\, P(A_i)$$

Dôkaz: Ľubovoľný jav $B \in \Omega$ je zjednotením javov $(B \cap A_1), \dots, (B \cap A_M)$. Tieto javy sú disjunktné, preto platí

Veta o úplnej pravdepodobnosti II

$$P(B) = \sum_{i=1}^{M} P(B \cap A_i).$$

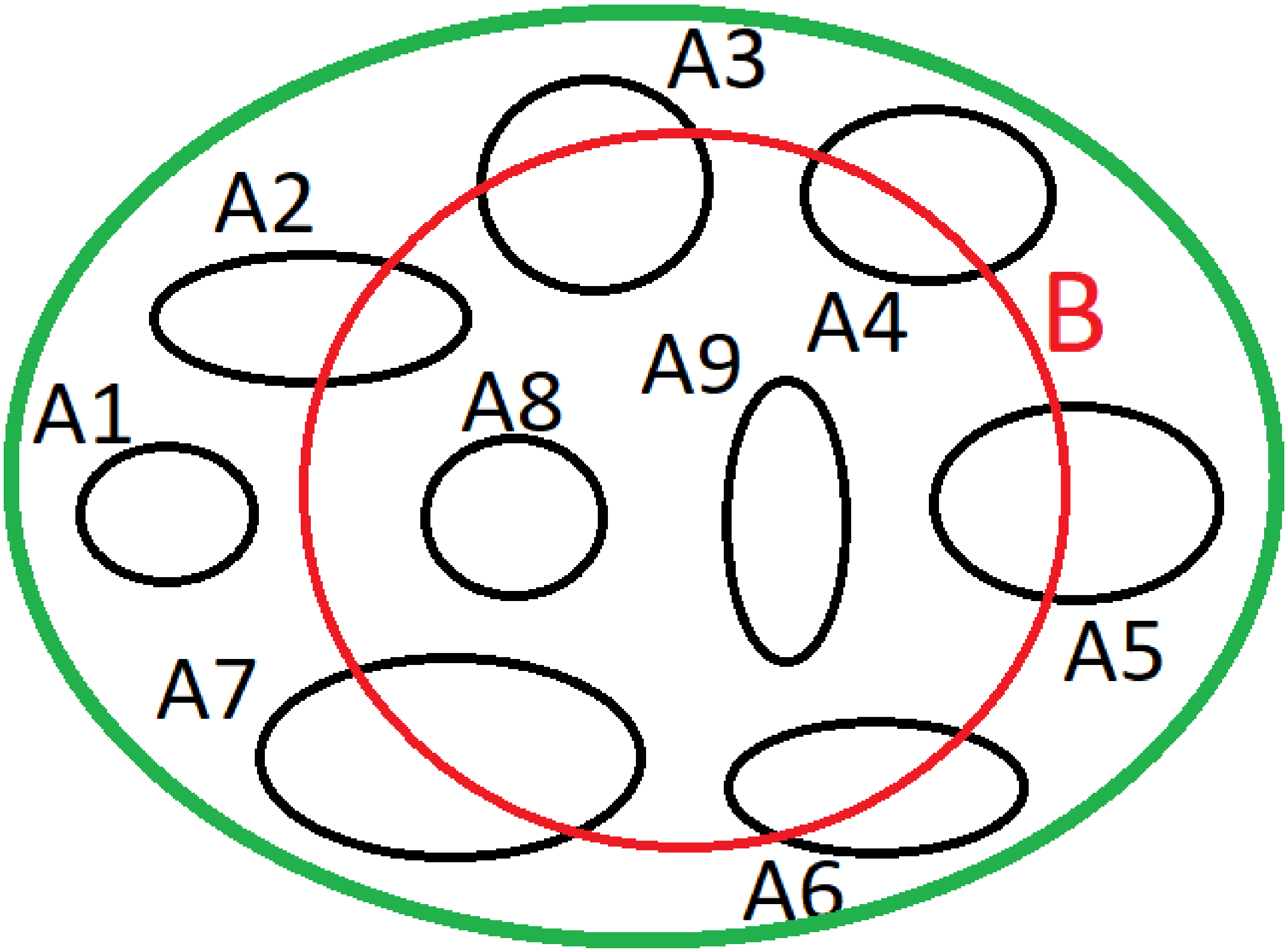
Pretože

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, spojením dostaneme

$P(B) = \sum_{i=1}^{M} P(B|A_i) \,.\, P(A_i)$, čo sme mali dokázať.

Vieme si to predstaviť?

Veta o úplnej pravdepodobnosti II



Bayesov vzorec

- Ak poznáme $P(B|A_i)$ a $P(A_i)$, ako určíme pravdepodobnosť, že nastane jav A_i za podmienky, že nastalo B?
- Odpoveďou je Bayesov vzorec

$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{P(B)}$, kde menovateľ je určený podľa vety o úplnej pravdepodobnosti.

Príklad

- Na konci linky je tester, ktorá s pravdepodobnosťou 0,999 vyradí chybný výrobok.
- S pravdepodobnosťou 0,01 vyradí aj kvalitný výrobok.
- Kazivosť výrobku je 0,1 (jeden z desiatich je chybný).
- Aká je pravdepodobnosť, že vyradený výrobok je naozaj chybný?

Príklad - riešenie

$P(A_{ch}) = 0{,}1$
$P(A_{kv}) = 0{,}9$

Vyradenie výrobku je jav B

$P(B|A_{ch}) = 0{,}999$

$P(B|A_{kv}) = 0{,}01.$

Potom

$$P(A_{ch}|B) = \frac{P(B|A_{ch}).P(A_{ch})}{P(B|A_{ch}).P(A_{ch}) + P(B|A_{kv}).P(A_{kv})}$$

Náhodná premenná

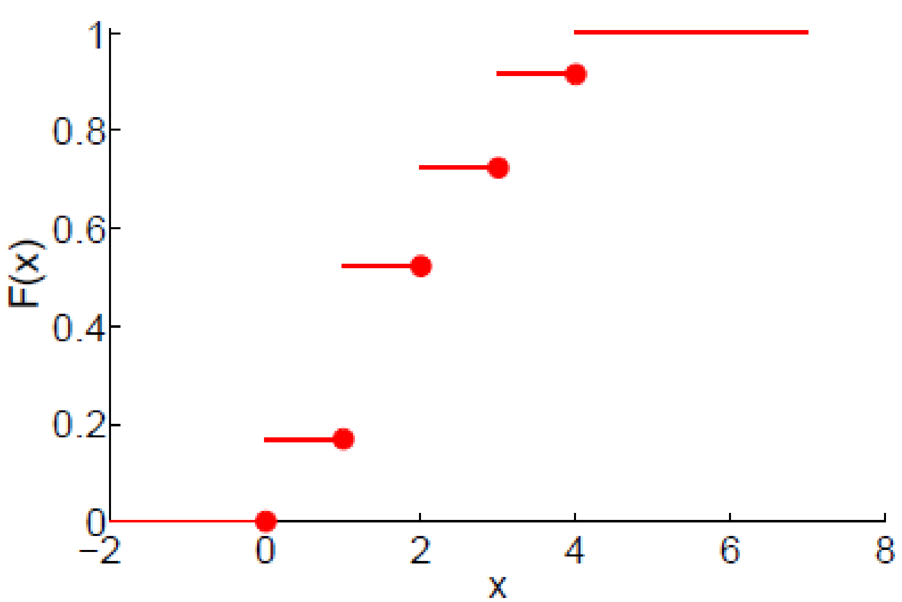
- Pojmom náhodná premenná (veličina) označujeme funkciu, ktorej hodnota je určená výsledkom náhodného pokusu.
- Priraďuje číselnú hodnotu každému elementárnemu javu
- Hodnota funkcie sa nedá pred pokusom určiť, ale dokážeme ju popísať rozdelením pravdepodobnosti.

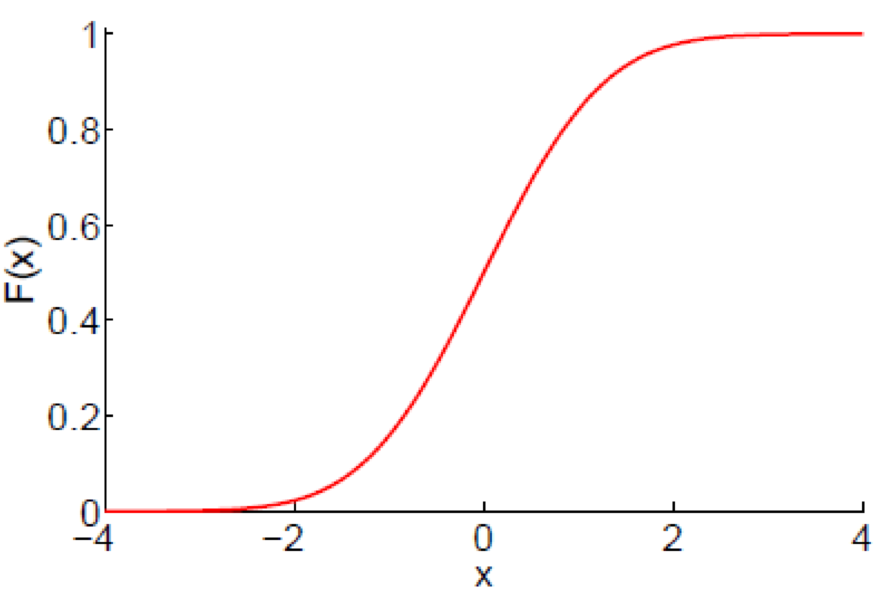
Distribučná funkcia

- Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej definovanej na priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ opisujeme pomocou distribučnej funkcie $F\colon\ \mathbb{R} \to \langle 0,1 \rangle$
- $F(x) = P(X < x)$
- Distribučná funkcia je neklesajúca a zľava spojitá a platí

Distribučná funkcia II

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$





Vzťahy medzi P a DF

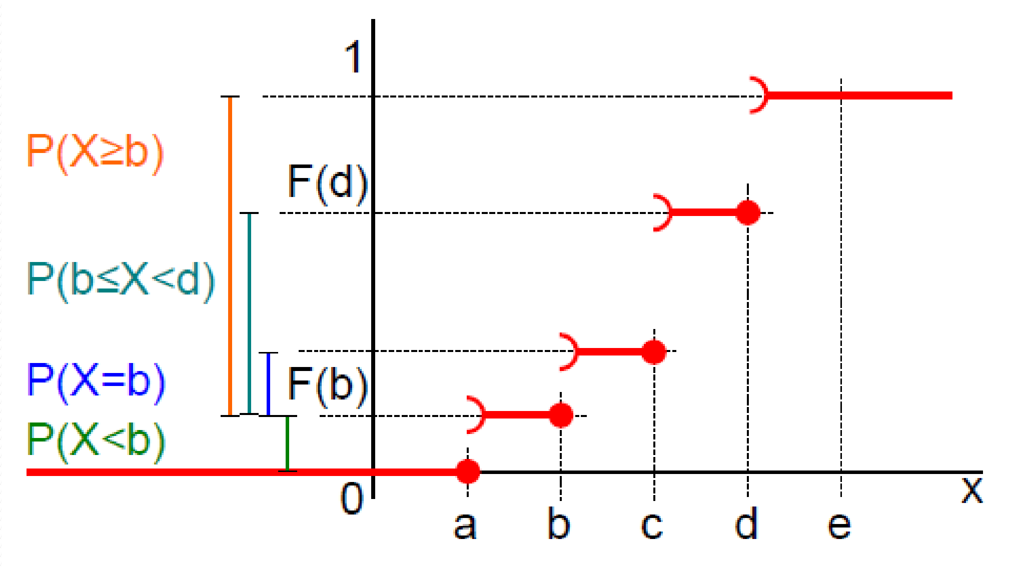
$\forall a < b; a, b \in \mathbb{R}$

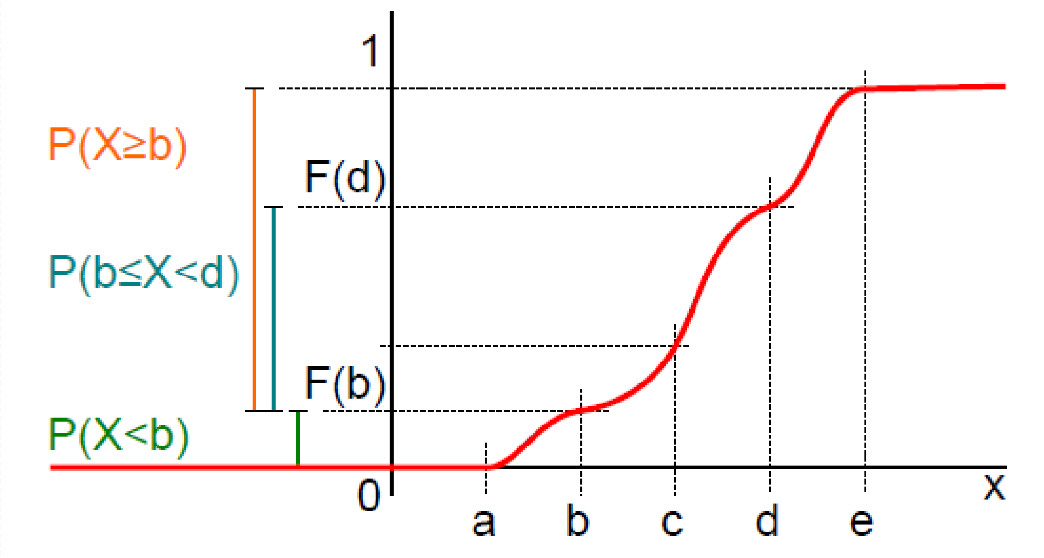
$$P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_a^\infty f(x)dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(X = a) = \lim_{x \to a^+} F(x) - F(a) = 0$$

Vzťahy medzi P a DF II

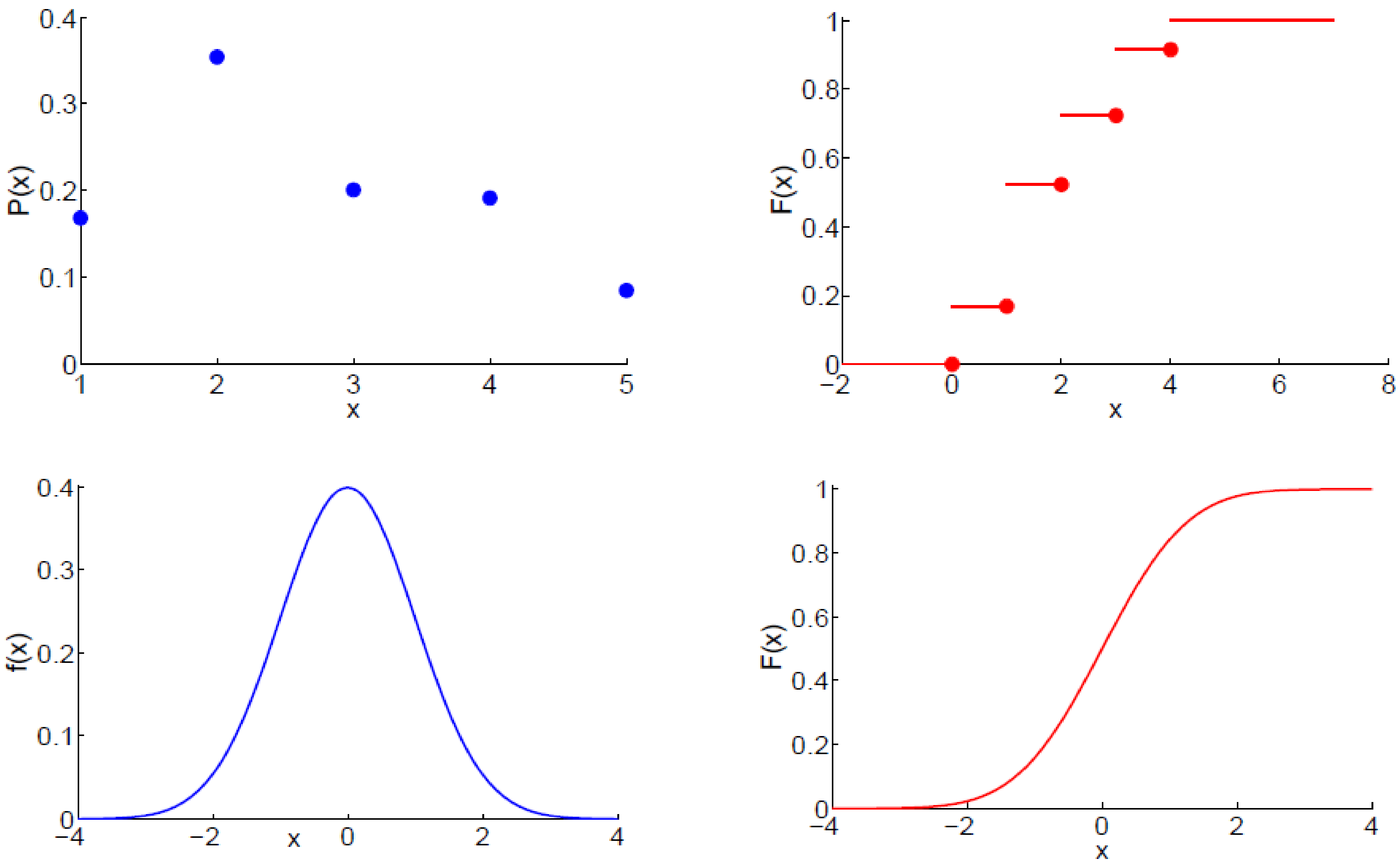




Vzťahy medzi P a DF III

- Distribučnú funkciu určíme ako
- $F(X) = \sum_{x_i<X} P(x_i)$
- $F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(t)dt$, kde *f(t)* je hustota rozdelenia pravdepodobnosti
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Vzťahy medzi P a DF IV



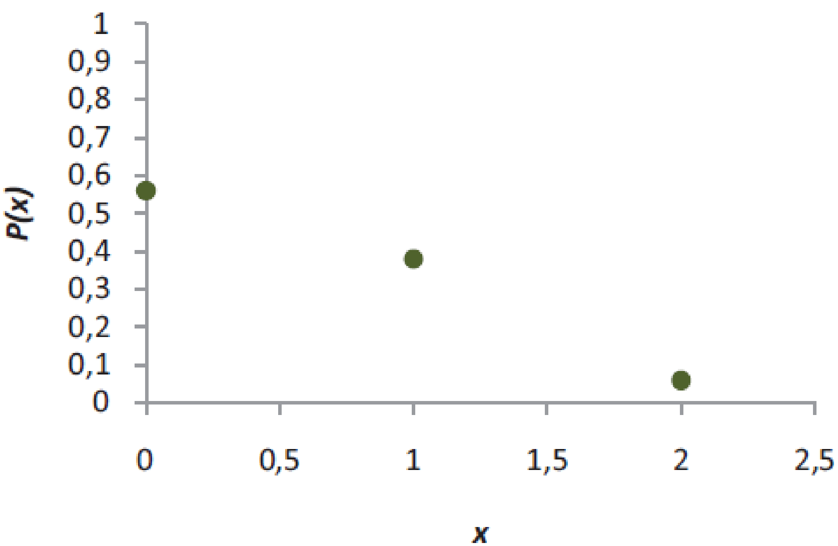
Diskrétny príklad

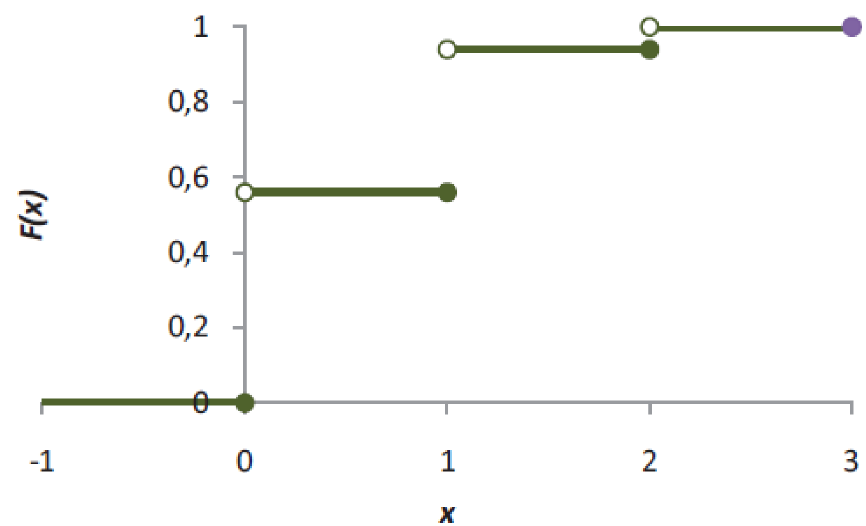
- Máme dva stroje (nezávislé na sebe), jeden sa pokazí s pravdepodobnosťou 20% a druhý 30%
- Náhodná premenná *X* označuje počet pokazených strojov, popíšte ju.
- $\Omega = \{0,1,2\}$, $P(S1) = 0{,}2$ a $P(S2) = 0{,}3$
- $P(X = 0) = P(S1^C \cap S2^C) = 0{,}8.0{,}7 = 0{,}56$
- $P(X = 1) = P\Big((S1 \cap S2^C) \cup (S1^C \cap S2)\Big) = 0{,}38$
- $P(X = 2) = P(S1 \cap S2) = 0{,}2.0{,}3 = 0{,}06$

Diskrétny príklad II

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,56
1	0,38
2	0,06
Σ	1,00

x	$F(x)$
$(-\infty; 0\rangle$	0
$(0; 1\rangle$	0,56
$(1; 2\rangle$	0,94
$(2; \infty)$	1

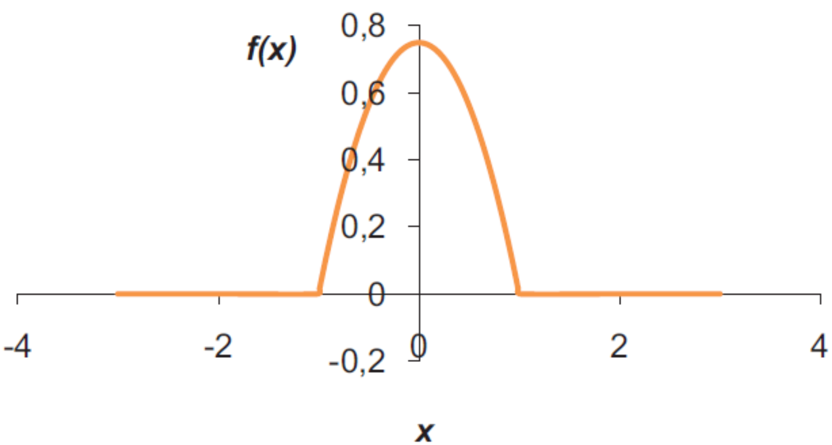


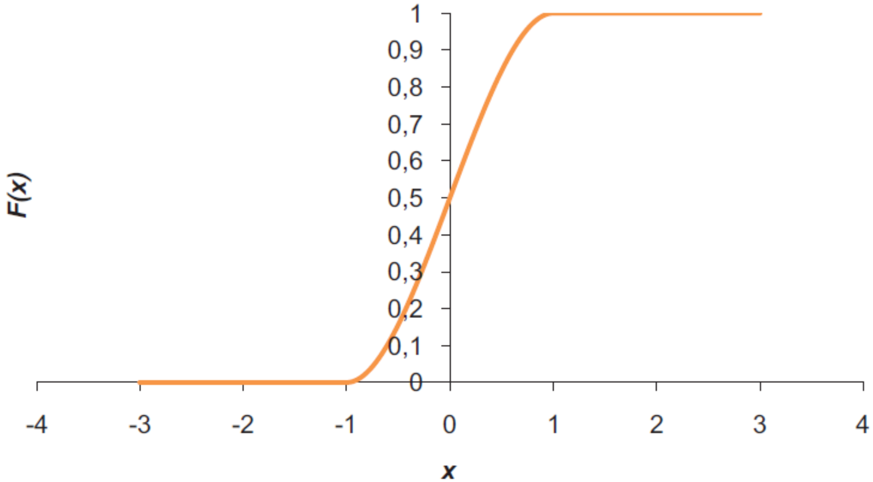


Spojitý prípad

- Nech *X* je spojitá náhodná premenná definovaná hustotou pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0,75(1-x)(1+x) = 0,75(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$





$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ \frac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2) & x \in \langle -1; 1) \\ 1 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Rozdelenia pravdepodobnosti

- **Diskrétne:** Alternatívne, Binomické, Hypergeometrické, Geometrické, Negatívne binomické (Pascalove), Poissonove
- **Spojité:** Rovnomerné, Exponenciálne. Weibullove, Gama-Erlangove, Triangulárne-Simpsonove, Cauchyho, Beta, Raleighove, Normálne, Normované normálne, Logaritmicko-normálne

Rozdelenia pravdepodobnosti II

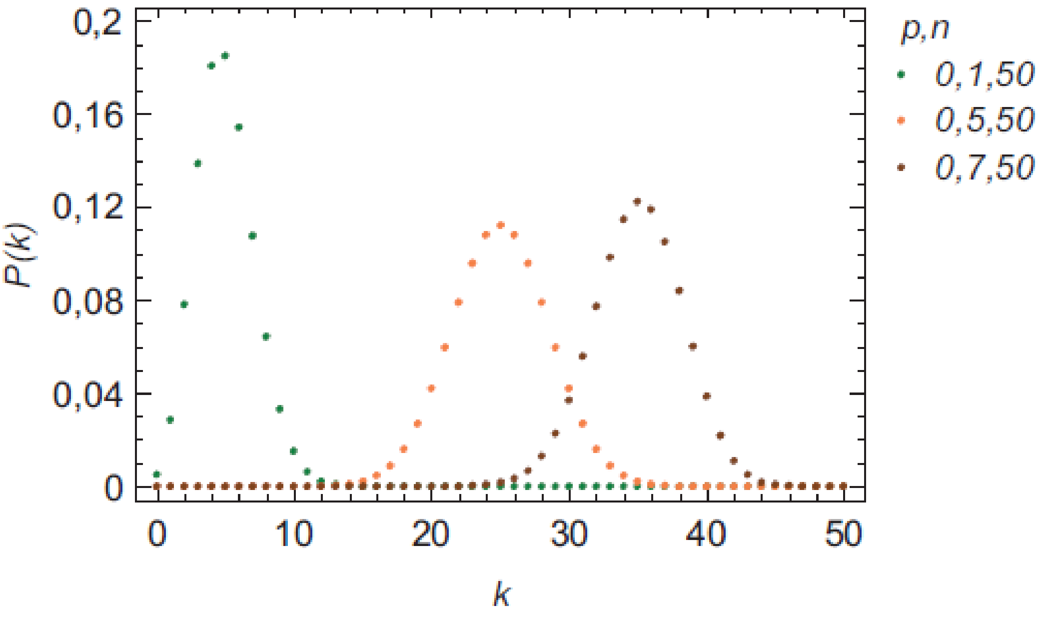
- **Špecifické (výberové):**
  - χ^2 (chí kvadrát) rozdelenie
  - Studentovo t - rozdelenie
  - Fischerovo F - rozdelenie

Binomické rozdelenie

- Bernoulliho pokusy – postupnosť <u>nezávislých</u> pokusov, kde pravdepodobnosť úspechu je *p*
- *n* – celkový počet pokusov
- *p* – pravdepodobnosť úspechu

$$Bi(n,p)$$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$



Binomické rozdelenie - použitie

- Pravdepodobnosť, že nastane *k* úspešných pokusov z *n* pokusov
  - Počet chlapcov medzi 10.000 novorodencami
  - Počet chybných výrobkov medzi 30 testovanými
  - Počet nevyrastených rastlín zo 100 zasadených cibuliek

Iné diskrétne rozdelenia

- Alternatívne – binomické pre $n = 1$
- Hypergeometrické – modeluje závislé pokusy
- Geometrické – počet Bernoulliho pokusov do prvého úspechu (niekedy vrátane)
- Pascalove – počet Bernoulliho pokusov do *k*-teho úspechu (niekedy vrátane)
- Poissonove – počet náhodných udalostí v nejakom pevnom časovom intervale

Iné rozdelenia – použitie

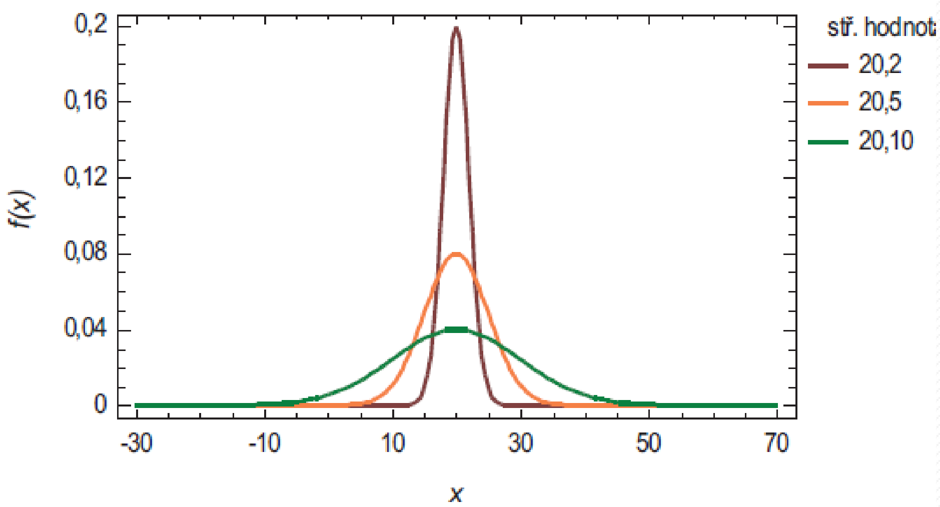
- Hypergeometrické = Toto rozdelenie slúži aj ako pravdepodobnostný model niektorých hazardných hier. Spočítajme pravdepodobnosť s akou bude študent pri skúške vedieť práve jednu z troch náhodne vybraných otázok, ak sa naučil iba päť otázok z dvadsiatich.
- Geometrické = počet volaní nutných k tomu, aby sme sa dovolali do televíznej súťaže

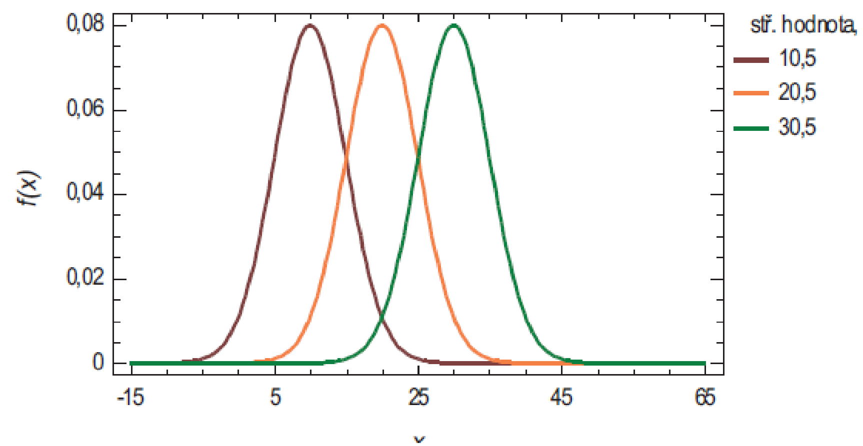
Iné rozdelenia – použitie II

- Pascalove = počtu cestujúcich, ktorých musí revízor skontrolovať do chvíle, než nájde 10 čiernych pasažierov
- Poissonove = počet pacientov ošetrených počas dopoludňajších ordinačných hodín (nahrádza binomické pre veľké *n* a malé *p*). Aproximuje málo pravdepodobné udalosti pri veľkom počte nezávislých opakovaní

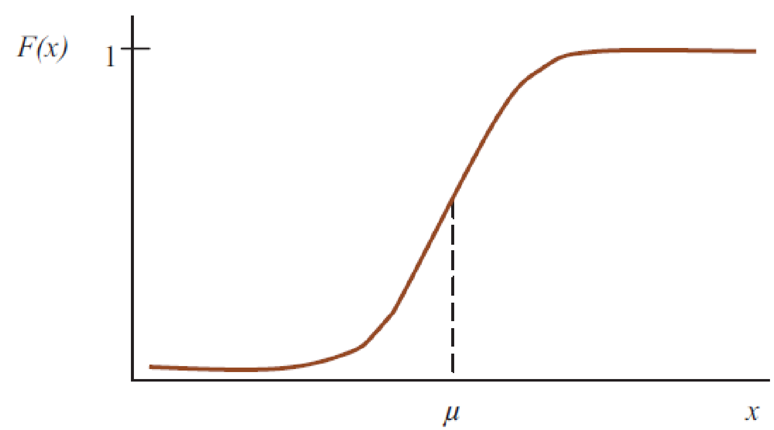
Spojité: Normálne rozdelenie

- $X \sim N(\mu, \sigma) \quad f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$





$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \, \mathrm{d}t$$



Odbočka: Gaussova krivka

- Vyjadruje hustotu (početnosť) normálneho rozdelenia pravdepodobnosti
- Má dve premenné, strednú hodnotu μ a smerodajnú odchýlku σ
- Vzťah opisujúci Gaussovu krivku je

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Odbočka: Gaussova funkcia

- Všeobecná Gaussova funkcia má tvar

$$f(x) = ae^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Ak to má byť funkcia hustoty pravdepodobnosti, potom jej integrál sa musí rovnať jednej, čiže $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Túto normalizačnú podmienku splníme vhodnou voľbou a

Odbočka: Gaussova funkcia II

- Najjednoduchšia Gaussova funkcia má tvar

$$f(x) = e^{-x^2}$$

- Jej integrál sa rovná $\sqrt{\pi}$, čiže normalizovaná verzia má tvar $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$
- Parameter μ nemá vplyv na hodnotu integrálu, iba posúva funkciu pozdĺž osi x
- Parameter σ graf funkcie rozširuje

Odbočka: Gaussova funkcia III

- Pri rozširovaní grafu sa zväčšuje integrál faktorom $\sigma\sqrt{2}$
- Potom všeobecná normalizovaná verzia Gaussovej funkcie musí mať tvar

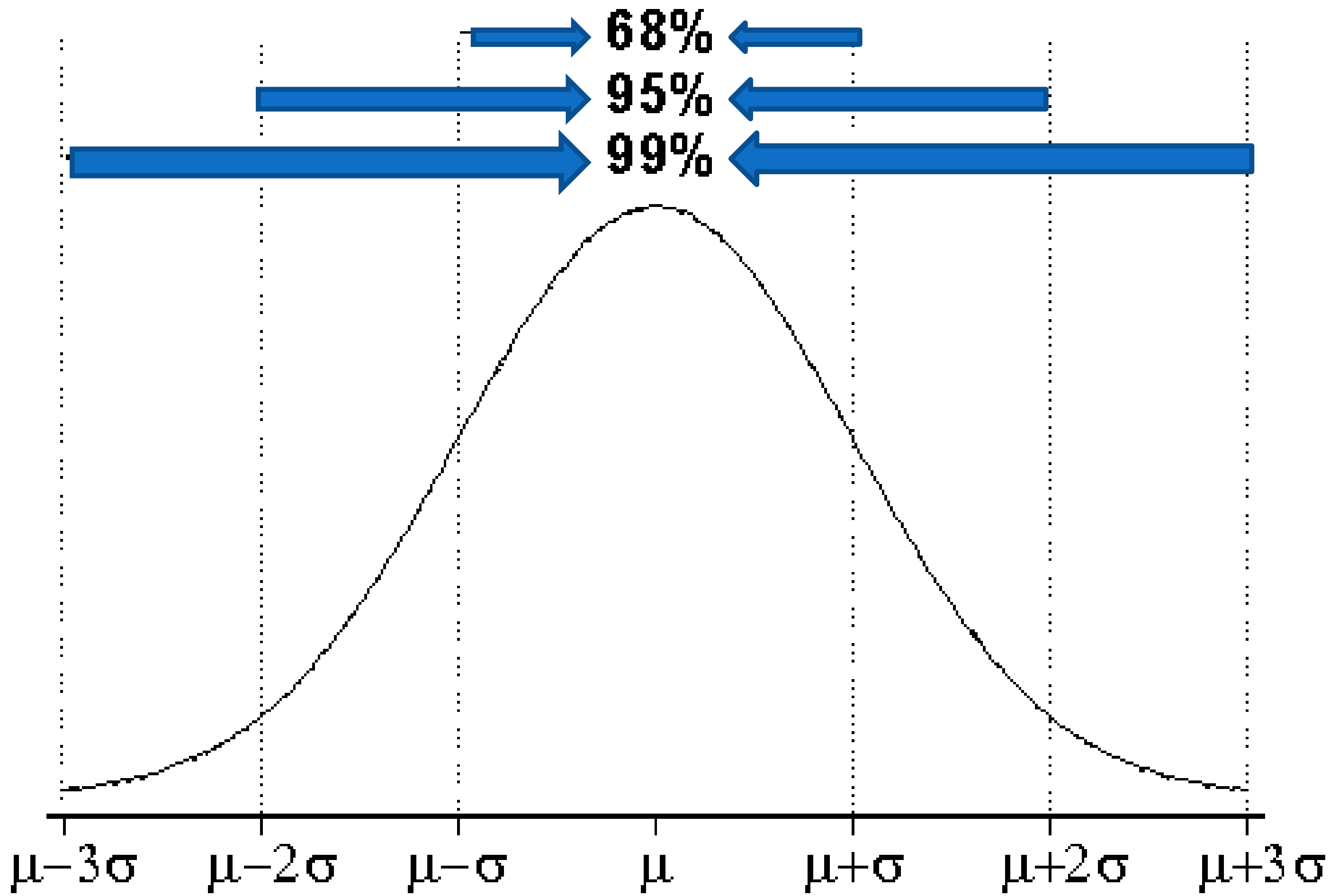
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Parameter μ má potom význam strednej hodnoty a parameter σ smerodajnej odchýlky

Odbočka: Gaussova funkcia IV

- Potom platí:
- Pre $x = \sigma$ je $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$
- Pre $x = 2\sigma$ je $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-2}$
- Pre $x = 3\sigma$ je $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{2}}$
- Pre $x = 4\sigma$ je $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-8}$

Pravidlo 3σ



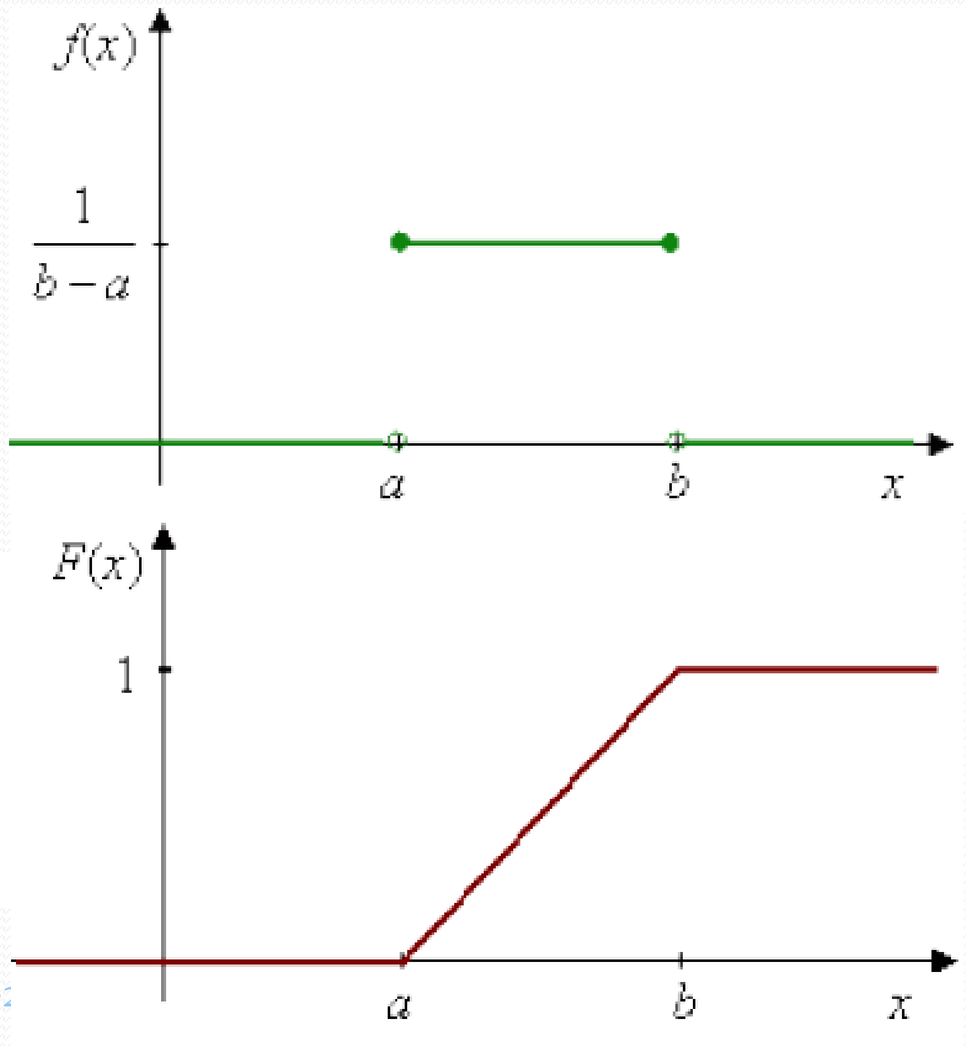
(68,26%, 95,45%,99,73%)

Rovnomerné rozdelenie

- *R(a;b)* interval *(a,b)*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a;b) \\ 0 & x \notin (a;b) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; a\rangle \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a;b) \\ 1 & x \in \langle b; \infty) \end{cases}$$



Iné spojité rozdelenia

- Exponenciálne – pravdepodobnosť dĺžky časového intervalu medzi dvoma udalosťami v Poissonovom procese
- Erlangove – čas do výskytu k-tej udalosti v Poissonovom procese
- Logaritmicko-normálne – pre jednostranne ohraničené údaje, ktorých prirodzený logaritmus má normálne rozdelenie

Špeciálne rozdelenia

- Chí kvadrát s *n* stupňami voľnosti

$$\chi_n^2 - X = X_1^2 + X_2^2 + \ \dots + X_n^2 \qquad X_i \sim N(0,1)$$

- Stredná hodnota je *n* a rozptyl *2n*
- Graf hustoty tohto rozdelenia je pre malé *n* nesymetrický, ale pre hodnoty väčšie ako 30 môžeme hustotu aproximovať hustotou normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$

Špeciálne rozdelenia II

Studentove - $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{N}}}$ $X \sim N(0,1)$ a $Y \sim \chi_n^2$

Fischerove - $\frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$ $X \sim \chi_n^2$ a $Y \sim \chi_m^2$

Studentove rozdelenie sa používa pri testovaní hypotéz s malým počtom vzoriek do 30

Číselné charakteristiky náhodnej premennej

- Charakterizujú vlastnosti náhodnej premennej a umožňujú porovnávať premenné:
- Momenty
- Kvantily
- ...

Momenty

- Všeobecný moment *r*-tého rádu

$$\mu_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

- Stredná hodnota *E(X)* (*r*=1) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- Centrálny moment *r*-tého rádu

$$\mu'_r = E((X - E(X))^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^r f(x)dx$$

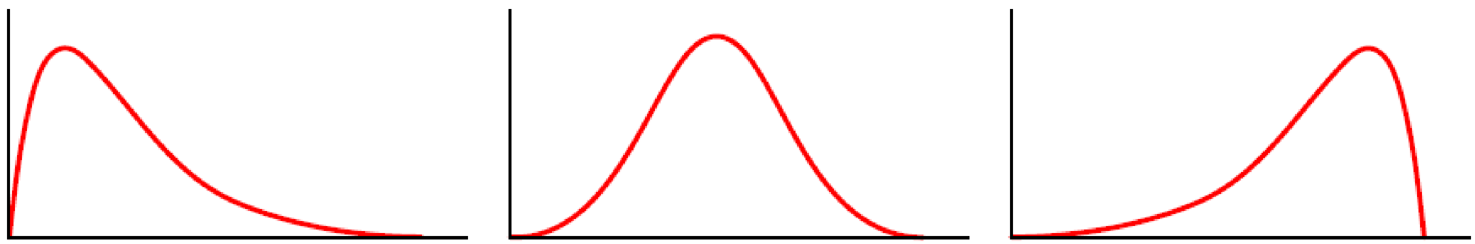
- Rozptyl (*r*=2) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

Šikmosť a špicatosť

- Šikmosť

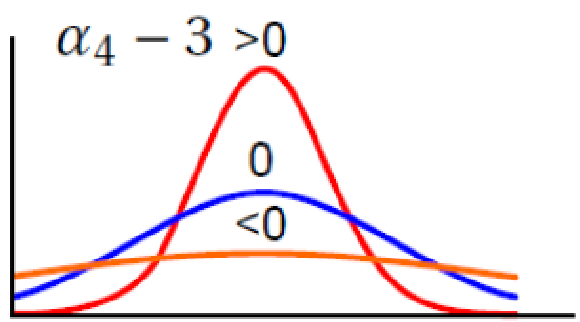
$$\alpha_3 = \frac{\mu'_3}{\sigma^3}$$



(a) Pozitívne zošikmené rozdelenie. (b) Symetrické rozdelenie. (c) Negatívne zošikmené rozdelenie.

- Špicatosť

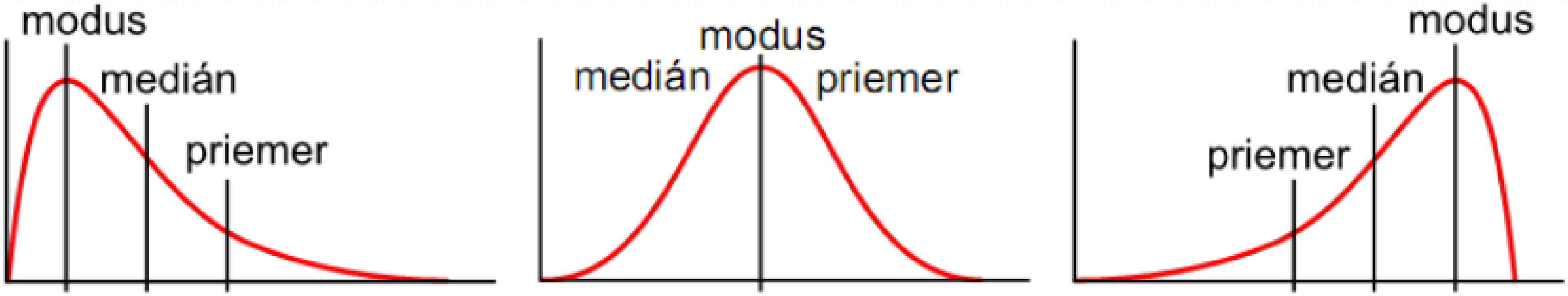
$$\alpha_4 = \frac{\mu'_4}{\sigma^4}$$



Normálna (0), menšia (< 0) a väčšia (> 0) špicatosť rozdelenia

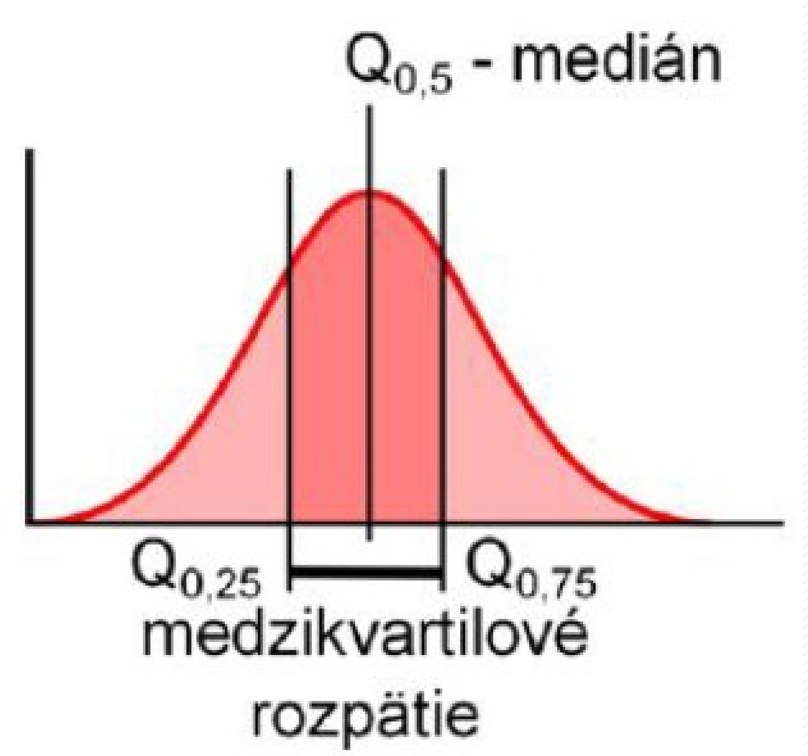
Kvantily

- Kvantil Q_p je hodnota, pre ktorú platí, že pravdepodobnosť, že náhodná veličina X má hodnotu menšiu ako Q_p, je $100p$%
- $P(X < Q_p) = p$ $\qquad F(Q_p) = p$
- **Medián** – kvantil deliaci súbor na polovice



Kvartil, decil, percentil

- **Kvartil**
  - $Q_{0,25}$ (dolný kvartil), $Q_{0,5}$ a $Q_{0,75}$ (horný kvartil)
  - Medzikvartilové rozpätie
- **Decil**
  - $Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,9}$
  - Medzidecilové rozpätie
- **Percentil**
  - $Q_{0,01}, Q_{0,02}, \dots, Q_{0,99}$
  - Medzipercentilové rozpätie



Viacrozmerný prípad

- *(X,Y)* – dvojrozmerná náhodná premenná
- *Združená distribučná funkcia* $F(x,y) = P(X < x, Y < y)$ – pravdepodobnosť, že súčasne nastanú dve udalosti
- *Marginálna DF*

$$F_1(x) = P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = F(x, \infty)$$

- *Podmienená DF* $F(x|y) = P(X < x|Y = y)$
- Nezávislosť premenných $F(x,y) = F_1(x).F_2(y)$

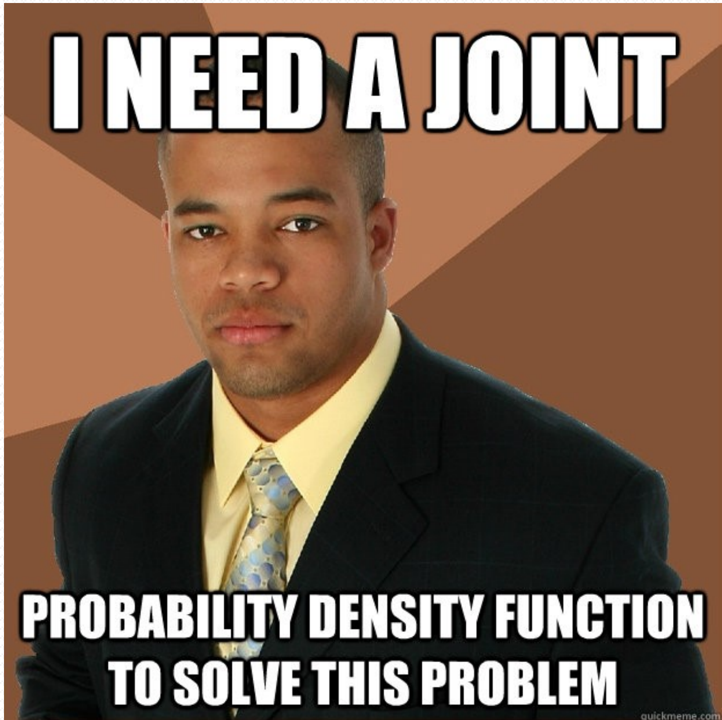
Viacrozmerný prípad II

- *f(x,y)* – združená hustota rozdelenia pravdepodobnosti
- $f(x,y) = f(x|y).f(y) = f(y|x).f(x)$

Podmienená marginálna

- Pre nezávislé premenné

$$f(x,y) = f(x).f(y)$$



Charakteristiky

- Vektor stred. hodnôt $E(\boldsymbol{X}) = (E(X_1), \dots, E(X_N))$
- Vektor rozptylov $Var(\boldsymbol{X}) = (Var(X_1), \dots, Var(X_N))$
- Obecný združený moment $(r_1, \dots, r_N)$-tého rádu

$$\mu_{r_1,\dots,r_N} = E(X_1^{r_1} X_2^{r_2} \dots X_N^{r_N}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_N^{r_N} f(x_1, \dots x_N) dx_1 \dots dx_N$$

- Centrálny združený moment $(r_1, \dots, r_N)$-tého rádu

$$\mu'_{r_1,\dots,r_N} = \mathrm{E}\left(\left(X_1 - E(X_1)\right)^{r_1} \dots \left(X_N - E(X_N)\right)^{r_N}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 - E(X_1)\right)^{r_1} \dots \left(x_N - E(X_N)\right)^{r_N} f(x_1, \dots x_N) dx_1 \dots dx_N$$

Momenty používané v 2D CV

- Škálovo a translačne invariantné momenty
- $\eta_{i,j} = \frac{\mu'_{i,j}}{{\mu'_{0,0}}^{\left(1+\frac{i+j}{2}\right)}}$
- Škálovo, translačne aj rotačne invariantné

$$I_1 = \eta_{2,0} + \eta_{0,2}$$
$$I_2 = (\eta_{2,0} - \eta_{0,2})^2 + 4\eta_{1,1}^2$$

Kovariancia

- Stredná hodnota a rozptyl sú užitočné pri skúmaní 1D náhodnej premennej
- Ak má premenná viac rozmerov, mierou na skúmanie ich vzťahu je kovariancia

$$Cov(X_i, X_j) = E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

$$Cov(X_i, X_i) = E(X_i^2) - \left(E(X_i)\right)^2 = Var(X_i)$$

$$Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$$

Kovariancia II

- To bola kovariancia pre dva rozmery, pre *N* vypočítame kovariančnú maticu

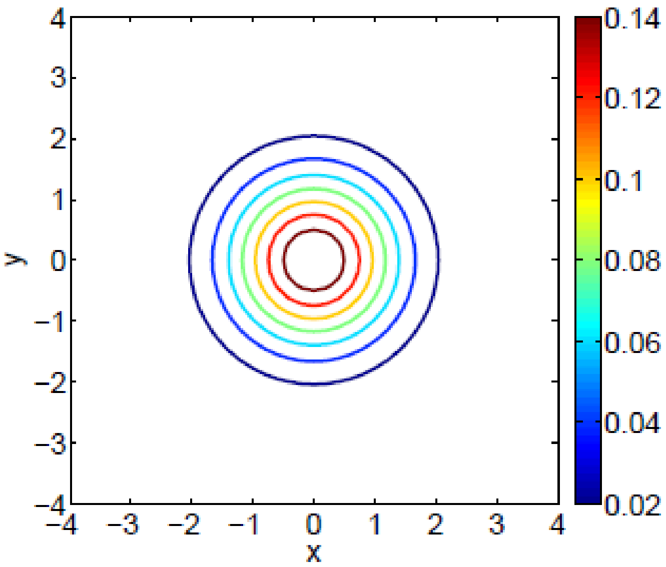
$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_N) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_N, X_1) & \mathrm{Cov}(X_N, X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_N) \end{bmatrix}$$

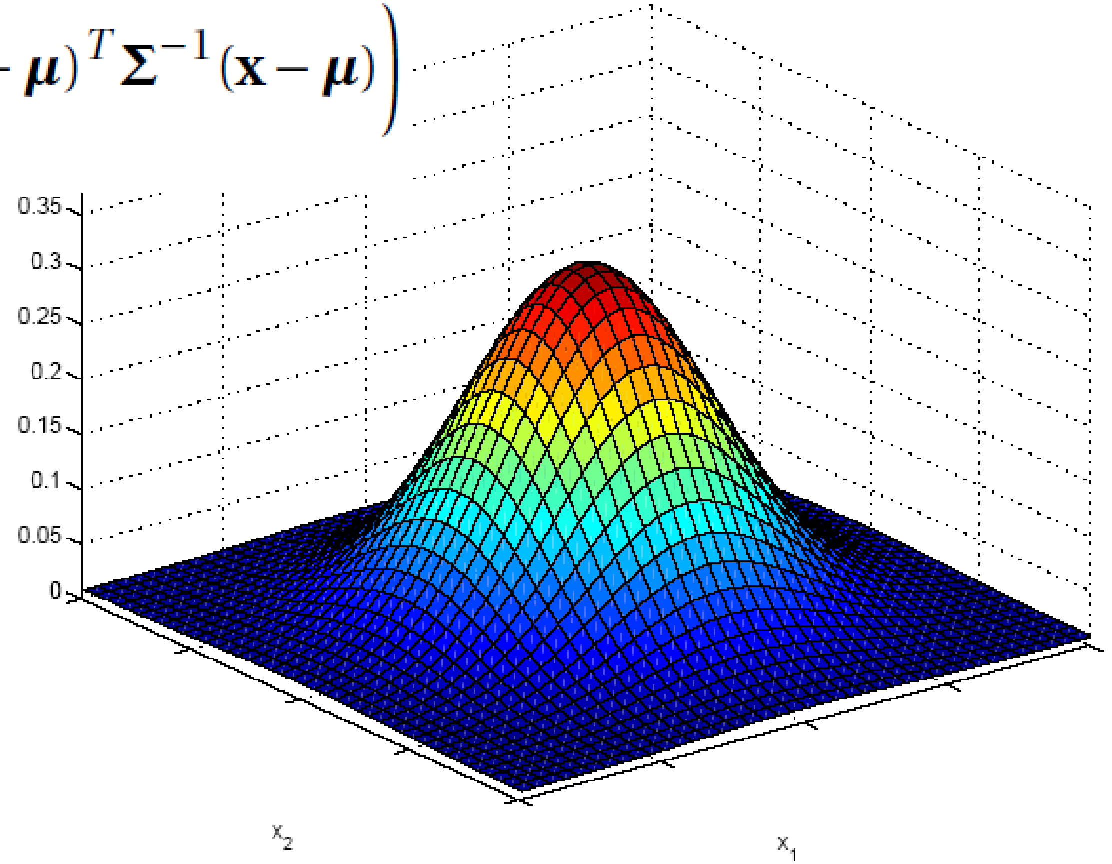
- Pri kovariancii nejde o absolútnu hodnotu, ale o znamienko, ak je kladné obe premenné rastú súčasne, ak záporné, tak ak 1. rastie, 2. klesá

Normálne rozdelenie

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

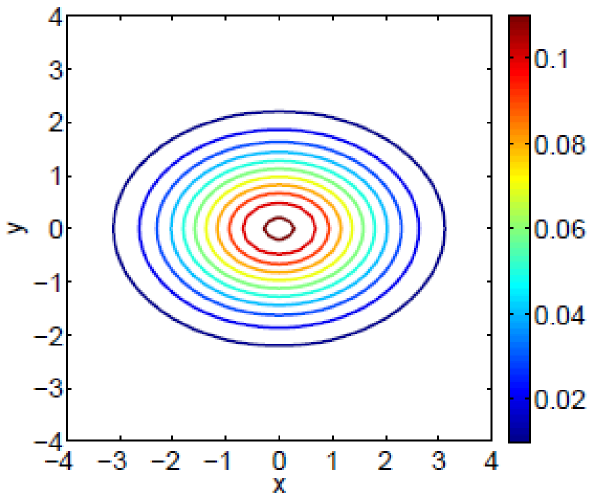
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$



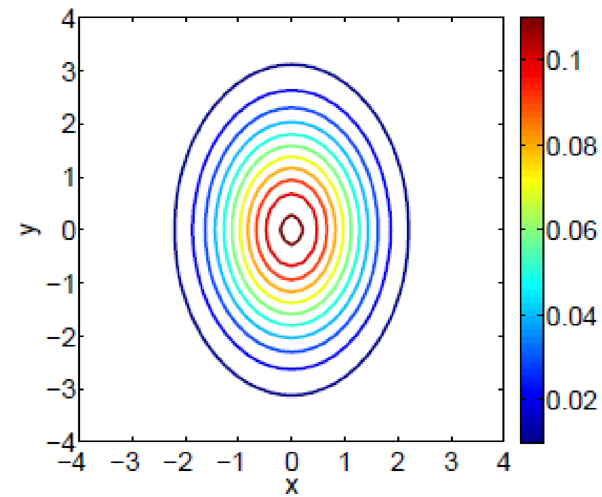


$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1,\ \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

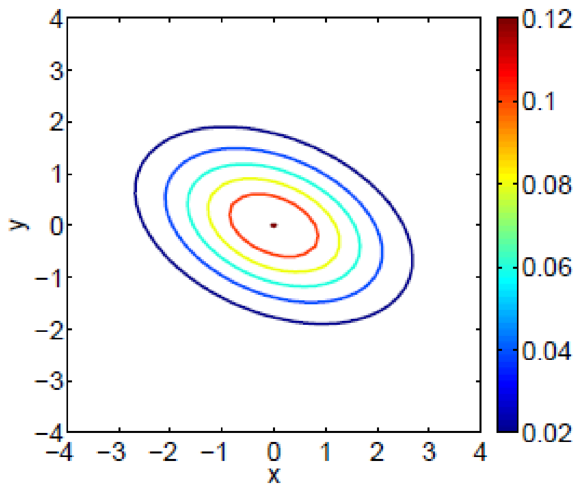
Normálne rozdelenie II



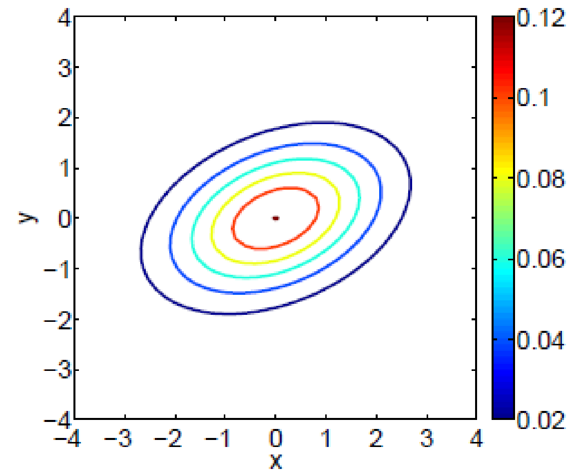
$\mathrm{Var}(X) = 2, \mathrm{Var}(Y) = 1, \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$



$\mathrm{Var}(X) = 1, \mathrm{Var}(Y) = 2, \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$



$\mathrm{Var}(X) = 2, \mathrm{Var}(Y) = 1, \mathrm{Cov}(X, Y) = -0,5$



$\mathrm{Var}(X) = 2, \mathrm{Var}(Y) = 1, \mathrm{Cov}(X, Y) = 0,5$