Rozpoznávanie obrazcov
šk.r. 2019-20

Štatistika

Doc. RNDr. Milan Ftáčnik, CSc.

Rekapitulácia

- Definícia pravdepodobnosti a jej vlastnosti
- Podmienená pravdepodobnosť
- Bayesov vzorec
- Náhodná premenná, distribučná funkcia a funkcia hustoty pravdepodobnosti
- Rozdelenia pravdepodobnosti (binomické, rovnomerné, normálne)
- Číselné charakteristiky náhodnej premennej

Štatistika

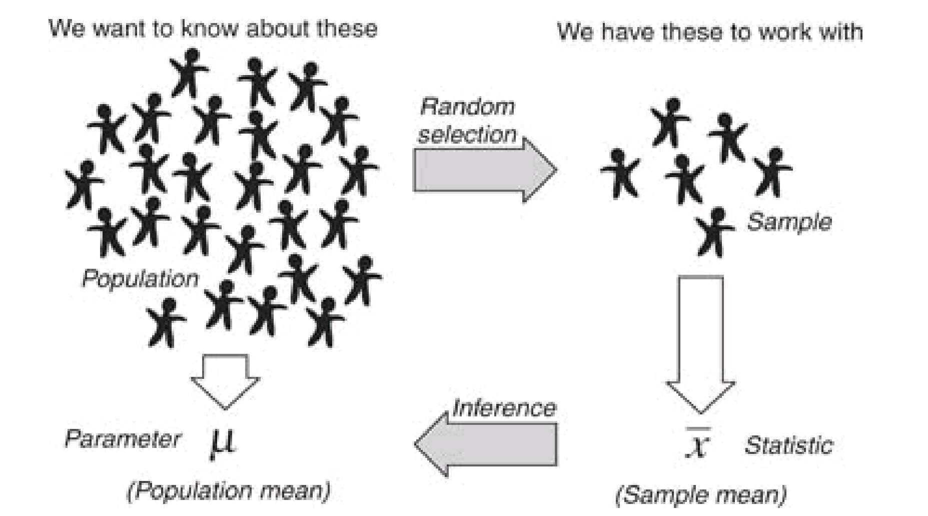
- Odhad parametrov rozdelení
- Testovanie hypotéz
- **Náhodný výber** je náhodný vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, pre ktorý platí, že náhodné premenné X_i majú rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti a sú navzájom nezávislé
- Súbor všetkých jednotiek, ktoré skúmame, nazývame ***základný súbor***

Štatistika II

- Súbor vybraných jednotiek nazývame ***výberový súbor***, alebo tiež náhodný výber zo základného súboru
- Parameter rozdelenia – popisuje populáciu (základný súbor) - nepoznáme jeho hodnotu
- Funkcia jednej alebo viac náhodných pre-menných, ktorá nezávisí na hodnotách ne-známych parametrov sa nazýva štatistika

Štatistika III

- Štatistiku vypočítame z náhodného výberu (odhad parametra, výberová charakteristika) – napr. μ a $\bar{X}$
- μ je skutočná stredná hodnota populácie
- $\bar{X}$ je stredná hodnota vo výberovom súbore, pomocou ktorej odhadneme skutočnú strednú hodnotu



Bodové odhady

- **Výberový priemer** $\bar{X}$: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- **Výberový rozptyl**

$$S^2 : S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **Výberová smerodajná odchýlka** S : $S = \sqrt{S^2}$
- **Výberová kovariancia**

$$S_{XY} : S_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n(n-1)}$$

Bodové odhady II

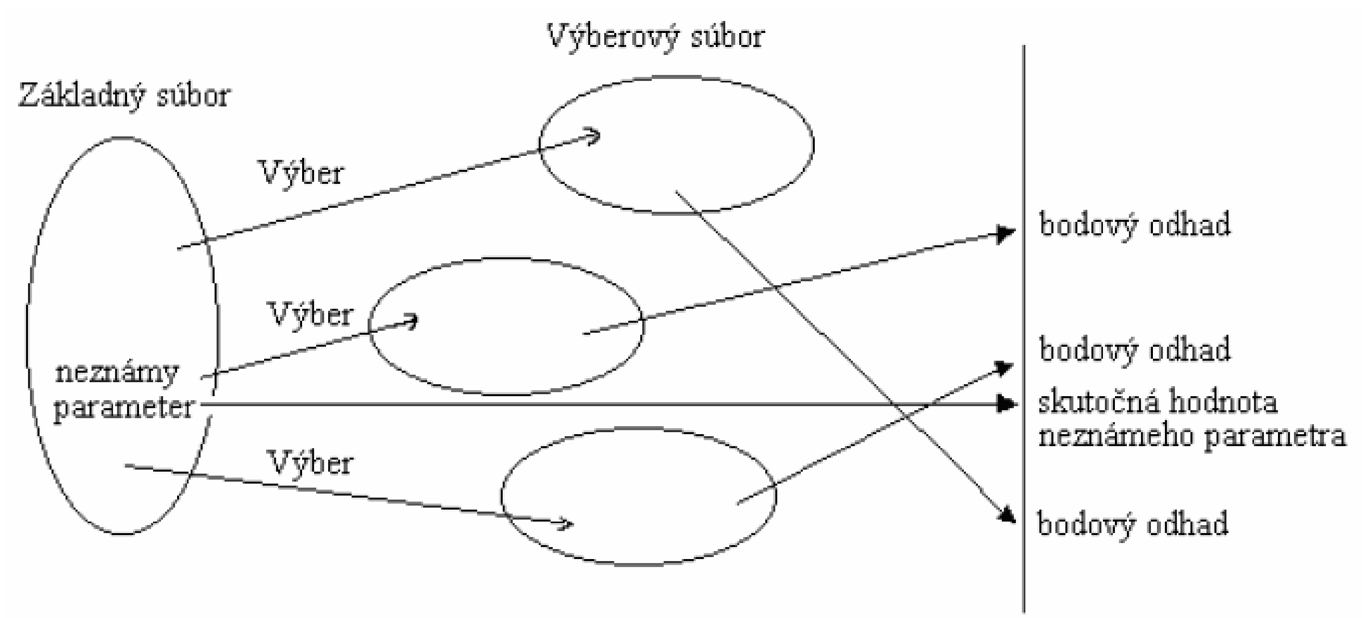
- Všetko sú to funkcie veľkosti výberového súboru *n* a náhodné premenné
- Podľa zákona veľkých čísel platí

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X} - E(X)| > \varepsilon) = 0$$

- Priemer z $N(\mu, \sigma) \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- Rozptyl z $N(\mu, \sigma) \sim \chi^2(n-1)$

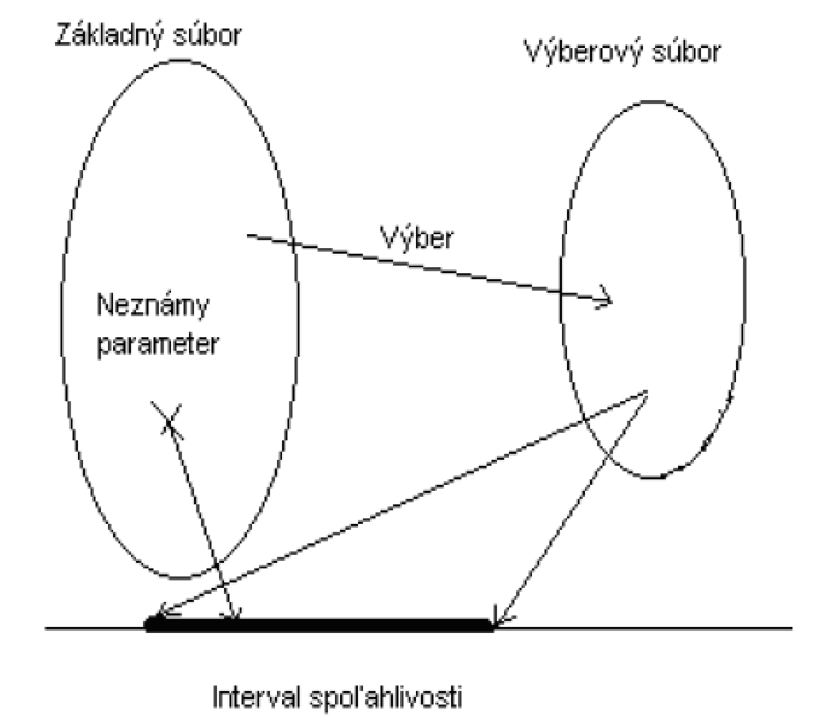
Bodové odhady III

- Každý výber – iný bodový odhad
- Pravdepodobnosť, že určíme parameter náhodnej veličiny presne je nulová
- Pri spojitej premennej – pre interval vieme pravdepo- dobnosť odhadu



Intervalový odhad
Interval spoľahlivosti

- $P(G_D < \theta < G_H) = 1 - \alpha$
- (G_D, G_H) – interval spoľahlivosti
- $1 - \alpha$ – koeficient spoľahlivosti
- θ – skutočná hodnota parametra

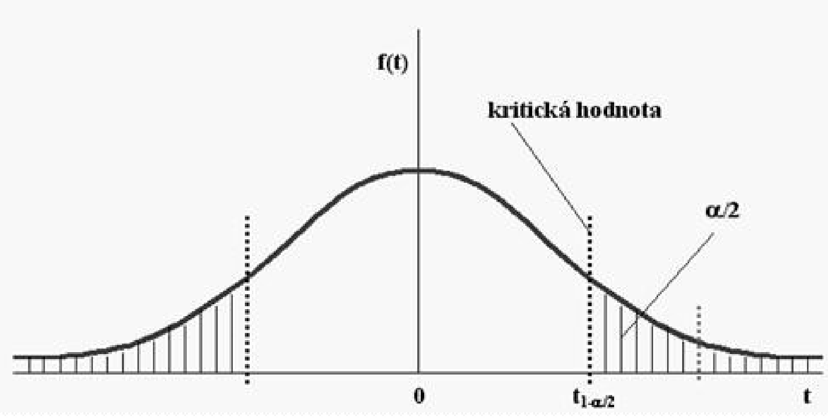


Intervalový odhad II

- Intervalový odhad parametra θ so spoľahlivosťou (1–α), to je 100·(1–α) *percentný interval spoľahlivosti*
- Hranice G_D a G_H sú funkcie výberovej štatistiky, pomocou ktorej intervalový odhad konštruujeme
- O výberovej štatistike vieme, aké má pravdepodobnostné rozdelenie, čiže poznáme jej funkciu hustoty pravdepodobnosti

Príklad

- Intervalový odhad strednej hodnoty normál-neho rozdelenia, keď poznáme hodnotu σ
- Štatistika $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}.\sqrt{n} \sim N(0,1)$
- Kritická hodnota normál-neho rozdelenia $N(0,1)$ pre dané α sa označuje μ_α



$$1 - \alpha = P(-u_\alpha \le U \le u_\alpha) = P(-u_\alpha \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \le u_\alpha) =$$

G_H

G_D

$$= P(\bar{X} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

Príklad II

- náhodný výber 100 výrobkov
- priemerná váha 2,2 kg
- smerodajná odchýlka váhy výrobkov σ = 0,6 kg
- Určite 95-percentný obojstranný interval spoľahlivosti strednej hodnoty váhy

$$\left\langle \bar{x} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle = \left\langle 2{,}2 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{10};\ 2{,}2 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{10} \right\rangle = \langle 2{,}08;\ 2{,}31 \rangle$$

$$X \sim N(0,1),\ P(|X| > u_\alpha) = \alpha$$

α	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2
u_α	2,5758	2,3263	$\boxed{1{,}9599}$	1,6448	1,299

Špeciálne (výberové) rozdelenia

- χ^2 (chí kvadrát) rozdelenie
- Studentovo t - rozdelenie
- Fischerovo F – rozdelenie
- Používajú sa pri určovaní odhadov a inter-valových odhadov neznámych parametrov a pri testovaní štatistických hypotéz
- Majú tabuľkovo definované kritické hodnoty

Špeciálne (výberové) rozdelenia II

- χ_n^2 (Chí kvadrát) s *n* stupňami voľnosti

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \ \dots + X_n^2 \qquad X_i \sim N(0,1)$$

- Ak máme náhodnú premennú $X \sim N(0,1)$, potom náhodná premenná $Y = X^2$ má χ^2 -rozdelenie s 1-stupňom voľnosti $Y \sim \chi^2(1)$
- Ak máme k náhodných premenných s rozdelením $X_i \sim N(0,1)$, tak náhodná premenná = súčet ich druhých mocnín má rozdelenie $\chi^2(k)$

Špeciálne (výberové) rozdelenia III

- Stredná hodnota Chí kvadrát s *n* stupňami voľnosti je *n* a rozptyl *2n*
- Graf hustoty tohto rozdelenia je pre malé *n* nesymetrický, ale pre väčšie hodnoty je hustota premennej tvaru $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$
- Pre hodnoty *n* väčšie ako 30 môžeme husto-tu aproximovať hustotou normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$

Špeciálne (výberové) rozdelenia IV

Studentove *t*-rozdelenie - náhodnú premennú možno vyjadriť pomocou dvoch iných náhodných premenných, z ktorých jedna má normálne rozdelenie a druhá chí kvadrát

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{N}}} \qquad X \sim N(0,1) \text{ a } Y \sim \chi_n^2$$

Studentove rozdelenie sa používa pri testovaní hypotéz s malým počtom vzoriek do 30

Špeciálne (výberové) rozdelenia V

Fischerovo *F*-rozdelenie – dá sa vyjadriť pomocou dvoch nezávislých náhodných premenných, ktoré majú chí kvadrát rozdelenie, s tým, že má *m* a *n* stupňov voľnosti

$$\frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \qquad X \sim \chi_n^2 \text{ a } Y \sim \chi_m^2$$

Testovanie hypotéz

- Hypotéza = tvrdenie o základnom súbore, ktoré môžeme overiť štatistickými metódami na základe údajov výberového súboru
  $H_0\colon\ \theta = \theta_0$
- Každá hypotéza implikuje svoj protiklad alebo alternatívu
- $H_1\colon\ \theta = \theta_1$ $\qquad$ $H_1\colon\ \theta > \theta_0$
- $H_1\colon\ \theta < \theta_0$ $\qquad$ $H_1\colon\ \theta \neq \theta_0$

Čo rieši testovanie hypotéz?

- Je vhodné zamietnuť testovanú - tzv. *nulovú hypotézu* H_0- v prospech *alternatívnej hypotézy* H_1 alebo nie?
- Na testovanie hypotézy H_0 oproti hypotéze H_1 použijeme vhodné *testovacie kritérium* (tzv. testovaciu štatistiku) *g*.
- Testovacia štatistika *g* je funkciou náhodného výberu

Testovacie štatistiky

- <u>Pre priemer</u>
  - 1. Ak poznáme σ
  - 2. Ak nepoznáme σ a $n > 30$
  - 3. Ak nepoznáme σ a $n < 30$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

1

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s_1}{\sqrt{n}}}$$

2

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s_1}{\sqrt{n}}}$$

3

Testovacie štatistiky II

- <u>Pre rozptyl</u>
  - 1. Test zhody s konštantou σ_0
  - 2. Test zhody dvoch rozptylov

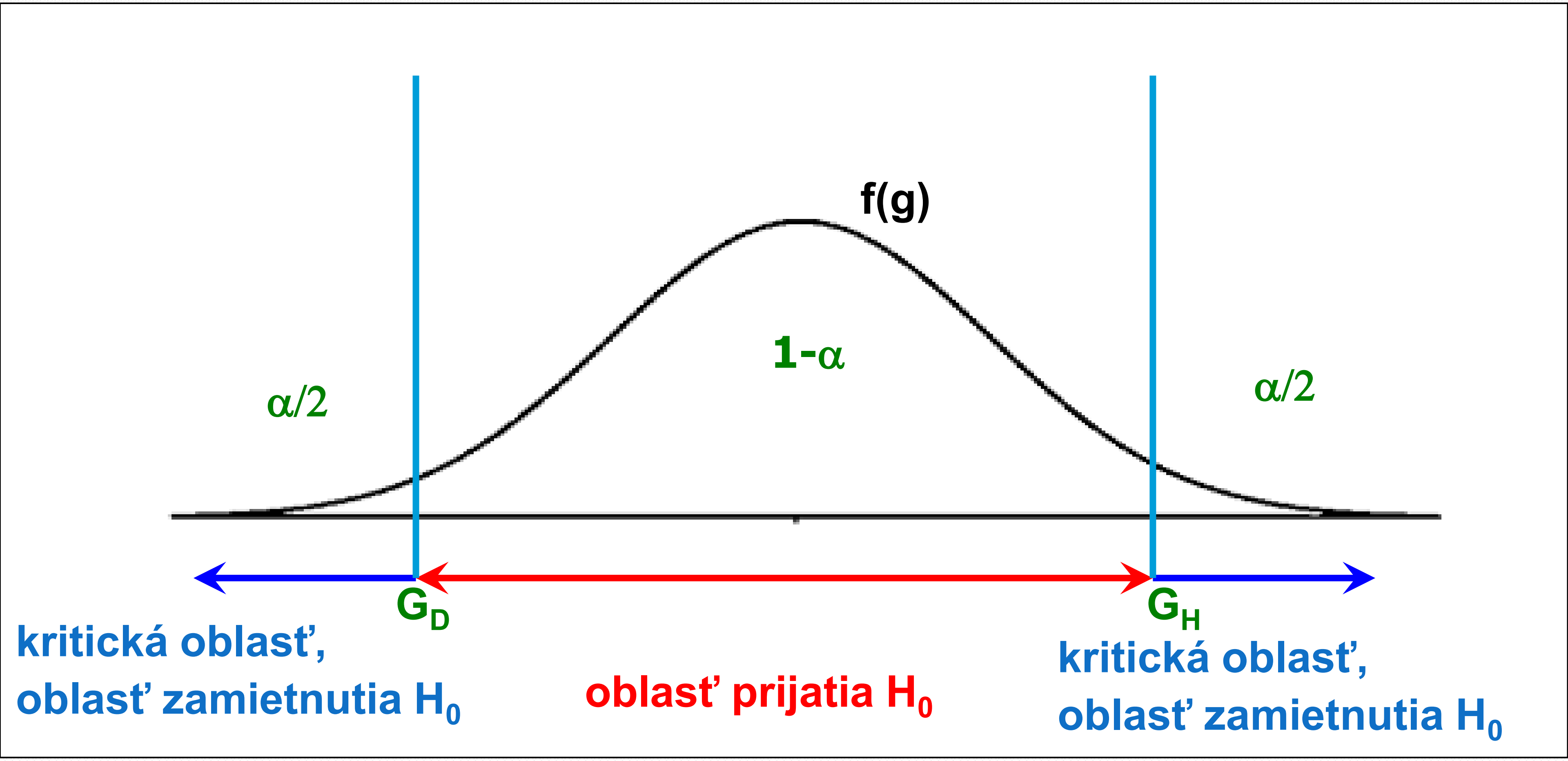
$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s_1^2}{\sigma_0^2} \qquad F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad s_1^2 > s_2^2$$

1 2

Použitie kritickej oblasti

- Ak hodnota testovacej štatistiky *g* padne do kritickej oblasti W_α , zamietame testovanú hypotézu H_0 a za správnu prijímame alternatívnu hypotézu H_1
- Body oddeľujúce oblasť prijatia nulovej hypotézy od oblasti jej zamietnutia označujeme názvom *kritické hodnoty*

Použitie kritickej oblasti II



Postup

1. Formulujeme nulovú hypotézu H_0 a jej alternatívnu hypotézu H_1 (obojstrannú alebo jednostrannú)

2. Zvolíme testovaciu štatistiku a určíme jej rozdelenie (väčšina má: normálne, t, F, χ^2)

3. Vypočítame hodnotu testovacej štatistiky

4. Zvolíme úroveň (hladinu) významnosti α (väčšinou 0,1; 0,05; 0,01; 0,001)

Postup II

5. Nájdeme v tabuľkách kritické hodnoty (resp. kvantily) rozdelenia testovacej štatistiky pre zvolenú hodnotu α, ktoré závisia od alternatívnej hypotézy H_1 a vymedzujú kritickú oblasť

6. Urobíme konečné rozhodnutie, t.j. zamietneme alebo nezamietneme H_0 na danej úrovni významnosti α podľa toho, či sa vypočítaná hodnota nachádza alebo nenachádza v kritickej oblasti

Možné výsledky

		Skutočná situácia	
		H_0 je pravda	H_0 nie je pravda
Naše rozhodnutie	H_0 je pravda	*správne rozhodnutie* pravdepodobnosť $1-\alpha$	*chyba typu* II pravdepodobnosť β
	H_0 nie je pravda	*chyba typu* I pravdepodobnosť α hladina významnosti	*správne rozhodnutie* pravdepodobnosť $1 - \beta$ sila testu

$$\alpha = P(g \in W_\alpha \mid H_0)$$

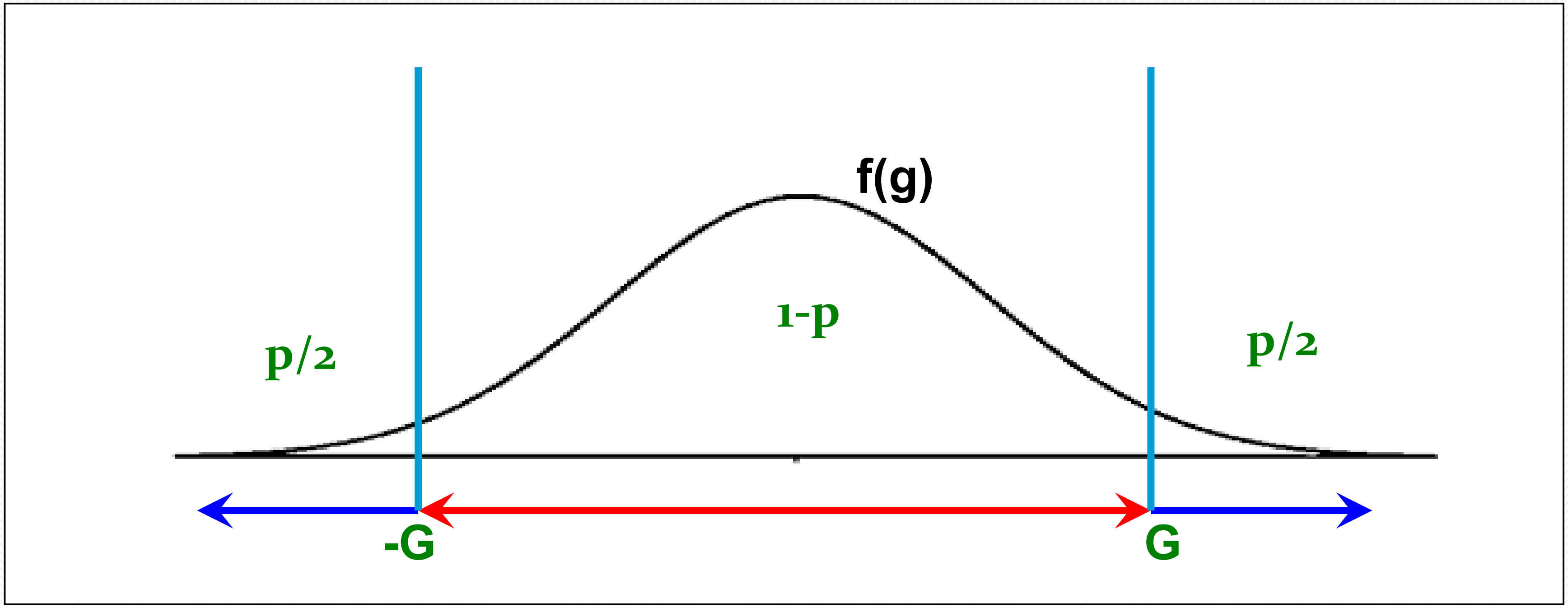
$$\beta = P(g \notin W_\alpha \mid H_1)$$

P-hodnota

- Je to odhadovaná pravdepodobnosť zamietnutia pravdivej nulovej hypotézy
- Takže ak stačí rozhodnúť, či vyšiel test štatisticky významne, tak *p*-hodnota hovorí všetko potrebné nezávisle na tom, akú si zvolíme hladinu α, dáva informáciu pre všetky hladiny
- Ak je *p*-hodnota $\leq \alpha$, zamietneme H_0 na hladine významnosti α

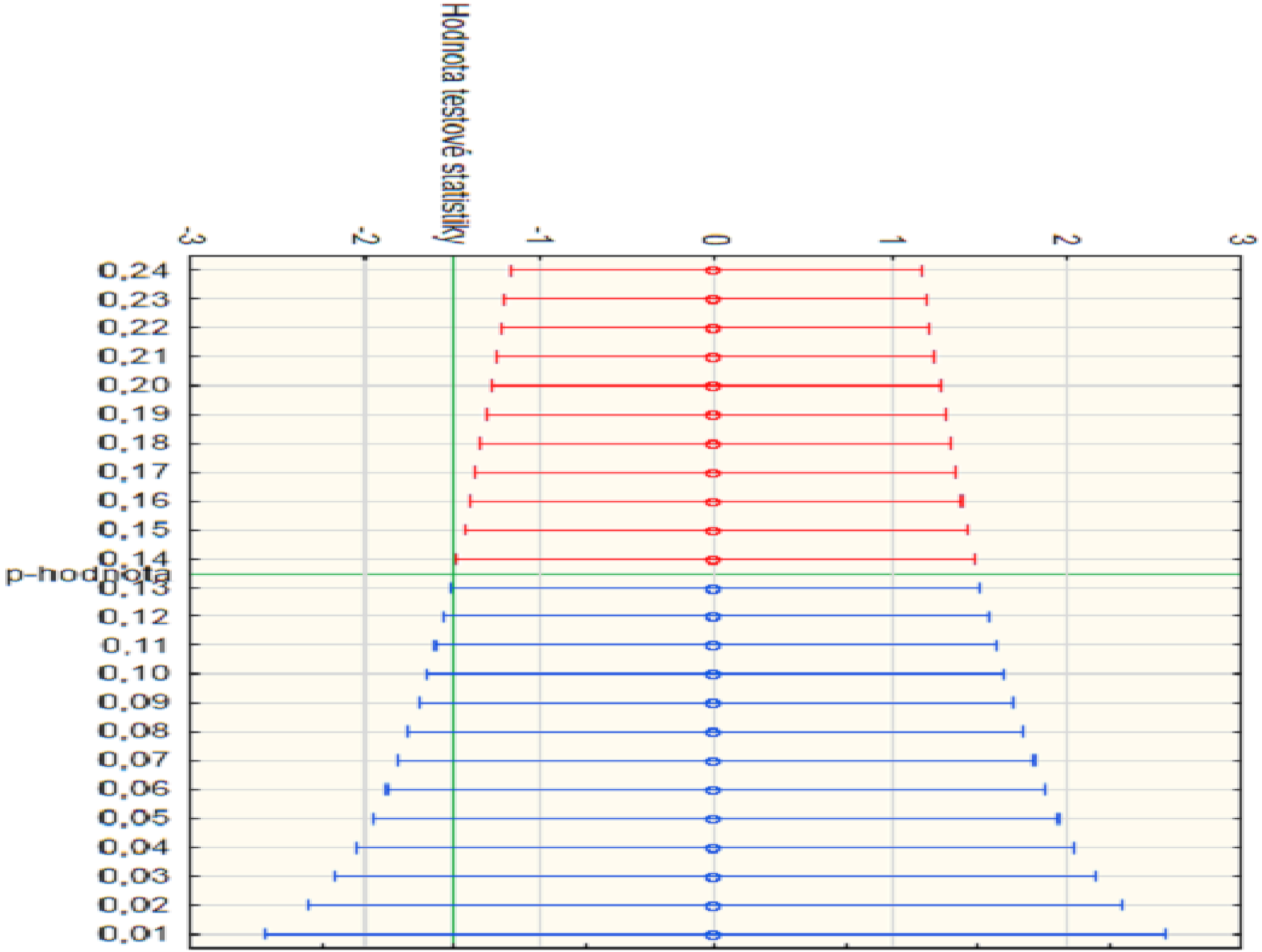
Použitie *P*-hodnota II

$$p = 2. min\{P(g \leq -G), P(g \geq G)\}$$



- Ak je p-hodnota $\leq \alpha$, zamietneme H_0 na hladine významnosti α

Použitie *p*-hodnoty II



Príklad

- Náhodný výber 100 výrobkov

$$\langle 2{,}08;\ 2{,}31 \rangle$$

- Priemerná váha 2,2 kg
- Smerodajná odchýlka váhy výrobkov σ = 0,6 kg
- $H_0\colon \mu = 2$
- $H_1\colon \mu \neq 2$

$$X \sim N(0,1),\ P(|X| > u_\alpha) = \alpha$$

α	0,01	0,02	$\boxed{0{,}05}$	0,1	0,2
u_α	2,5758	2,3263	$\boxed{1{,}9599}$	1,6448	1,299

- Hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$

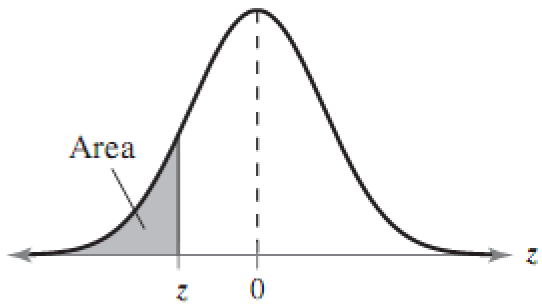
$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{2{,}2 - 2}{0{,}6}\sqrt{100} = \frac{10}{3} = 3{,}33 > 1{,}96$$

- Zamietame H_0 na hladine významnosti 0,05

Príklad II

Table 4—Standard Normal Distribution

$U = 3{,}33$



z	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03	.02	.01	.00
–3.4	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
–3.3	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	$\boxed{.0004}$	.0005	.0005	.0005
–3.2	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007
–3.1	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008	.0009	.0009	.0009	.0010
–3.0	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0012	.0012	.0013	.0013	.0013
–2.9	.0014	.0014	.0015	.0015	.0016	.0016	.0017	.0017	.0018	.0019

- $p = 0{,}0008 < 0{,}05$
- Zamietame hypotézu H_0 na hladine 0,05

Literatúra k štatistike

http://mi21.vsb.cz/modul/vybrane-kapitoly-z-pravdepodobnosti

Dagmar Markechová, Beáta Stehlíková, Anna Tirpáková: Štatistické metódy a ich aplikácie

Javier R. Movellan: Introduction to Probability Theory and Statistics

Mirko Navara: Pravdepodobnost a matematická statistika

Vlastné čísla, vlastné vektory

- Číslo λ nazývame vlastným číslom matice A, ak sústava lineárnych rovníc tvaru $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ má okrem triviálneho riešenia aj nenulové riešenie. Príslušné nenulové riešenie sa nazýva vlastný vektor matice A zodpovedajúci vlastnému číslu λ
- Vlastné čísla nájdeme vyriešením

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

- Potom pre každú hodnotu λ vyriešime

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$$

Príklad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda) - (-4)(-1) =$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 6 =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & -4 \\ -1 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-v_1^1 - 4v_2^1 = 0$$

$$-v_1^1 - 4v_2^1 = 0$$

$$v_1^1 = -4v_2^1$$

$$\begin{bmatrix} 2-(-2) & -4 \\ -1 & -1-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4v_1^2 - 4v_2^2 = 0$$

$$-v_1^2 + v_2^2 = 0$$

$$v_1^2 = v_2^2$$

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Druhý príklad

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(-1-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda) = 0$$

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 3, \quad \lambda = 7$$

Druhý príklad II

$$\lambda = -1$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 + 2v_2^1 + 0 = 0$$

$$0 + 4v_2^1 + 4v_3^1 = 0$$

$$0 + 0 + 8v_3^1 = 0$$

$$v_1^1 = 1, \quad v_2^1 = 0, \quad v_3^1 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Singulárne číslo, singulárne vektory

- Nezáporné číslo σ sa nazýva singulárne číslo matice $\boldsymbol{A}$ rozmeru N x D, ak existuje N-rozmerný vektor $\boldsymbol{u}$ (ľavý singulárny vektor) a D-rozmerný vektor $\boldsymbol{v}$ (pravý singulárny vektor) a platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \sigma \mathbf{u},$$

$$\mathbf{A}^H \mathbf{u} = \sigma \mathbf{v},$$

Singulárne číslo, singulárne vektory II

- kde $\boldsymbol{A}^H$ je Hermitovsky (komplexne združená) transponovaná matica. Pre reálne matice, s ktorými budeme pracovať platí $\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^T$.
- Singulárne čísla sa dajú chápať ako druhé odmocniny vlastných čísel matíc $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ alebo $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ či matice $\begin{bmatrix} I & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^H & I \end{bmatrix}$

Singulárne vektory II

- Ak $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N]$ je matica všetkých ľavých singulárnych vektorov a $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N]$ matica pravých singulárnych vektorov, potom platí

$$\mathbf{AV} = \mathbf{US},$$
$$\mathbf{A}^T\mathbf{U} = \mathbf{VS}^T$$

- kde $\boldsymbol{S} = diag(1, \dots, rank(\boldsymbol{A}))$ je diagonálna matica singulárnych čísel $\boldsymbol{A}$

SVD – singulárny rozklad matice

- SVD rozloží maticu $\boldsymbol{A} \in R^{N \times D}$ na súčin troch matíc $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T$,
- kde $\boldsymbol{U} \in R^{N \times N}$ a $\boldsymbol{V} \in R^{D \times D}$ sú ortogonálne matice obsahujúce ľavé a pravé singulárne vektory a
- $\boldsymbol{S} \in R^{N \times D}$ je diagonálna matica, obsahujúca na diagonále singulárne čísla matice $\boldsymbol{A}$ zostupne podľa veľkosti

Singulárny rozklad matice II

- Singulárny rozklad $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{USV}^T$ môžeme napísať ako

$$[\mathbf{A}]_{N \times D} = [\mathbf{U}]_{N \times N} [\mathbf{S}]_{N \times D} \left[\mathbf{V}^T\right]_{D \times D}$$

kde *N* je počet vzoriek a *D* je dimenzia vzorky (rozmer vektora príznakov)

Singulárny rozklad matice III

- Pre počet nenulových vlastných čísel r platí r = rank(**A**) <= min(N,D) a úsporná forma SVD je

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \hline \mathbf{U}_3 & \mathbf{U}_4 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots \sigma_r) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right],$$

$$\mathbf{V}^T = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_3 \\ \hline \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_4 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \hline \mathbf{U}_3 & \mathbf{U}_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_3 \\ \hline \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_4 \end{array}\right] =$$

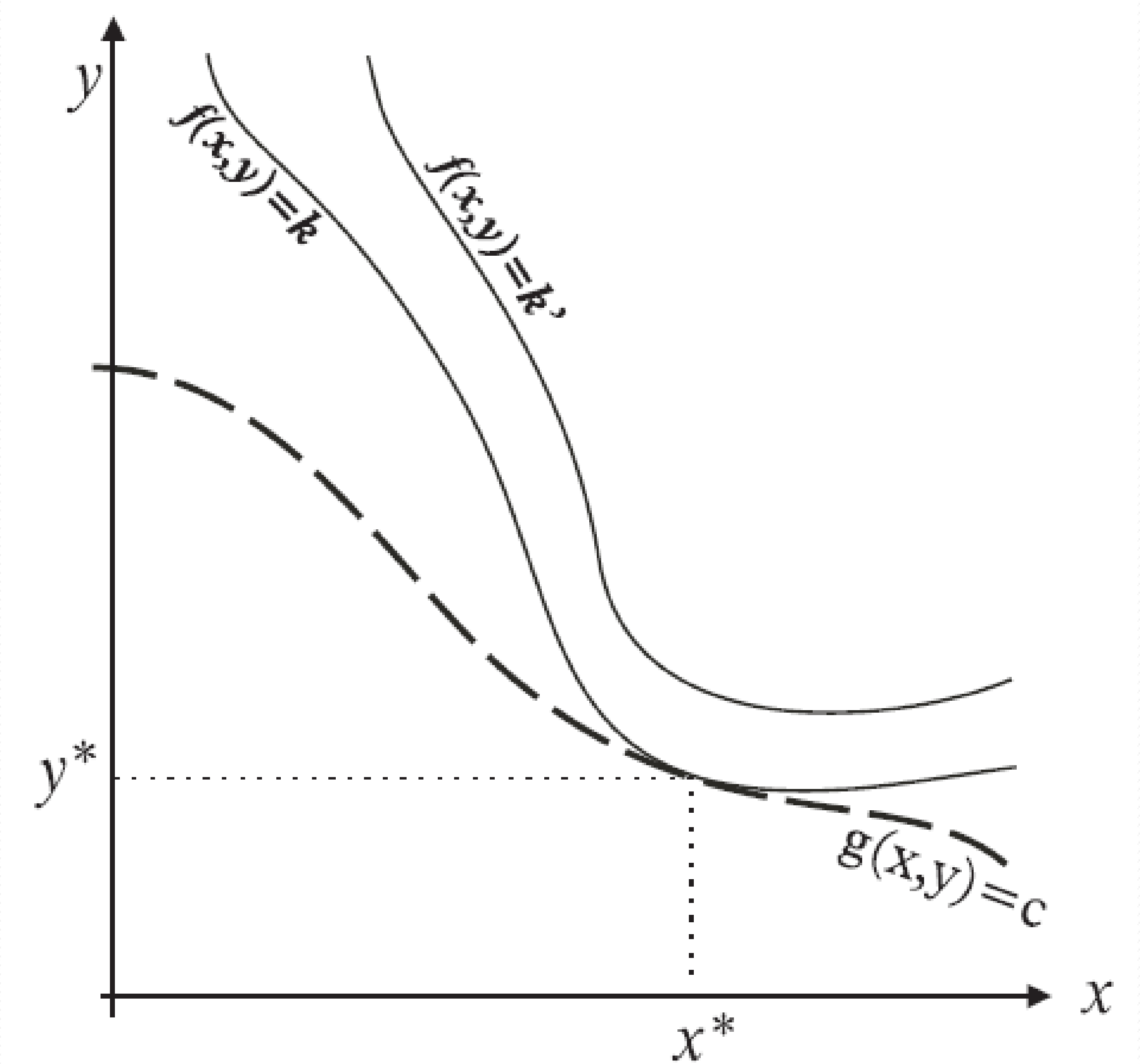
$$= \left[\begin{array}{c} \mathbf{U}_1 \\ \hline \mathbf{U}_3 \end{array}\right]_{(N \times r)} [\mathbf{S}_1]_{(r \times r)} [\mathbf{V}_1 | \mathbf{V}_3]_{(r \times D)} \,.$$

Nelineárne programovanie

- Využívame ho na hľadanie viazaného extrému s využitím Lagrangeovej metódy neurčitých koeficientov
- Najprv hľadáme extrém funkcie za podmienky, že riešenie spĺňa ohraničenie v podobe rovnosti, čiže

$$\min_{\boldsymbol{x}}\left\{\left(f(\boldsymbol{x})\middle|g_j(\boldsymbol{x})=c_j\right) pre\ j=1,2,\dots m\right\}$$

Nelineárne programovanie II



Nelineárne programovanie III

- Lagrangeova funkcia má tvar

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\boldsymbol{x}) - c_j)$$

- Pri splnení podmienok existuje jediný vektor $\boldsymbol{\lambda}$ (vektor Lagrangeových multiplikátorov), že funkcia má stacionárny bod, a platí

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{ a } \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$

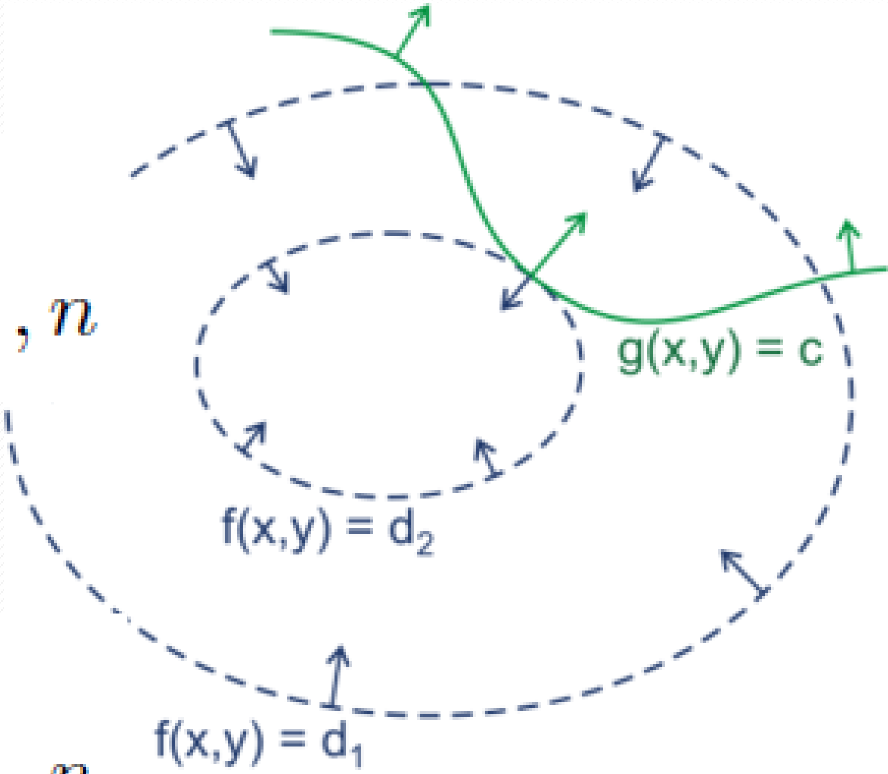
Nelineárne programovanie IV

- Ak zmeníme podmienku viazanosti z rovností na nerovnosti, tak dostaneme
- Riešime

$$\min f(\mathbf{x})$$
$$\text{aby} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq c_i \quad i = 1, \ldots, n$$

- čo prevedieme na

$$\min f(\mathbf{x})$$
$$\text{aby} \quad g_i(\mathbf{x}) - c_i \leq 0 \quad i = 1, \ldots, n$$



Nelineárne programovanie V

- Aj pri nerovnostiach existuje minimum *f(**x**)* a vektor Lagrangeových multiplikátorov, ktorý spĺňa tzv. Kuhn-Tuckerove podmienky

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$\lambda_i \frac{\partial L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} = \lambda_i g_i(\mathbf{x}) = 0$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Koniec odbočky

- ale nie matematiky☺