

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**ODSTRAŇOVANIE TVAROVÝCH DEFORMÁCIÍ OBRAZOV**  
DIZERTAČNÁ PRÁCA

Bratislava, 2006

**RNDr. Róbert Bohdal**

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**  
**Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky**

**ODSTRAŇOVANIE TVAROVÝCH DEFORMÁCIÍ OBRAZOV**  
**DIZERTAČNÁ PRÁCA**

**v odbore doktorandského štúdia:**

**11-16-9 Geometria a topológia**

**Školiteľ: Doc. RNDr. Miloš Božek, CSc.**

**Doktorand: RNDr. Róbert Bohdal**

**Bratislava, 2006**

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**  
**Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky**

**ODSTRAŇOVANIE TVAROVÝCH DEFORMÁCIÍ OBRAZOV**

RNDr. Róbert BOHDAL  
DIZERTAČNÁ PRÁCA

na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae doctor  
v odbore doktorandského štúdia:  
11-16-9 Geometria a topológia

Bratislava, november 2006

## **POĎAKOVANIE**

Týmto by som sa chcel poďakovať vedúcemu dizertačnej práce Doc. RNDr. Milošovi Božekovi, CSc. za jeho pomoc a odborné rady pri jej vypracovaní. Ďalej sa chcem poďakovať všetkým kolegom i mojej manželke, ktorí mi pomáhali pri záverečných úpravách textu. Ďakujem Bohu i celej mojej rodine, že som mohol prácu písať v pokoji a v zdraví.

## Obsah

Úvod .....	5
1 Postup odstraňovania deformácií obrazu .....	7
1.1 Vplyv prostredia a spracovania na obrazovú predlohu .....	7
1.2 Etapy postupu pri spracovaní mapových podkladov .....	8
2 Etapy spracovania obrazu .....	10
2.1 Farebné priestory v počítačovej grafike .....	10
2.2 Filtrovanie obrazu a odstránenie šumu .....	19
2.3 Binarizácia obrazu .....	31
2.4 Rekonštrukcia obrazu .....	34
2.5 Vzorkovanie obrazu, rozklad do rastra .....	38
3 Transformácia obrazu – základné definície a pojmy .....	41
3.1 Bézierova trojuholníková záplata .....	41
3.2 Triangulácia množiny bodov .....	45
3.3 Základné transformácie roviny .....	48
3.4 Stručné rozdelenie metód transformácie obrazu .....	50
4 Jednosegmentové metódy transformácie obrazu .....	52
4.1 Metóda afinnej transformácie .....	52
4.2 Metóda projektívnej transformácie .....	54
4.3 Metóda bilineárnej transformácie .....	56
4.4 Metódy radiálnych bázičných funkcií .....	57
4.5 Metóda tenkostenných splajnov .....	60
4.6 Shepardova metóda .....	62
4.7 Metóda najmenších štvorcov .....	64
5 Viacsegmentové metódy transformácie obrazu .....	66
5.1 Trojuholníková metóda I – afinná po častiach .....	67
5.2 Trojuholníková metóda II – s použitím váh .....	68
5.3 Trojuholníková metóda III – hladká .....	69
5.4 Interpolant deviatich parametrov .....	71
5.5 Cloughova-Tocherova metóda interpolácie .....	72
5.6 Pwellova-Sabinova metóda interpolácie .....	79
5.7 Metóda hladkého spájania trojuholníkov .....	85
6 Odhad normál pre viacsegmentové metódy .....	86
7 Implementácia transformačných metód .....	90
8 Zhodnotenie a použiteľnosť jednotlivých metód .....	94
Záver .....	98
Literatúra .....	100
Príloha A .....	103
Príloha B .....	132

## Zoznam tabuliek

Tabuľka 1: Prehľad radiálnych bázických funkcií. ....	58
Tabuľka 2: Prehľad Wendlandových funkcií. ....	59
Tabuľka 3: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu. ....	128
Tabuľka 4: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód. ....	136
Tabuľka 5: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód. ....	137

## Zoznam obrázkov

Obrázok 2.1: Farebný diagram $CIE Y_{xy}$ 1931. Porovnanie farebných rozsahov. ....	11
Obrázok 2.2: Aditívne a subtraktívne skladanie farieb. ....	13
Obrázok 2.3: Farebný model $CIE L^*a^*b^*$ . ....	14
Obrázok 2.4: Symetrické masky veľkosti $3 \times 3$ a $5 \times 5$ pre metódy konvolučnej masky. ....	21
Obrázok 2.5: Nesymetrické masky veľkosti $3 \times 3$ a $5 \times 5$ pre metódu rotujúcej masky. ....	21
Obrázok 2.6: Masky veľkosti $5 \times 5$ pre Kuwaharov filter. ....	22
Obrázok 2.7: Binárny obraz obsahujúci objekty A a B. ....	27
Obrázok 2.8: Výsledok dilatácie a erózie na objektoch A a B. ....	28
Obrázok 2.9: Výsledok operácie otvorenia objektov A a B. ....	29
Obrázok 2.10: Výsledok operácie uzavretia objektov A a B. ....	29
Obrázok 2.11: Šedotónová dilatácia a erózia. ....	30
Obrázok 2.12: Určenie prahovej hodnoty pomocou histogramu. ....	32
Obrázok 2.13: Určenie prahovej hodnoty trojuholníkovým algoritmom. ....	33
Obrázok 2.14: Voľby hodnôt $B$ a $C$ pri bikubickej metóde. ....	35
Obrázok 2.15: Začiatková triangulácia oblasti obrázku. ....	36
Obrázok 2.16: Dve možné triangulácie zostrojené na množine 4 pixlov. ....	37
Obrázok 2.17: Zmena tvaru okraja obrazu po transformácii. ....	39
Obrázok 2.18: Postup šírenia vlny vo vlnovej metóde. ....	40
Obrázok 3.1: Geometrická interpretácia $C^1$ -spojitosti susedných trojuholníkových záplat. ....	45
Obrázok 3.2: Kritérium lokálne maximálneho minimálneho uhla. ....	47
Obrázok 3.3: Kritérium prázdnoty opísaného kruhu. ....	48
Obrázok 3.4: Posunutie a otočenie úsečky. Rovnoľahlosť úsečky. ....	51
Obrázok 4.1: Výpočet obrazu bodu $X$ pomocou afinného zobrazenia. ....	53
Obrázok 5.1: Príklad trojuholníkovej interpolačnej plochy s hladkosťou $C^0$ . ....	67
Obrázok 5.2: Výpočet súradnice obrazu bodu $X$ z $T_a$ a $T_i$ . ....	68
Obrázok 5.3: Určenie váhy $\omega$ prislúchajúca trojuholníku $T$ . ....	69
Obrázok 5.4: Príklady váhovej funkcie $g(x)$ . ....	70
Obrázok 5.5: Derivácie pozdĺž hrán určujú radiace body hraničných Bézierových kriviek. ....	71
Obrázok 5.6: Kubická trojuholníková Bézierova záplata nad minitrojuholníkom $P_1P_2P_3'$ . ....	73
Obrázok 5.7: Konštrukcia siete radiacích Bézierových vrcholov nad tromi minitrojuholníkmi. ....	75
Obrázok 5.8: Normály a derivácia v priečnom smere určujú polohu Bézierových bodov. ....	75
Obrázok 5.9: Rozloženie radiacích bodov nad minitrojuhol. dvoch susedných trojuholníkov. ....	77
Obrázok 5.10: Kvadratická trojuholníková Bézierova záplata nad minitrojuholníkom $P_1P_2P_3'$ . ....	79
Obrázok 5.11: Konštrukcia radiacej siete Bézierových vrcholov nad šiestimi minitrojuholníkmi. ....	81
Obrázok 5.12: Konštrukcia radiacej siete Bézierových vrcholov nad dvanástimi minitrojuholn. ....	82
Obrázok 5.13: Konštrukcia radiacej siete Bézierových vrcholov metódou Cendes a Wonga. ....	83
Obrázok 5.14: Určenie váhy pomocou dĺžok. ....	85
Obrázok 6.1: Určenie váhy pre normálu trojuholníka. ....	87
Obrázok 7.1: Určenie „najbližšieho“ trojuholníka k bodu. ....	92
Obrázok 7.2: Rozšírenie triangulácie o okraj tvoriaci rám. ....	93
Obrázok 8.1: Cloughova-Tocherova metóda. Normály počítane pomocou Thurmerovho odhadu. ....	97
Obrázok 8.2: Cloughova-Tocherova metóda. Normály počítane pomocou Akimovho odhadu. ....	97

## Zoznam obrázkov prílohy

Obrázok 1: Pôvodná, nedeformovaná mriežka. ....	103
Obrázok 2: Deformovaná mriežka – stiahnutá. ....	104
Obrázok 3: Zadané odpovedajúce si body pre opravu stiahnutej mriežky. ....	105
Obrázok 4: Opravenie stiahnutej mriežky – jednoduchá trojuholníková metóda . ....	106
Obrázok 5: Opravenie stiahnutej mriežky – hladká trojuholníková metóda. ....	107
Obrázok 6: Opravenie stiahnutej mriežky – tenkosplajnová metóda. ....	108
Obrázok 7: Opravenie stiahnutej mriežky – kvadratická Shepardova metóda. ....	109
Obrázok 8: Opravenie stiahnutej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda (Thurmer). ....	110
Obrázok 9: Opravenie stiahnutej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda (Akima). ....	111
Obrázok 10: Deformovaná mriežka – zvlnená. ....	112
Obrázok 11: Zadané odpovedajúce si body pre opravu zvlnenej mriežky. ....	113
Obrázok 12: Opravenie zvlnenej mriežky – jednoduchá trojuholníková metóda. ....	114
Obrázok 13: Opravenie zvlnenej mriežky – hladká trojuholníková metóda. ....	115
Obrázok 14: Opravenie zvlnenej mriežky – tenkosplajnová metóda. ....	116
Obrázok 15: Opravenie zvlnenej mriežky – kvadratická Shepardova metóda. ....	117
Obrázok 16: Opravenie zvlnenej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda (Thurmer). ....	118
Obrázok 17: Opravenie zvlnenej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda (Akima). ....	119
Obrázok 18: Deformovaná mriežka. ....	120
Obrázok 19: Zadané odpovedajúce si body pre opravu deformovanej mriežky. ....	121
Obrázok 20: Opravenie deformovanej mriežky – jednoduchá trojuholn. metóda. ....	122
Obrázok 21: Opravenie deformovanej mriežky – hladká trojuholníková metóda. ....	123
Obrázok 22: Opravenie deformovanej mriežky – tenkosplajnová metóda. ....	124
Obrázok 23: Opravenie deformovanej mriežky – kvadratická Shepardova metóda. ....	125
Obrázok 24: Opravenie deformovanej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda (Thurmer). ....	126
Obrázok 25: Opravenie deformovanej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda (Akima). ....	127
Obrázok 26: Príklad deformovanej mapy so stiahnutými okrajmi. ....	130
Obrázok 27: Odstránenie deformácie mapy pomocou tenkosplajnovej metódy. ....	131
Obrázok 28: Graf testovacej funkcie $F_1(x, y)$ . ....	132
Obrázok 29: Graf testovacej funkcie $F_2(x, y)$ . ....	132
Obrázok 30: Graf testovacej funkcie $F_3(x, y)$ . ....	132
Obrázok 31: Graf testovacej funkcie $F_4(x, y)$ . ....	132
Obrázok 32: Graf testovacej funkcie $F_5(x, y)$ . ....	133
Obrázok 33: Graf testovacej funkcie $F_6(x, y)$ . ....	133
Obrázok 34: Graf testovacej funkcie $F_7(x, y)$ . ....	133
Obrázok 35: Graf testovacej funkcie $F_8(x, y)$ . ....	133
Obrázok 36: Trojuholníková interpolačná metóda na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	134
Obrázok 37: Váňovaná trojuholníková metóda na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	134
Obrázok 38: Hladká trojuholníková metóda na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	134
Obrázok 39: Tenkosplajnová interpolačná metóda na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	134
Obrázok 40: Metóda najmenších štvorcov na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	135
Obrázok 41: Shepardova interpolačná metóda na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	135
Obrázok 42: Kvadratická Shepardova metóda na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	135
Obrázok 43: Cloughova-Tocherova metóda na vzorke bodov funkcie $F_1(x, y)$ . ....	135

## Zoznam grafov prílohy

Graf 1: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu ( <i>CC</i> ). .....	129
Graf 2: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu ( <i>UIQI</i> ). .....	129
Graf 3: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_1(x, y)$ . .....	138
Graf 4: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_2(x, y)$ . .....	138
Graf 5: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_3(x, y)$ . .....	139
Graf 6: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_4(x, y)$ . .....	139
Graf 7: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_5(x, y)$ . .....	140
Graf 8: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_6(x, y)$ . .....	140
Graf 9: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_7(x, y)$ . .....	141
Graf 10: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód pre funkciu $F_8(x, y)$ . .....	141



# Úvod

Spracovanie dát preniklo už aj do takých oblastí, v ktorých by sme to nečakali. Čo majú spoločné počítačová grafika a staré, dnes už často historické náčrtky vlastníctva pôdy? Tieto náčrtky obsahujú grafickú informáciu, ktorú treba pomocou digitalizácie (skenovaním alebo ručným zadávaním polohy bodov), preniesť z papiera do elektronickej podoby a upraviť ju do vhodného tvaru pre ďalšie spracovanie. Väčšina týchto náčrtkov je vo veľmi zlom stave. Sú navlhnuté, poskrúcané alebo inak deformované. Mnohokrát ani nevieme, v akej mierke boli nakreslené. Pritom z nich chceme dostať pomerne presnú informáciu o výmerách jednotlivých pozemkov. Našťastie už v dobách minulých sa pri kreslení takýchto máp využívali identifikačné body, ktoré označovali polohu významných objektov reálneho sveta. Často to boli stromy, význačné geografické zvláštnosti, alebo rohy väčších budov. Pomocou presnej polohy týchto bodov je možné odstrániť deformácie náčrtkov a následne vypočítať súradnice všetkých bodov polygónov označujúcich jednotlivé pozemky. Z týchto polygónov sa vypočítajú výmery parciel, ktoré slúžia ako podklad do databáz výmer pozemkov spracovávaných Katastrálnymi úradmi.

Predkladaná dizertačná práca vznikla na základe mnoho rokov používaného softvéru, ktorý som vytvoril pre potreby geodetov. Objednávateľ softvéru žiadal, aby bol program schopný odstrániť deformácie obrazov zoskenovaných máp zadaním odpovedajúcich si bodov. Časom sa ukázalo, že naprogramované transformačné metódy, sú vhodné aj na iný účel. Pomocou týchto metód mohli užívatelia programu „*zjednocovať starý a nový stav parciel*“. To znamená, že sa transformovali súradnice *lomových bodov* parciel starších máp (ktoré obsahovali pôvodné parcely) na lomové body parciel nových máp (presnejších, ale v ktorých neboli zakreslené všetky pôvodné parcely, pretože mnohé z nich už zanikli kvôli vyvlastneniu pozemkov).

Hlavným cieľom tejto práce je popísať a navrhnúť matematické metódy a postupy na odstránenie deformácií obrazu, ktoré sú založené na transformácii obrazu pomocou dvojíc odpovedajúcich si bodov a porovnať presnosť s akou odstraňujú deformácie.

Predkladaná práca pozostáva z troch logických celkov. Prvý logický celok tvorí prvá a druhá kapitola, druhý kapitoly tri až šesť a posledný kapitoly sedem a osem.

V prvej a druhej kapitole práce popisujeme postup úpravy obrázku pomocou metód spracovania obrazu, medzi ktoré patria metódy filtrácie a binarizácie obrazu ako i metódy úpravy obrazu pomocou morfológických operátorov. Uvádzame najmodernejšie metódy filtrácie zachovávajúce hrany objektov obrazu. Prvý celok uzatvára kapitola o rekonštrukcii transformovaného obrazu metódou DDT a rozkladu rekonštruovaného obrazu do rastra. V tejto kapitole navrhujeme nový postup, ktorý výrazne urýchľuje rozklad výsledného obrazu do rastra bez nutnosti poznať inverznú transformáciu.

Na začiatku tretej kapitoly uvádzame základné definície a pojmy používané v práci (Bézierova trojuholníková záplata a triangulácia množiny bodov), ako i stručné rozdelenie jednotlivých transformačných metód. Ďalšia kapitola obsahuje popis jednosegmentových metód, medzi ktoré patrí najmä metóda afinnej transformácie, metóda projektívnej transformácie, metódy bázičných radiálnych funkcií, metóda tenkostenných splajnov a Shepardova metóda. V piatej kapitole popisujeme viacsegmentové metódy transformácie obrazu, ktoré patria medzi metódy konečných prvkov využívajúce trianguláciu vstupných dát. V rámci tejto kapitoly navrhujeme tri nové metódy, ktoré nazývam trojuholníkové. Ich hlavnou prednosťou je oveľa vyššia rýchlosť výpočtu v porovnaní s ostatnými metódami. Ďalej v tejto kapitole uvádzame metódu interpolantu deviatich parametrov, Cloughovu-Tocherovu metódu, Powellovu-Sabinovu metódu a metódu hladkého spájania trojuholníkov. Cloughova-Tocherova metóda a Powellova-Sabinova metóda vyžadujú poznať okrem zadaných dát aj normály vo vrcholoch vyčíslenej triangulácie. Problematikou odhadu týchto normál sa zaoberáme v celej šiestej kapitole.

Pri použití metód využívajúcich trianguláciu dát vzniká problém, že vytvorená triangulácia nie vždy pokrýva celú plochu obrazu. Preto navrhujeme nový postup ako túto trianguláciu rozšíriť na celý obraz.

Hlavným prínosom práce je posledný celok, v ktorom vyhodnotíme jednotlivé metódy z hľadiska ich použiteľnosti a presnosti pre odstránenie deformácie obrazu. Opíšeme i novú metódu určenia presnosti jednotlivých metód, ktorá je založená na porovnaní nedeformovaného (pôvodného) obrázku s obrázkom s odstránenou deformáciou pomocou korelačného koeficientu.

Nedeliteľnou časťou práce je priložený program, v ktorom sú implementované jednotlivé metódy, a pomocou ktorého je možné nielen odstrániť deformáciu obrazu ale i obraz filtrovať a binarizovať.

# 1 Postup odstraňovania deformácií obrazu

V našej práci budeme upravovať zosnímaný rastrový obraz tak, aby sme v ďalšej etape mohli pomocou geometrických transformácií bitmapového obrazu odstrániť (alebo naopak vytvoriť) deformácie obrazu. Po zoskenovaní podkladu je treba najskôr upraviť rastrový obraz tak, aby bol vhodný na ďalšie spracovanie. Tieto úpravy môžeme vykonať použitím známych techník spracovania obrazu ako sú filtrovanie, binarizácia a iné. Na odstránenie deformácií slúžia transformačné funkcie  $f(x, y)$ , ktoré zobrazujú pixle vstupného obrazu do pixlov výsledného obrazu, pričom platí, že sa celočíselné súradnice polohy pixlov môžu po transformácií zmeniť na reálne. Niektoré transformačné metódy sú, z hľadiska odstránenia deformácií, vhodné pre globálne zmeny, iné skôr pre lokálne zmeny v obraze. Viac podrobností uvádzame v kapitole o zhodnotení jednotlivých metód. Po odstránení deformácií je možné pristúpiť k ďalšiemu využitiu obrazu. V prípade katastrálnych máp to môže byť napr. vektorizácia mapy.

## 1.1 Vplyv prostredia a spracovania na obrazovú predlohu

Počas údržby a skladovania máp dochádza na mapových podkladoch k rôznym zmenám. Vplyvom klimatických zmien prostredia môže mapový podklad zmeniť svoj tvar – deformovať. Niektoré časti mapy môžu byť vplyvom vlhka zväčšené, iné pôsobením suchého vzduchu zmenšené alebo zvlhčené. Rovnako aj pri nešetrnom zaobchádzaní s nimi môže dôjsť k nenávratným zmenám v ich tvare (napr. pri pokrčení, obliatí atď.). Často dochádza aj k vyblednutiu niektorých farieb a oblastí. Papier mení svoju prirodzenú farbu a časom zožltne. Nie vždy je možné zabezpečiť kvalitné uskladnenie máp v tmavých a klimatizovaných archívoch.

Pri použití veľkoformátových bubnových skenerov môže dôjsť pri snímaní obrazu k jeho deformácií v smere posunu papiera. Aj niektoré stolné skenery nemusia byť vždy dostatočne presné a môžu deformovať obraz v smere posunu snímacích (osvetľovacích) častí zariadenia.

Občas sa stáva, že niektoré časti obrazu sú už počas kreslenia (tvorby) mapy umiestnené na nesprávnom mieste. Ak pri takýchto objektoch máme k dispozícii ešte nejaké ďalšie údaje (napr. geodetické súradnice trigonometrických alebo iných význačných bodov), môžeme ich využiť na vytvorenie „neskresleného“ mapového podkladu.

## 1.2 Etapy postupu pri spracovaní mapových podkladov

Najskôr je treba preniesť obrazovú informáciu z mapy do súboru, čo sa dá urobiť vhodným zoskenovaním predlohy. Pri skenovaní mapových podkladov je treba použiť taký skener, ktorý dosahuje dostatočnú presnosť vzhľadom k danej presnosti skenovaných máp. Ideálne je, keď je chyba skeneru vzhľadom k presnosti mapy zanedbateľná. Pred skenovaním je treba určiť vhodné rozlíšenie<sup>1</sup>, v ktorom bude mapový podklad zosnímaný. Keďže je obvyčajne treba zachovať rozumný objem dát (nielen kvôli uchovaniu máp na pamäťové média ale hlavne kvôli ich ďalšiemu spracovaniu) a súčasne zabezpečiť čo najvernejšiu reprodukciu pôvodného obrazu, je nutné zvoliť nejaký kompromis. Zvyčajne sa rozlíšenie určí podľa veľkosti najmenších detailov, ktoré majú byť v obraze zachované. Z hľadiska ďalšieho spracovania je žiadúce, aby obraz v digitalizovanej podobe, mal najtenšie čiary hrubšie ako 1 pixel, pretože napr. pri použití morfológického operátora *erózia* alebo pri filtrovaní, môžu byť útvary s hrúbkou jedného pixlu odstránené. Podobne, aj pri geometrických transformáciach by pri tenkých čiarach mohlo dôjsť k strate významnej informácie. Ak je napríklad kresba tvorená čiarami s najtenšou hrúbkou 0.25mm, tak jednoduchým výpočtom ( $25.4 / 0.25 \times 2$ ) dostaneme minimálne požadované rozlíšenie 204 DPI. V praxi je dobré túto hodnotu ešte o niečo zväčšiť.

Ďalšou, nemenej dôležitou otázkou, je voľba vhodnej *farebnej hĺbky* skenovaných máp. Najvhodnejšie je obrazové predlohy skenovať v tzv. *pravých farbách* (true color), a potom (ak je to z hľadiska ďalšieho spracovania nutné) postupne znižovať farebnú hĺbku na potrebnú úroveň. Túto operáciu je dobré vykonať interaktívne, aby pri znižovaní farebnej hĺbky nedošlo k strate časti kresby.

Pri spracovaní katastrálnych máp stačí využívať len čierno-bielu informáciu. Nastavením vhodných parametrov skenovania (kontrast, redukcia šumu, prahová hodnota atď.) sa docieli, že obraz prenášaný do počítača bude oveľa vhodnejší na spracovanie ako samotná predloha.

Ak použitý skenovací program neumožňuje vytvoriť žiadaný bitmapový obraz (napr. neumožňuje použiť vhodnú metódu *binarizácie*, nie je schopný vykonať morfológické operácie, prípadne neposkytuje vhodné filtračné techniky) je nutné použiť nejakú špecializovanú aplikáciu pre prácu s obrazmi.

Nasledovnou úlohou je upraviť samotný bitmapový obraz tak, aby boli čo v najväčšej miere odstránené deformácie obrazu, ku ktorým došlo v čase od tvorby mapy až do jej skenovania. Podľa povahy týchto deformácií sa zvolí najvhodnejšia metóda na ich odstránenie. Ak mapové dielo obsahuje dostatok informácií o význačných objektoch v obraze, tak je možné odstrániť aj chyby, ktoré vznikli počas tvorby mapy. Niekedy sa táto etapa vynecháva a deformácie sa

[1] Obyčajne sa rozlíšenie udáva v počte bodov na palec – dots per inch (DPI).

odstraňujú až pri výpočte súradníc jednotlivých bodov parciel.

Pre ďalšie spracovanie je nutné mať získanému rastrovému obrazu rozmer a polohu v rovine zobrazení, v ktorom bola mapa vytvorená. To znamená najst' vzťah medzi súradnicami rastra a príslušnými *geodetickými* súradnicami mapy. V ideálnom prípade je v mape zobrazená súradnicová sieť alebo aspoň obsahuje mapový rám s označením súradníc jeho rohov. Ak mapa neobsahuje ani rám, tak je ho väčšinou možné skonštruovať pomocou merítka mapy a použitého rozlíšenia pri skenovaní. Vďaka význačným objektom mapy, v ktorých poznáme ich súradnice je možné priradiť jednotlivým rohom takto skonštruovaného rámu geodetické súradnice.

Ďalej je nutné vytvoriť vektorovú informáciu z bitmapovej predlohy. Pri vysokokvalitných podkladoch je možné vykonať *automatickú vektorizáciu*. Tento proces v podstate znamená automatické rozoznanie rovných čiar, prípadne oblúkov, textov a značiek predlohy. Pri menej kvalitných predlohách musíme vektorovú informáciu získať ručným alebo poloautomatickým vektorizovaním. To znamená, že operátor pomocou vhodného grafického editoru ručne prekresľuje bitmapový obraz na vektorový.

Poslednou úlohou je vypočítať, obyčajne na základe známych súradníc rohových bodov mapy, geodetické súradnice (v geodézii často označované názvom „*JTSK súradnice*“) jednotlivých *lomových bodov* parciel. Tieto súradnice tvoria základ pre výpočet výmery patriacej každému pozemku.

## 2 Etapy spracovania obrazu

Po získaní obrázku v digitálnom tvare (napr. po zoskenovaní predlohy alebo po odfoto-  
grafovaní želaného objektu), je často nutné obrázok ďalej upravovať, aby bol vhodný pre ďalšie  
použitie. Najskôr sa zvyčajne upraví výrez, prípadne veľkosť obrázku, potom sa upraví jas a kon-  
trast, resp. sa vykoná *gama korekcia* obrázku. Ak je to ďalej potrebné (napr. pri použití filtrov  
používajúcich metriku konkrétneho farebného priestoru), tak sa obrázok konvertuje do vhodného  
farebného priestoru. Potom sa procesom filtrovania odstráni chyby, resp. neželané artefakty  
obrazu a nakoniec sa zmenší farebná hĺbka na požadovanú úroveň. Pri spracúvaní obrazov kata-  
strálnych máp sa používa iba čiernobiela informácia, preto sa obraz konvertuje z farieb odtieňov  
šedej do čiernobieleho obrazu. Nakoniec sa použitím *morfologických operátorov* zvýraznia tenké  
čiary, prípadne odstráni izolované body obrazu.

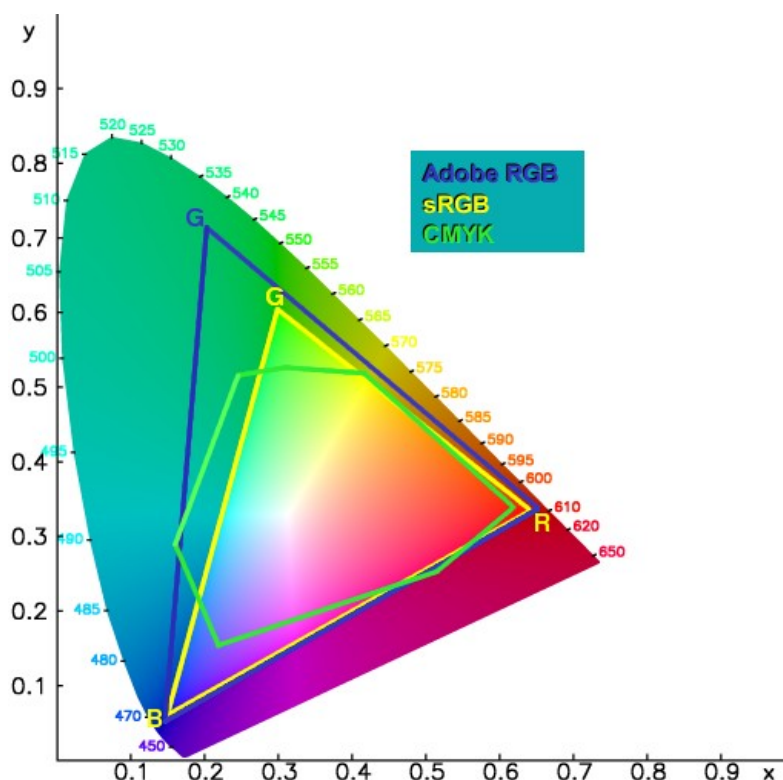
### 2.1 Farebné priestory v počítačovej grafike

V počítačovej grafike a v súčasnosti najmä v digitálnej fotografii sa často používa pojem  
*farebného priestoru RGB*, ktorý je úzko spätý so spôsobom snímania obrazu v digitálnom fotoapa-  
ráte. Obraz v digitálnej podobe, zjednodušene povedané, je dvojrozmerné pole obrazových bodov  
– pixlov, z ktorých každý má nejakú farbu. Farba je zaznamenaná číselnými hodnotami súradníc  
v konkrétnom farebnom priestore. Farebný priestor je určený svojim systémom súradníc, množi-  
nou farieb v ňom obsiahnutých a spôsobom ich číselného ukladania (kódovania). Množina farieb  
zobraziteľných daným grafickým zariadením vnútri farebného priestoru tvorí *farebný rozsah*  
(gamut). Túto množinu farieb je možné zobrazit' v rovine pomocou tzv. *chromatického diagramu*  
(pozri obrázok 2.1).

Medzinárodná komisia CIE<sup>2</sup> definovala imaginárne farebné zložky červenú (red), zelenú  
(green) a modrú (blue), ktorých kombináciou je možné približne obsiahnuť celý rozsah ľudského  
farebného videnia. Pre zariadenie pracujúce na princípe troch farieb *RGB* je farebný rozsah určený  
trojuholníkom vnútri farebného diagramu. Vrcholy tohto trojuholníka sú definované primárnymi  
farbami *RGB* použitými v konkrétnom snímacom alebo zobrazovacom zariadení. Každé zariadenie  
je schopné pracovať iba s farbami ležiacimi v tomto trojuholníku.

---

[2] Commission Internationale de L'Eclairage



Obrázok 2.1: Farebný diagram CIE Yxy 1931. Porovnanie farebných rozsahov sRGB, Adobe RGB a CMYK.

Pri dekódovaní obrazu (určovaní konkrétnych farieb jednotlivých obrazových bodov) je nutné vedieť, aký farebný priestor bol pri zaznamenávaní použitý. Ak sa pri zobrazovaní tohto obrazu použije iný farebný priestor, tak sa jednotlivým číselným hodnotám pixlov priradia nesprávne farby a výsledný obraz nebude korektný, dôjde k posunu farieb. Aby sa tomu predišlo, je nutné použiť konverziu do vhodného farebného priestoru.

Farebné priestory sa líšia najmä primárnymi farbami (ich jasom, farebnosťou a počtom), bielym a čiernym bodom (ich jasom a farebnosťou) a „tónovou“ charakteristikou (ako sú odtiene medzi najtmavším a najsvetlejším „tónom“ rozložené). Každé grafické zariadenie pracujúce s farbami, ako napr. digitálny fotoaparát, skener, tlačiareň a pod. pracuje vo svojom konkrétnom farebnom priestore. Tieto farebné priestory bývajú označované ako *priestory závislé na zariadeniach*. Súčasťou systematickej správy farieb organizáciou CIE sú aj *farebné priestory nezávislé na zariadeniach*. Tieto nezodpovedajú žiadnemu konkrétnemu grafickému zariadeniu a sú definované úplne nezávisle, sú to definované štandardy. Príkladom takýchto priestorov sú sRGB, CIE  $L^*a^*b^*$  a iné. Veľa grafických zariadení a softvérov na spracovanie obrázkov je schopné akceptovať dáta v týchto štandardoch. Farebné priestory konkrétnych zariadení nebývajú vždy dostatočne

perceptuálne rovnomerné, t.j. niektoré farby sú vedľa seba „blízko“, inde je zase priestor medzi farbami „veľký“. Takto môže v obrázkoch pri úpravách dochádzať k strate plynulosti farebných prechodov. Pre rôzne účely sú vhodné rôzne priestory, najmä preto, že ich farebný rozsah je bližší ku konkrétnemu zariadeniu. Príkladom sú tlačiarne pracujúce vo farebnom priestore *CMYK*.

## Farebné priestory *RGB* a *CMYK*

Najznámejší a najpoužívanější farebný priestor v počítačovej grafike je priestor *RGB*. Najčastejšie sa používa na zobrazovanie obrazov na obrazovke a na ukladanie farebných obrázkov v bitmapových grafických súboroch.

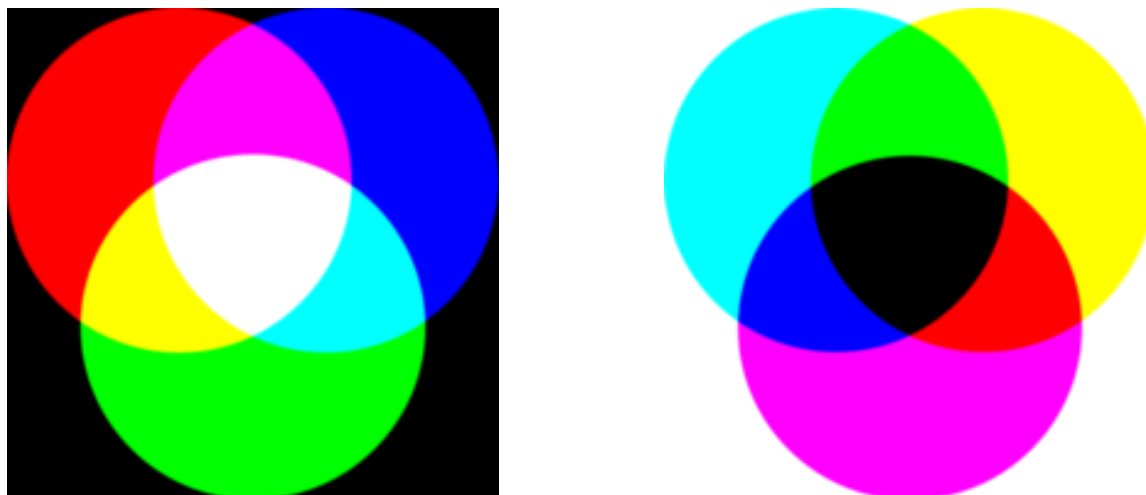
*RGB* farebný priestor je založený na *farebnom modeli RGB* a používa *aditívne skladanie farieb*, v ktorom sú primárne farby červená, zelená a modrá kombinované tak, aby vytvorili ostatné farby. Samotný farebný model *RGB* nehovorí, aké sú konkrétne hodnoty základných zložiek *R*, *G* a *B*, ale len opisuje spôsob ich použitia pri vytváraní farieb. Grafické zariadenia a ich konkrétne farebné priestory iba využívajú tento všeobecný farebný model.

Aditívny farebný model používa aditívne miešanie farieb, v ktorom sa jednotlivé farebné zložky sčítavajú a vytvárajú svetlo väčšej intenzity (pozri obrázok 2.2 vľavo). Výsledná intenzita sa rovná súčtu intenzít jednotlivých zložiek. Biela farba sa tvorí kombináciou primárnych farieb s rovnakou intenzitou.

Spomedzi všetkých farebných priestorov je v súčasnosti najviac akceptovaný farebný priestor *sRGB*, ktorý zhruba modeluje farebný priestor priemerného *CRT* monitoru. Navrhla ho firma Hewlett Packard spolu s firmou Microsoft. Stal sa štandardom, ktorý používa mnoho moderných grafických zariadení a grafických aplikácií pracujúcich s farebnými obrázkami. Keďže farebný rozsah tohto priestoru nie je vždy pre používateľov dostatočný, navrhla firma Adobe v r. 1998 priestor *Adobe RGB* s väčším pokrytím farieb (pozri obrázok 2.1).

*CMYK* farebný priestor je vytvorený na základe *farebného modelu CMY*, ktorý používa *subtraktívne skladanie farieb*. Teória subtraktívneho skladania farieb vysvetľuje, ako sa miešajú pigmenty, farbivá a atramenty, aby sa vytvorila farba, ktorá absorbuje svetlo s určitou vlnovou dĺžkou a s inou odráža. Výsledná farba sa skladá z vlnových dĺžok, ktoré nie sú pohltené pri odraze alebo prechodom cez farebné filtre. Základnými farbami modelu *CMY* sú farby tyrkysová (cyan), purpurová (magenta) a žltá (yellow) (pozri obrázok 2.2 vpravo). Farebný priestor *CMYK* sa používa najmä pri reprodukčných zariadeniach, ktoré tvoria farby miešaním pigmentov. Príkladom takýchto zariadení sú tlačiarne a plotre.





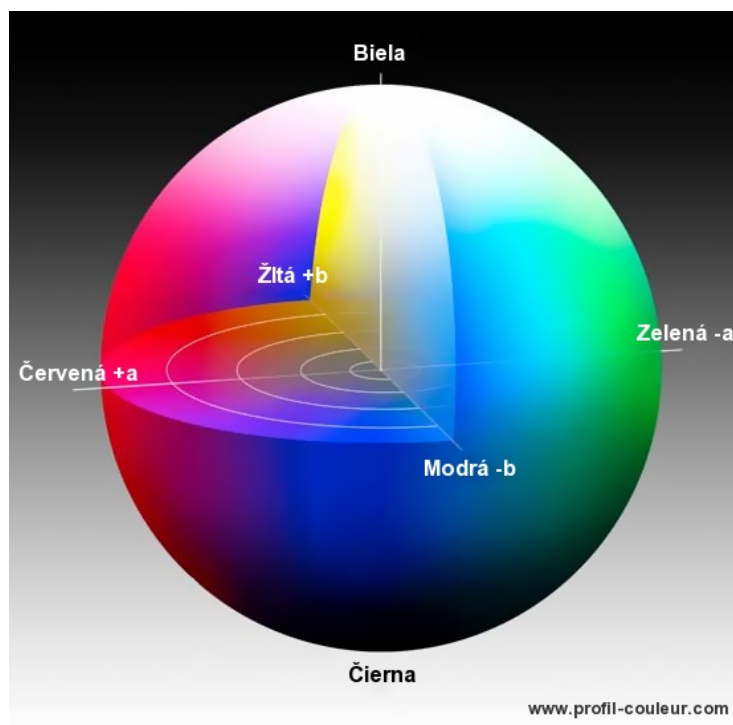
Obrázok 2.2: Aditívne (vľavo) a subtraktívne (vpravo) skladanie farieb.

Okrem farebných modelov *RGB* a *CMY* sa v počítačovej grafike často používa aj model *HSB*, ktorý je tiež zložený z troch farebných zložiek a to z farebného tónu (hue), sýtosti farby (saturation) a jas (brightness). Je vhodný najmä v prípade ak používateľ potrebuje „modelovať“ farbu pomocou jas a sýtosti.

### Farebné priestory *CIE XYZ* a *CIE L\*a\*b\**

Počas hľadania spôsobu, ako človek vníma farby, bol *farebný priestor CIE XYZ* jeden z prvých matematicky definovaných farebných priestorov. Bol vytvorený v r. 1931 organizáciou CIE a je tiež známy ako farebný priestor *CIE 1931*. Ľudské oko má tri rôzne druhy receptorov pre krátke, stredné a dlhé vlnové dĺžky. Z toho sa dá usúdiť, že na opísanie vnemu konkrétnej farby potrebujeme tri parametre. Na základe tohto faktu boli odvodené „tristimulačné“ farebné modely. Farebný priestor *CIE XYZ* je výnimočný, pretože je založený na meraniach vplyvu farby na ľudské oko. Tento priestor slúžil ako základ na odvodenie iných farebných priestorov ako je i *RGB*. Zložka *Y* vo farebnom priestore *CIE XYZ* znamená jas, zvyšné zložky *x* a *y* označujú súradnice farebného tónu (chromacity coordinates) a sú odvodené zo základných parametrov *XYZ*:

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \quad \text{a} \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z} .$$



Obrázok 2.3: Farebný model  $CIE L^*a^*b^*$ .

*Farebný priestor  $CIE L^*a^*b^*$  patrí medzi „najkompletnejšie“ farebné priestory, ktoré opisujú všetky farby viditeľné ľudským okom. Bol odvodený v r. 1976 z farebného modelu  $CIE XYZ$  a to tak, aby „linearizoval vnímanie farebných rozdielov použitím metriky vzdialenosti farieb opísanej pomocou MacAdamových elíps“ [WIKI1]. Nelineárne vzťahy medzi parametrami  $L^*$ ,  $a^*$  a  $b^*$  sú vymyslené tak, aby napodobňovali logaritmickejšiu reakciu ľudského oka na zmenu farby. Tento farebný priestor je vhodný pre názorné a matematicky jednoduché určovanie farieb. V tomto farebnom priestore parameter  $L^*$  určuje jas, parameter  $a^*$  udáva polohu medzi primárnymi farbami  $R$  a  $G$ , parameter  $b^*$  udáva polohu medzi farbami  $Y$  a  $B$  (pozri obrázok 2.3).*

### Prevody medzi farebnými priestormi

Ak potrebujeme grafické dáta vytvorené zariadením s konkrétnym farebným priestorom previesť na druhé zariadenie, ktoré pracuje v inom farebnom priestore, je nutné konvertovať tieto dáta do farebného priestoru výstupného zariadenia. Typickým príkladom je prenesenie dát z digitálneho fotoaparátu na tlačiareň. Ak tieto dve zariadenia pracujú v rovnakom farebnom modeli ale

v rôznych farebných priestoroch (napr. *sRGB* a *Adobe RGB*), vykonáva sa tzv. „prevod farebných rozsahov“ (gamut mapping), resp. premapovanie farieb. Prevod farebných rozsahov je možný vďaka zaznamenaným *ICC profilom*<sup>3</sup> jednotlivých zariadení, ktoré charakterizujú, v akom farebnom priestore zariadenie pracuje. Pri tomto prevode sa často vykonáva aj konverzia do niektorého z farebných priestorov nezávislých na zariadeniach, napr. do *CIE L\*a\*b\** alebo do *CIE XYZ*. Prevod farebných rozsahov sa vykonáva perceptuálnymi alebo kolorimetrickými metódami.

Praktické použitie prevodu z farebného priestoru *sRGB* do *CIE L\*a\*b\** je pri doostrovaní fotografií v grafických aplikáciach. Pred „ostrením“ sa obraz prevedie do farebného priestoru *CIE L\*a\*b\** a potom sa doostruje iba *L\** zložka. Tým sa vlastne doostruje iba jasový kanál obrázku a nie farby, čím sa redukuje vznik nežiadúcich farebných artefaktov na hranách objektov pri použití obrazových filtrov. Po skončení úprav sa obraz prevedie naspäť do farebného priestoru *sRGB*.

### Konverzia medzi farebnými priestormi *sRGB* a *CIE XYZ*

Prevod z farebného priestoru *sRGB* do farebného priestoru *CIE XYZ* môžeme urobiť podľa nasledovných vzťahov [LIND]:

Najskôr dané hodnoty *RGB* prevedieme z celočíselného rozsahu 0 – 255 do intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ :

$$R = R / 255, \quad G = G / 255, \quad B = B / 255,$$

potom vypočítame výsledné hodnoty *XYZ* z maticového vyjadrenia:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.412424 & 0.357579 & 0.180464 \\ 0.212656 & 0.715158 & 0.072186 \\ 0.019332 & 0.119193 & 0.950444 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix},$$

kde

$$r = \begin{cases} R/12.92, & \text{ak } R \leq 0.04045 \\ ((R+0.055)/1.055)^{2.4}, & \text{ak } R > 0.04045 \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} G/12.92, & \text{ak } G \leq 0.04045 \\ ((G+0.055)/1.055)^{2.4}, & \text{ak } G > 0.04045 \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} B/12.92, & \text{ak } B \leq 0.04045 \\ ((B+0.055)/1.055)^{2.4}, & \text{ak } B > 0.04045. \end{cases}$$

Ak by sme potrebovali previesť farebný obraz do odtieňov šedej farby, môžeme využiť predošlý maticový vzťah, keďže hodnota *Y* je jasová zložka farebného priestoru *CIE XYZ*. Z toho dostávame nasledujúce vyjadrenie na prevod hodnôt *RGB* do *Y*:

$$Y = 0.212656 \cdot R + 0.715158 \cdot G + 0.072186 \cdot B.$$

[3] International Color Consortium Profiles

Pri prevode z farebného priestoru *CIE XYZ* do farebného priestoru *sRGB* použijeme nasledovné vzťahy [LIND]:

$$R = \begin{cases} 12.92 r, & \text{ak } r \leq 0.0031308 \\ 1.055 r^{1/2.4} - 0.055, & \text{ak } r > 0.0031308 \end{cases}$$

$$G = \begin{cases} 12.92 g, & \text{ak } g \leq 0.0031308 \\ 1.055 g^{1/2.4} - 0.055, & \text{ak } g > 0.0031308 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 12.92 b, & \text{ak } b \leq 0.0031308 \\ 1.055 b^{1/2.4} - 0.055, & \text{ak } b > 0.0031308, \end{cases}$$

kde

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.24071 & -1.53726 & -0.498571 \\ -0.96926 & 1.87599 & 0.041556 \\ 0.05564 & -0.20399 & 1.057070 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Následne prevedieme hodnoty *RGB* z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  do celočíselného rozsahu 0 – 255:

$$R = \lfloor R \cdot 255 \rfloor, \quad G = \lfloor G \cdot 255 \rfloor, \quad B = \lfloor B \cdot 255 \rfloor.$$

### Konverzia medzi farebnými priestormi *CIE XYZ* a *CIE L\*a\*b\**

Majme danú farbu z farebného priestoru *CIE XYZ*, určenú tristimulačnými hodnotami *XYZ* z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Ak hodnoty  $X_n$ ,  $Y_n$  a  $Z_n$  vyjadrujú tzv. „referenčný biely bod“, tak nasledujúce vzťahy určujú prevod danej farby z farebného priestoru *CIE XYZ* do farebného priestoru *CIE L\*a\*b\** [ISO03]:

$$L^* = 116 f^y(Y / Y_n) - 16$$

$$a^* = 500 [f^x(X / X_n) - f^y(Y / Y_n)]$$

$$b^* = 200 [f^y(Y / Y_n) - f^z(Z / Z_n)],$$

kde

$$f^x(X / X_n) = \begin{cases} (X / X_n)^{1/3}, & \text{ak } (X / X_n) > (24/116)^3 \\ 841/108 (X / X_n) + 16/116, & \text{ak } (X / X_n) \leq (24/116)^3 \end{cases}$$

$$f^y(Y / Y_n) = \begin{cases} (Y / Y_n)^{1/3}, & \text{ak } (Y / Y_n) > (24/116)^3 \\ 841/108 (Y / Y_n) + 16/116, & \text{ak } (Y / Y_n) \leq (24/116)^3 \end{cases}$$

$$f^z(Z / Z_n) = \begin{cases} (Z / Z_n)^{1/3}, & \text{ak } (Z / Z_n) > (24/116)^3 \\ 841/108 (Z / Z_n) + 16/116, & \text{ak } (Z / Z_n) \leq (24/116)^3. \end{cases}$$

Hodnoty číselných zlomkov z predchádzajúcich vzťahov sú podľa komisie CIE určené nižšie uvedeným postupom.

Jasovú zložku  $Y$  priestoru  $CIE\ XYZ$  prevedieme na jasovú zložku  $L^*$  farebného priestoru  $CIE\ L^*a^*b^*$  podľa nasledujúceho vzťahu stanoveného komisiou CIE:

$$L^* = 116(Y/Y_n)^{1/3} - 16, \quad \text{ak } Y/Y_n > \varepsilon$$

$$L^* = 116[p(Y/Y_n) + q] - 16, \quad \text{ak } Y/Y_n \leq \varepsilon.^4$$

Označme

$$g(t) = 116t^{1/3} - 16$$

$$f(t) = 116[pt + q] - 16.$$

Keďže potrebujeme zaistiť  $C^0$  aj  $C^1$  spojitost' prevodnej funkcie  $L^*$ , v hodnote  $\varepsilon$  musí platiť:

1.  $g(t_0) = f(t_0)$
2.  $g'(t_0) = f'(t_0)$ , kde  $t_0 = \varepsilon$ .

Z toho dostávame:

1.  $t_0^{1/3} = pt_0 + q$
2.  $\frac{1}{3t_0^{2/3}} = p$ .

Dosadením hodnoty (podľa normy ISO)  $q = 16/116$  dostávame  $p = 841/108$  a  $\varepsilon = (24/116)^3$ .

Pre prevod farby z farebného priestoru  $CIE\ L^*a^*b^*$  do farebného priestoru  $CIE\ XYZ$  je možné použiť tieto vzťahy [ISO03]:

Najskôr definujeme  $f$ :

$$f^y(Y/Y_n) := (L^* + 16) / 116$$

$$f^x(X/X_n) := f^y(Y/Y_n) + a^* / 500$$

$$f^z(Z/Z_n) := f^y(Y/Y_n) - b^* / 200,$$

a potom vypočítame hľadané súradnice  $XYZ$ :

$$X = \begin{cases} X_n [f^x(X/X_n)]^3, & \text{ak } f^x(X/X_n) > 24/116 \\ X_n [f^x(X/X_n) - 16/116] 108/841, & \text{ak } f^x(X/X_n) \leq 24/116 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} Y_n [f^y(Y/Y_n)]^3, & \text{ak } f^y(Y/Y_n) > 24/116 \\ Y_n [f^y(Y/Y_n) - 16/116] 108/841, & \text{ak } f^y(Y/Y_n) \leq 24/116 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} Z_n [f^z(Z/Z_n)]^3, & \text{ak } f^z(Z/Z_n) > 24/116 \\ Z_n [f^z(Z/Z_n) - 16/116] 108/841, & \text{ak } f^z(Z/Z_n) \leq 24/116. \end{cases}$$

[4] Dôvod, prečo sa jasová zložka počíta podľa dvoch výrazov je to, že pre  $Y=0$  by dotyčnica ku grafu funkcie prevodu jasu zvierala s osou  $x$  pravý uhol, čo by viedlo k numerickej nestabilite v niektorých výpočtoch.

## Metriky vo farebných priestoroch

Dôvod, prečo sa vo farebných priestoroch uvažuje o metrike resp. o vzdialenosti je, že v mnohých algoritmoch a metódach sa používa „vzdialenosť dvoch farieb“ ako hodnota vzdialenosti dvoch bodov – farieb určených troma súradnicami – daného farebného priestoru. Príkladom postupov používajúcich takúto vzdialenosť je napr. algoritmus *bilaterálneho filtrovania*, ktorý uvedieme v nasledujúcej kapitole. Klasická metrika euklidovského priestoru, v ktorom je vzdialenosť dvoch bodov  $C_1C_2$  vyjadrená vzťahom:

$$|C_1C_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ kde } C_1[x_1, y_1, z_1] \text{ a } C_2[x_2, y_2, z_2],$$

nie je v každom farebnom priestore použiteľná. Použitím tohto vzťahu v priestore *RGB*, môže pri upravovaní obrázku pomocou niektorých metód vzniknúť množstvo viditeľných artefaktov s nežiadúcimi farbami. Konverziou obrázku do farebného priestoru *CIE L\*a\*b\** je možné tento nežiadúci efekt eliminovať. Pre farebný priestor *RGB* je v [COMP] uvedený vzťah pre vzdialenosť bodov<sup>5</sup>  $C_1C_2$ :

$$|C_1C_2| = \sqrt{\left(2 + \frac{\bar{r}}{256}\right) \Delta R^2 + 4 \Delta G^2 + \left(2 + \frac{255 - \bar{r}}{256}\right) \Delta B^2},$$

kde

$$\bar{r} = (r_1 + r_2)/2, \quad \Delta R = r_2 - r_1, \quad \Delta G = g_2 - g_1, \quad \Delta B = b_2 - b_1, \quad C_1[r_1, g_1, b_1] \text{ a } C_2[r_2, g_2, b_2],$$

ktorý podstatne zlepšuje problémy so vznikom nežiadúcich farieb. Vo farebnom priestore *CIE L\*a\*b\**, ktorý je perceptuálne lineárny, dobre funguje i klasický euklidovský vzťah pre vzdialenosť dvoch bodov:

$$|C_1C_2| = \sqrt{(L_2 - L_1)^2 + (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}, \text{ kde } C_1[L_1, a_1, b_1] \text{ a } C_2[L_2, a_2, b_2].$$

[5] Dá sa pomerne ľahko ukázať, že uvedený vzťah pre vzdialenosť bodov spĺňa vlastnosti metriky farebného priestoru *RGB*.

## 2.2 Filtrovanie obrazu a odstránenie šumu

Filtrovanie obrazu je jedna z najzákladnejších operácií v oblasti spracovania obrazu. V širokom slova zmysle je pojem „filtrovanie“ vysvetľovaný ako nahradzovanie jednotlivých hodnôt pixlov vstupného obrazu novými hodnotami, ktoré sú vypočítané pomocou funkcie hodnôt pixlov v istom okolí nahradzovaného obrazového bodu. Filtrovaním môžeme zmenšiť, prípadne aj odstrániť chyby, ktoré už v danom obraze boli, resp. sa do snímaného obrazu dostali pri jeho snímaní. Existuje mnoho algoritmov a postupov, ktoré sa pri filtrovaní používajú. Tieto postupy sa líšia podľa toho, aký je charakter chýb, ktoré chceme odstrániť a akú metódu ich redukcie volíme. Pri prenose a spracovaní obrazového signálu často dochádza k jeho skresleniu, pričom sa tento signál skladá s okolitým šumom. Najobvyklejší je *gaussovský šum*, v ktorom početnosť odchýliek od ideálneho signálu klesá v závislosti od amplitúdy šumovej zložky podľa krivky *Gaussovho rozdelenia* [HRACH03]. Druhým najčastejším typom šumu je tzv. *impulzný šum (salt and pepper)*, pri ktorom je pôvodná hodnota signálu úplne nahradená šumovou hodnotou, nadobudajúcou extrémnych hodnôt (čiernou alebo bielou).

Filtrácie sa používajú nielen pri spracovaní obrazov ale aj pri úpravách jednorozmerných signálov, ktoré sú získané fyzikálnymi meraniami. Bolo vyvinutých mnoho metód na potlačovanie šumu, ktoré môžeme rozdeliť do niekoľkých skupín:

- klasické filtračné techniky
- morfológické operátory
- fourierovské filtrácie

### Vybrané metódy filtrácie

Podľa matematických vlastností môžeme metódy filtrovania rozdeliť na:

- lineárne metódy – novú hodnotu pixlu počítajú ako lineárnu kombináciu vstupných pixlov,
- nelineárne metódy – všetky ostatné, ktoré sa nedajú vyjadriť pomocou lineárnej kombinácie.

Podľa charakteru spracovania obrazu ich môžeme rozdeliť na:

- vyhladzujúce filtre – tieto metódy sú používané na potlačenie šumu v obraze,
- hranové filtre (detektory) – využívajú sa na detekciu hrán objektov.

V našej práci sa budeme zaoberať len vyhladzujúcimi filtrami, pretože iba tie sú potrebné pri upravovaní mapových podkladov. Mnoho týchto filtrov rozostreje hrany, avšak neustále sa

vyvíjajú nové metódy, ktoré odstraňujú tento nedostatok. V ostatnom čase sa najviac používajú filtre na princípe *anizotropickej difúzie* a *bilaterálne filtre*, ktoré vyhladzujú obraz a v dostatočnej miere zachovávajú hrany objektov.

Najjednoduchšou metódou vyhladzovania je použiť filtre, ktoré sú vyjadrené pomocou *konvolučnej masky* alebo *konvolučného jadra*. Konvolúcia je metóda, pri ktorej je výsledná hodnota pixlu  $c[x, y]$  vypočítaná ako vážený priemer vstupných hodnôt pixlov  $a[x-j, y-i]$  nachádzajúcich sa v  $M \times N$  obdĺžnikovom okolí tohto pixlu. Konvolúciu v diskretnom priestore môžeme zapísať v tvare [DELFT]:

$$c[x, y] = a[x, y] \otimes h[x, y] = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} a[x-j, y-i] h[j, i], \quad (2.2.1)$$

kde  $h[x, y]$  je tzv. konvolučné jadro. Pomocou konvolučnej masky môžeme opísať napr.:

$$h[j, i] = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) priemerujúci filter

$$h[j, i] = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) trojuholníkový filter

$$h[j, i] = \frac{1}{273} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

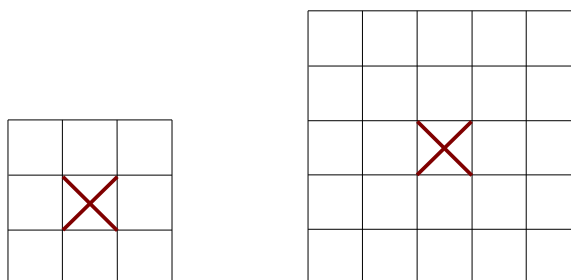
(c) Gaussov filter

Konvolučné jadro Gaussovho filtru môžeme zapísať v spojitej podobe pomocou nasledovného vyjadrenia:

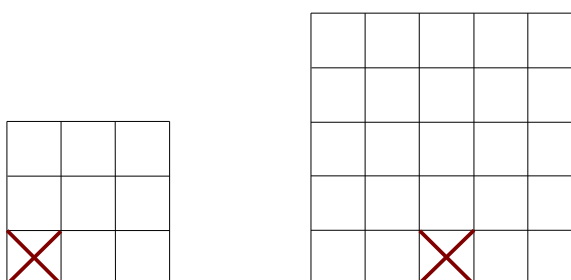
$$h[x, y] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)/\sigma^2}.$$

Predošlé filtre dobre potlačujú šum, avšak v značnej miere rozmazávajú hrany objektov. Tieto metódy možno vylepšiť, aby menej rozostrovávali hrany. Myšlienka spočíva v tom, že rozdiel medzi novou a starou hodnotou pixlu nesmie presahovať zvolenú prahovú hodnotu  $T$ . Ak prahovú hodnotu presahuje, použijeme namiesto vypočítanej hodnoty, hodnotu pixlu vstupného obrazu. Ďalšie metódy majú za cieľ zachovať schopnosť potlačovať šum ale pritom obmedziť ich nežiadúci vplyv na hrany objektov v obraze. Sú to nelineárne metódy vyhladzovania.





Obrázok 2.4: Symetrické masky veľkosti 3×3 a 5×5 pre metódy konvolučnej masky.



Obrázok 2.5: Nesymetrické masky veľkosti 3×3 a 5×5 pre metódu rotujúcej masky.

**Metóda mediánového priemeru** – Najskôr si zvolíme masku (podobného typu ako na obrázku 2.4), a potom ju postupne kladieme na všetky vnútorné pixle vstupného obrazu. Hodnoty pixlov, ktoré padnú do filtračnej masky, usporiadame podľa veľkosti, a ako novú hodnotu pixlu zvolíme medián tejto postupnosti.

**Metóda rotujúcej masky** – Podobne ako v predošlom prípade si opäť zvolíme masku, tentoraz ale nesymetrickú (pozri obrázok 2.5). Táto asymetrickosť nám umožňuje položiť masku na obrazovú predlohu štyrmi rôznymi spôsobmi, ktoré vzniknú otočením masky o pravý uhol v zvolenom bode masky. Pri každom položení masky vypočítame metódou priemeru novú hodnotu pixlu. Výslednú hodnotu pixlu, zo štyroch možných zvolíme takú, ktorá sa čo najmenej líši od pôvodnej hodnoty pixlu vstupného obrazu. Existuje aj modifikácia, pri ktorej sa používa 8-polohová rotujúca maska [BLAZ].

**Kuwaharov filter** – Aj keď tento filter môže byť implementovaný pre rozličné tvary prikladajúceho okna (masky), v našom postupe budeme používať štvorcovú masku veľkosti  $M = N = 2L + 1$ , kde  $L$  je prirodzené číslo. Masku je rozdelená na 4 oblasti, ako je vidno na obrázku 2.6. V každej oblasti určíme metódou priemeru novú hodnotu pixlu, pričom vypočítame aj strednú odchýlku. Výsledná hodnota pixlu bude priemerná hodnota vybraná z oblasti s najmenšou

odchýlkou. Miernou modifikáciou tejto metódy môžeme dosiahnúť vcelku veľmi dobré zachovanie hrán. Pri tejto modifikácii určíme výslednú hodnotu pixlu podľa nasledovného algoritmu:

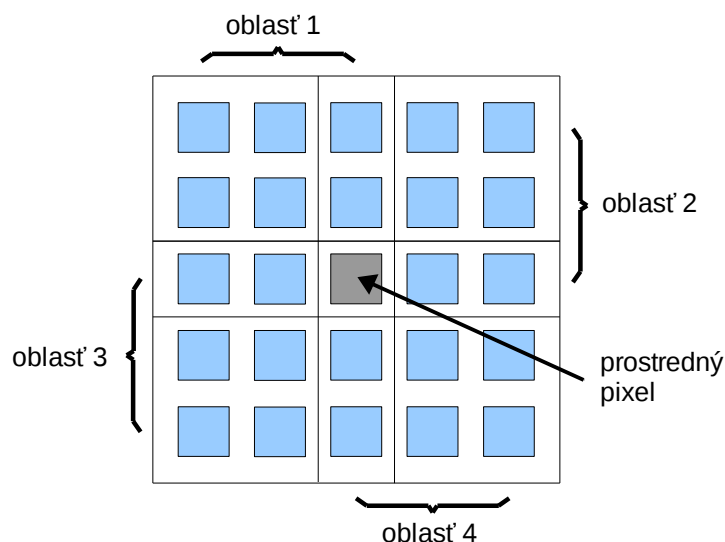
```

for všetky súradnice [rx,ry] v oblasti s najmenšou odchýlkou
  vzdialenost ← ||input[rx,ry] - mean|| // vzdialenost medzi farbami input[rx,ry] a mean
  if vzdialenost > maximalna_vzdialenost
    maximalna_vzdialenost ← vzdialenost
    mx ← rx, my ← ry
  if vzdialenost < minimalna_vzdialenost
    minimalna_vzdialenost ← vzdialenost
    vysledna_hodnota ← input[rx,ry]

if mx = rx and my = ry
  output[x,y] ← vysledna_hodnota // hodnota pixlu má maximálnu vzdialenost k mean
else
  output[x,y] ← input[x,y]

```

Ak pixel  $input[x, y]$  má maximálnu vzdialenosť<sup>6</sup> k priemernej hodnote pixlov  $mean$ , tak výsledná hodnota pixlu je rovná farbe pixlu, ktorý je najbližší k  $mean$ , v opačnom prípade bude výsledná hodnota rovná pixlu  $input[x, y]$ .



Obrázok 2.6: Maska veľkosti 5×5 pre Kuwaharov filter.

Vo všetkých predošlých metódach môžeme účinnosť filtru regulovať buď vhodnou voľbou veľkosti masky (3×3, 5×5 atď.), alebo použiť najmenšiu možnú masku a celý proces podľa potreby opakovať.

[6] Tu sa myslí vzdialenosť medzi dvoma farbami v zmysle metriky farebného priestoru.

## Filtre pracujúce na princípe anizotropickej difúzie

Nelineárna difúzia, pri vývoji filtrov, ktoré nerozmazávajú hrany, bola navrhnutá v roku 1990 autormi Peronom a Malikom v práci [PER90]. Táto nelineárna metóda filtrácie využíva princíp *anizotropickej difúzie*. Ich motiváciou bolo vytvoriť filter, ktorý nerozmazáva hrany, dostatočne odstraňuje šum a je ho možné použiť aj na detekciu hrán. Sformulovali kritéria pre tvorbu „mnohoškálovateľných, sémanticky významných“ popisov obrazov:

- **príčinnosť** (causality): pri zmene rozlíšenia z jemnejšieho na hrubšie by nemal vzniknúť žiadny nežiadúci tvar,
- **bezprostredná lokalizácia** (immediate localization): hranice by mali ostať ostré a mali by sa zhodovať so *sémanticky významnými* hranicami v danom rozlíšení,
- **vyhladzovanie po častiach** (piecewise smoothing): vyhladzovanie vnútier oblastí by malo mať prednosť pred vyhladzovaním priestoru medzi oblasťami.

Aby vyhoveli týmto kritériám, navrhli využiť princíp difúzie na „lokálne charakteristiky“ obrazu. Zaviedli priestorovo i časovo závislý difúzny koeficient  $c(\bar{x}, t)$  a sformulovali nasledujúcu anizotropickú difúznu rovnicu [MRAZ01]:

$$\partial_t \mathbf{u}(\bar{x}, t) = \operatorname{div}(c(\bar{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\bar{x}, t)), \quad (2.2.2)$$

kde  $\mathbf{u}(\bar{x}, t)$  je funkcia obrazu,  $\operatorname{div}$  je operátor divergencie a  $\nabla$  je označenie operátora gradientu premennej  $\bar{x}$ . Za difúzny koeficient, nazývaný aj koeficient vodivosti, je zvolená funkcia:

$$c(\bar{x}, t) = g(|\nabla \mathbf{u}(\bar{x}, t)|),$$

kde  $g(s)$  je nezáporná, monotónne klesajúca funkcia s vlastnosťou  $g(0) = 1$  a  $g(\infty) = 0$ . Perona a Malik zvolili funkciu  $g(s)$  nasledovne:

$$g(s) = \frac{1}{1 + (s/\lambda)^{1+\alpha}}, \text{ prípadne } g(s) = \frac{1}{e^{(s/\lambda)^{1+\alpha}}}, \text{ kde } \alpha > 0.$$

Perona a Malik zvolili  $\alpha = 1$ .

Vhodným výberom hodnôt pre parametre  $\lambda$  a  $\alpha$  dosiahneme vyhladenie časti obrazu a zaostrenie hrán. Tieto parametre slúžia ako prahové hodnoty pre ovplyvnenie veľkosti gradientu. Menšie hodnoty gradientu označujú časti obrazu, ktoré možno vyhladiť, zatiaľ čo väčšie označujú hrany v obraze. Catté, Lions a Morel ukázali v [CATT92], že Peronove-Malikove funkcie  $g(s)$  vedú k problémom s konvergenciou riešenia difúznej rovnice a navrhli nahradiť gradient  $\nabla \mathbf{u}(\bar{x}, t)$  jeho odhadom:

$$\nabla \mathbf{u}_\sigma(\bar{x}, t) = \nabla (\mathbf{u}(\bar{x}, t) \otimes G_\sigma(\bar{x})),$$

kde  $G_\sigma$  je konvolučné jadro Gaussovho filtru. Takto dostali nové vyjadrenie difúznej rovnice:

$$\partial_t \mathbf{u}(\bar{x}, t) = \operatorname{div}(g(|\nabla \mathbf{u}_\sigma(\bar{x}, t)|) \cdot \nabla \mathbf{u}(\bar{x}, t)). \quad (2.2.3)$$

Použitím Tukeyovej funkcie [MRAZ01]:

$$g(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{s}{\lambda \cdot \sqrt{5}} \right)^2 \right)^2, & \text{ak } |s| \leq \lambda \cdot \sqrt{5} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

dosiahneme ešte lepšie výsledky. Vyhľadzujúci filter potom vytvára obrazy s ostrejšími hranami.

Perona a Malik navrhli riešenie pôvodnej difúznej rovnice v diskretnom priestore [PER90]:

$$\mathbf{u}_q^{t+1} = \mathbf{u}_q^t + \frac{\lambda}{|\eta_q|} \sum_{p \in \eta_q} g(|\nabla \mathbf{u}_{q,p}^t|) \nabla \mathbf{u}_{q,p}^t, \quad (2.2.4)$$

kde  $\mathbf{u}_q^t$  je bod diskretného obrazu v čase  $t$ ,  $q$  označuje polohu (súradnice) pixlu  $\mathbf{u}_q$  v obraze a  $t$  je iteračný krok. Symbol  $\eta_q$  reprezentuje všetky možné polohy susedov pixlu  $\mathbf{u}_q$  a  $|\eta_q|$  je počet susedov (4, okrem okrajov obrazu). Gradient  $\nabla \mathbf{u}_{q,p}^t$  je možné aproximovať v každej polohe  $p$  suseda pixlu  $\mathbf{u}_q$  hodnotou:

$$\nabla \mathbf{u}_{q,p}^t = \mathbf{u}_p^t - \mathbf{u}_q^t, \quad \text{kde } p \in \eta_q.$$

Ďalšie možné diskretné riešenie difúznej rovnice môžeme nájsť v [MACK], kde je vyriešený aj prípad 8-susednosti pixlu. V súčasnosti je táto metóda neustále vyvíjaná. Nachádzajú sa ďalšie vyjadrenia funkcie  $g(s)$  a hľadajú sa nové odhady i vyčíslenia gradientu  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

## Bilaterálne filtre

Bilaterálne filtrovanie bolo vyvinuté v roku 1998 autormi Tomasim a Manduchim, ako alternatíva k filtrom pracujúcim na základe anizotropickej difúzie [TOM98]<sup>7</sup>. Na rozdiel od predchádzajúcej metódy, v bilaterálnych filtroch nie je nutné riešiť parciálne diferenciálne rovnice. Takto sa môžeme vyhnúť iteračnému procesu, ktorý vo všeobecnosti nemusí konvergovať k želanému výsledku. Sú to nelineárne filtre, kde je výstupná hodnota pixlu počítaná pomocou váženého priemeru pixlov, ktorých hodnoty sú si navzájom „blízke“. Používa nielen geometrickú blízkosť obrazových bodov ale aj ich *perceptuálnu blízkosť* (v zmysle metriky farebného priestoru).

Myšlienka perceptuálnej vzdialenosti je veľmi dôležitá najmä pre farebné obrazy. Ak by sa obraz filtroval v každej farebnej rovine ( $R$ ,  $G$ ,  $B$ ) zvlášť, vznikli by v okolí hrán neželané farebné artefakty. Dôvod spočíva v tom, že rôzne farebné roviny majú rôzne zmeny kontrastu, a preto sú vyhladzované rozdielne. Bilaterálne filtre môžu pracovať naraz vo všetkých troch rovinách súčasne, najmä vo farebných priestoroch, ktoré sú perceptuálne lineárne<sup>8</sup>. Keďže sa počíta len s perceptuálne podobnými farbami, nevznikajú žiadne farebné artefakty.

[7] Tu je dobré pripomenúť, že niektorí autori považujú filter SUSAN, uvedený v práci [SMIT95], za predchodcu bilaterálneho filtru.

[8] Ako je napr. farebný priestor  $CIE L^*a^*b^*$ . Pozri predchádzajúcu kapitolu.

Hlavnou myšlienkou je skombinovať funkciu tradičných filtrov, ktoré pracujú s pixlami ležiacimi v blízkom okolí aktuálneho bodu s podmienkou, aby spracovávané pixle ležali aj v perceptuálne blízkom okolí. Takto je možné zachovať hrany, ktorých farebné hodnoty sa výrazne líšia od okolitých častí obrazu (a teda nie sú perceptuálne blízke k okolitým bodom).

*Dolnopriepustný* (low-pass) filter, aplikovaný na vstupný obraz  $\mathbf{u}(\bar{x})$ , počíta výstupné hodnoty  $\mathbf{h}_d(\bar{x})$  obrazu podľa vzťahu [TOM98]:

$$\mathbf{h}_d(\bar{x}) = k_d^{-1}(\bar{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\bar{\xi}) c_d(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad (2.2.5)$$

kde  $k_d(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_d(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}$  je tzv. normalizačná hodnota a  $c_d(\bar{x}, \bar{\xi})$  je funkcia určujúca mieru *geometrickej blízkosti* medzi pixlom  $\bar{x}$  a jeho blízokým susedom  $\bar{\xi}$ .

Podobne, filter pracujúci s perceptuálne blízokými hodnotami pixlov môžeme vyjadriť vzťahom:

$$\mathbf{h}_r(\bar{x}) = k_r^{-1}(\bar{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\bar{\xi}) c_r(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad (2.2.6)$$

kde  $k_r(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_r(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}$  a funkcia  $c_r(\bar{x}, \bar{\xi})$  vyjadruje mieru *perceptuálnej blízkosti* medzi hodnotou pixlu  $\mathbf{u}(\bar{x})$  a hodnotou jeho blízkeho suseda  $\mathbf{u}(\bar{\xi})$ .

Súčinom filtrov vyjadrených predpismi 2.2.5 a 2.2.6 dostávame *bilaterálny filter*, ktorý môžeme vyjadriť nasledujúcim vzťahom:

$$\mathbf{h}(\bar{x}) = k^{-1}(\bar{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\bar{\xi}) c_d(\bar{x}, \bar{\xi}) c_r(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad (2.2.7)$$

kde  $k(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_d(\bar{x}, \bar{\xi}) c_r(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}$ . V rovnomerne sfarbených<sup>9</sup> oblastiach sú hodnoty pixlov v malom okolí približne rovnaké a funkcia  $c_r(\bar{x}, \bar{\xi})$  je blízka číslu 1, čo má za následok, že bilaterálny filter sa správa ako klasický dolnopriepustný filter a redukuje šum. Pozrime sa teraz na hranu oddeľujúcu tmavé a svetlé oblasti. Ak bilaterálny filter počíta hodnotu, povedzme pre pixel v svetlej časti, tak funkcia  $c_r$  nám vráti hodnoty blízke 1 pre svetlé body (teda pre pixle na tej istej strane), naopak, vráti nám hodnoty 0 pre pixle ležiace v tmavej časti. To znamená, že pri výpočte novej hodnoty pixlu sa nebudú brať pixle z tmavej časti a hranica oddeľujúca tmavé a svetlé oblasti bude zachovaná.

Ostáva nám už len vyčíslit' funkcie  $c_d$  a  $c_r$ , vyjadrujúce mieru blízkosti. Tomasi a Manduchi zvolili gaussovské funkcie počítajúce hodnoty z euklidovskej vzdialenosti:

$$c_d(\bar{x}, \bar{\xi}) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{d(\bar{x}, \bar{\xi})}{\sigma_d} \right)^2},$$

[9] Rovnomerne sfarbené oblasti sú také, pre ktoré platí, že hodnoty susedných pixlov sú približne rovnaké (perceptuálne blízke).

kde  $d(\bar{x}, \bar{\xi}) = \|\bar{x} - \bar{\xi}\|$  označuje vzdialenosť dvoch bodov v euklidovskej metrike a

$$c_r(\bar{x}, \bar{\xi}) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\delta(\mathbf{u}(\bar{x}), \mathbf{u}(\bar{\xi}))}{\sigma_r} \right)^2},$$

kde  $\delta(\mathbf{u}(\bar{x}), \mathbf{u}(\bar{\xi})) = \|\mathbf{u}(\bar{x}) - \mathbf{u}(\bar{\xi})\|$  je vzdialenosť hodnôt dvoch obrazových bodov v metrike farebného priestoru.

Bilaterálny filter môžeme v diskretnom priestore vyjadriť vzťahom [DURA02]:

$$\mathbf{h}_q = \frac{1}{k(q)} \sum_{p \in \eta_q} c_d(p, q) c_r(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q) \mathbf{u}_p, \quad (2.2.8)$$

kde  $k(q) = \sum_{p \in \eta_q} c_d(p, q) c_r(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q)$  je normalizačný člen,  $q$  označuje polohu pixlu  $\mathbf{u}_q$  v obraze a  $\eta_q$  reprezentuje polohy  $p$  všetkých susedov pixlu  $\mathbf{u}_q$ .

## Filtrácia pomocou morfológických operátorov

*Morfológické operátory* sú výsledkom matematickej teórie, nazývanej *matematická morfológia*. Táto teória vznikla okolo roku 1967 a medzi jej autorov patria najmä Matheron a Serra. Matematická morfológia predstavuje teoretický model pre obrazové dáta, založený na *teórii mriežky* (lattice theory) a topológii.

Pri vysvetľovaní pojmu morfológických operátorov je nutné chápať obraz ako množinu objektov (ich vnútro tvorí množina bodov) v spojitom alebo diskretnom priestore<sup>10</sup>.

Majme danú charakteristickú funkciu  $\chi_A: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Objekt  $\mathbf{A}$  pozostávajúci z množiny pixlov  $p$  môžeme definovať nasledovne:

$$\mathbf{A} = \{ p \in \mathbb{Z}^2 \mid \chi_A(p) = 1 \}.$$

Na obrázku 2.7 je objekt  $\mathbf{B}$  tvorený množinou pixlov  $\{[0, 0], [1, 0], [0, 1]\}$ .

Okolie objektu  $\mathbf{A}$  je určené jeho doplnkom (komplementom)  $\mathbf{A}^C$ , ktorý je tvorený prvkami, nepatriacimi do  $\mathbf{A}$ :

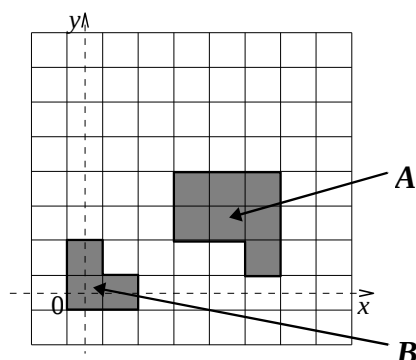
$$\mathbf{A}^C = \{ p \in \mathbb{Z}^2 \mid p \notin \mathbf{A} \}^{11}.$$

Unárna operácia „-“ na objekte  $\mathbf{B}$  je definovaná predpisom:

$$-\mathbf{B} = \{ -p \mid p \in \mathbf{B} \}.$$

[10] Poznamenajme, že v tomto priestore musí byť zavedený súradnicový systém. Jeho začiatok sa obyčajne nachádza v niektorom z objektov.

[11] Doplnok má definovanú susednosť vzťahom  $12 - N_k$ , kde  $N_k$  znamená  $k$  susednosť ( $k = 4$  alebo  $8$ ).

Obrázok 2.7: Binárny obraz obsahujúci objekty  $A$  a  $B$ .

K základným operáciám na objektoch  $A$  a  $B$  patrí:

- **posunutie** – Nech je daný vektor  $\mathbf{x}$ , potom posunutie  $A + \mathbf{x}$  je definované vzťahom:

$$A + \mathbf{x} = \{ p + \mathbf{x} \mid p \in A \},$$

- **Minkowského súčet** –  $A \oplus B = \bigcup_{\beta \in B} (A + \beta)$ ,

- **Minkowského rozdiel** –  $A \ominus B = \bigcap_{\beta \in B} (A - \beta)$ .

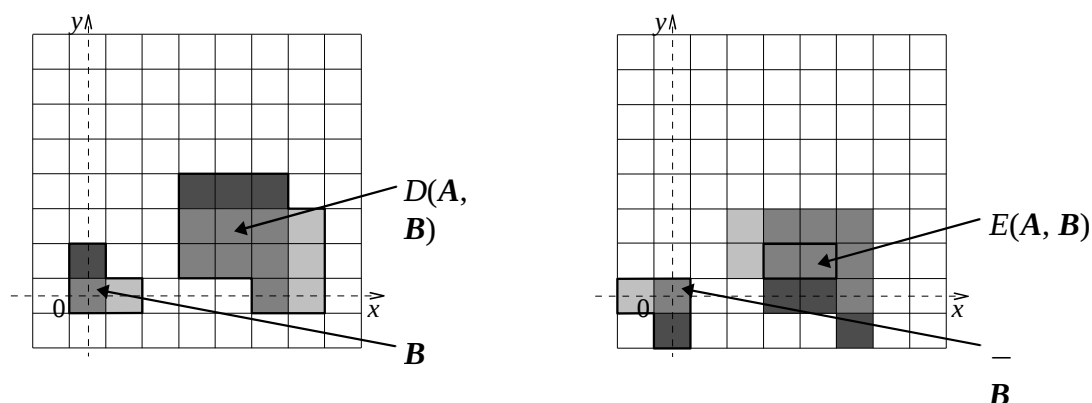
Pomocou Minkowského operátorov môžeme definovať základné morfológické operácie *dilatáciu* a *eróziu*:

- **dilatácia** –  $D(A, B) = A \oplus B = \bigcup_{\beta \in B} (A + \beta)$ ,

- **erózia** –  $E(A, B) = A \ominus B = \bigcap_{\beta \in B} (A - \beta)$ .

Výsledok týchto operácií aplikovaných na objektoch z obrázku 2.7, môžeme vidieť na obrázku 2.8.

Aj keď sú objekty  $A$  a  $B$  považované za časti obrázku,  $A$  sa zvyčajne chápe ako obraz, a  $B$  predstavuje *štruktúrálny element*. Štruktúrálny element v pojmoch matematickej morfológie má podobnú úlohu ako konvolučné jadro v teórii lineárnych filtrov.



Obrázok 2.8: Výsledok dilatácie (vľavo) a erózie (vpravo) na objektoch  $A$  a  $B$ . Farebne odlišené okraje pravého objektu označujú aplikovanie operácie posunutia na objekt  $A$  v smere prvku štrukturálneho elementu  $B$ .

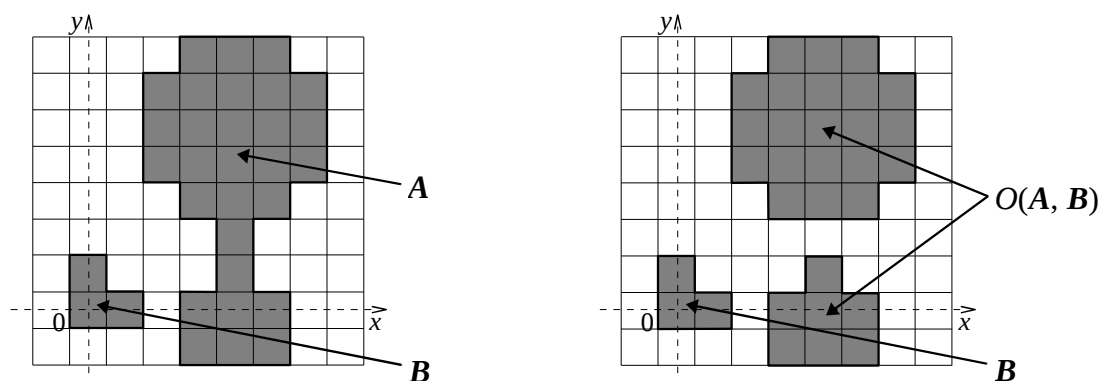
Dilatácia vo všeobecnosti spôsobuje, že objekty, na ktoré je aplikovaná, narastajú (zväčšujú sa). Naopak erózia objekty znižuje. Z toho vyplýva aj uplatnenie týchto morfológických operátorov. Dilatácia sa používa vtedy, ak objekty obsahujú dutiny, ktoré chceme zaplniť, prípadne potrebujeme odstrániť biele body spôsobené impulzným šumom. Veľkosť štrukturálneho elementu potom volíme úmerne veľkosti maximálnej dutiny, ktorú chceme odstrániť. Erózia sa používa pri odstraňovaní malých a izolovaných tmavých častí obrazu. Veľkosť štrukturálneho elementu určuje, aké veľké časti chceme odstrániť. Popri týchto pozitívnych vlastnostiach, majú oba operátory základnú nevýhodu v tom, že menia nielen veľkosti objektov ale aj ich počet (erózia môže odstrániť z obrazu malé objekty a dilatácia zasa môže viac objektov spojiť do jedného).

V morfológickej teórii sa preto zavádzajú ďalšie operácie, *otvorenie* a *uzavretie*:

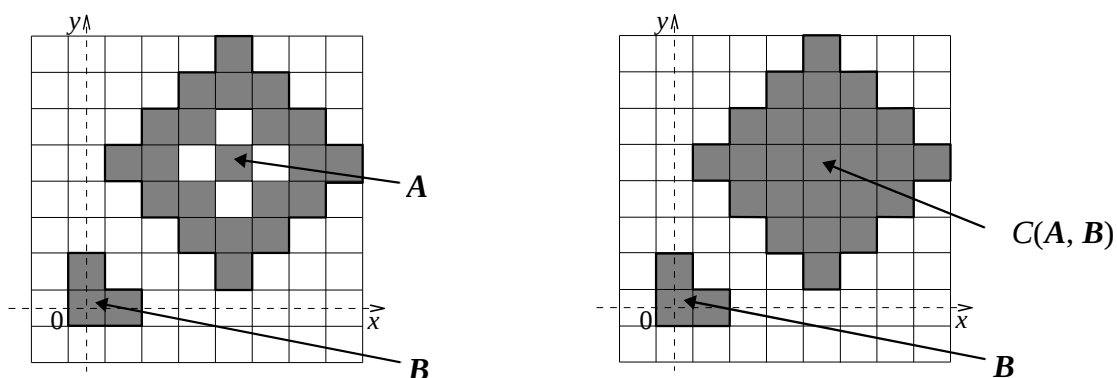
- **otvorenie** –  $O(A, B) = A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$ ,
- **uzavretie** –  $C(A, B) = A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$ .

Morfológický operátor otvorenie je definovaný ako usporiadaná dvojica operátorov erózia + dilatácia, ktorá pracuje s rovnakým štrukturálnym elementom. Najskôr sa na daný obraz aplikuje erózia, ktorá objekty zmenší a potom dilatácia, ktorá ich „vráti do pôvodnej veľkosti“. Termín otvorenie je v tomto prípade dosť výstižný, pretože operácia môže oddeliť objekty, ktoré boli pôvodne v obraze spojené. Morfológický operátor uzavretie je definovaný ako usporiadaná dvojica operátorov dilatácia + erózia. Pri aplikácii tohto operátora sa najskôr vykoná dilatácia, ktorá zaplní malé biele oblasti (prípadne uzavrie čierne otvorené objekty) a potom pomocou erózie, zmenší umelo zväčšené objekty.





Obrázok 2.9: Objekt  $A$  a štruktúrálny element  $B$  (vľavo). Výsledok operácie otvorenia objektov  $A$  a  $B$  (vpravo).



Obrázok 2.10: Objekt  $A$  a štruktúrálny element  $B$  (vľavo). Výsledok operácie uzavretia objektov  $A$  a  $B$  (vpravo).

Veľká výhoda morfológických operátorov spočíva v možnosti vzájomne ich kombinovať. Pomocou logických operátorov *konjunkcia* a *disjunkcia*, spolu s operáciami *prieniku*, *zjednotenia* a *doplňku* môžeme vytvárať špecifické operátory, vhodné pre riešenie konkrétnych problémov. Príkladmi takýchto operátorov sú operátory *hit-and-miss*, *morfológické vyhladzovanie*, *morfológický gradient* a iné [DELFT].

## Morfologické operátory na obrazoch s odtieňmi šedej farby

Technika morfologického filtrovania môže byť rozšírená aj na šedotónové obrazy. Predpokladajme, že máme opäť zadaný objekt  $A$  a štruktúrálny element  $B$ . Kvôli jednoduchosti sa obmedzíme na štruktúrálne elementy, ktoré sú zložené z konečného počtu pixlov, sú konvexné a ohraničené<sup>12</sup>.

Teraz môžeme definovať nové morfologické operátory [DELFT]:

- **šedotónová dilatácia** –  $D_G(A, B) = \max_{[i, j] \in B} \{a[m-i, n-j] + b[i, j]\}$  .

Pre určenie konkrétnej hodnoty pixlu  $p$ , na súradnici  $[m, n]$  výstupného obrazu, musíme hodnotu každého pixlu štruktúrného elementu sčítať s príslušne posunutou časťou obrazu objektu  $A$  a zo všetkých týchto súčtov vybrať maximálnu hodnotu.

- **šedotónová erózia** –  $E_G(A, B) = \min_{[i, j] \in B} \{a[m+i, n+j] - b[i, j]\}$  .

Postupujeme podobne ako pri výpočte hodnoty pixlu  $p$  pri dilatácii, avšak namiesto maximálnej hodnoty súčtov, budeme hľadať minimum zo všetkých rozdielov.

Podobne ako pri binárnych obrazoch definujeme operácie otvorenia a uzavretia:

- **šedotónové otvorenie** –  $O_G(A, B) = D_G(E_G(A, B), B)$
- **šedotónové uzavretie** –  $C_G(A, B) = E_G(D_G(A, B), B)$ .



Obrázok 2.11: Originálny obrázok Leny (vľavo). Šedotónová dilatácia obrázku (v strede), šedotónová erózia (vpravo).

[12] Konvexnosť znamená, že každá úsečka spájajúca dva body objektu, leží celá v objekte. Samozrejme musíme predpokladať, že úsečka je „rozkreslená“ do rastru daného vstupným obrazom. Konvexnosť potom závisí od spôsobu rozkladu úsečiek do rastru.

## 2.3 Binarizácia obrazu

*Binarizáciou obrazu* rozumieme prevod obrazu z odtieňov šedej farby na obraz obsahujúci len bielu a čiernu farbu. Biela farba obyčajne reprezentuje pozadie, čierna farba zasa označuje objekty. Pixlom bielej farby prislúcha číselná hodnota 0 a pixlom čiernej farby hodnota 1<sup>13</sup>. Vykonať binarizáciu obrazu je potrebné najmä vtedy, keď chceme použiť štandardné morfologické operátory alebo hľadať kosť, hrany resp. obrysy objektov. Tieto operácie sa často používajú pri *segmentácii obrazu*<sup>14</sup> a rozpoznávaní objektov. Binarizácia obrazu je výhodná aj vtedy, keď potrebujeme pracovať s rozsiahlymi čiernobielymi obrazmi (ako sú napr. katastrálne mapy), pretože reprezentáciou ôsmich pixlov v jednom bajte môžeme výrazne znížiť pamäťové nároky. Navyše vhodným zvolením *prahovej hodnoty* môžeme dosiahnuť odstránenie nežiadúcich častí obrazu (napr. fľaky, škvrny či zažltnutie papiera).

Binarizácia obrazu je založená na jednoduchom princípe. Najskôr sa určí prahová hodnota  $\theta$  a potom sa priradia jednotlivým pixlom výstupného obrazu hodnoty podľa nasledovného pravidla (ak sú objekty svetlej farby na tmavom pozadí):

```

if input[x,y] ≥ θ
    output[x,y] ← 1 // farba objektu
else
    output[x,y] ← 0 // farba pozadia

```

Pre tmavé objekty na svetlom pozadí použijeme toto pravidlo:

```

if input[x,y] < θ
    output[x,y] ← 1 // farba objektu
else
    output[x,y] ← 0 // farba pozadia

```

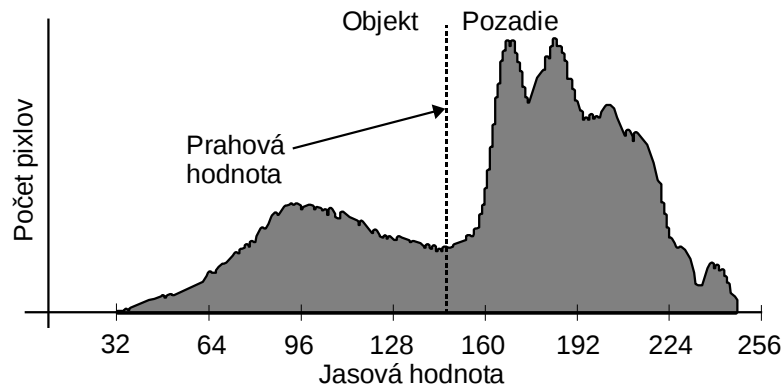
Pre určenie prahovej hodnoty  $\theta$  neexistuje univerzálny vzťah, ktorý by zabezpečoval dobré oddelenie objektov od pozadia, existuje však množstvo vhodných alternatív:

- **pevná hodnota** – hodnota prahu je vybraná nezávisle od obrazu. Pri dostatočne kontrastných obrazoch, kde sú objekty veľmi tmavé a pozadie je homogénne a výrazne svetlé, je najvhodnejšia hodnota prahu  $\theta = 128$  (pri jasových hodnotách od 0 do 255),
- **hodnota určená pomocou histogramu** – vo väčšine prípadoch je prahová hodnota vybraná na základe histogramu jasových hodnôt. Príklad takého histogramu je na obrázku 2.12.

Kvalitný kontrastný obraz vytvorí histogram tvorený dvoma jasne oddelenými maximami. Vtedy stačí zvoliť prahovú hodnotu podľa miesta, kde sa tieto dve maximá oddeľujú. Nie vždy je však jednoduché automaticky určiť toto miesto. Často je vhodnejšie zvoliť prahovú hodnotu interaktívne a konečné rozhodnutie ponechať na používateľovi.

[13] Niekedy čiernej farbe prislúcha hodnota 255, najmä vtedy ak je pixel reprezentovaný v pamäti jedným bajtom.

[14] Segmentácia obrazu znamená analýzu objektov obrazu, t.j. vyhľadávanie objektov, ktoré sú pre nás zaujímavé.



Obrázok 2.12: Určenie prahovej hodnoty  $\theta$  pomocou histogramu.

Existuje veľa techník, ktoré automaticky vyberú prahovú hodnotu pomocou histogramu jasových hodnôt  $\{h[b] \mid b = 0, 1, \dots, 2^B - 1\}$ , kde  $B$  označuje počet bitov určujúci maximálnu možnú jasovú hodnotu (štandardne 8). Mnoho z nich využíva tzv. *vyhladený histogram*, ktorý odstraňuje malé fluktuácie krivky histogramu [DELFT]:

$$h_{smooth}[b] = \frac{1}{w} \sum_{i=-(w-1)/2}^{i=(w-1)/2} h[b-i], \text{ kde } w = 3 \text{ alebo } 5, \text{ pre } b = 0, \dots, 255.$$

**Algoritmus isodata** – Táto iteratívna technika bola vyvinutá Ridlerom a Calvardom v práci [RIDL78]. Histogram je na začiatku rozdelený na dve časti hodnotou prahu  $\theta_0 = 2^{B-1}$ . Potom sa vypočítajú dva priemery jasových hodnôt:  $m_{f,0}$  pre pixle objektu (ľavá časť histogramu) a  $m_{b,0}$  pre pixle pozadia (pravá časť histogramu). Nová hodnota prahu  $\theta_1$  je určená priemerom hodnôt  $m_{f,0}$  a  $m_{b,0}$ . Tento proces sa opakuje, pokiaľ sa nová hodnota prahu  $\theta_l$  už nezmení:

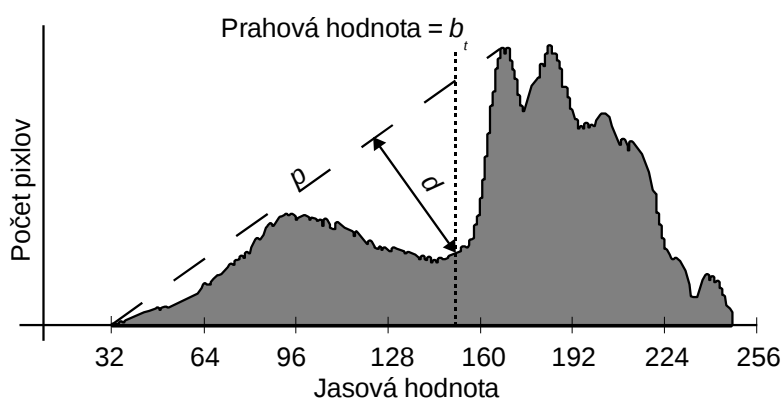
```
do
  l ← l + 1
   $\theta_l \leftarrow (m_{f,l-1} + m_{b,l-1}) / 2$ 
until  $\theta_l = \theta_{l-1}$ 
```

**Trojuholníkový algoritmus** – Táto technika bola navrhnutá Zackom [ZACK77] a jej princíp môžeme vidieť na obrázku 2.13. Najskôr skonštruujeme priamku spájajúcu minimálnu hodnotu  $b_{min}$  s maximálnou hodnotou  $b_{max}$  histogramu. Potom vypočítame vzdialenosť  $d$  medzi priamkou  $p$  a bodom histogramu  $h[b]$ , pre všetky hodnoty  $b = b_{min}, \dots, b_{max}$ . Najväčšia hodnota  $b_i$ , pre ktorú je vzdialenosť medzi priamkou  $p$  a  $h[b_i]$  maximálna, určuje prahovú hodnotu  $\theta = b_i$ . Táto technika je obzvlášť efektívna, keď pixle objektu vytvárajú výrazné maximum v histograme.

**Regionálny algoritmus** – Binarizácia obrazu nemusí byť vykonaná na celom obraze s rovnakou prahovou hodnotou. Chow a Kaneko [CHOW72] vyvinuli techniku, v ktorej je obraz rozdelený na súbor neprekrývajúcich sa oblastí a v každej z nich je určená optimálna prahová hod-

nota. Prahová hodnota je potom pre každý pixel vypočítaná interpolovaním prahových hodnôt príslušných oblastí. Nevýhoda tejto metódy spočíva v jej výpočtovej náročnosti.

**Adaptívna metóda** – V tejto metóde sa lokálna prahová hodnota mení v závislosti od polohy práve počítanej binárnej hodnoty obrazu. Lokálnu prahovú hodnotu určíme z jasových hodnôt pixlov ležiacich v okolí aktuálneho pixlu. Prahovú hodnotu zvolíme buď ako priemer alebo ako medián jasových hodnôt pixlov daného okolia. Veľkosť okolia treba vhodne zvoliť. Dobrou možnosťou je určiť túto veľkosť interaktívne. Ak priemer leží medzi jasovými hodnotami pozadia a objektu, tak takto zvolená prahová hodnota dáva dobré výsledky. V prípade, že rozsah intenzít v danom okolí je veľmi malý, potom priemerná hodnota je veľmi blízka hodnote aktuálneho pixlu a to má za následok neželané efekty. Metódu môžeme zlepšiť, ak namiesto priemeru zvolíme prahovú hodnotu  $\theta = mean - K$ , kde  $K$  je interaktívne, prípadne inak zvolená konštanta. Použitím tejto hodnoty budú všetky pixle v okolí s malým rozsahom intenzít považované za farby pozadia.



Obrázok 2.13: Určenie prahovej hodnoty  $\theta$  trojuholníkovým algoritmom.

## 2.4 Rekonštrukcia obrazu

V tejto časti budeme pod rekonštrukciou obrazu rozumieť proces vytvárania spojitej, vektorovej funkcie  $F(x, y)$ , interpolujúcej hodnoty intenzít jednotlivých pixlov (diskrétnych vzoriek) celého vstupného obrazu. V prípade farebného obrazu je hľadanou funkciou  $F(x, y)$  vektorová funkcia, zložená z troch zložiek ( $R, G, B$ ). Rekonštrukcia je jeden zo základných krokov počas *prevzorkovania* obrazu. Toto prevzorkovanie je potrebné urobiť vždy, keď sa vykonáva geometrická transformácia obrazu (zväčšenie či zmenšenie obrazu, rotácia atď.).

Existuje viacero možností, ako opísať spojitú funkciu potrebnú na rekonštrukciu obrazu:

- **metóda najbližšieho suseda** – v tejto metóde je hodnota funkcie  $F(x, y)$  určená farbou najbližšieho pixlu k súradnici s reálnymi hodnotami  $[x, y]$ :

$$F_{ij}(x, y) = \text{input}[i, j], \text{ kde } i = \text{Round}(x) \text{ a } j = \text{Round}(y).$$

Nevýhodou metódy je, že v obraze vytvára na pohľad veľmi rušivé štvorce,

- **bilineárna metóda** – je rovnako jednoduchá ako predchádzajúca, avšak vytvára o niečo „vizuálne hladší“ obraz:

$$F_{ij}(x, y) = \text{input}[i, j] + (\text{input}[i+1, j] - \text{input}[i, j])(x - i) + (\text{input}[i, j+1] - \text{input}[i, j])(y - j) + (\text{input}[i+1, j+1] - \text{input}[i+1, j] + \text{input}[i, j] - \text{input}[i, j+1])(x - i)(y - j),$$

- **bikubická metóda** – je pravdepodobne najpoužívanějšía v súčasných grafických aplikáciách, ktoré používajú rekonštrukciu obrazu. Dosahuje lepšie výsledky ako predchádzajúce metódy. Výslednú hodnotu funkcie možno zapísať pomocou *bikubickej plochy tenzorového súčtinu* nasledovne [MITCH88]:

$$F_{ij}(x, y) = \sum_{k=-1}^2 \sum_{l=-1}^2 \text{input}[i+k, j+l] P(k-(x-i)) P(l-(y-j)), \text{ kde}$$

$$P(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (12-9B-6C)|x|^3 + (-18+12B+6C)|x|^2 + (6-2B), & \text{ak } 0 \leq |x| < 1 \\ (-B-6C)|x|^3 + (6B+30C)|x|^2 + (-12B-48C)|x| + (8B+24C), & \text{ak } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Hodnoty  $B, C$  sa zvyčajne volia  $1/3, 1/3$  (štandardná voľba);  $1, 0$  (*B-splajn*) alebo  $0, 1/2$  (*Catmull-Romov splajn*). Vhodné voľby týchto hodnôt môžeme vidieť na obrázku 2.14.

- **Lanczosov filter** – táto metóda je založená na použití tzv. *rekonštrukčných filtrov*, ktoré rekonštruujú obraz pomocou konvolyčných filtrov (pozri kapitolu 2.2 vzt'ah 2.2.1). V mnohých prípadoch vytvára o niečo lepší obraz ako bikubická metóda. Hľadanú rekonštrukčnú funkciu môžeme zapísať v tvare:

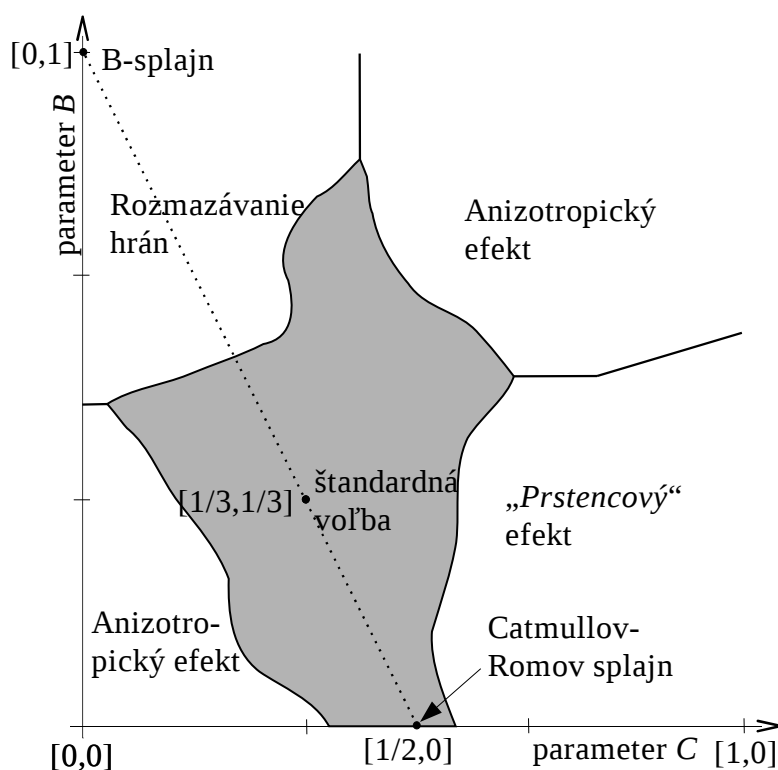
$$F_{ij}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \text{input}[i+k, j+l] h[k-(x-i), l-(y-j)],$$

kde konvolučné jadro  $h[x, y] = \text{sinc}(x)\text{sinc}(y)$ , pričom

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x/N)}{\pi x/N}, & \text{ak } 0 \leq |x| < N, \text{ kde } N=2 \text{ alebo } 3 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Veľmi dobrý prehľad a porovnanie ďalších metód je možné nájsť v práci [LEHM99].

Aplikovaním predchádzajúcich metód vznikajú v obraze badateľné štvorce, ktoré pôsobia na pohľad rušivo. Na odstránenie týchto defektov boli vyvinuté metódy, ktoré najprv rekonštruovali význačné oblasti obrazu, ako sú napr. hrany a rôzne artefakty, a potom na zvyšok obrazu aplikovali predchádzajúce postupy. Medzi tieto metódy patrí aj *algoritmus rekonštrukcie pomocou izofot* (isophote reconstruction algorithm) uvedený v práci [MORS98]. Neskôr sa vytvárali ďalšie prístupy, ktoré na celý obraz aplikovali tzv. *hranovo orientovanú interpoláciu*. Do tejto skupiny patrí aj rekonštrukcia obrazu pomocou *dátovo závislej triangulácie* (data dependent triangulation – DDT). Porovnanie viacerých metód DDT so základnými rekonštrukčnými metódami (metóda najbližšieho suseda, bilineárna a bikubická metóda) môžeme nájsť aj v [TOTH04].



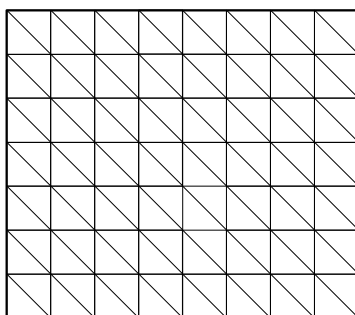
Obrázok 2.14: Voľby hodnôt  $B$  a  $C$  pri bikubickej metóde podľa [MITCH88]. Vyhovujúci výber hodnôt leží v šedo označenej oblasti.

## Rekonštrukcia obrazu pomocou DDT

Túto metódu pre terén vyvinuli v roku 1990 Dyn, Levin a Rippa a je opísaná v práci [DYN90]. Rekonštrukčné algoritmy založené na DDT minimalizujú rušivé efekty vznikajúce pri štandardných rekonštrukčných metódach. Myšlienka tejto metódy spočíva vo vytvorení novej, *cenovo*<sup>15</sup> *výhodnejšej* triangulácie (*retriangulizácii*) k začiatočnej triangulácii, na základe minimalizácie tzv. *cenovej funkcie*<sup>16</sup>. Začiatočnou trianguláciou, v našom prípade, bude pravidelná triangulácia (pozri obrázok 2.15), keďže táto triangulácia je tvorená pravidelnou sieťou pixlov obrazu.

Vrcholmi začiatočnej triangulácie je množina bodov  $\mathcal{V} = \{V_i[x_i, y_i] \in \mathbb{E}^2; i = 1, 2, \dots, M \times N\}$ . Súradnice  $[x_i, y_i]$  označujú polohu pixlu v obraze a  $M, N$  sú rozmery obrazu.

V dátovo závislých trianguláciach je trojuholníková sieť určená nielen súradnicami  $[x_i, y_i]$  ale aj hodnotami  $z_i = f(x_i, y_i)$ . Pri rekonštrukcii obrazu sú hodnoty  $z_i = \text{input}[x_i, y_i]$  jasové hodnoty jednotlivých pixlov (pre šedotónové obrazy) resp. intenzity konkrétnej farebnej zložky (pre farebné obrazy). Lubovoľná spojitá po častiach lineárna funkcia interpolujúca body  $[x_i, y_i, z_i]$  môže byť považovaná za rekonštrukciu obrazu. V DDT sa usilujeme určiť, ktorá triangulácia je pre dané hodnoty  $z_i$  a sieť bodov  $V_i$  optimálna (z hľadiska kvality – hladkosti obrazu).



Obrázok 2.15: Začiatočná triangulácia oblasti obrázku, tvorená pravidelnou sieťou pixlov obrazu.

Dyn a spol. navrhli mnoho cenových funkcií pre DDT. Tieto cenové funkcie môžeme určiť na základe geometrických informácií daných štvoricou susedných pixlov (bodov tvoriacich konvexný štvoruholník) a im prislúchajúcich hodnôt. Štvorica bodov určuje dve možné triangulácie (pozri obrázok 2.16). Pomocou cenových funkcií môžeme určiť, ktorá z nich je výhodnejšia.

[15] Cenou rozumieme nezáporné reálne číslo, pričom menšie číslo znamená výhodnejšiu cenu.

[16] Cenová funkcia je v našom prípade funkcia dvoch premenných vracajúca hodnotu z intervalu  $(0, \infty)$ .



Postup nájdenia cenovej funkcie pre hranu  $v_2v_4$  si ukážeme podľa situácie na obrázku 2.16 vľavo:

Nech trojuholníky  $T_1$  a  $T_3$ , ktorých jednotkové normály sú označené  $\bar{n}_1$  a  $\bar{n}_3$ , majú spoločnú hranu  $v_2v_4$ . Každý z týchto trojuholníkov určuje rovinu, ktorú môžeme vyjadriť pomocou polynómu:

$$P_j(x, y) = z_j = a_jx + b_jy + c_j, \text{ kde } j = 1 \text{ alebo } 3.$$

Polynómy  $P_i(x, y)$ , prislúchajúce jednotlivým trojuholníkom  $T_i$  celej triangulácie, tvoria po častiach spojitú, interpolačnú funkciu  $F(x, y)$ , predstavujúcu rekonštrukciu obrazu.

Dyn a spol. navrhli nasledovné cenové funkcie [DYN90]:

- **kosínus uhla medzi normálami** – cenovou funkciou bude hodnota skalárneho súčinu  $c = |\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3|$ ,
- **zmena v derivácii normál** – je určená vzťahom  $c = \|n_x(a_1 - a_3) + n_y(b_1 - b_3)\|$ , kde  $(n_x, n_y)$  je jednotkový vektor, ležiaci v rovine  $xy$ , kolmý na hranu  $v_2v_4$ ,
- **odchýlky od polynómov** – cenová funkcia vyjadruje presnosť, s akou sa hodnota polynómu  $P_1(x_3, y_3)$  líši od hodnoty  $v_3$  a súčasne ako sa  $P_3$  v bode  $[x_1, y_1]$  odlišuje od hodnoty  $v_1$ :

$$c = \|(c_1, c_3)^T\|, \text{ kde } c_1 = |P_1(x_3, y_3) - f(x_3, y_3)| \text{ a } c_3 = |P_3(x_1, y_1) - f(x_1, y_1)|.$$

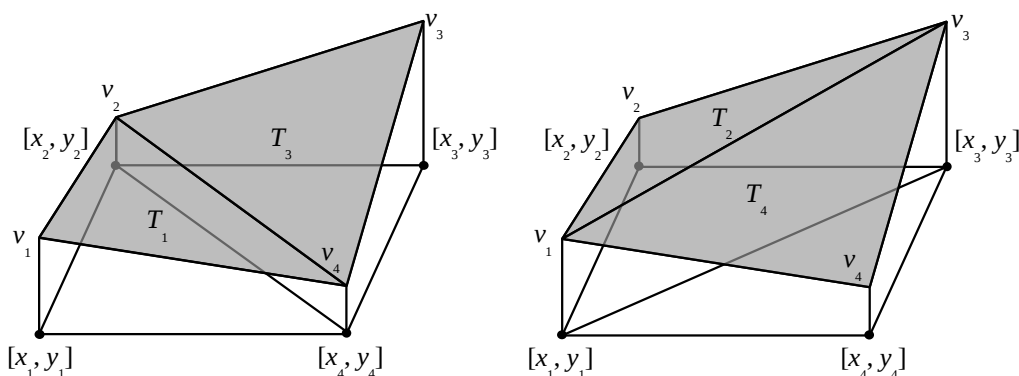
- **vzdialenosť od rovín** – meria vzdialenosť vrcholu  $v_1$  od roviny  $P_3$  a vrcholu  $v_3$  od roviny  $P_1$ :

$$c = \left\| \frac{\text{dist}(P_1, v_3)}{\text{dist}(P_3, v_1)} \right\|, \text{ kde } \text{dist}(P_j, v_k) = \frac{|P_j(x_k, y_k) - f(x_k, y_k)|}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2 + 1}},$$

pre  $j = 1$  a  $k = 3$ , alebo  $j = 3$  a  $k = 1$ .

Yu a spol. dosiahli svojou cenovou funkciou opísanou v [YU01] vizuálne lepšie výsledky. Namiesto normál  $\bar{n}_1$  a  $\bar{n}_3$  navrhli použiť iba ich priemety do roviny  $xy$  ( $a_1, b_1$ ) a ( $a_3, b_3$ ). Pre výčíslenie cenovej funkcie použili vzťah:

$$c = \|\nabla P_1\| \|\nabla P_3\| - \nabla P_1 \cdot \nabla P_3, \text{ kde } \nabla P_j = (a_j, b_j) \text{ pre } j = 1 \text{ alebo } 3.$$



Obrázok 2.16: Dve možné triangulácie zostrojené na množine 4 pixlov.

Pre vytvorenie optimálnej DDT triangulácie, existujú aj iné prístupy. Jedným z nich je napr. metóda prehadzovania hrán *look-ahead*, ktorá je rozšírením *Lawsonovho optimalizačného algoritmu*. Podrobnosti môžeme nájsť v práci [YU01].

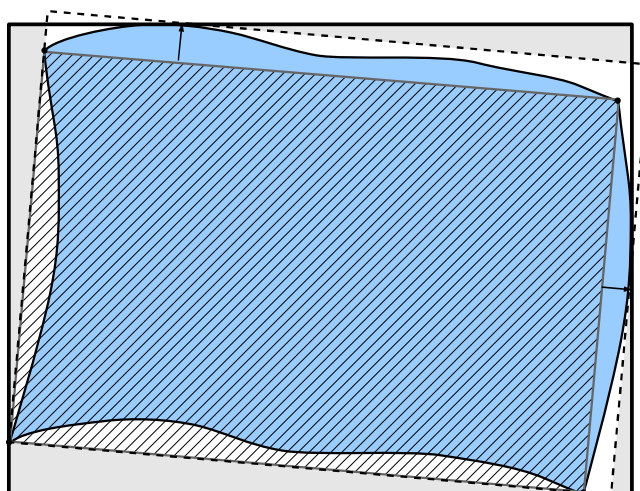
## 2.5 Vzorkovanie obrazu, rozklad do rastra

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, ako vytvoriť z diskretných dát po častiach spojitú funkciu  $F(x, y)$ . V tejto časti je situácia opačná. Potrebujeme vytvoriť diskkrétne dáta z funkcie  $F(x, y)$  určenej vstupným obrazom. Ak teda máme danú spojitú funkciu, ako je najvhodnejšie vybrať hodnoty pre diskretnú reprezentáciu výsledného obrazu? Táto otázka patrí k základným problémom v spracovávaní obrazu. Konverzia spojitej funkcie na jej diskretnú reprezentáciu má dva aspekty:

– prvým z nich je nutnosť reprezentovať hodnoty z oboru hodnôt funkcie  $F(x, y)$  pomocou čísel s *konečnou mantisou*. Touto problematikou sa zaoberá proces nazývaný *kvantizácia hodnôt*. Keďže hodnoty pixlov sú obyčajne reprezentované rozsahom čísel od 0 do 255, stačí nájsť príslušné celočíselné delenie intervalu hodnôt funkcie  $F(x, y)$  do tohto rozsahu,

– druhým je nájdenie vhodnej vzorky (konečného počtu) bodov, ktoré reprezentujú funkciu  $F(x, y)$ . Tento proces sa nazýva *vzorkovanie* spojitej funkcie. Existuje mnoho metód ako uskutočniť vhodný výber vzoriek. Zjednodušene sa dá povedať, že vzorku treba určiť tak, aby došlo k čo najmenšej strate informácie. V praxi sa obyčajne počet vzoriek, t.j. počet výsledných pixlov obrazu volí tak, aby obraz pixlu v pôvodnom obraze bol tvorený aspoň štyrmi pixlami vo výslednom obraze. Keďže sa obrazy často skenujú v dostatočne veľkom rozlíšení, nie je treba štvornásobne zvyšovať počet pixlov.

Keď sme už rozhodli o výbere a počte vzoriek, môžeme pristúpiť k samotnej realizácii tvorby výstupného obrazu. Niekedy sa táto tvorba obrazu označuje pojmom *rasterizácia* – rozklad do rastra. Najskôr treba určiť rozmery výsledného obrazu v pixloch. Ako vidíme na obrázku 2.17, pôvodný obraz ležiaci v obdĺžniku (šikmo šrafovaný) má po transformácií nepravidelné okraje. Preto je nutné najskôr vypočítať jeho *min-max* obálku, ktorá potom bude určovať rozmery výsledného obrazu.



Obrázok 2.17: Zmena tvaru okraja obrazu po transformácii.

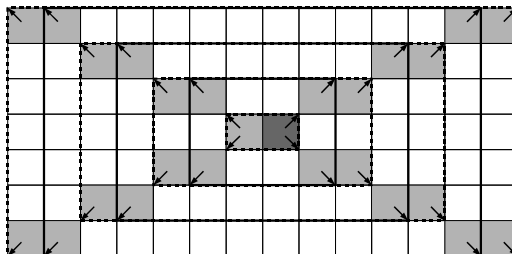
Vlastný algoritmus rozkladu do rastra prebieha tak, že sa postupne postupuje po riadkoch cieľového obrazu, s krokom jedného pixlu, a pomocou inverznej transformácie (ku práve aplikovanej geometrickej transformácii) sa určí poloha príslušného bodu vo vstupnom obraze. Ak bod cieľového rastra padne mimo obdĺžnik plochy vstupného obrazu, tak mu bude priradená farba pozadia (na obrázku 2.17 sú tieto oblasti označené bielou a svetlošedou farbou). Pri okrajoch cieľového obrazu je možné tento test dobre optimalizovať. Stačí keď určíme obdĺžnik obsahujúci celý cieľový obraz (na obrázku je znázornený čiarkovaným okrajom). Potom všetky body ležiace mimo neho budú mať farbu pozadia. Ak bod cieľového rastra padne do obdĺžnika, tak bude mať farbu vypočítanú pomocou rekonštrukčnej funkcie  $F(x, y)$ . Avšak nie vždy je možné určiť inverznú transformáciu. V praxi sa však neprehľadávajú odznova všetky body vstupného obrazu. Vďaka *princípu koherencie*<sup>17</sup> je možné toto prehľadávanie výrazne urýchliť.

Jednou z možností ako využiť princíp koherencie je prehľadávať okolie poslednej vyhovujúcej štvorice bodov (tvoriacich štvoruholník) tzv. *vlnovou metódou*<sup>18</sup>. Veľkosť okrajov narastajúcej vlny je určená postupnosťou pixlov úsečky spájajúcej stred obrazu s jeho najvzdialenejším rohom (ako je vidno na obrázku 2.18). Takto je zabezpečené, že každý pixel obrazu bude prehľadávaný iba raz. Pri každom náraste vlny sa prehľadávajú len tie oblasti, ktoré od jej nárastu pribudli. Keďže začiatok prehľadávania nemusí byť vždy v strede obrazu, musíme zabezpečiť, aby okraje vlny počas jej rozširovania nepresiahli časti vstupného obrazu. Riešenie je veľmi jednoduché. Stačí keď sa pri prehľadávaní budeme pozerat' na vstupný obraz tak, ako keby mal zlepené

[17] Princíp koherencie v našom prípade znamená, že ak sme v predošlom hľadaní našli vyhovujúcu štvoricu bodov, tak v nasledujúcom hľadaní je dobré začať prehľadávanie od tejto štvorice, smerom k jej najbližším susedom.

[18] Táto metóda je nazvaná podľa narastajúceho tvaru prehľadávaného okolia. Veľkosť okolia sa postupne zväčšuje ako vlna, ktorá vznikne hodením kameňa do pokojnej hladiny vody.

okraje (pravý s ľavým a súčasne horný s dolným). Potom sa vlna bude šíriť na uzavretej ploche tvoriacej anuloid.



Obrázok 2.18: Postup šírenia vlny vo vlnovej metóde.

Pomocou techniky tzv. *dopredného zobrazovania* pixlov je možné výrazne urýchliť tvorbu výsledného obrázku. Pri tomto postupe sa vrcholy každého štvoruholníka, tvoreného susednými pixlami vstupného obrazu, zobrazia danou geometrickou transformáciou na vrcholy nového štvoruholníka. Potom sa určí obálka tohto štvoruholníka a nakoniec sa jednoduchým porovnaním určia pixle výstupného obrazu, ktoré do neho padnú. Informácia, v ktorom štvoruholníku (tvoreného pixlami vstupného obrazu) leží príslušný pixel výstupného obrazu sa zapíše do jeho dátového poľa. Na konci tohto procesu sa v dátovom poli pixlov výstupného obrazu nachádza buď informácia, v ktorom štvoruholníku leží, prípadne žiadna informácia, ak neleží v žiadnom. Z informácie, v ktorom štvoruholníku (prípadne trojuholníku) pixel nového obrazu leží, môžeme vypočítať jeho výslednú farbu.

### 3 Transformácia obrazu – základné definície a pojmy

V tejto kapitole uvedieme niektoré zo základných pojmov a vlastností, ktoré budú používané v ďalšej časti práce.

#### Useknutá mocninná funkcia

Useknutou mocninnou funkciou  $(x)_+^k : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  nazveme funkciu tvaru:

$$(x)_+^k = \begin{cases} x^k, & \text{ak } x \geq 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}, \text{ kde } k \in \mathbb{N}.$$

#### Barycentrické súradnice

Ak máme daný trojuholník  $ABC$  a bod  $P$  (všetky body sú z euklidovskej roviny  $\mathbb{E}^2$ ), tak môžeme jednoznačne vyjadriť bod  $P$  ako barycentrickú kombináciu bodov  $A, B, C$ :

$$P = uA + vB + wC, \text{ za podmienky, že } u + v + w = 1 \text{ a } u, v, w \in \mathbb{R}.$$

Koeficienty  $(u, v, w)$  nazývame *barycentrické súradnice* bodu  $P$  vzhľadom na daný trojuholník  $ABC$ . Barycentrické súradnice majú jednu dôležitú vlastnosť a to, že sú *afinne invariantné* [HOS93].

#### 3.1 Bézierova trojuholníková záplata

Zovšeobecnené Bernsteinove polynómy stupňa  $n$   $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$ , prislúchajúce trojuholníku  $ABC$  sú definované vzťahom:

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k = \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k, \quad (3.1.1)$$

kde  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  sú barycentrické súradnice bodu  $\mathbf{u}$  priestoru  $\mathbb{E}^2$  vzhľadom na  $\Delta ABC$ , pre ktoré platí, že  $u, v, w \geq 0$  a  $\mathbf{i} = (i, j, k)$ , kde  $|\mathbf{i}| = i + j + k = n$  a  $i, j, k \geq 0$ .

Potom vzťah [HOS93]:

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) \quad (3.1.2)$$

predstavuje parametrické vyjadrenie trojuholníkovej Bézierovej záplaty stupňa  $n$ , kde koeficienty  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}} = \mathbf{b}_{ijk}$  sú body priestoru  $\mathbb{E}^3$  vytvárajúce riadiacu sieť trojuholníkovej záplaty alebo aj *Bézierove body*.

## Smerové derivácie

Parciálne derivácie sa v prípade trojuholníkových záplat nezhodujú s obvyklými parciálnymi deriváciami plôch tenzorového súčinu. Príčinou je závislosť tretej barycentrickej súradnice od dvoch predošlých. Vhodnými deriváciami pre trojuholníkové záplaty sú tzv. *smerové derivácie*.

Majme dané dva body  $\mathbf{u}_2$  a  $\mathbf{u}_1$  v zadanom definičnom obore. Potom smerová derivácia plochy  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  vzhľadom na smer  $\mathbf{d}(d_u, d_v, d_w) = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$  je definovaná vzťahom [FAR97]:

$$D_{\mathbf{d}} \mathbf{X}(\mathbf{u}) = d_u \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial u} + d_v \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial v} + d_w \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{u})}{\partial w}. \quad (3.1.3)$$

Korektný výpočet parciálnych derivácií dosiahneme ak barycentrické súradnice bodu  $\mathbf{u}$  zvolíme:  $\mathbf{u} = \left( \frac{u}{u+v+w}, \frac{v}{u+v+w}, \frac{w}{u+v+w} \right)$ , kde  $u + v + w \neq 0$ .

Geometrickú interpretáciu pojmu smerovej derivácie môžeme vysvetliť nasledovne:

Priamka prechádzajúca bodom  $\mathbf{u}$  v danom definičnom obore so smerom  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{d}$  sa zobrazuje na plochu  $\mathbf{X}$  ako krivka  $\mathbf{X}(\mathbf{u}(t))$ . Potom dotykový vektor tejto krivky v bode  $\mathbf{X}(\mathbf{u})$  bude považovaný za hľadanú smerovú deriváciu.

$r$ -tú smerovú deriváciu trojuholníkovej Bézierovej záplaty  $\mathbf{X}^n(\mathbf{u})$  môžeme vyjadriť predpisom [FAR97]:

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{X}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=n-r} \mathbf{b}_j^r(\mathbf{d}) B_j^{n-r}(\mathbf{u}), \quad (3.1.4)$$

pričom  $\mathbf{b}_j^r(\mathbf{d})$  sú body získané  $r$ -tou iteráciou Casteljauovho algoritmu:

$$\mathbf{b}_j^r(\mathbf{d}) = \sum_{|i|=r} \mathbf{b}_{j+i} B_i^r(\mathbf{d}). \quad (3.1.5)$$

Ku vzťahu 3.1.4 existuje aj duálny vzťah vyjadrujúci tú istú smerovú deriváciu [FAR97]:

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{X}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=r} \mathbf{b}_j^{n-r}(\mathbf{u}) B_j^r(\mathbf{d}). \quad (3.1.6)$$

Ak dosadíme  $r = 1$  do predošlého vzťahu, dostaneme:

$$D_{\mathbf{d}} \mathbf{X}^n(\mathbf{u}) = n \sum_{|j|=1} \mathbf{b}_j^{n-1}(\mathbf{u}) B_j^1(\mathbf{d}) = n (d_u \mathbf{b}_{100}^{n-1} + d_v \mathbf{b}_{010}^{n-1} + d_w \mathbf{b}_{001}^{n-1}).$$

Keďže tento vzťah platí pre ľubovoľný vektor  $\mathbf{d} \in \mathbb{E}^2$ , vedie nás to k záveru, že body  $\mathbf{b}_{100}^{n-1}, \mathbf{b}_{010}^{n-1}, \mathbf{b}_{001}^{n-1}$  určujú dotykovú rovinu v bode  $\mathbf{X}^n(\mathbf{u})$ . Konkrétne pre  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ , riadiace body  $\mathbf{b}_{n,0,0}, \mathbf{b}_{n-1,0,1}, \mathbf{b}_{n-1,1,0}$  určujú dotykovú rovinu v bode  $\mathbf{b}_{n,0,0}$ .

Ďalej sa budeme zaoberať *deriváciami v priečnom smere* na hraniciach trojuholníkových záplat. Uvažujme napr. hranu  $w = 0$  a smer  $\mathbf{d}$ , ktorý nie je rovnobežný s touto hranou. Potom smerová derivácia vzhľadom na smer  $\mathbf{d}$ , vyčíslená pozdĺž hranice pre  $w = 0$  je považovaná za deriváciu v priečnom smere.

Deriváciu v priečnom smere vyčíslenú pozdĺž hranice pre  $w = 0$  môžeme vyjadriť predpisom [FAR97]:

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{X}^n(\mathbf{u})|_{w=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{i}_0|=n-r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}_0}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i}_0}^{n-r}(\mathbf{u})|_{w=0}, \quad (3.1.7)$$

kde  $\mathbf{i}_0 = (i, j, 0)$ . Podobne môžeme vyčísliť derivácie v priečnom smere pozdĺž zvyšných hraníc. Poznamenajme, že vyčíslenie predošlého vzťahu závisí len od  $r + 1$  riadkov riadiacej siete Bézierových bodov najbližších k hranici, v ktorej uvažujeme deriváciu v priečnom smere.

## Hladké spojenie trojuholníkových záplat

Hladké spojenie trojuholníkových záplat potrebujeme pri vytváraní spojitaj, po častiach polynomickej plochy, interpolujúcej zadané body trojuholníkovej siete.

Uvažujme plochu pozostávajúcu z dvoch trojuholníkových záplat. Keďže parciálne derivácie sú navzájom závislé, nemôžeme ich priamo použiť pri definícii  $C^r$ -spojitosti pozdĺž okrajov záplat. Preto si pomôžeme nasledovným zovšeobecnením:

Nech je parametrický priestor týchto záplat tvorený  $\Delta ABC$  a  $\Delta \hat{A}BC$  (pozri obrázok 3.1). Každá priamka, ktorá pretína spoločnú hranu týchto trojuholníkov, sa zobrazuje na dve krivky ležiace na jednotlivých záplatách. Ak tieto dve krivky tvoria  $C^r$ -spojitú<sup>19</sup> zloženú krivku, pre každú pretínajúcu priamku, tak sa záplaty stýkajú s hladkosťou  $C^r$ .

Vyjadrieme teraz bod  $\hat{A}$  pomocou barycentrických súradníc vzhľadom na  $\Delta ABC$ :

$$\hat{A} = v_1 A + v_2 B + v_3 C. \quad (3.1.8)$$

Body plochy môžeme vyčísliť nad celým priestorom  $\mathbb{E}^2$ , teda aj nad  $\Delta \hat{A}BC$ . Aké sú potom riadiace body siete trojuholníkovej záplaty, ktorá je definovaná nad  $\Delta \hat{A}BC$ ?

Nech  $\mathbf{u}$  označuje barycentrické súradnice vzhľadom na  $\Delta ABC$  a  $\hat{\mathbf{u}}$  vzhľadom na  $\Delta \hat{A}BC$ . Potom uvažovanú plochu môžeme zapísať dvomi vyjadreniami:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\hat{\mathbf{u}}). \quad (3.1.9)$$

Aplikujme na vzťah 3.1.9 smerové derivácie (až do stupňa  $r = n$ ) pozdĺž spoločnej hranice oboch záplat, v smere rôznom od spoločnej hrany. Po úpravách dostaneme [FAR97]:

$$\mathbf{b}_{0,j,k}^r(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{b}}_{0,j,k}^r(\hat{\mathbf{u}}), \text{ pre } r = 0, \dots, n; \text{ pričom } j + k = n - r.$$

Posledná rovnosť platí pre všetky  $\mathbf{u}$ , a teda musí platiť aj pre  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Po dosadení  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  (čomu zodpovedá  $\hat{\mathbf{u}} = (1, 0, 0)$ ) vzhľadom na 3.1.8 dostaneme:

$$\mathbf{b}_{0,j,k}^r(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{b}}_{0,j,k}^r(1, 0, 0) = \hat{\mathbf{b}}_{r,j,k}, \text{ pre } r = 0, \dots, n; \text{ pričom } j + k = n - r. \quad (3.1.10)$$

[19]  $C^r$  spojitosť kriviek je definovaná spojitosťou jej derivácií až do stupňa  $r$ .

Vzťah 3.1.10 nám poskytuje návod na konštrukciu časti siete riadiacich bodov priľahlej trojuholníkovej záplaty. Riadiace body siete  $\hat{\mathbf{b}}_{r,j,k}$  (riadok po riadku, každý riadok zodpovedajúci inej hodnote  $r$  až do stupňa požadovanej hladkosti) budú vypočítané pomocou príslušných riadiacich bodov trojuholníkovej záplaty definovanej nad  $\Delta ABC$ . Tento vzťah nám poskytuje, pre pevne dané  $s \leq n$  a  $r = 0, \dots, s$ , súčasne nevyhnutnú i postačujúcu podmienku pre  $C^s$ -spojitosť dvoch priľahlých záplat. Pre stupeň  $s = 0$  dostávame, že dve  $C^0$ -hladko stýkajúce sa záplaty musia zdieľať spoločný hraničný riadiaci polygón (príslušné krajné riadiace body týchto trojuholníkových záplat musia byť totožné). Prípád  $s = 1$  je zaujímavejší. Využijúc vzťah 3.1.10 dostávame:

$$\hat{\mathbf{b}}_{1,j,k} = v_1 \mathbf{b}_{1,j,k} + v_2 \mathbf{b}_{0,j+1,k} + v_3 \mathbf{b}_{0,j,k+1}. \quad (3.1.11)$$

Teda každý riadiaci bod  $\hat{\mathbf{b}}_{1,j,k}$  je vyjadrený ako barycentrická kombinácia vrcholov hraničných podtrojuholníkov riadiacej siete záplaty. Pre všetky  $j + k = n - 1$  sú tieto barycentrické kombinácie rovnaké. Z toho plynie, že všetky dvojice podtrojuholníkov zobrazené na obrázku 3.1 sú komplanárne, a každý pár je afinným obrazom dvojice trojuholníkov z  $\mathbb{E}^2$  určujúcich definičný obor týchto záplat.

Na záver ukážeme výpočet vnútorného riadiaceho bodu  $\mathbf{b}_{111}$  Bézierovej trojuholníkovej záplaty stupňa 3, ak máme danú deriváciu v priečnom smere vo vnútornom bode okraja záplaty a hodnoty hraničných riadiacich bodov.

Predpokladajme, že poznáme hodnotu derivácie v priečnom smere v bode  $S(1/2, 1/2, 0)$  okraja záplaty, v smere  $\mathbf{d}$  kolmom na konkrétnu hranu trojuholníka, nad ktorým je definovaná. Ak dosadíme stupeň  $n = 3$  do vzťahu 3.1.7, dostávame pre prvú ( $r = 1$ ) smerovú deriváciu vyčíslenú pozdĺž hranice  $w = 0$  nasledovné vyjadrenie:

$$D_{\mathbf{d}} \mathbf{X}(S) = 3(\mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{d}) B_{200}^2(S) + \mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{d}) B_{110}^2(S) + \mathbf{b}_{020}^1(\mathbf{d}) B_{020}^2(S)).$$

Použitím predpisu  $\mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{d}) = d_u \mathbf{b}_{210} + d_v \mathbf{b}_{120} + d_w \mathbf{b}_{111}$  (pozri vzťah 3.1.5) na predošlý výraz dostávame pre výpočet bodu  $\mathbf{b}_{111}$  vzťah:

$$\mathbf{b}_{111} = \frac{1}{d_w} \left[ \frac{1}{B_{110}^2(S)} \left( \frac{1}{3} D_{\mathbf{d}} \mathbf{X}(S) - \mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{d}) B_{200}^2(S) - \mathbf{b}_{020}^1(\mathbf{d}) B_{020}^2(S) \right) - d_u \mathbf{b}_{210} - d_v \mathbf{b}_{120} \right]. \quad (3.1.12)$$

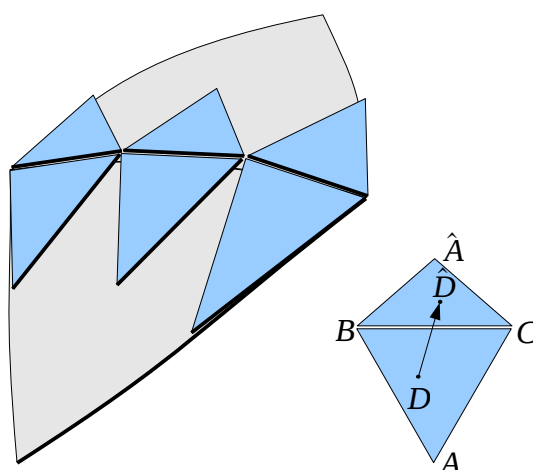
Dosadením súradníc bodu  $S(1/2, 1/2, 0)$  a smeru  $\mathbf{d} = (1/3, 1/3, 1/3) - (1/2, 1/2, 0) = (-1/6, -1/6, 1/3)$  dostávame:

$$\mathbf{b}_{111} = 2D_{\mathbf{d}} \mathbf{X}(1/2, 1/2, 0) - 1/2(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) + 1/2(\mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120}),$$

kde  $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{b}_{201} - 1/2(\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{210})$  a  $\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{b}_{021} - 1/2(\mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{030})$ .

Tento vzťah budeme potrebovať v kapitole 5.5 pri vyčíslení vnútorných riadiacich bodov trojuholníkových záplat nad minitrojuholníkmi danej trojuholníkovej siete.





Obrázok 3.1: Geometrická interpretácia  $C^1$ -spojivosti susedných trojuholníkových záplat.

### 3.2 Triangulácia množiny bodov

Nech je daná množina bodov  $\mathcal{P} = \{P_i[x_i, y_i] \in \mathbb{E}^2; i = 1, 2, \dots, n\}$ . Potom množina  $\mathcal{T} = \{(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \in \mathbb{N}^3; j = 1, 2, \dots, m\}$ , kde  $1 \leq \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \leq n$ , definuje trianguláciu množiny  $\mathcal{P}$ , ak platí [HOS93]:

1. body  $P_{\alpha_j}, P_{\beta_j}, P_{\gamma_j}$  sú z množiny  $\mathcal{P}$ ,
2. pre každé  $j = 1, 2, \dots, m$  sú body  $P_{\alpha_j}, P_{\beta_j}, P_{\gamma_j}$  vrcholy nedegenerovaného trojuholníka  $T_j$ ,
3. prienik vnútier trojuholníkov  $T_j, T_k$  je prázdny pre všetky  $j \neq k$ , kde  $j, k = 1, 2, \dots, m$ ,
4. zjednotenie všetkých trojuholníkov  $T_j$  je konvexný obal množiny  $\mathcal{P}$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$ ,
5. každý bod  $P_i$  je vrcholom nejakého trojuholníka  $T_j$ , pre  $i = 1, \dots, n$  a pre  $j = 1, \dots, m$ .

Je zrejmé, že daná množina môže mať veľa rôznych triangulácií. Napríklad pre 4 body tvoriace konvexný štvoruholník existujú práve dve triangulácie. Rozhodnúť, ktorá z nich je „lepšia“ môžeme vtedy, ak zavedieme kritérium, ktoré porovná dve rôzne triangulácie  $\mathcal{T}$  a  $\mathcal{T}'$  štyroch rôznych bodov. Existuje viacero kritérií, z ktorých tri uvedieme v nasledujúcich definíciách [HOS93]:

**Definícia 3.1.** (*Kritérium najkratšej diagonály*). Triangulácia  $\mathcal{T}$  štyroch bodov  $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}$  tvoriacich konvexný štvoruholník je lepšia ako triangulácia  $\mathcal{T}'$  (v zmysle najkratšej diagonály) ak platí, že  $d \leq d'$ , kde  $d$  je dĺžka vnútornej hrany (diagonály)  $P_{i_1}P_{i_2}$  triangulácie  $\mathcal{T}$  a  $d'$  je dĺžka diagonály  $P_{i_3}P_{i_4}$  triangulácie  $\mathcal{T}'$ .

Toto kritérium je jednoduché implementovať, ale jeho výsledkom býva často triangulácia obsahujúca veľa „tenkých“ a „pretiahnutých“ trojuholníkov. Takéto trojuholníky však nie sú vhodné pre naše transformačné metódy.

**Definícia 3.2.** (*Kritérium lokálne maximálneho minimálneho uhla v trojuholníku*). Triangulácia  $\mathcal{T}$  je lepšia ako triangulácia  $\mathcal{T}'$  (v zmysle lokálneho max-min uhla), ak platí vzťah:

$$\min\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \beta_{i_4}\} \geq \min\{\gamma_{i_1}, \gamma_{i_3}, \gamma_{i_4}, \delta_{i_2}, \delta_{i_3}, \delta_{i_4}\}, \quad (3.2.1)$$

pričom  $\alpha_i, \beta_i$  sú vnútorné uhly trojuholníkov  $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}$  a  $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_4}$  (pozri obrázok 3.2) a  $\gamma_i, \delta_i$  sú uhly trojuholníkov  $P_{i_1}P_{i_3}P_{i_4}$  a  $P_{i_2}P_{i_3}P_{i_4}$ .

**Definícia 3.3.** (*Kritérium lokálnej prázdnoti opísaného kruhu*). Ak pre danú trianguláciu  $\mathcal{T}$  otvorený kruh opísaný každému trojuholníku tejto triangulácie neobsahuje ďalší bod z triangulácie (pozri obrázok 3.3), tak táto triangulácia vyhovuje danému kritériu. Ak kruh opísaný nejakému trojuholníku obsahuje ďalší bod tejto triangulácie, tak triangulácia nevyhovuje kritériu.

Platí tvrdenie, že kritéria prázdnoti opísaného kruhu a maximálneho-minimálneho uhla sú navzájom ekvivalentné [GRE77].

## Delaunayova triangulácia

**Definícia 3.4.** Nech  $\mathcal{P}$  je konečná množina bodov v rovine  $\mathbb{E}^2$ , potom *Delaunayova triangulácia* je taká triangulácia  $\mathcal{DT}(\mathcal{P})$  množiny bodov  $\mathcal{P}$ , pre ktorú platí, že každá kružnica opísaná nejakému trojuholníku v  $\mathcal{DT}(\mathcal{P})$  neobsahuje žiadny ďalší bod z množiny  $\mathcal{P}$ . Inak povedané, Delaunayova triangulácia je taká triangulácia, pre ktorú platí, že každý jej konvexný štvoruholník (zložený z dvoch susedných trojuholníkov) tvorí trianguláciu, ktorá spĺňa kritérium lokálnej prázdnoti opísaného kruhu.

Delaunayova triangulácia má aj vlastnosť, že spomedzi všetkých triangulácií maximalizuje minimálny uhol všetkých uhlov trojuholníkov tvoriacich trianguláciu [SIBS78]. To znamená, že každá dvojica susedných trojuholníkov z danej triangulácie musí spĺňať kritérium z definície 3.2. Preto je pre naše účely najvhodnejšia.

Algoritmy pre konštrukciu Delaunayovej triangulácie môžeme rozdeliť do troch skupín [HOS93]:

- najskôr zostrojíme ľubovoľnú trianguláciu a potom ju použitím lokálneho kritéria z definície 3.2 alebo 3.3 postupne „vylepšujeme“ (optimalizujeme) na výslednú trianguláciu,
- najskôr zostrojíme „začiatočnú“, čiastkovú trianguláciu (napr. zloženú z jediného trojuholníka) a potom postupne pridávame ďalšie hrany, pričom opäť využívame niektoré z lokálnych kritérií,
- rozdelíme danú množinu bodov  $\mathcal{P}$  na podmnožiny, potom na každej z nich zostrojíme optimálnu trianguláciu a nakoniec skombinujeme všetky vytvorené triangulácie.

Počas vytvárania triangulácie sa často používa aj proces známy pod názvom: „Delaunay-

ovo prehadzovanie hrán“ (*Delaunay flipping*) [LAW77]. Tento proces znamená prehadzovanie hrán už v existujúcej triangulácii, ktorá pôvodne nemusí byť Delaunayovou. Platí tvrdenie, že pomocou tohto procesu, po prehodení konečného počtu hrán, vytvoríme Delaunayovu trianguláciu z ľubovoľnej triangulácie [LAW77]. Odtiaľ tiež vyplýva, že každá konečná množina bodov v rovine  $\mathbb{E}^2$  má Delaunayovu trianguláciu. V procese *Delaunayovho prehadzovania hrán* musíme vykonať nasledovné kroky:

1. Pre každé dva susedné trojuholníky  $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}$  a  $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_4}$  vytvárajúce konvexný štvoruholník skontrolujeme či platí, že vrchol  $P_{i_4}$  leží mimo kružnice opísanej trojuholníku  $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}$ .
2. Ak áno, nevykonáme žiadnu činnosť.
3. Ak nie, prehodíme hranu spájajúcu body  $P_{i_1}P_{i_2}$  na hranu  $P_{i_3}P_{i_4}$  pričom pôvodné trojuholníky zaniknú a vzniknú dva nové trojuholníky  $P_{i_1}P_{i_3}P_{i_4}$  a  $P_{i_2}P_{i_3}P_{i_4}$ . Podmienku z kroku 1 môžeme overiť s využitím nasledujúceho determinantu [BERG00], [AURE87]:

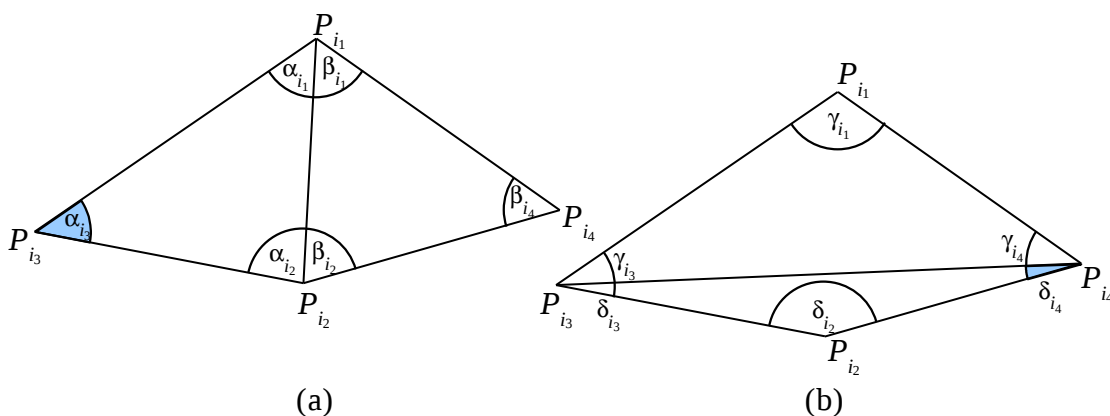
$$H(P_i, P_j, P_k, P) = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix}, \quad (3.2.2)$$

kde  $P_i[x_i, y_i]$ ,  $P_j[x_j, y_j]$ ,  $P_k[x_k, y_k]$  sú vrcholy kladne orientovaného trojuholníka a  $[x, y]$  sú súradnice bodu  $P$ , pre ktorý máme overiť jeho vzťah ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku. Platí tvrdenie:

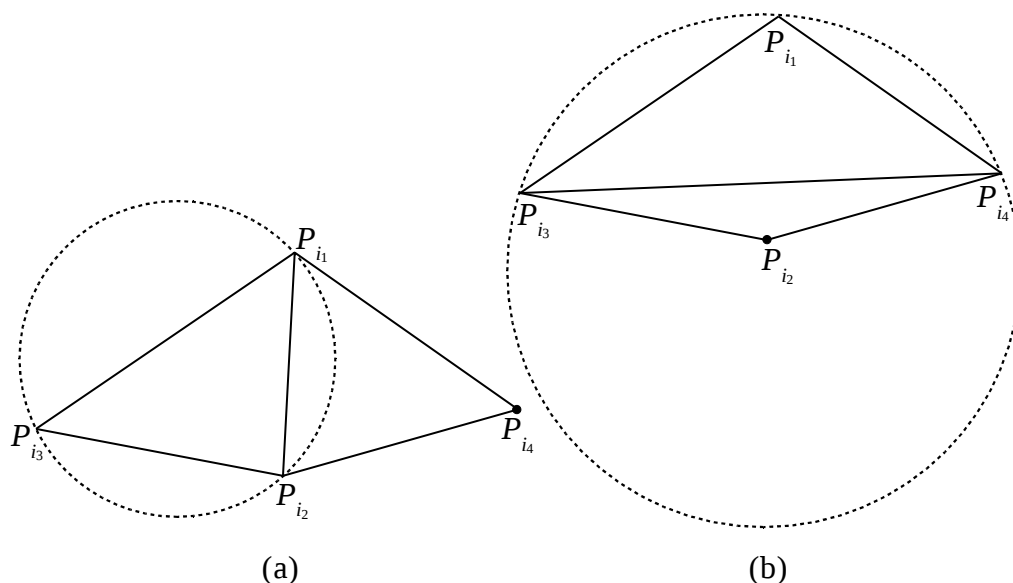
ak  $H(P_i, P_j, P_k, P) > 0$ , tak bod  $P$  leží zvonku kružnice,

ak  $H(P_i, P_j, P_k, P) < 0$ , tak bod  $P$  leží vo vnútri kružnice a

ak  $H(P_i, P_j, P_k, P) = 0$ , tak bod  $P$  leží na kružnici opísanej trojuholníku  $P_iP_jP_k$ .



Obrázok 3.2: Kritérium lokálne maximálneho minimálneho uhla. Zafarbený uhol je najmenší z označených uhlov na obrázku.



Obrázok 3.3: Kritérium prázdnoty opísaného kruhu. V prípade (a) kruh neobsahuje bod  $P_{i_2}$ , a teda kritérium je splnené. V prípade (b) kritérium nespĺňa bod  $P_{i_2}$ .

### 3.3 Základné transformácie roviny

V počítačovej grafike sa často používajú transformácie dvojrozmerných objektov [SED87]. Tieto transformácie slúžia na to, aby sme objekty zobrazili na požadovanej pozícii a v želannej veľkosti. Na tento účel sú najvhodnejšie afinné transformácie, z ktorých sa používajú najmä posunutie, otočenie, škálovanie, skosenie, rovnoľahlosť, súmernosť podľa osi  $x$  a súmernosť podľa osi  $y$ .

Afinné transformácie dvojrozmerných objektov môžeme výhodne vyjadriť, v rozšírených afinných súradniciach, pomocou násobenia matic typu  $3 \times 3$ . Afinné transformácie bodov  $[x, y]$  do  $[x', y']$  potom budú dané predpisom:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

Vyššie spomenuté transformácie môžeme v maticovom zápise vyjadriť nasledovne:

– **posunutie:** 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde  $(p_x, p_y)$  je vektor posunutia,

– **otočenie:** 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & -s_x \cos \varphi + s_y \sin \varphi + s_x \\ \sin \varphi & \cos \varphi & -s_x \sin \varphi - s_y \cos \varphi + s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde  $\varphi$  je uhol a  $[s_x, s_y]$  stred otočenia,

– **škálovanie:** 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & -s_x k_x + s_x \\ 0 & k_y & -s_y k_y + s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde  $k_x, k_y \neq 0$  sú škálovacie parametre a  $[s_x, s_y]$  je stred škálovania,

– **skosenie:** 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_x & 1 & -s_x k_x + s_x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ alebo}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_y & -s_y k_y + s_y \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde  $k_x, k_y \neq 0$  sú parametre skosenia a  $[s_x, s_y]$  je vhodne zvolený bod (napr. v rohu objektu),

– **rovnoľahlosť:** 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -s_x k + s_x \\ 0 & k & -s_y k + s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde  $k \neq 0$  je koeficient rovnoľahlosti a  $[s_x, s_y]$  je stred rovnoľahlosti,

– **súmernosť podľa osi x:** 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

– **súmernosť podľa osi y:** 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformáciu obrazu potom uskutočníme tak, že transformujeme všetky body obrazu príslušnou transformáciou.

### 3.4 Stručné rozdelenie metód transformácie obrazu

Metódy opisujúce transformačné funkcie môžeme rozdeliť na základe viacerých kritérií. Jedným z takýchto kritérií je vhodnosť jednotlivých metód podľa zadaného počtu dvojíc odpovedajúcich si bodov.

1. V prípade, že potrebujeme opraviť deformáciu na základe dvoch zadaných dvojíc odpovedajúcich si bodov, môžeme použiť kombináciu základných transformácií (pozri kapitolu 3.3). Keďže dve dvojice odpovedajúcich si bodov určujú dve orientované úsečky  $PQ$  a  $P'Q'$ , budeme hľadať takú transformačnú funkciu, ktorá zobrazí orientovanú úsečku  $PQ$  na orientovanú úsečku  $P'Q'$ . Ak postupne použijeme posunutie, otočenie a rovnoľahlosť, dosiahneme želaný výsledok. Najskôr posunieme obraz o vektor  $P' - P$  (pozri obrázok 3.4 vľavo). Potom použijeme otočenie so stredom  $P'$  a uhlom  $\alpha$ , ktorý je určený orientovanými priamkami  $P_1Q_1$  a  $P'Q'$  a je určený riešením goniometrických rovníc<sup>20</sup>:

$$\cos \alpha = \frac{(Q_1 - P_1) \cdot (Q' - P')}{|Q_1 - P_1| |Q' - P'|} \quad \text{a} \quad \sin \alpha = \frac{\det(Q_1 - P_1, Q' - P')}{|Q_1 - P_1| |Q' - P'|}.$$

Nakoniec použijeme rovnoľahlosť (pozri obrázok 3.4 vpravo) so stredom  $P'$  a koeficientom  $k$ , ktorý určíme predpisom:

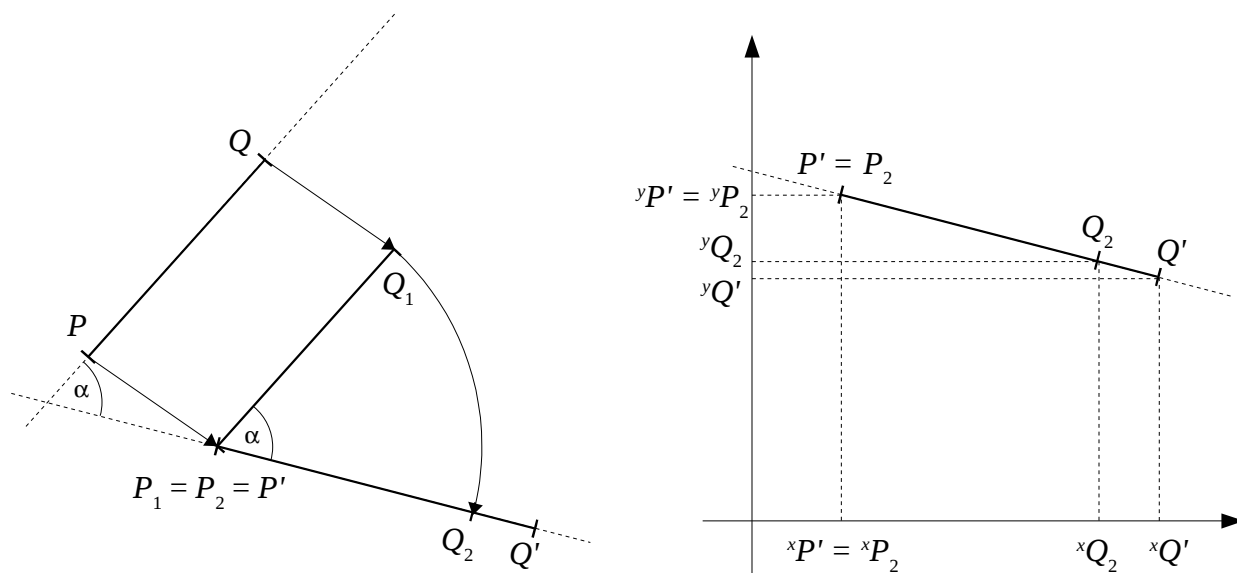
$$k = \frac{|Q' - P'|}{|Q_2 - P_2|}.$$

2. Ak je potrebné odstrániť deformáciu zadaním troch dvojíc odpovedajúcich si bodov, tak je najvhodnejšia metóda afinnej transformácie (kapitola 4.1), keďže platí, že tri nekolineárne body sú zobrazované na nové tri nekolineárne body práve jednou afinnou transformáciou v  $\mathbb{E}^2$ .
3. V prípade štyroch zadaných dvojíc odpovedajúcich si bodov máme možnosť zvoliť ako najvhodnejšiu buď metódu projektívnej transformácie (kapitola 4.2) alebo metódu bili-neárnej transformácie (kapitola 4.3). Výhodnejšie je však použiť projektívnu transformáciu, lebo táto transformácia spĺňa vlastnosť, že tri kolineárne body zobrazuje na nové tri kolineárne body.
4. Ak máme zadaný počet dvojíc odpovedajúcich si bodov vyšší ako 4, môžeme zvoliť ľubovoľnú zo zvyšných metód, s jedinou výnimkou, že ak potrebujeme, aby sa vzory odpovedajúcich si bodov zobrazovali presne na ich obrazy, nemôžeme použiť aproximačné metódy, medzi ktoré patrí napr. metóda najmenších štvorcov.

[20] Existencia riešenia je zabezpečená z Cauchyho nerovnosti.

Ďalším možným kritériom je, aby transformačná funkcia bola zložená z jedinej funkcie (zvlášť pre každú súradnicu  $x$  a  $y$ ). Vtedy sú vhodné jednosegmentové transformačné metódy z kapitoly 4. V prípade, že potrebujeme metódy s lokálnym vplyvom na okolie odpovedajúcich si bodov, potom sú vhodnejšie viacsegmentové metódy (metódy konečných prvkov) opísané v kapitole 5.

Ak používateľ požaduje vysokú rýchlosť pri výpočte hodnôt transformácie obrazu, tak sú najvhodnejšie metódy využívajúce zjemňovanie trojuholníkovej siete, keďže toto zjemňovanie sa môže urobiť v rámci predspracovania a v samotnom vyčísl'ovaní hodnôt bodov nového obrazu sa pre výpočet používajú už len rovnice rovín určených jednotlivými trojuholníkmi zjemnenej siete.



Obrázok 3.4: Posunutie a otočenie úsečky  $PQ$  (vľavo). Rovnoľahlosť úsečky  $P_2Q_2$  (vpravo).

## 4 Jednosegmentové metódy transformácie obrazu

V nasledujúcom texte sa budeme zaoberať jednosegmentovými metódami. Do triedy týchto metód patria všetky metódy, ktorých transformačné funkcie sú určené pomocou jedinej vektorovej funkcie  $f(x, y)$  na celom jej definičnom obore. Výhodou týchto metód je ich jednoduché vyjadrenie (ako aj ich nenáročná implementácia) a možnosť vypočítať hodnoty aj mimo konvexného obalu zadaných odpovedajúcich si bodov. Tieto metódy majú vo všeobecnosti globálny vplyv (pozri poznámku 22 na str. 57) a preto existujú modifikácie, ktoré umožňujú lokálne riadenie pomocou parametrov. Medzi najčastejšie používané patria metódy radiálnych bázických funkcií a z nich najmä metóda tenkostenných splajnov. V praxi sa často používa aj kombinácia viacerých metód. Pri veľkých množinách dát sa najskôr aplikuje niektorá z globálnych metód, a potom sa na výsledok použije vhodná lokálna metóda. Modifikovaná kvadratická Shepardova metóda, patriaca do triedy metód známych pod anglickým názvom *inverse distance weighted methods* je tiež dobrým kandidátom pre použitie v transformáciach obrazu.

Voľba najvhodnejšej metódy závisí od konkrétneho prípadu, ktorý riešime a tiež od ďalších podmienok, akým sú napr. pamäťová náročnosť prípadne rýchlosť výpočtu.

### 4.1 Metóda afinnej transformácie

Základom metódy afinnej transformácie je, v geometrii dobre známy pojem, *afinné zobrazenie* [SED87]. Metódu môžeme použiť len v tom prípade, ak máme odstrániť deformáciu obrazu s použitím troch odpovedajúcich si bodov. Tieto tri dvojice bodov musia byť nekolineárne, aby určovali afinnú transformáciu  $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  zobrazujúcu body  $[x_i, y_i]$  na body  $[x'_i, y'_i]$ , kde  $i = 1, 2, 3$ .

Predpokladajme teraz, že máme zadané tri vrcholy trojuholníka  $A[A_x, A_y]$ ,  $B[B_x, B_y]$  a  $C[C_x, C_y]$ , ktoré chceme zobrazit' na vrcholy nového trojuholníka  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Ďalej majme daný bod  $X[x, y]$  (pozri obrázok 4.1), ktorý bude zobrazovaný afinným zobrazením na bod  $X'[x', y']$ .

Ak máme daný  $\Delta ABC$  a bod  $X[x, y]$  v rovine  $\mathbb{E}^2$ , tak môžeme tento bod vyjadriť v barycentrických súradniciach, vzhľadom na  $\Delta ABC$ , nasledovným vzťahom:

$$\begin{aligned} x &= A_x u + B_x v + C_x w \\ y &= A_y u + B_y v + C_y w, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

kde  $u, v, w$  sú barycentrické súradnice bodu  $X[x, y]$ . Potom súradnice obrazu tohto bodu  $x'$  a  $y'$  môžeme vypočítať pomocou vrcholov nového trojuholníka z rovníc:



$$\begin{aligned}x' &= A_x' u + B_x' v + C_x' w \\y' &= A_y' u + B_y' v + C_y' w.\end{aligned}\quad (4.1.2)$$

S využitím, že  $u = D_a / D$ ,  $v = D_b / D$  a  $w = D_c / D$ , kde  $D$ ,  $D_a$ ,  $D_b$ ,  $D_c$  sú determinanty dané vyjadreniami:

$$D = \begin{vmatrix} B-A \\ C-B \end{vmatrix}, \quad D_a = \begin{vmatrix} C-B \\ X-C \end{vmatrix}, \quad D_b = \begin{vmatrix} A-C \\ X-A \end{vmatrix}, \quad D_c = \begin{vmatrix} B-A \\ X-B \end{vmatrix}\quad (4.1.3)$$

dostaneme výsledný vzťah hľadanej transformačnej funkcie  $f(x, y)$ :

$$f^x(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 \quad \text{a} \quad f^y(x, y) = a_2 x + b_2 y + c_2, \quad (4.1.4)$$

kde

$$a_1 = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} A_x' & B_x' & C_x' \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} A_x' & B_x' & C_x' \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad c_1 = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} A_x' & B_x' & C_x' \\ A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{vmatrix}$$

a

$$a_2 = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} A_y' & B_y' & C_y' \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} A_y' & B_y' & C_y' \\ A_x & B_x & C_x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} A_y' & B_y' & C_y' \\ A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{vmatrix},$$

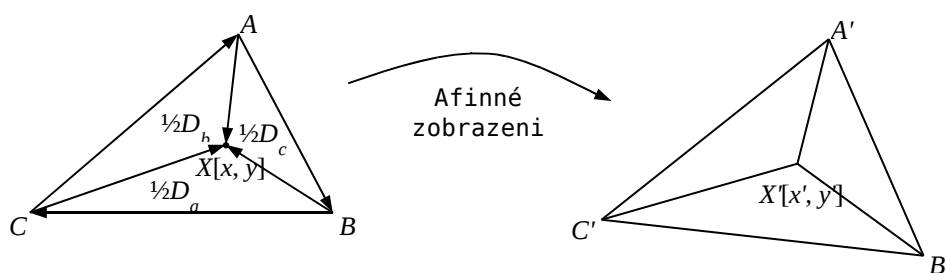
kde 
$$d = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Po vyčíslení determinantov, dostaneme pre koeficienty transformačnej funkcie 4.1.4 vyjadrenia:

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{1}{D} (\Delta_{BA}^y C_x' + \Delta_{CB}^y A_x' + \Delta_{AC}^y B_x'), & a_2 &= -\frac{1}{D} (\Delta_{BA}^y C_y' + \Delta_{CB}^y A_y' + \Delta_{AC}^y B_y') \\b_1 &= -\frac{1}{D} (\Delta_{BA}^x C_x' + \Delta_{CB}^x A_x' + \Delta_{AC}^x B_x'), & b_2 &= -\frac{1}{D} (\Delta_{BA}^x C_y' + \Delta_{CB}^x A_y' + \Delta_{AC}^x B_y') \\c_1 &= \frac{1}{D} (\Delta_{BA}^B C_x' + \Delta_{CB}^C A_x' + \Delta_{AC}^A B_x'), & c_2 &= \frac{1}{D} (\Delta_{BA}^B C_y' + \Delta_{CB}^C A_y' + \Delta_{AC}^A B_y')\end{aligned}$$

pričom

$$\begin{aligned}\Delta_{BA}^x &= B_x - A_x, & \Delta_{BA}^y &= B_y - A_y, & \Delta_{AC}^A &= \Delta_{AC}^y A_x - \Delta_{AC}^x A_y \\ \Delta_{CB}^x &= C_x - B_x, & \Delta_{CB}^y &= C_y - B_y, & \Delta_{BA}^B &= \Delta_{BA}^y B_x - \Delta_{BA}^x B_y \\ \Delta_{AC}^x &= A_x - C_x, & \Delta_{AC}^y &= A_y - C_y, & \Delta_{CB}^C &= \Delta_{CB}^y C_x - \Delta_{CB}^x C_y\end{aligned}$$



Obrázok 4.1: Výpočet obrazu bodu  $X$  pomocou afinného zobrazenia. Symboly  $\frac{1}{2}D_a$ ,  $\frac{1}{2}D_b$  a  $\frac{1}{2}D_c$  označujú plochy podtrojuholníkov určujúce barycentrické súradnice bodu  $X$ .

## 4.2 Metóda projektívnej transformácie

Táto metóda je vhodná najmä vtedy, ak máme danú štvoricu odpovedajúcich si bodov. Je veľmi žiadúce, aby štvoruholník určený týmito bodmi bol konvexný, a aby celý obraz ležal vnútri tohto štvoruholníka. *Projektívna transformácia* sa často používa pri riešení vzťahu medzi reálnou snímkovou rovinou vo všeobecnej polohe a obrazovou rovinou fotokomory.

Ak je medzi dvoma rovinami  $\pi$  a  $\pi'$  *kolineácia*, možno ju vyjadriť v homogénnych súradniciach nasledujúcimi rovnicami [SOL93]:

$$\begin{aligned} \tau x_1' &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 \\ \tau x_2' &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 \\ \tau x_3' &= a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

kde  $[x_1, x_2, x_3]$  sú homogénne súradnice bodov roviny  $\pi$ ,

$[x_1', x_2', x_3']$  sú homogénne súradnice bodov roviny  $\pi'$ ,

$\tau$  je koeficient homogénnosti, pričom  $\tau \neq 0$ ,

$a_k, b_k, c_k$  pre  $k = 1, 2, 3$  sú reálne čísla, pričom determinant sústavy rovníc 4.2.1 je nenulový.

Vyjadríme teraz tieto rovnice v nehomogénnych súradniciach. Súradnice bodov  $X[x, y]$  a  $X'[x', y']$  z  $\mathbb{E}^2$  sú určené vzťahmi:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad \text{a} \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad \text{resp.} \quad x' = \frac{x_1'}{x_3'} \quad \text{a} \quad y' = \frac{x_2'}{x_3'}.$$

Takto dostaneme novú sústavu rovníc:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \quad \text{a} \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}. \quad (4.2.2)$$

Z vlastností projektívnej transformácie platí, že ak zobrazujeme tri kolineárne body, ich obrazy budú tiež tri navzájom kolineárne body, pričom ostáva zachovaný dvojpomer štvorice kolineárnych bodov. Vieme, že kolineácia je určená štyrmi dvojicami odpovedajúcich si bodov, z ktorých nijaké tri neležia na jednej priamke. Ak dosadíme tieto štyri dvojice bodov do predošlých rovníc, dostávame sústavu s netriviálnym riešením. Táto sústava má 9 neznámych, ale len 8 podmienok (dané sú 4 body, každý z nich má 2 súradnice  $x$  a  $y$ ). Za dodatočnej podmienky, že bod  $[0, 0, 1]$  sa nezobrazuje do nekonečna<sup>21</sup> a štyri dvojice tvoria konvexný štvoruholník, budeme hľadať takú množinu riešení, pre ktorú je  $c_3 = 1$ . Teraz môžeme prepísať rovnice 4.2.2 na jednoduchší tvar:

$$x' = \frac{m_1 x + n_1 y + o_1}{m_3 x + n_3 y + 1} \quad \text{a} \quad y' = \frac{m_2 x + n_2 y + o_2}{m_3 x + n_3 y + 1}. \quad (4.2.3)$$

[21] Táto podmienka je pri reálnom použití metódy projektívnej transformácie vždy splnená.

Ak za body  $[x, y]$  resp.  $[x', y']$  budeme postupne zadávať všetky dané body  $[x_i, y_i]$  resp.  $[x'_i, y'_i]$ , kde  $i = 1, 2, 3, 4$ , dostaneme pre výpočet neznámych  $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, o_1, o_2$  sústavu v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} x_1 x_1' & y_1 x_1' & -x_1 & -y_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 y_1' & y_1 y_1' & 0 & 0 & 0 & -x_1 & -y_1 & -1 \\ x_2 x_2' & y_2 x_2' & -x_2 & -y_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 y_2' & y_2 y_2' & 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -1 \\ x_3 x_3' & y_3 x_3' & -x_3 & -y_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 y_3' & y_3 y_3' & 0 & 0 & 0 & -x_3 & -y_3 & -1 \\ x_4 x_4' & y_4 x_4' & -x_4 & -y_4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 y_4' & y_4 y_4' & 0 & 0 & 0 & -x_4 & -y_4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 \\ n_3 \\ m_1 \\ n_1 \\ o_1 \\ m_2 \\ n_2 \\ o_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1' \\ -y_1' \\ -x_2' \\ -y_2' \\ -x_3' \\ -y_3' \\ -x_4' \\ -y_4' \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

Po vyriešení tejto sústavy (napríklad pomocou Gaussovej eliminácie) môžeme vzťah:

$$f^x(x, y) = \frac{m_1 x + n_1 y + o_1}{m_3 x + n_3 y + 1} \quad \text{a} \quad f^y(x, y) = \frac{m_2 x + n_2 y + o_2}{m_3 x + n_3 y + 1} \quad (4.2.5)$$

pokladať za hľadanú transformačnú funkciu  $f(x, y)$ .

### 4.3 Metóda bilineárnej transformácie

Táto metóda je použiteľná, ak transformujeme obraz s použitím štvorice odpovedajúcich si bodov. Pre obraz a odpovedajúce si body musia platiť rovnaké predpoklady ako v predchádzajúcej kapitole.

Podobne ako v metóde projektívnej transformácie môžeme hľadanú transformačnú funkciu  $f(x, y)$  rozpísať po zložkách:

$$\begin{aligned} f^x(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ f^y(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Neznáme hodnoty  $a_0, a_1, a_2, a_3$  a  $b_0, b_1, b_2, b_3$  vypočítame z podmienok určených ôsmymi rovnicami, ktoré získame podobne ako v predošlej metóde dosadením štvorice dvojíc bodov  $[x_i, y_i]$  a  $[x_i', y_i']$ , do vzťahu 4.3.1. Prepísaním rovníc do maticového vyjadrenia dostávame pre výpočet neznámych vzťah:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ y_2' \\ x_3' \\ y_3' \\ x_4' \\ y_4' \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

Táto metóda má od predchádzajúcej jeden základný nedostatok a to, že nezobrazuje trojicu bodov ležiacich na priamke na novú trojicu bodov ležiacich na priamke. Preto pre transformáciu obrazov pomocou štvorice odpovedajúcich si bodov je oveľa rozumnejšie použiť predošlú metódu projektívnej transformácie, ktorá je výpočtovo rovnako zložitá.

## 4.4 Metódy radiálnych bázických funkcií

Tieto metódy, najmä metóda tenkostenných splajnov, patria medzi najpoužívanjšie v našej problematike. Sú jednoduché na implementáciu a vedú k dobrým výsledkom. Počiatkové myšlienky pochádzajú zo začiatku 70-tych rokov minulého storočia od Hardyho [HAR71].

Majme danú množinu bodov  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_i[x_i, y_i] \in \mathbb{E}^2; i = 1, 2, \dots, n\}$  a podobne množinu  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_i[x_i', y_i'] \in \mathbb{E}^2; i = 1, 2, \dots, n\}$ . Budeme hľadať takú transformačnú funkciu  $f(x, y)$ , pre ktorú platí  $f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{v}_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pomocou metódy radiálnych bázických funkcií môžeme interpolačnú funkciu  $f(x, y) = f(\mathbf{x})$  zapísať v tvare [HOS93]:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) + \phi_m(\mathbf{x}), \quad \text{kde } \phi_m(\mathbf{x}) \in \pi_m^2. \quad (4.4.1)$$

Symbolom  $\pi_m^d$  označujeme lineárny priestor obsahujúci všetky polynómy nad poľom  $\mathbb{R}$  s  $d$  premennými a stupňa najvyššie  $m - 1$ . Funkcia  $R(r_i) = R(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|)$ ,  $r_i \geq 0$  vyjadruje euklidovskú vzdialenosť bodov  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}_i$ . Funkcie  $R(r)$  sú literatúre známe pod názvom *radiálne bázické funkcie* (RBF). Spomedzi všetkých RBF sú najpoužívanjšie tzv. *polyharmonické splajny*. Do tejto triedy funkcií patria aj *tenkostenné splajny*, ktoré opíšeme v nasledujúcej kapitole. Prehľad najpoužívanjších RBF (spolu so štandardnými hodnotami parametrov) uvádzame v tabuľke č. 1. Voľba najvhodnejších RBF závisí na práve riešenej úlohe. Ak potrebujeme, aby bol vplyv transformačnej funkcie  $f(\mathbf{x})$  globálny<sup>22</sup>, tak zvolíme takú triedu RBF, ktoré sa používajú aj s polynomickým členom  $\phi_m(\mathbf{x})$  (polyharmonické splajny alebo multikvadriky). Existencia polynomického člena okrem iného zabezpečí, že takto konštruované interpolačné funkcie budú mať *polynomickú presnosť*<sup>23</sup>. Pri potrebe obmedziť globálny vplyv transformačnej funkcie zvolíme RBF, ktoré sa nepoužívajú s polynomickým členom  $\phi_m(\mathbf{x})$ , a ktorých vplyv v danom bode  $\mathbf{p}_i$  klesá s rastúcou vzdialenosťou (gaussovské funkcie resp. recipročné multikvadriky). Veľkosť vplyvu týchto funkcií môžeme riadiť pomocou parametra  $\sigma$  resp.  $c$  (pozri tabuľku č. 1), avšak žiadna voľba týchto parametrov nezabezpečí lokálny vplyv. Keďže nevhodný výber parametru  $c$  môže viesť k riešeniu sústavy so zle podmienenou maticou, uvádzajú sa viaceré možnosti ako ho vhodne zvoliť [HOS93]:

- $c = 0.815d$ , kde  $d$  je priemerná vzdialenosť bodov  $\mathbf{p}_i$  množiny  $\mathcal{P}$  k ich najbližším susedom,
- $c = 1.25 \frac{D}{\sqrt{n}}$ , kde  $D$  je priemer najmenšej kružnice, ktorá obsahuje všetky body množiny  $\mathcal{P}$ ,
- $c = \sqrt{\frac{1}{10} \max_{i,j} \{|x_i - x_j|, |y_i - y_j|\}}$ .

[22] Globálny vplyv znamená, že pri zmene jedného bodu  $\mathbf{p}_i$  sa táto zmena, vo väčšej či menšej miere, prejaví na celej interpolačnej ploche.

[23] Polynomická presnosť vyjadruje vlastnosť funkcií „presne opísať“ polynomické funkcie až do stupňa  $m - 1$ .

Radiálna bázická funkcia	$R(r)$	Hodnoty parametrov	Stupeň +1 $\phi_m(\mathbf{x})$
Polyharmonické splajny v priestore $\mathbb{R}^d$	$r^{2k-d}$ $r^{2k-d}\log(r)$	$d$ je nepárne, $2k > d$ ( $k = 3, d = 3$ ) $d$ je párne, $2k > d$ ( $k = 2, d = 2$ )	$m = k - \lfloor d/2 \rfloor + 1$
Gaussovské funkcie	$\exp(-r^2/2\sigma^2)$	$\sigma > 0$ ( $\sigma = \sqrt{1/2}$ )	$m = 0$
Multikvadríky <sup>24</sup>	$(c^2 + r^2)^\mu$	$c, \mu > 0$ ( $c = 1, \mu = 1/2$ )	$m = \lfloor \mu \rfloor$
Recipročné multikvadríky	$(c^2 + r^2)^{-\mu}$	$c, \mu > 0$ ( $c = 1, \mu = 1/2$ )	$m = 0$

Tabuľka 1: Prehľad radiálnych bázických funkcií [ISKE03].

Jednou z možností ako zabezpečiť lokálny vplyv, je použiť RBF s tzv. *lokálnym nosičom* (compactly supported RBF). V tomto prípade sa vo vyjadrení funkcie  $f(\mathbf{x})$  opäť vynecháva polynomický člen  $\phi_m(\mathbf{x})$ . Do skupiny RBF s lokálnou podporou patria aj *Wendlandove funkcie*  $\psi_{d,k}$ , ktoré sú vyjadrené nasledujúcim vzťahom [FORN99]:

$$\psi_{d,k}(r) = I^k(1-r)_+^{\lfloor d/2 \rfloor + k + 1}(r), \quad (4.4.2)$$

kde  $I^k$  je  $k$ -násobne aplikovaný integračný operátor definovaný predpisom:

$$I\psi(r) = \int_r^\infty t\psi(t)dt, \quad \text{pričom } r \geq 0.$$

Prehľad Wendlandových funkcií pre dimenzie  $d = 1, 3$  a  $5$  priestoru  $\mathbb{R}^d$  je v tabuľke č. 2. Pre párne hodnoty  $d$  sú funkcie  $\psi_{d,k}$  určené predpisom  $\psi_{d,k} = \psi_{d+1,k}$ . Výhodou týchto funkcií je aj to, že vytvárajú systavy rovníc s riedkymi maticami, ktoré sú úsporné na pamäť, a čas potrebný na riešenie takýchto sústav je výrazne kratší ako pri plných maticiach. Ďalšiu triedu funkcií s lokálnou podporou môžeme nájsť v [BUH04].

## Riešiteľnosť interpolačného problému

**Definícia 4.1.** Spojitá radiálna funkcia  $R: \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  sa nazýva *pozitívne definitná* v priestore  $\mathbb{R}^d$ , ak pre každú konečnú množinu  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d; i = 1, 2, \dots, n\}$  platí, že matica

$$\mathbf{A} = (R(\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k\|))_{1 \leq j, k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

tvorená dvojicami bodov  $\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k$  je pozitívne definitná.

Uvažujme teraz o riešiteľnosti interpolačného vzťahu 4.4.1. Najskôr ukážeme, že existuje jednoznačné riešenie tohto vzťahu pre  $m = 0$ . V tomto prípade môžeme vzťah 4.4.1 prepísať na

[24] Trieda multikvadrík je známa už pomerne dlho. Prvý raz ich použil Hardy v roku 1971, podľa ktorého je aj pomenovaná metóda Hardyho multikvadrík opisujúca konštrukciu multikvadratickej plochy pomocou súčtu častí plôch rotačných 2-dielnych hyperboloidov (resp. rotačných paraboloidov, v závislosti od hodnoty  $\mu$ ).

jednoduchší tvar:  $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|)$ .

Koeficienty  $\lambda_i$  budeme, na základe podmienok interpolácie  $f(\mathbf{p}_j) = \mathbf{v}_j$ , počítat' pomocou nasledovnej sústavy rovníc:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i R(\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|) = \mathbf{v}_j, \text{ kde } j = 1, \dots, n. \quad (4.4.3)$$

Keďže sú všetky hore uvedené triedy RBF (včítane Wendlandových funkcií<sup>25</sup>) pozitívne definitné, potom je aj matica stupňa  $n \times n$ , tvorená hodnotami  $R(\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|)$ , pre  $i, j = 1, \dots, n$ , pozitívne definitná. Z toho vyplýva, že systém rovníc 4.4.3 je riešiteľný a má jednoznačné riešenie.

Pre všetky ostatné triedy RBF, pri ktorých sa používa aj polynomický člen  $\phi_m(\mathbf{x})$ , je riešiteľnosť určená podmienkou, aby body množiny  $\mathcal{P}$  boli nekolineárne (pre  $d = 2$ ) resp. nekomplanárne (pre  $d = 3$ ). Jednoznačnosť riešenia dosiahneme pomocou nasledovných okrajových podmienok [ISKE03]:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \phi_k(\mathbf{p}_j) = \mathbf{0}, \quad \forall \phi_k \in \pi_m^d, \quad k = 1, \dots, l, \quad \text{kde } l = \dim(\pi_m^d) = \binom{m-1+d}{d}. \quad (4.4.4)$$

Okrajové podmienky spolu so sústavou rovníc 4.4.3 môžeme zapísať pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.4.5)$$

kde  $\mathbf{A}_{ij} = R(\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|)$ , pre  $i, j = 1, \dots, n$  a  $\mathbf{P}_{i,k} = \phi_k(\mathbf{p}_i)$ , pre  $i = 1, \dots, n$  a  $k = 1, \dots, l$ . Neznáme koeficienty vektora  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_l)^T$  sú hľadané koeficienty polynómu  $\phi_m(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^l c_k \phi_k(\mathbf{x})$ .

Dimenzia priestoru $\mathbb{R}^d$	Radiálna bázická funkcia	Hladkosť
$d = 1$	$\phi_{1,0} = (1-r)_+$	$C^0$
	$\phi_{1,1} \approx (1-r)_+^3(3r+1)$	$C^2$
	$\phi_{1,2} \approx (1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$	$C^4$
$d \leq 3$	$\phi_{3,0} = (1-r)_+^2$	$C^0$
	$\phi_{3,1} \approx (1-r)_+^4(4r+1)$	$C^2$
	$\phi_{3,2} \approx (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$	$C^4$
$d \leq 5$	$\phi_{5,0} = (1-r)_+^3$	$C^0$
	$\phi_{5,1} \approx (1-r)_+^5(5r+1)$	$C^2$
	$\phi_{5,2} \approx (1-r)_+^7(16r^2+7r+1)$	$C^4$

Tabuľka 2: Prehľad Wendlandových funkcií [WEN95].

[25] Dôkaz, že Wendlandove funkcie sú pozitívne definitné môžeme nájsť v [WEN95].

## 4.5 Metóda tenkostenných splajnov

*Tenkostenné splajny* (thin plate splines) patria medzi triedu polyharmonických splajnov. Pre potreby odstránenia deformácií obrazov ich ako prvý použil Bookstein v práci [BOOK89].

Samotný názov „tenkostenné splajny“ zaviedol už v roku 1977 Duchon v práci [DUCH77]. Tento názov je odvodený zo vzťahu, v ktorom sa hľadá minimum integrálu (pozri vzťah 4.5.1) opisujúceho rozloženie tzv. *energie ohybu* (bending energy) na nekonečne tenkej elastickej doske.

Táto metóda je veľmi vhodná pre odstránenie deformácií obrazu pri použití 5 a viac odpo-vedajúcich si bodov. Jediná podmienka, ktorá sa kladie na tieto body je, aby boli všetky navzájom rôzne a aby neboli kolineárne.

Označme symbolom  $\alpha$  *multiindex*:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d, \text{ pričom } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

a symbolom  $D^\alpha f(\mathbf{x})$  *zmiešanú parciálnu deriváciu*  $k$ -teho rádu:

$$D^\alpha f(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \text{ kde } |\alpha| = k.$$

Definujme *Beppov-Leviho* priestor  $k$ -teho rádu ako podmnožinu priestoru spojitéch funkcií na  $\mathbb{R}^d$ :

$$\text{BL}^k(\mathbb{R}^d) = \{f(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^d) \mid D^\alpha f(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^d), \text{ pre všetky } |\alpha| = k\}$$

a zaveďme *seminormu* v tomto priestore vzťahom [ISKE03]:

$$\|f(\mathbf{x})\|_{\text{BL}^k(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} (D^\alpha f(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}, \text{ kde } \binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_d!}. \quad (4.5.1)$$

Duchon v [DUCH77] ukázal, že pre konečnú množinu bodov  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  (pozri definíciu 4.1) interpolant  $f(\mathbf{x})$  určený vzťahom:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R_{d,k}(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) + \sum_{|\alpha| < k} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha, \text{ kde } \mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \quad (4.5.2)$$

minimalizuje integrál vo vzťahu 4.5.1 zo všetkých funkcií  $f(\mathbf{x})$  *Beppovho-Leviho* priestoru.

Symbolom  $R_{d,k}(r)$  označujeme triedu RBF známych pod názvom *polyharmonické splajny*, ktoré sú riešením Laplaceovej diferenciálnej rovnice  $k$ -teho rádu:

$$\Delta^k R_{d,k}(\|\mathbf{x}\|) = c \delta_x, \text{ kde } \delta_x \text{ je Diracova miera v bode } x.$$

Polyharmonické splajny sú vyjadrené predpisom:

$$R_{d,k}(r) = \begin{cases} r^{2k-d}, & \text{ak } d \text{ je nepárne} \\ r^{2k-d} \log(r), & \text{ak } d \text{ je párne pre } 2k > d. \end{cases}$$



V prípade tenkostenných splajnov je dimenzia  $d = 2$  a  $k = 2$ , z čoho dostávame:

$$R_{2,2}(r) = r^2 \log(r).$$

Ak potrebujeme zabezpečiť hladkosť vyššieho rádu, môžeme zvoliť hodnotu parametra  $k > 2$ .

Teraz môžeme prepísať vzťah 4.5.2 do konečnej podoby:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 x + \mathbf{c}_3 y + \sum_{i=1}^n \lambda_i R_{2,2}(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|), \quad \text{kde } \mathbf{x} \in \mathbb{E}^2. \quad (4.5.3)$$

Aby sme našli riešenie, musia parametre  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  vyhovovať okrajovým podmienkam uvedeným vo vzťahu 4.4.4 predošlej kapitoly:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}. \quad (4.5.4)$$

Rozpísaním hľadanej transformačnej funkcie  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  po zložkách dostávame vyjadrenie:

$$\begin{aligned} f^x(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \log(r_i^2) \\ f^y(x, y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i r_i^2 \log(r_i^2), \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

kde  $\mathbf{c}_k = (a_k, b_k)$ ,  $\lambda_i = (\alpha_i, \beta_i)$  a  $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ .

Použitím podmienok interpolácie  $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{v}_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$  spolu s okrajovými podmienkami 4.5.4 môžeme neznáme hodnoty  $a_k, b_k, k = 1, 2, 3$  a  $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1, \dots, n$  vypočítať z nasledujúcej sústavy rovníc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 & r_{21}^2 \log(r_{21}^2) & \dots & r_{n1}^2 \log(r_{n1}^2) \\ 1 & x_2 & y_2 & r_{12}^2 \log(r_{12}^2) & 0 & \dots & r_{n2}^2 \log(r_{n2}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & r_{1n}^2 \log(r_{1n}^2) & r_{2n}^2 \log(r_{2n}^2) & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \\ \vdots \\ \lambda_n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad (4.5.6)$$

kde  $r_{ij}^2 = r_{ji}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$

$$c_k = a_k, \quad f_i = x_i', \quad \lambda_i = \alpha_i \quad \text{pre } f^x(x, y)$$

$$c_k = b_k, \quad f_i = y_i', \quad \lambda_i = \beta_i \quad \text{pre } f^y(x, y).$$

V prípade, že potrebujeme zabezpečiť lokálny vplyv aj pre inú triedu funkcií ako sú RBF s lokálnym nosičom, môžeme využiť postup uvedený v práci [POUD04]. V tomto prístupe je výsledná plocha skonštruovaná z čiastkových prekrývajúcich sa hladkých plôch, ktoré sú vytvorené pomocou radiálnych bázičkových funkcií. Spojenie týchto lokálnych plôch do výslednej  $C^1$  hladkej plochy je zabezpečené pomocou množiny funkcií, ktoré sú v literatúre známe pod názvom „rozklad jednotky“. Viac sa o tejto množine spojovacích funkcií môžeme dočítať v práci [OHT03].

## 4.6 Shepardova metóda

Shepardova metóda uvedená v práci [SHEP68] patrí medzi najznámejšie postupy pri riešení interpolačného problému *nerovnomerne rozptýlených dát* (scattered data interpolation). Bola vyvinutá v 60-tych rokoch minulého storočia pre potreby geológie a meteorológie. Keďže metóda nevytvára na pohľad príjemne hladkú plochu, neustále sa vyvíjajú jej nové modifikácie.

Rovnako ako v predošlých metódach budeme hľadať transformačnú funkciu  $f(x, y)$ , pre ktorú platí  $f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{v}_i$ , pre  $i = 1, 2, \dots, n$ . Shepard definoval interpolačnú funkciu  $f(\mathbf{x})$  ako vážený súčet interpolovaných hodnôt [HOS93]:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i. \quad (4.6.1)$$

Váhové funkcie  $\omega_i(\mathbf{x})$  sú vyjadrené v tvare:

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^n \sigma_j(\mathbf{x})}, \quad (4.6.2)$$

kde  $\sigma_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^{\mu_i}}$ , pre  $\mu_i > 0$  je mocnina prevrátenej hodnoty euklidovskej vzdialenosti bodov  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}_i$ . Pomocou parametra  $\mu_i$  môžeme dosiahnuť želaný tvar výslednej plochy v okolí interpolovaných bodoch:

- ostré hroty, ak  $0 < \mu_i < 1$ ,
- rohy, ak  $\mu_i = 1$ ,
- rovné plôšky rovnobežné s rovinou  $xy$ , ak  $\mu_i > 2$ .

Pre veľké hodnoty  $n$  je numericky stabilnejšie počítat' váhy zo vzťahu [HOS93]:

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{k \neq i} d_k(\mathbf{x})^{\mu_i}}{\sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} d_k(\mathbf{x})^{\mu_i}}, \quad \text{kde } d_k(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_k\|. \quad (4.6.3)$$

Pôvodná Shepardova metóda, ktorú sme práve opísali, má viacero nedostatkov. Najzávažnejším z nich je globálny vplyv tejto metódy. Lokálnosť môžeme dosiahnuť pre násobením funkcií  $\sigma_i(\mathbf{x})$  tzv. *tlmiacou funkciou* (mollifying function)  $\lambda_i(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^d)$ , ktorá má nasledovné vlastnosti:

$$\begin{aligned} \lambda_i(\mathbf{p}_i) &= 1, \\ \lambda_i(\mathbf{x}) &\geq 0, \text{ pre } \mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathbf{p}_i, r_i)^{26}, \\ \lambda_i(\mathbf{x}) &= 0, \text{ pre } \mathbf{x} \notin \mathcal{K}(\mathbf{p}_i, r_i). \end{aligned}$$

[26] Symbol  $\mathcal{K}(\mathbf{p}_i, r_i)$  označuje kruhové okolie bodu  $\mathbf{p}_i$  s polomerom  $r_i$ .

Najznámejšia *Frankeova-Littleova* tlmiača funkcia má nasledovné vyjadrenie [HOS93]:

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{d_i(\mathbf{x})}{R_i}\right)_+^\mu, \text{ kde } R_i \text{ je ľubovoľná kladná hodnota.}$$

Franke a Nielson zvolili hodnotu  $R_i = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{N_w}{n}}$ , kde  $D$  je najväčšia vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma bodmi z množiny  $\mathcal{P}$  zadaných bodov  $\mathbf{p}_i$  a  $N_w$  je pevne zvolené celé číslo (obyčajne  $N_w = 19$ ; heuristicky získaná hodnota). Odstránenie rovných plôšok a nespojitostí v derivácii interpolantu  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ <sup>27</sup> dosiahneme použitím iných váhových funkcií [HOS93]:

$$\sigma_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_i(\mathbf{x})^{\mu_i} + c_i} \text{ alebo } \sigma_i(\mathbf{x}) = \frac{e^{-c_i d_i^2(\mathbf{x})}}{d_i(\mathbf{x})^2}, \text{ kde } c_i \neq 0.$$

Franke a Nielson v práci [FRAN80] zovšeobecnilí Shepardovu metódu použitím tzv. *lokálnych interpolantov*. Namiesto hodnôt  $\mathbf{v}_i$  vo vzťahu 4.6.1 navrhli použiť lokálne interpolačné funkcie  $L_i(\mathbf{x})$  s vlastnosťou  $L_i(\mathbf{p}_i) = \mathbf{v}_i$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) L_i(\mathbf{x}). \quad (4.6.4)$$

Za interpolačné funkcie zvolili triedu kvadratických polynómov a dosiahli dostatočne hladké plochy s relatívne nízkou výpočtovou náročnosťou.

*Modifikovanú kvadratickú Shepardovu metódu* môžeme opísať nasledovným postupom:

Najskôr prepíšme vzťah 4.6.4 na vhodnejší tvar:

$$\mathbf{f}(x, y) = \sum_{k=1}^n \omega_k(x, y) \mathbf{Q}_k(x, y), \quad (4.6.5)$$

kde lokálny kvadratický interpolant  $\mathbf{Q}_k(x, y)$  je definovaný vzťahom:

$$\mathbf{Q}_k(x, y) = \mathbf{c}_{k,1}(x - x_k)^2 + \mathbf{c}_{k,2}(x - x_k)(y - y_k) + \mathbf{c}_{k,3}(y - y_k)^2 + \mathbf{c}_{k,4}(x - x_k) + \mathbf{c}_{k,5}(y - y_k) + \mathbf{v}_k. \quad (4.6.6)$$

Koeficienty pre  $\mathbf{Q}_k(x, y)$  vypočítame pomocou metódy najmenších štvorcov z podmienky:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \omega_i(x_k, y_k) [\mathbf{c}_{k,1}(x_i - x_k)^2 + \dots + \mathbf{c}_{k,5}(y_i - y_k) + \mathbf{f}_k - \mathbf{f}_i]^2 \rightarrow 0, \quad (4.6.7)$$

kde  $\omega_i(x, y) = \left(\frac{R_q - d_i(x, y)}{R_q d_i(x, y)}\right)_+^2$  a  $R_q$  je pevne daný polomer vplyvu pre bod  $\mathbf{p}_k[x_k, y_k]$  a k nemu zodpovedajúci lokálny interpolant  $\mathbf{Q}_k(x, y)$ .

[27] Funkcia  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  má iba  $C^0$  spojitosť.

## 4.7 Metóda najmenších štvorcov

Metóda najmenších štvorcov, rovnako ako predošlá tenkosplajnová metóda, je založená na hľadaní transformačnej funkcie  $f(x, y)$ , ktorá transformuje obraz na základe zadaných odpovedajúcich si bodov. Spočíva v minimalizácii súčtu štvorcov chýb transformácie pri zobrazovaní významných bodov. Rovnako ako v predchádzajúcich kapitolách máme opäť dve množiny  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{V}$ , ktoré zahŕňajú všetky dvojice odpovedajúcich si bodov. Hľadáme teraz funkciu  $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  v tvare polynómov stupňa  $2r$ . Od zvoleného stupňa  $r$  bude závisieť presnosť, s akou bude funkcia  $f(x, y)$  zobrazovať body  $\mathbf{p}_i$  na  $\mathbf{v}_i$ . Po rozpísaní po zložkách bude mať hľadaná funkcia tvar:

$$f^x(x, y) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r a_{ij} x^i y^j \quad \text{a} \quad f^y(x, y) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r b_{ij} x^i y^j. \quad (4.7.1)$$

Ďalej ukážeme, ako nájdeme neznáme koeficienty  $a_{ij}$  a  $b_{ij}$ . Keďže  $\mathbf{p}_i$  sa zobrazuje na  $\mathbf{v}_i$  len približne ( $\mathbf{p}_i \approx \mathbf{v}_i$ ), pre koeficienty  $a_{ij}$  a  $b_{ij}$  platí [DUR96]:

$$x_k' = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r a_{ij} x_k^i y_k^j + e_k \quad \text{a} \quad y_k' = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r b_{ij} x_k^i y_k^j + f_k \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.7.2)$$

kde  $e_k$  a  $f_k$  budeme nazývať chybou transformácie pri  $k$ -tom odpovedajúcom si bode (alebo aj  $k$ -te rezíduum). Hodnoty koeficientov  $a_{ij}$  a  $b_{ij}$  budeme hľadať tak, aby suma štvorcov rezíduí bola minimálna, teda aby

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \rightarrow 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n f_i^2 \rightarrow 0.$$

Prepíšme teraz sústavy rovníc 4.7.2 do maticového zápisu a dostaneme:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot \mathbf{d}_x + \mathbf{e} \quad \text{a} \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{X} \cdot \mathbf{d}_y + \mathbf{f},$$

kde  $(\mathbf{X}')^T = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ ,  $(\mathbf{Y}')^T = (y_1', y_2', \dots, y_n')$

$$\mathbf{e}^T = (e_1, e_2, \dots, e_n), \quad \mathbf{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$(\mathbf{d}_x)^T = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0r}, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1r}, \dots, a_{r0}, a_{r1}, \dots, a_{rr})$$

$$(\mathbf{d}_y)^T = (b_{00}, b_{01}, \dots, b_{0r}, b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1r}, \dots, b_{r0}, b_{r1}, \dots, b_{rr}).$$

Matica  $\mathbf{X}$  má rozmer  $n \times m$ , kde  $m = (r+1)^2$ . Je vyjadrená predpisom:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_1^r & x_1 & x_1 y_1 & \dots & x_1 y_1^r & \dots & \dots & x_1^r & x_1^r y_1 & \dots & x_1^r y_1^r \\ 1 & y_2 & \dots & y_2^r & x_2 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_2^r & \dots & \dots & x_2^r & x_2^r y_2 & \dots & x_2^r y_2^r \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_n & \dots & y_n^r & x_n & x_n y_n & \dots & x_n y_n^r & \dots & \dots & x_n^r & x_n^r y_n & \dots & x_n^r y_n^r \end{pmatrix}.$$

Platí tvrdenie, že suma štvorcov chýb  $\sum_{i=1}^n e_i^2$  a  $\sum_{i=1}^n f_i^2$  má minimum pre také  $\mathbf{d}_x$  a  $\mathbf{d}_y$ , ktoré je riešením *normálnych rovníc*:

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{d}_x = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}' \quad \text{a} \quad \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{d}_y = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Y}'. \quad (4.7.3)$$

Vektory  $(\mathbf{d}_x)^T$  a  $(\mathbf{d}_y)^T$  môžeme vypočítať zo vzťahov:

$$\mathbf{d}_x = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^- \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}' \quad \text{a} \quad \mathbf{d}_y = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^- \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Y}', \quad (4.7.4)$$

kde matica  $(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^-$  je tzv. *pseudoinverzná matica* k matici  $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ . Spôsob riešenia normálnych rovníc a definíciu pseudoinverznej matice môžeme nájsť napríklad v [MIKA85].

## 5 Viacsegmentové metódy transformácie obrazu

V týchto metódach budeme používať iný postup pre určenie transformačnej funkcie  $f(x, y)$ . Podobne ako v metóde najmenších štvorcov budeme zvlášť vyčísl'ovať  $x$ -ovú a  $y$ -ovú zložku funkcie  $f(x, y)$ , a to predpisom:

$$\begin{aligned} f^x(x, y) &= x + v^x(x, y) \\ f^y(x, y) &= y + v^y(x, y). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Inak povedané, súradnice nového bodu  $[x', y']$  vypočítame ako súčet súradníc pôvodného bodu  $[x, y]$  so súradnicami vektorovej funkcie  $v(x, y)$ . Pri hľadani tejto funkcie musíme zohľadniť podmienky interpolácie (ako v kapitole 4.5), ktoré zahŕňajú:

$$\begin{aligned} f^x(x_i, y_i) &= x_i + v^x(x_i, y_i) = x_i' \\ f^y(x_i, y_i) &= y_i + v^y(x_i, y_i) = y_i' \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Predošlý vzťah nám poskytuje predpis pre zložky vektorovej funkcie  $v(x, y)$ :

$$\begin{aligned} v^x(x_i, y_i) &= x_i' - x_i \\ v^y(x_i, y_i) &= y_i' - y_i \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Keďže obe zložky vektorovej funkcie  $v(x, y)$  sa počítajú rovnakým spôsobom, budeme sa v nasledujúcom texte zaoberať len jednou z jej zložiek a označme ju  $\xi(x, y)$ . Ide teda o funkciu  $z = \xi(x, y): \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}$ , pre ktorú platí interpolačný vzťah:

$$\begin{aligned} z_i &= \xi(x_i, y_i) = x_i' - x_i \\ z_i &= \xi(x_i, y_i) = y_i' - y_i \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Rozdielom oproti predošlej časti je, že funkciu  $\xi(x, y)$  budeme chápať ako po častiach zloženú funkciu polynómov  $\xi_j(x, y)$ , inými slovami povedané, budeme hľadať splajnovú plochu interpolujúcu body  $[x_i, y_i, z_i]$ .

V nasledujúcom texte sa budeme zaoberať metódami vyčísl'enia jednotlivých polynomic-kých funkcií  $\xi_j(x, y)$ .

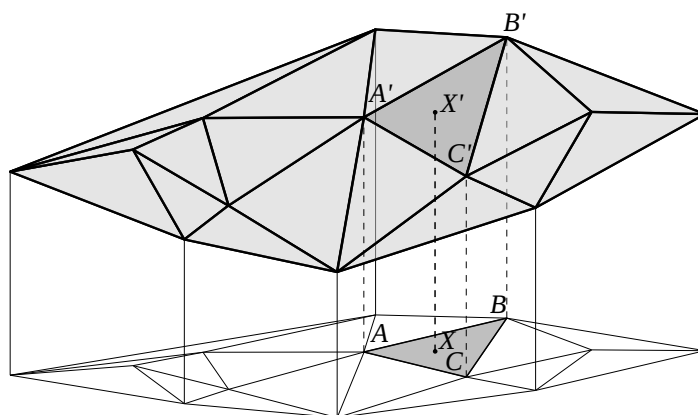
Metódy patriace do tejto kategórie sú založené na triangulácii konvexného obalu vstupných odpovedajúcich si bodov množiny  $\mathcal{P}$ . Najprv zadanú množinu bodov triangulujeme (vytvoríme sieť trojuholníkov), a potom použijeme príslušnú interpolačnú schému v rámci každého trojuholníka. V literatúre sú tieto metódy známe aj pod názvom metódy konečných prvkov (Finite Element Methods – FEM).

## 5.1 Trojuholníková metóda I – afinná po čiastkach

Táto i nasledujúce metódy sú založené na rozdelení plochy vstupného obrazu na trojuholníkové oblasti. Trojuholníkovú sieť získame trianguláciou vstupných odpovedajúcich si bodov množiny  $\mathcal{P}$ . Ďalej je nevyhnutné, aby celý obraz, ktorý chceme transformovať, ležal vnútri konvexného obalu bodov  $P_i$  množiny  $\mathcal{P}$ . Každú oblasť obrazu patriacu nejakému trojuholníku potom transformujeme osobitne použitím afinnej transformácie.

Najskôr zo zadaných bodov množiny  $\mathcal{P}$  vytvoríme Delaunayovu trianguláciu, ktorá je opísaná v kapitole 3.2. Potom je transformácia určená nasledujúcim predpisom:

Pre každý obrazový bod  $X[x, y]$  nájdeme taký trojuholník  $ABC$ , z vytvorenej triangulácie, v ktorom tento bod leží. Ak je ich viac, vyberieme ľubovoľný (napr. prvý v poradí). Súradnice nového bodu  $X'[x', y']$  vypočítame pomocou rovníc afinnej transformácie (pozri kapitolu 4.1), ktorá zobrazuje body  $A, B, C$  na body  $A', B', C'$ . Treba ešte dodať, že body  $A, B, C$  sú z množiny  $\mathcal{P}$  odpovedajúcich si bodov a body  $A', B', C'$  sú z množiny  $\mathcal{V}$  odpovedajúcich si bodov, pričom platí, že body  $A', B', C'$  sú obrazmi bodov  $A, B, C$  v zobrazení určenom zadanými dvojicami odpovedajúcich si bodov.



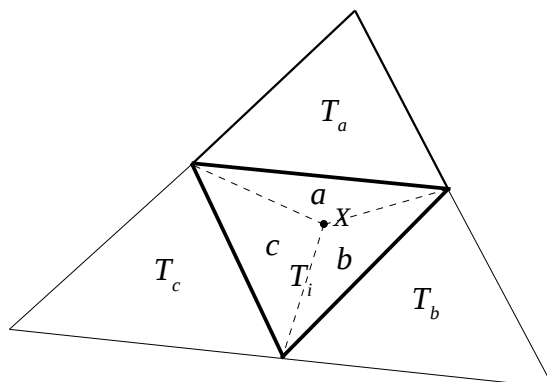
Obrázok 5.1: Príklad trojuholníkovej interpolačnej plochy s hladkosťou  $C^0$ .

## 5.2 Trojuholníková metóda II – s použitím váh

O niečo lepšie výsledky (z hľadiska „kvality“ odstránenia deformácií) dosiahneme, ak budeme výsledné súradnice nového bodu počítať ako vážený priemer súradníc vypočítaných pomocou susedných trojuholníkov. Označme teraz  $T_i = \Delta ABC$ . Ak existujú susedné trojuholníky<sup>28</sup>, tak platí, že sú maximálne tri. Nech to budú trojuholníky  $T_a$ ,  $T_b$  a  $T_c$ . Podobne ako v predchádzajúcej metóde nech každému trojuholníku  $T_i$  tvorenému vrcholmi z množiny vstupných odpovedajúcich si bodov zodpovedá trojuholník  $T_i'$  určený vrcholmi z množiny výstupných odpovedajúcich si bodov. Každý dvojici  $(T_i, T_i')$  zodpovedá afinná transformácia  $f_i$ , ktorá zobrazuje vrcholy trojuholníka  $T_i$  na vrcholy trojuholníka  $T_i'$ . Označme symbolmi  $f_a$ ,  $f_b$  a  $f_c$  afinné transformácie prislúchajúce postupne dvojiciam  $(T_a, T_a')$ ,  $(T_b, T_b')$  a  $(T_c, T_c')$ . Ďalej označme  $X_{f_i}$  ako obraz bodu  $X$  v afinnej transformácii  $f_i$ . Podobne označme body  $X_{f_a}$ ,  $X_{f_b}$  a  $X_{f_c}$  ako obrazy bodu  $X$  v afinnej transformácii  $f_a$ ,  $f_b$  a  $f_c$ . Vypočítajme teraz barycentrické súradnice bodu  $X(a, b, c)$  vzhľadom na  $\Delta ABC$  a nájdime ich minimum  $m = \min(a, b, c)$ . Súradnice výsledného bodu  $X'[x', y']$  určíme na základe nasledovného vzťahu:

$$X' = \begin{cases} \frac{1-3m}{2} X_{f_m} + \frac{1+3m}{2} X_{f_i}, & \text{ak existuje } T_m \\ X_{f_i} & \text{inak.} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Vzťah 5.2.1 vyjadruje, že ak bod  $X$  nie je totožný so žiadnym z vrcholov trojuholníka  $T_i$ , tak výsledný bod  $X'$  sa vypočíta ako vážený priemer dvoch obrazov bodu  $X$ ; prvého v afinnej transformácii  $f_a$ ,  $f_b$  alebo  $f_c$  a druhého v  $f_i$  (pozri obrázok 5.2). V inom prípade mu bude priradená hodnota  $X_{f_i}$ .



Obrázok 5.2: Súradnice obrazu bodu  $X$  sú vypočítané z  $T_a$  a  $T_i$ .

[28] Susedné trojuholníky sú také, ktoré majú s daným trojuholníkom spoločnú stranu.



### 5.3 Trojuholníková metóda III – hladká

Pri bližšom skúmaní predchádzajúcej metódy môžeme zistiť, že v bodoch ležiacich na spojnicach ťažiska s vrcholmi každého trojuholníka, nie je zabezpečená potrebná  $C^1$  hladkosť. Na vyriešenie tohto nedostatku navrhujeme novú metódu (podobnú predchádzajúcej), ktorá pre výpočet súradníc nových obrazových bodov používa vážený priemer všetkých susedných trojuholníkov spolu s aktuálnym trojuholníkom. Súradnice výsledného bodu  $X'$  vypočítame nasledovným predpisom:

$$X' = \omega_a X_{f_a} + \omega_b X_{f_b} + \omega_c X_{f_c} + \omega_i X_{f_i}^{29}, \quad (5.3.1)$$

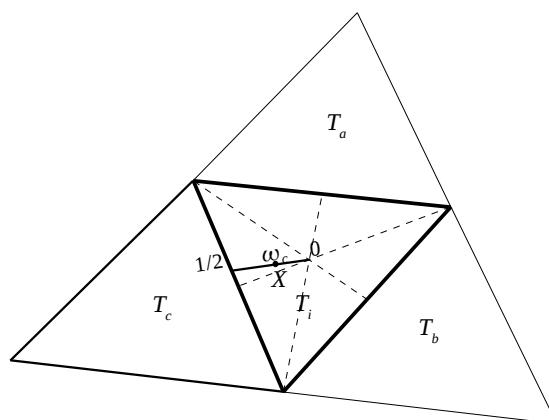
kde pre váhy  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  a  $\omega_i$  platia štandardné podmienky:

$$\omega_a + \omega_b + \omega_c + \omega_i = 1 \text{ a } \omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_i \geq 0.$$

Váhy  $\omega_a = g(a)$ ,  $\omega_b = g(b)$  a  $\omega_c = g(c)$  prislúchajúce susedom trojuholníka  $T_i$ , vypočítame z barycentrických súradníc  $(a, b, c)$  bodu  $X$  pomocou funkcie  $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , pre ktorú platia nasledovné podmienky:

1.  $g(x) \geq 0$ , ak  $0 \leq x \leq 1$
2.  $g(x)$  je klesajúca na  $0 \leq x \leq 1/3$
3.  $g(0) = 1/2$
4.  $g(x) = 0$  pre  $x \geq 1/3$
5.  $g'(x)|_{x=1/3} = 0$ .

Váha  $\omega_j$  prislúchajúca susedovi  $T_j$  trojuholníka  $T_i$  je konštruovaná tak, že pre bod ležiaci na ich spoločnej strane má hodnotu  $1/2$ , a pre bod ležiaci v ťažisku trojuholníka  $T_i$  má hodnotu  $0$  (pozri obrázok 5.3).



Obrázok 5.3: Váha  $\omega_c$  prislúchajúca trojuholníku  $T_c$  je určená polohou bodu  $X$  v trojuholníku  $T_i$ .

[29] Ak trojuholník  $T_i$  nemá všetkých troch susedov, tak tento vzťah neobsahuje členy patriace chýbajúcim susedom.

Do třídy funkcí splňajících hore uvedené podmienky patria napr. (pozri obrázok 5.4):

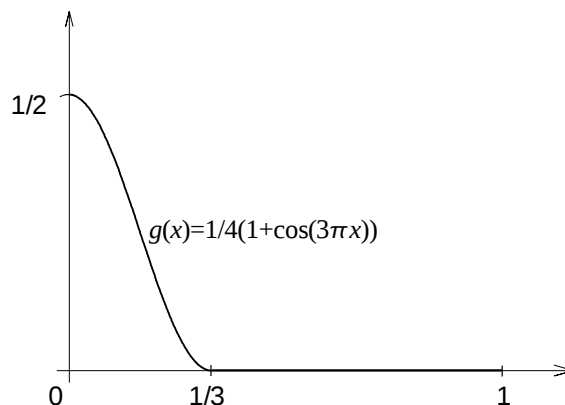
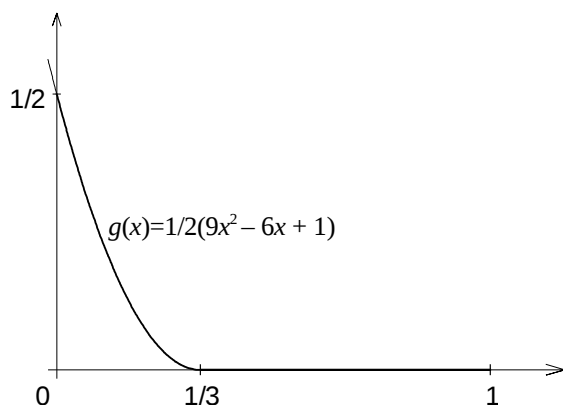
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(9x^2 - 6x + 1), & \text{ak } x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 0, & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, 1) \end{cases} \quad \text{alebo} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \cos(3\pi x)), & \text{ak } x \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \\ 0, & \text{ak } x \in (\frac{1}{3}, 1) \end{cases}$$

Zvyšnú hodnotu  $\omega_i$  určíme pomocou už vypočítaných váh:

$$\omega_i = 1 - (\omega_a + \omega_b + \omega_c).$$

Pomerne ľahko môžeme ukázať, že aj pre  $\omega_i$  platí  $\omega_i \geq 0$ . Vyplýva to z vlastnosti, že súčet váh  $\omega_a + \omega_b + \omega_c$  je na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$  zhora ohraničený hodnotou 1.

Výhodou trojuhelníkových metód je ich veľmi jednoduché vyjadrenie ako aj ich nenáročná implementácia. Posledná metóda, vďaka vyjadreniu váh pomocou spojitej funkcie, zabezpečuje aj často potrebnú  $C^1$ -hladkosť.



Obrázok 5.4: Príklady váhovej funkcie  $g(x)$ .

## 5.4 Interpolant deviatich parametrov

Ak máme zadanú funkčnú hodnotu  $z_i$  a hodnoty smerových derivácií pozdĺž hrán v každom vrchole  $[x_i, y_i]$  triangulácie zadanej množiny bodov  $P_i$ , potom tieto dáta určujú Bézierove vrcholy príslušných kubických hraničných kriviek. Takto máme pre každý trojuholník určených deväť Bézierových vrcholov pozdĺž jeho hrán, ktoré môžeme použiť ako riadiace vrcholy kubickej záplaty určenej týmto trojuholníkom. Ostáva nám určiť zvyšný vnútorný vrchol  $b_{111}$ . Ak zvolíme [HOS93]:

$$\mathbf{b}_{111} = E = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{030} + \mathbf{b}_{003}) \quad (5.4.1)$$

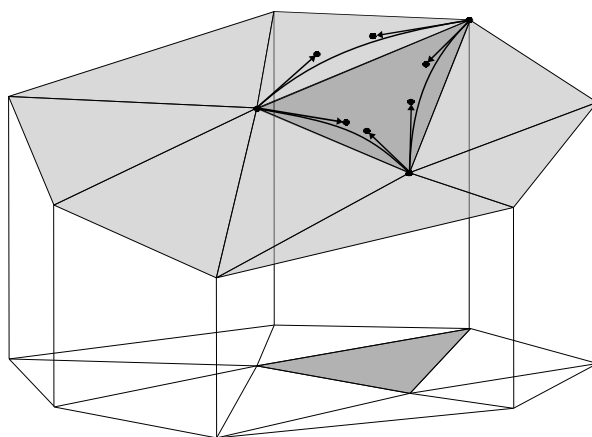
dostávame interpolant, ktorý má lineárnu presnosť (linear precision), to znamená, že ak všetkých 9 hraničných riadiacich bodov leží v rovine  $\alpha$ , tak aj tento interpolant 9-tich parametrov leží v rovine  $\alpha$ . Na druhej strane, ak zvolíme:

$$\mathbf{b}_{111} = \frac{1}{2}(3Q - E), \quad \text{kde} \quad (5.4.2)$$

$$Q = (\mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{021} + \mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120})/6$$

dostávame interpolant, ktorý má kvadratickú presnosť (quadratic precision), to znamená, že ak všetkých 9 hraničných riadiacich bodov leží na nejakej kvadratickej ploche  $\gamma$ , tak interpolant 9-tich parametrov vyčíslený predošlým vzťahom tiež leží na kvadratickej ploche  $\gamma$ .

Nevýhodou tejto metódy je, že plocha zložená z takto vypočítaných interpolantov je na celej triangulácii iba  $C^0$ -spojitá.



Obrázok 5.5: Derivácie pozdĺž hrán určujú riadiace body hraničných Bézierových kriviek.

## 5.5 Cloughova-Tocherova metóda interpolácie

Nevýhodou po častiach lineárnych interpolačných schém je to, že sú iba  $C^0$ -spojité.  $C^1$ -spojitosť vyžaduje interpolačné schémy založené na polynómoch vyššieho stupňa ako 1. Rovinné trojuholníkové plochy nahradíme zakrivenými trojuholníkovými plochami, ktorých sklony na stranách hranice je možné prispôbiť tak, aby bola splnená podmienka hladkého spojenia.

Na zaručenie  $C^1$ -spojitosti pozdĺž hraníc potrebujeme poznať nielen súradnice  $[x_i, y_i]$  vrcholov a ich hodnoty  $z_i$ , ale aj ďalšie informácie. Tieto ďalšie informácie zahŕňujú dotykovú rovinu (resp. gradient) v danom vrchole, ako i derivácie v priečnom smere prislúchajúce jednotlivým hranám trojuholníkovej siete. Keďže hodnoty gradientov nie sú vždy známe, musia byť nejakým spôsobom vypočítané zo zadaných súradníc vrcholov. Pri výpočte konkrétneho gradientu zvyčajne použijeme i hodnoty z susedných vrcholov trojuholníkovej siete. Detailnejší opis niektorých metód na odhad derivácií môžeme nájsť v [STE84] a [AKI84].

Existuje viacero metód ako vytvoriť po častiach  $C^1$ -spojitú interpolačnú plochu. Najpoužívanejšie z nich využívajú rozdelenie každého trojuholníka triangulácie na viacero trojuholníkových častí. Na zabezpečenie podmienky hladkého prechodu pozdĺž všetkých hraníc trojuholníkov vyžaduje táto metóda poznať dotykovú rovinu v každom z jeho vrcholov ako i deriváciu v priečnom smere v strede každej hrany trojuholníka [STR73]. Cieľom je využiť dvanásť daných alebo odhadnutých hodnôt (tri na vrchol<sup>30</sup> a jedna na hranu), aby sme definovali kubický polynóm patriaci konkrétnemu trojuholníku triangulácie [AMID02]. Toto však nie je možné, pretože bivariačný kubický polynóm je určený iba desiatimi koeficientami:

$$p(x, y) = a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 + a_5x^2 + a_6xy + a_7y^2 + a_8x + a_9y + a_{10}.$$

Požadovaný cieľ však môžeme dosiahnuť rozdelením priemetu každého trojuholníka pôvodnej triangulácie na tri *minitrojuholníky* (spojením každého vrcholu trojuholníka s jeho ťažiskom). Potom nad každým z týchto troch minitrojuholníkov definujeme bivariačný kubický polynóm. Táto konštrukcia nám dáva viac stupňov voľnosti na vyhovievanie daným desiatim podmienkam určujúcim  $p(x, y)$ . Neskôr uvidíme, ako môžeme obmedzenia vylepšiť, a aký je ich geometrický význam. Hľadanou interpolačnou funkciou (splajnom) bude  $C^1$ -spojitá plocha zložená z Bézierových trojuholníkových záplat stupňa 3 nad každým minitrojuholníkom.

Cloughova-Tocherova metóda používa kubické Bézierove trojuholníkové záplaty (stupeň  $n = 3$ ), a preto:

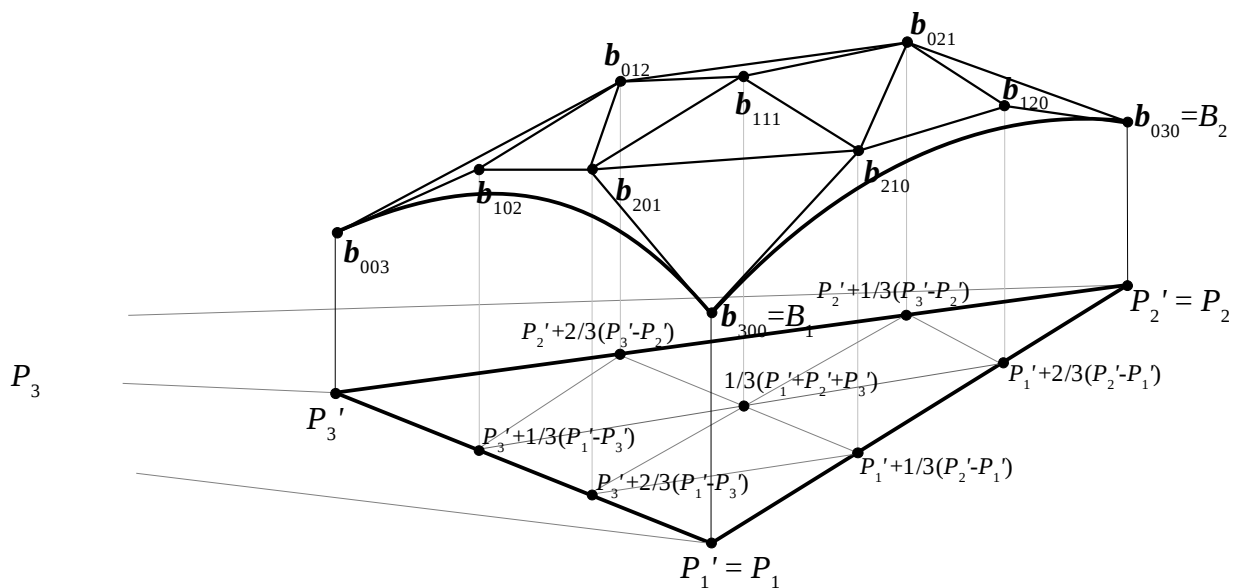
$$\begin{aligned} X(u, v, w) = & \mathbf{b}_{300}u^3 + 3\mathbf{b}_{210}u^2v + 3\mathbf{b}_{120}uv^2 + \\ & \mathbf{b}_{030}v^3 + 3\mathbf{b}_{021}v^2w + 3\mathbf{b}_{012}vw^2 + \\ & \mathbf{b}_{003}w^3 + 3\mathbf{b}_{102}w^2u + 3\mathbf{b}_{201}wu^2 + 6\mathbf{b}_{111}uvw. \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

[30] V každom vrchole trojuholníka máme k dispozícii jeho polohu a dve smerové derivácie.

Všimnime si, že tieto kubické polynómy majú presne desať koeficientov  $\mathbf{b}_{ijk}$ . Dva z koeficientov  $\mathbf{b}_{300}$ ,  $\mathbf{b}_{030}$ ,  $\mathbf{b}_{003}$  (ďalej v texte označené aj  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ) sú totožné s konkrétnymi vrcholmi jedného z trojuholníkov našej triangulácie. Zvyšných osem nepoznáme a musíme ich vypočítať. Aby sa predišlo nejasnosti medzi trojuholníkmi a minitrojuholníkmi, minitrojuholníky budú označené „písmenami s čiarkou“, napr.  $P_1'$ ,  $P_2'$ ,  $P_3'$ .

Pozrime sa teraz na geometrickú interpretáciu podmienok, ktoré potrebujeme splniť, aby sme zaručili  $C^1$ -spojitosť na celej interpolačnej ploche. Ako vidíme na obrázku 5.6, Bézierove vrcholy definované nad minitrojuholníkom tvoria trojuholníkovú sieť zloženú z 9-tich malých trojuholníkov. Táto trojuholníková sieť sa nazýva *radiaca sieť Bézierovej záplaty* a jednotlivé trojuholníky tejto siete budeme nazývať *radiace mikrotrojuholníky*.

Ak chceme zabezpečiť  $C^1$ -hladké spojenie dvoch trojuholníkových záplat na hranici určenej stýkajúcimi sa minitrojuholníkmi, tak každé dva susedné mikrotrojuholníky patriace radiacim sieťam susedných Bézierových záplat musia byť afinným obrazom dvojice trojuholníkov z definičného oboru priestoru parametrov týchto záplat (pozri kapitolu 3.1).



Obrázok 5.6: Kubická trojuholníková Bézierova záplata nad minitrojuholníkom  $P_1'P_2'P_3'$  s radiacou sieťou vrcholov  $\mathbf{b}_{ijk}$ .

## Vyčíslenie riadiacich bodov

Bézierove vrcholy riadiacej siete, troch stýkajúcich sa trojuholníkových záplat, vyčíslime nasledovným postupom [AMID02]:

Súradnice  $[x, y]$  Bézierových vrcholov nad každým minitrojuholníkom sú určené súradnicami  $[x, y]$  vrcholov minitrojuholníka, ďalej súradnicami bodov ležiacich v  $1/3$  a  $2/3$  každej jeho strany a nakoniec súradnicami ťažiska minitrojuholníka (pozri obrázok 5.6).

Hodnoty z-ových súradníc Bézierových vrcholov určíme pomocou nasledovných krokov:

1. Hodnoty z Bézierových vrcholov (nad  $P_1$  a  $P_2$ ) označených „●“ sú z-ové hodnoty súradníc bodov  $B_1$  a  $B_2$  z danej triangulácie (pozri obrázok 5.7 vpravo):

$$\mathbf{b}_{300} = B_1 \text{ a } \mathbf{b}_{030} = B_2.$$

2. Hodnoty z vrcholov označených „●“ ležiacich na okraji záplaty vypočítame z podmienky, že tieto vrcholy ležia v dotykovvej rovine určenej bodom  $B_1$  alebo  $B_2$  a normálovým vektorom v príslušnom bode (pozri obrázok 5.7 vpravo a obrázok 5.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{210} &= \mathbf{b}_{300} + 1/3 D_{\mathbf{e}_1} \mathbf{X}(1, 0, 0) \\ \mathbf{b}_{120} &= \mathbf{b}_{030} + 1/3 D_{-\mathbf{e}_1} \mathbf{X}(0, 1, 0), \end{aligned}$$

kde  $D_{\mathbf{e}_1} \mathbf{X}(\mathbf{u})$  označuje smerovú deriváciu<sup>31</sup> v bode  $\mathbf{u}$  v smere vektora  $\mathbf{e}_1$  (pozri obrázok 5.8).

3. Hodnoty z vrcholov označených „●“ ležiacich na spojnici ťažiska trojuholníka s jeho vrcholmi vypočítame z podmienky, že ležia v rovine určenej dvomi už vypočítanými vrcholmi „●“ a jedným daným bodom  $B_i$ :

$$\mathbf{b}_{201} = 1/3(\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}'_{120}).$$

4. Hodnoty z troch vrcholov označených „▲“ určíme z odhadnutých derivácií v priečnom smere v strede každej z troch hrán trojuholníka  $B_1 B_2 B_3$ . Tieto vrcholy budú ležať v rovine určenej bodom  $S$  Bézierovej krivky (pre hodnotu parametra  $t = 1/2$ ) danej riadiacimi bodmi  $\mathbf{b}_{300}$ ,  $\mathbf{b}_{210}$ ,  $\mathbf{b}_{120}$ ,  $\mathbf{b}_{030}$  a normálovým vektorom vypočítaným z lineárnej kombinácie normálových vektorov vo vrchoch strany trojuholníka (pozri obrázok 5.8 a obrázok 5.7 vľavo):

$$\mathbf{b}_{111} = 2D_{\mathbf{a}} \mathbf{X}(1/2, 1/2, 0) - 1/2(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) + 1/2(\mathbf{b}_{210} + \mathbf{b}_{120}),$$

kde  $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{b}_{201} - 1/2(\mathbf{b}_{300} + \mathbf{b}_{210})$  a  $\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{b}_{021} - 1/2(\mathbf{b}_{120} + \mathbf{b}_{030})$ .

5. Hodnoty z ďalších troch vrcholov označených „○“ vypočítame z podmienky, že ležia v rovine určenej dvomi vrcholmi „▲“ a jedným vnútorným vrcholom „●“ (pretože dva susedné riadiace mikrotrojuholníky s vrcholmi „▲, ●, ○“ musia byť komplanárne, pozri obrázok 5.7):

$$\mathbf{b}_{102} = 1/3(\mathbf{b}_{201} + \mathbf{b}_{111} + \mathbf{b}'_{111}).$$

6. Posledný hľadaný Bézierov vrchol „□“, ležiaci nad ťažiskom trojuholníka  $P_1 P_2 P_3$ , leží

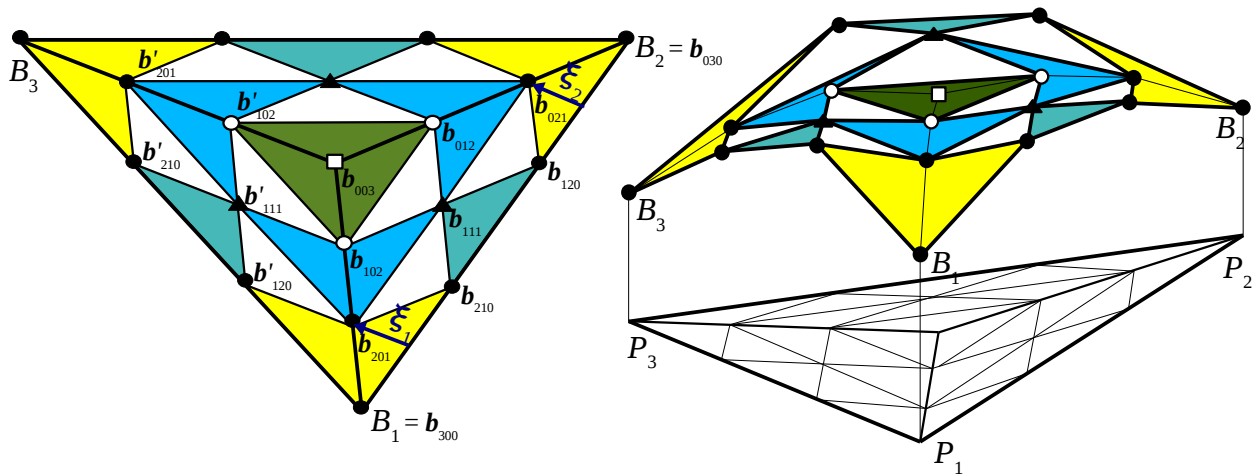
[31] Hodnotu smerovej derivácie môžeme odhadnúť pomocou smeru a normálového vektora v danom bode. Môže to byť napr. priemet (v smere osi  $z$ ) vektora smeru do roviny určenej normálovým vektorom a daným bodom.

v rovine určenej tromi vrcholmi „ $\circ$ “ pretože tri „prostredné“ trojuholníky musia byť komplanárne:

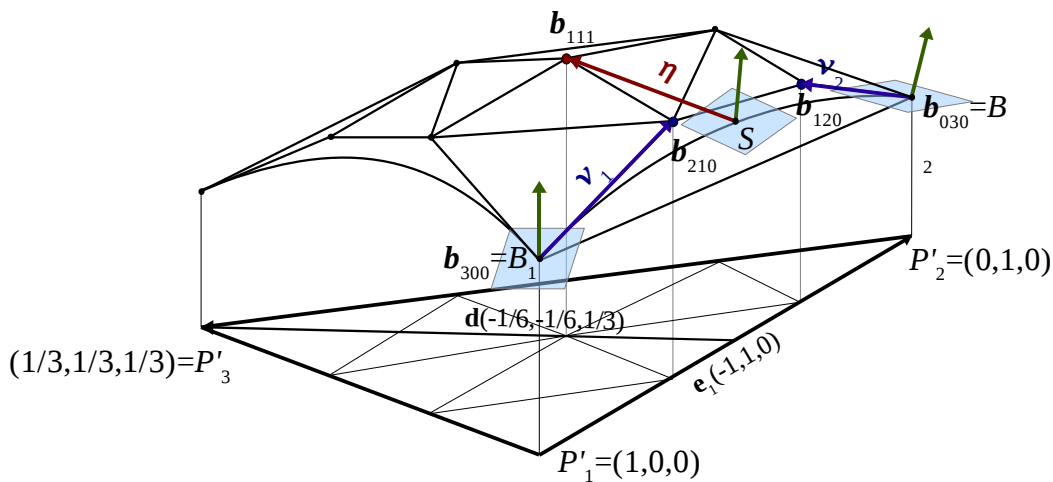
$$\mathbf{b}_{003} = 1/3(\mathbf{b}_{102} + \mathbf{b}_{012} + \mathbf{b}'_{102}).$$

Ak už poznáme hodnoty súradníc vrcholov  $\mathbf{b}_{ijk}$  môžeme použiť vzťah (3.1.2) na vyčíslenie bodov Bézierovej záplaty nad konkrétnym minitrojuholníkom (tri takéto záplaty potrebujeme na „pokrytie“ trojuholníka  $B_1B_2B_3$  v danej triangulácii). Rovnakým spôsobom budeme postupovať pri všetkých ostatných trojuholníkoch danej triangulácie, čím získame  $C^1$ -spojitú interpolačnú plochu.

V nasledujúcej časti opíšeme modifikácie tejto metódy, ktoré vytvárajú plochu s hladkosťou blížiacou sa k  $C^2$ -spojitosti.



Obrázok 5.7: Konštrukcia siete radiacích Bézierových vrcholov nad tromi minitrojuholníkmi.



Obrázok 5.8: Normály a derivácia v priečnom smere určujú polohu Bézierových bodov  $\mathbf{b}_{210}$ ,  $\mathbf{b}_{120}$  a  $\mathbf{b}_{111}$ . Označenie smerových derivácií:  $\mathbf{v}_1 = 1/3D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{X}(1,0,0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = 1/3D_{-\mathbf{e}_1}\mathbf{X}(0,1,0)$  a  $\boldsymbol{\eta} = 1/3D_{\mathbf{d}}\mathbf{X}(1/2,1/2,0)$ .

## Modifikácie Cloughovej-Tocherovej metódy

V tomto odseku si uvedieme modifikácie štandardnej Cloughovej-Tocherovej (C-T) metódy tak, ako sú uvedené v práci [MANN98]. Štandardná C-T metóda zabezpečuje konštrukciu iba  $C^1$ -spojitej polynomickej plochy zloženej z trojuholníkových záplat. Ak by sme potrebovali hladkosť vyššieho stupňa, museli by sme zvyčajne riešiť systém rovníc, čo by znamenalo zvýšenie pamäťovej a výpočtovej náročnosti algoritmu. Nasledujúce modifikácie sítě nezaručujú  $C^2$ -hladkosť, ale umožňujú vytvoriť na pohľad oveľa hladšiu plochu.

Majme dané dve stýkajúce sa záplaty definované nad  $\Delta P_1 P_2 P_3$  a  $\Delta P_1 P_2 \hat{P}_3$ .

Vyjadríme bod  $P_3[x, y]$  pomocou barycentrických súradníc vzhľadom na  $\Delta P_1 P_2 \hat{P}_3$  a podobne bod  $\hat{P}_3[x, y]$  vzhľadom na  $\Delta P_1 P_2 P_3$ :

$$\begin{aligned} P_3[x, y] &= \hat{u} P_1 + \hat{v} P_2 + \hat{w} \hat{P}_3 \\ \hat{P}_3[x, y] &= u P_1 + v P_2 + w P_3. \end{aligned}$$

Pomocou vzťahu 3.1.11 (kapitola 3.1) môžeme prepísať podmienky pre  $C^1$ -spojitosť na hranici dvoch stýkajúcich sa záplat (pozri obrázok 5.9):

$$\begin{aligned} \hat{I}_{21} &= u T_{21} + v B_2 + w I_{21} \\ \hat{I}_{11} &= u B_1 + v T_{12} + w I_{11} \\ \hat{C}_3 &= u T_{12} + v T_{21} + w C_3. \end{aligned}$$

Pre určenie  $C^2$  spojitosti použijeme vzťah 3.1.10 pre stupeň  $s = 2$ . Aplikovaním tohto vzťahu pre body z obrázku 6.1 dostávame nasledovné podmienky pre  $C^2$ -hladké spojenie záplat:

$$\begin{aligned} u I_{11} + v C_3 + w I_{12} &= \hat{u} \hat{I}_{11} + \hat{v} \hat{C}_3 + \hat{w} \hat{I}_{12} \\ u C_3 + v I_{21} + w I_{22} &= \hat{u} \hat{C}_3 + \hat{v} \hat{I}_{21} + \hat{w} \hat{I}_{22}. \end{aligned}$$

Keďže v našom prípade neriešime  $C^2$ -spojitosť, ale minimalizujeme  $C^2$ -nespojitosť, rozdelíme rovnosti v predošlom vzťahu, a vyjadríme ich ľavé a pravé strany pomocou bodov  $e_{12}$ ,  $e_{22}$  a  $\hat{e}_{12}$ ,  $\hat{e}_{22}$  (pozri obrázok 5.9):

$$\begin{aligned} e_{12} &= u I_{11} + v C_3 + w I_{12}, \quad \hat{e}_{12} = \hat{u} \hat{I}_{11} + \hat{v} \hat{C}_3 + \hat{w} \hat{I}_{12} \\ e_{22} &= u C_3 + v I_{21} + w I_{22}, \quad \hat{e}_{22} = \hat{u} \hat{C}_3 + \hat{v} \hat{I}_{21} + \hat{w} \hat{I}_{22}. \end{aligned}$$

Minimalizovať  $C^2$ -nespojitosť, znamená vyriešiť nasledovný vzťah pre neznáme  $C_3$  a  $\hat{C}_3$ :

$$\arg \min_{C_3, \hat{C}_3} \left[ (e_{12} - \hat{e}_{12})^2 + (e_{22} - \hat{e}_{22})^2 \right] \rightarrow 0. \quad (5.5.2)$$

**Farinov algoritmus** – Farin využíva stupne voľnosti pri vytváraní  $C^1$ -hladkej plochy nad jednotlivými trojuholníkmi, aby minimalizoval  $C^2$ -nespojitosť pozdĺž hraníc danej triangulácie [FAR85]. Pre každú hranicu vyčíslí malý systém rovníc, ktorý vznikne aplikovaním metódy



*Lagrangeových multiplikátorov* na vytvorenú minimalizačnú funkciu 5.5.2. Farin vo svojom postupe najskôr skonštruuje  $C^1$ -hladkú trojuholníkovú záplatu určenú vstupnými dátami (vrcholmi a deriváciami v priečnom smere). Potom ju rozdelí na 3 podzáplaty, aby získal všetky potrebné riadiace body. Nakoniec upraví polohu každého vnútorného bodu  $C_i$ , aby minimalizoval  $C^2$ -nespojitosť pozdĺž okraja zodpovedajúcemu spoločnej hrane susedných trojuholníkov.

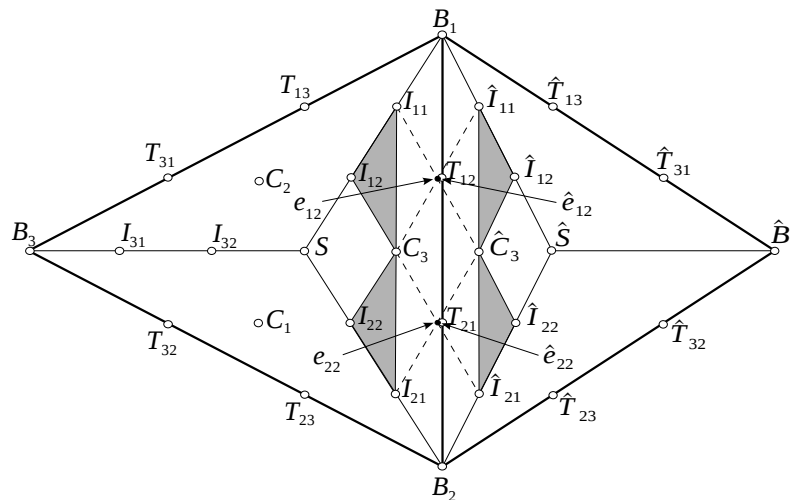
Farinov algoritmus môžeme na štandardnú C-T metódu aplikovať nasledovne:

Najskôr vykonáme kroky 1. až 3. C-T metódy. Potom vypočítame nové z-ové súradnice bodu

$C_3 = \mathbf{b}_{111}$  (pozri obrázok 5.9) z nasledovných rovníc<sup>32</sup>:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \hat{u} \hat{I}_{12} + \hat{v} \hat{I}_{11} - u I_{12} - w I_{11} \\
 r_2 &= \hat{u} \hat{I}_{22} + \hat{w} \hat{I}_{21} - u I_{22} - v I_{21} \\
 r_3 &= v T_{21} + w T_{12} \\
 a_{11} &= 2(v^2 + w^2) \\
 a_{12} &= -2(v \hat{w} + w \hat{v}) \\
 a_{22} &= 2(\hat{w}^2 + \hat{v}^2) \\
 s_1 &= 2(v r_1 + w r_2) \\
 s_2 &= -2(\hat{w} r_1 + \hat{v} r_2) \\
 D &= 2u a_{12} + u^2 a_{22} + a_{11} \\
 \hat{C}_3 &= (u s_1 + u a_{12} r_3 + u^2 s_2 + r_3 a_{11}) / D \\
 C_3 &= (\hat{C}_3 - v T_{12} - w T_{21}) / u .
 \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Hodnoty z-ových súradníc ostatných vnútorných bodov  $C_0, \hat{C}_0$  a  $C_1, \hat{C}_1$  vyčíslime podobnými rovnicami. Ďalej pokračujeme krokmi 5. a 6. štandardnej C-T metódy.



Obrázok 5.9: Rozloženie riadiacich bodov nad jednotlivými minitrojuholníkmi dvoch susedných trojuholníkov. Šedo označené trojuholníky a poloha bodov  $e_{12}, e_{22}, \hat{e}_{12}, \hat{e}_{22}$  určujú či sa záplaty stýkajú  $C^2$ -hladko.

[32] Vo všetkých rovniciach sa pri bodoch uvažuje len s ich z-ovými súradnicami.

**Kashyapov algoritmus** – Kashyap navrhol postup na vytvorenie interpolantu s kubickou presnosťou [KASH96]. Tento interpolant vytvára plochu, ktorá je  $C^3$  spojitá nad každým trojuholníkom, ale iba  $C^0$  hladká na hraniciach medzi nimi. Ďalej navrhol iteračnú metódu, ktorá minimalizuje nielen  $C^2$ -nespojitosť pozdĺž hraníc danej triangulácie, ale i na hraniciach medzi jednotlivými podzáplatami. Každá iterácia vytvorí novú riadiacu sieť, ktorá je základom pre ďalšiu iteráciu.

**Foleyov-Opitzov algoritmus** – [FOL92] Foley a Opitz skonštruovali tzv. *hybridnú kubickú plochu*, ktorá je racionálnym spojením troch kubických trojuholníkových záplat, z ktorých každá interpoluje jeden vrchol trojuholníka<sup>33</sup>. Racionálne spojenie zabezpečí, že výsledná plocha bude interpolovať všetky 3 vrcholy a bude mať požadované vlastnosti pozdĺž všetkých troch hraníc. Foleyovo-Opitzovo vyčíslenie bodov  $C_3$  a  $\hat{C}_3$  je v konečnom dôsledku podobné Farinovmu. Rozdielny je len systém rovníc:

$$\begin{aligned} S^* &= (\hat{T}_{32} - v^2 B_2 - 2vwT_{21} - 2uvT_{23} - w^2 T_{12} - u^2 T_{32} + \\ &\quad \hat{T}_{31} - v^2 T_{21} - 2vwT_{12} - 2uwT_{13} - w^2 B_1 - u^2 T_{31}) / (2uw + 2uv) \\ \hat{S}^* &= (T_{32} - \hat{w}^2 B_2 - 2\hat{v}\hat{w}T_{21} - 2\hat{u}\hat{w}\hat{T}_{23} - \hat{v}^2 T_{12} - \hat{u}^2 \hat{T}_{32} + \\ &\quad T_{31} - \hat{w}^2 T_{21} - 2\hat{v}\hat{w}T_{12} - 2\hat{u}\hat{v}\hat{T}_{13} - \hat{v}^2 B_1 - \hat{u}^2 \hat{T}_{31}) / (2\hat{u}\hat{v} + 2\hat{u}\hat{w}) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

$$C_3 = (T_{12} + T_{21} + S^*) / 3$$

$$\hat{C}_3 = (T_{12} + T_{21} + \hat{S}^*) / 3.$$

**Modifikovaný Farinov algoritmus** – Farin modifikoval svoj pôvodný algoritmus tak, aby vytvoril plochu s kubickou presnosťou. Podobne ako Foley a Opitz skonštruuje 3 záplaty, každú nad tým istým trojuholníkom, aby minimalizoval  $C^2$ -nespojitosť pozdĺž každej z jeho hrán<sup>34</sup>. Potom rozdelí každú záplatu na podzáplaty, aby získal hraničné riadiace body nad jednotlivými minitrojuholníkmi (pozri obrázok 5.7) a nakoniec dopočíta zvyšné riadiace body použitím posledných dvoch krokov štandardnej C-T metódy. Zmenou oproti pôvodnému algoritmu je nový systém rovníc (pozri vzťah 5.5.3), v ktorom sú pôvodné body  $I_{12}$ ,  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  a  $I_{21}$  nahradené postupne bodmi  $T_{31}$ ,  $T_{13}$ ,  $T_{32}$  a  $T_{23}$ ; rovnako sú nahradené aj body  $\hat{I}_{12}$ ,  $\hat{I}_{11}$ ,  $\hat{I}_{22}$  a  $\hat{I}_{21}$  postupne bodmi  $\hat{T}_{31}$ ,  $\hat{T}_{13}$ ,  $\hat{T}_{32}$  a  $\hat{T}_{23}$ .

Existuje mnoho variantov a zovšeobecnení Cloughovej-Tocherovej metódy. Bola navrhnutá aj verzia, ktorá interpoluje  $N$ -rozmerné dátové body [WOR87].

[33] Každá zo záplat je potrebná na získanie požadovanej hladkosti pozdĺž jednej hranice.

[34] Každá z troch záplat minimalizuje  $C^2$  nespojitosť pozdĺž okraja, ktorý zodpovedá jednej hrane trojuholníka.

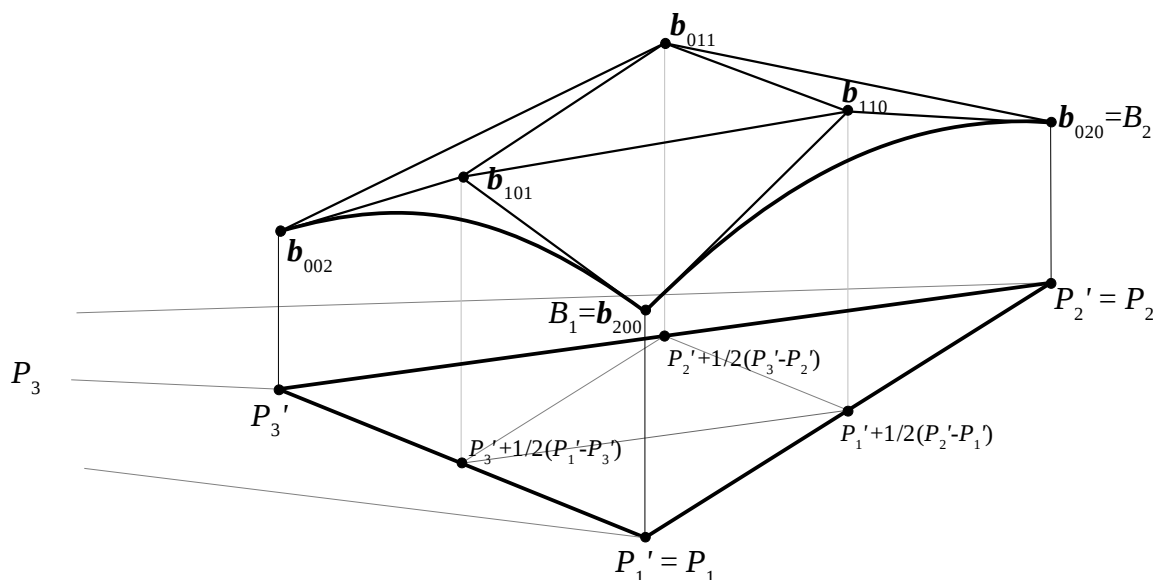
## 5.6 Powellova-Sabinova metóda interpolácie

Rovnako ako v predošlej metóde, opäť chceme skonštruovať  $C^1$ -spojitú plochu, interpolujúcu vrcholy danej triangulácie. Pomocou dopredu určených dát vo vrcholoch triangulácie (z-ové hodnoty a normálové vektory) vytvoríme po častiach spojité, kvadratický interpolant, zložený z Bézierových trojuholníkových záplat určených predpisom:

$$\mathbf{X}(u, v, w) = \mathbf{b}_{200}u^2 + \mathbf{b}_{020}v^2 + \mathbf{b}_{002}w^2 + 2\mathbf{b}_{110}uv + 2\mathbf{b}_{011}vw + 2\mathbf{b}_{101}wu. \quad (5.6.1)$$

Ako vidíme, kvadratický polynóm je určený šiestimi koeficientami. Keďže každý trojuholník nám poskytuje až deväť údajov (tri na vrchol), musíme jednotlivé trojuholníky danej triangulácie rozdeliť na viac trojuholníkov, aby sme mohli použiť 6 podmienok potrebných na určenie všetkých koeficientov kvadratického polynómu.

Powell a Sabin ukázali v práci [POW77], že rozdelením trojuholníka na 6 alebo 12 minitrojuholníkov, získame potrebný počet stupňov voľnosti na vytvorenie kvadratickej plochy, interpolujúcej vrcholy trojuholníka. Ďalej opísali postup ako určiť vnútorný bod, pomocou ktorého môžeme rozdeliť trojuholník na potrebný počet minitrojuholníkov.



Obrázok 5.10: Kvadratická trojuholníková Bézierova záplata nad minitrojuholníkom  $P_1'P_2'P_3'$  s radiacou sieťou vrcholov  $\mathbf{b}_{ijk}$ .

## Vyčíslenie riadiacich bodov

Algoritmus na vyčíslenie Bézierových vrcholov každého vytvoreného minitrojuholníka je podobný ako v Cloughovej-Tocherovej metóde.

Najskôr rozdelíme každý trojuholník danej triangulácie na minitrojuholníky [HOS93]. Ak je najväčší vnútorný uhol trojuholníka menší ako 75 stupňov (heuristicky získaná hodnota), tak ho rozdelíme na 6 minitrojuholníkov; inak ho rozdelíme na 12 minitrojuholníkov.

- I. V prvom prípade rozdelíme trojuholník úsečkami spájajúcimi zvolený vnútorný bod<sup>35</sup> s vrcholmi a stredmi strán trojuholníka (pozri obrázok 5.11).
- II. V druhom prípade najskôr rozdelíme trojuholník na 6 menších trojuholníkov spojením vrcholov so stredmi protíahlých strán. Potom rozdelíme takto vzniknuté trojuholníky úsečkami spájajúcimi každé dva stredy strán pôvodného trojuholníka (pozri obrázok 5.12).

Dôvod prečo uvažujeme tieto dva prípady, je skutočnosť, že stred opísanej kružnice daného trojuholníka môže ležať mimo trojuholníka alebo blízko niektorej jeho strany, čo môže mať za následok vytvorenie dlhých a tenkých minitrojuholníkov. Powell spomína ešte jednu možnosť, ako rozdeliť ľubovoľný trojuholník na 6 minitrojuholníkov, ktorú opíšeme v nasledujúcej časti.

Súradnice  $[x, y]$  Bézierových vrcholov nad každým minitrojuholníkom sú určené súradnicami  $[x, y]$  vrcholov minitrojuholníka a súradnicami bodov ležiacich v strede každej jeho strany (pozri obrázok 5.10).

Hodnoty z-ových súradníc Bézierových vrcholov určíme pomocou nasledovných krokov<sup>36</sup>:

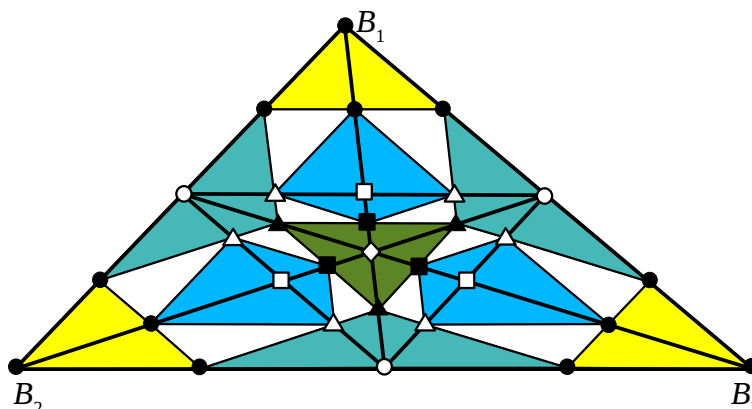
### Prípád I (trojuholník rozdelený na 6 minitrojuholníkov)

1. Hodnoty z Bézierových vrcholov (nad  $P_1, P_2, P_3$ ) označených „●“ sú z-ové hodnoty súradníc bodov  $B_1, B_2, B_3$  z danej triangulácie (pozri obrázok 5.11 vpravo).
2. Hodnoty z vrcholov označených „●“ ležiacich na okraji záplaty vypočítame z podmienky, že tieto vrcholy ležia v dotykovej rovine určenej bodom  $B_1, B_2$  alebo  $B_3$  a normálovým vektorom v bode  $B_1, B_2$  alebo  $B_3$  (pozri obrázok 5.11).
3. Hodnoty z vrcholov označených „●“ ležiacich na spojnici vnútorného bodu trojuholníka s jeho vrcholmi určíme rovnako ako v kroku 2.
4. Hodnoty z vrcholov označených „○“ určíme z toho, že ležia v strede úsečiek spájajúcich vrcholy „●“ susedných minitrojuholníkov.
5. Posledný hľadaný Bézierov vrchol „□“ leží v rovine určený tromi vnútornými vrcholmi „●“.

[35] Powell doporučuje zvoliť stred kružnice opísanej trojuholníku.

[36] Tentoraz budeme o niečo stručnejší.





Obrázok 5.12: Konštrukcia riadiacej siete Bézierových vrcholov nad dvanástimi minitrojuholníkmi.

### Vyčíslenie riadiacich bodov podľa Cendes a Wonga

Powell a Sabin v svojej práci [POW77] ukázali, že pri konštruovaní po častiach  $C^1$ -spojitého, kvadratického interpolantu, môžeme rozdeliť každý trojuholník (teda aj tupouhlý) na 6 minitrojuholníkov podľa nasledovného postupu:

1. Vnútorý bod trojuholníka, v ktorom ho budeme rozdeľovať, zvolíme stred vpísanej kružnice.
2. Zvyšné body ležiace na stranách trojuholníka budú ležať:
  - v strede strany, ak trojuholník nemá suseda na tejto strane,
  - v priesečníku strany s úsečkou spájajúcou vnútorný bod trojuholníka s vnútorným bodom susedného trojuholníka (pozri obrázok 5.13); inak.

Stred  $Q[x, y]$  vpísanej kružnice trojuholníka  $P_1P_2P_3$  môžeme jednoducho vypočítať použitím barycentrických súradníc:

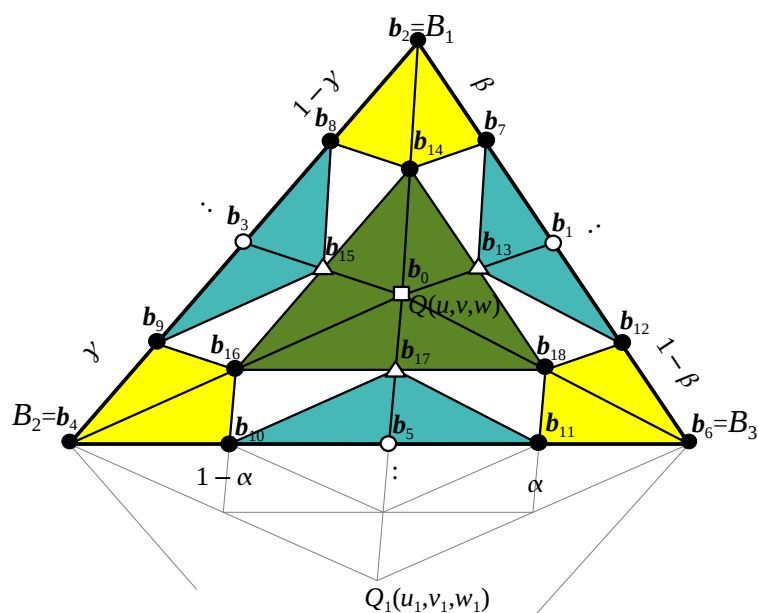
$$Q(u, v, w) = (|P_3 - P_2| / o, |P_1 - P_3| / o, |P_2 - P_1| / o), \text{ kde } o = |P_3 - P_2| + |P_1 - P_3| + |P_2 - P_1|,$$

$$Q[x, y] = P_1u + P_2v + P_3w.$$

Jednotlivé priesečníky spojnic stredov kružníc s príslušnými stranami trojuholníka rozdeľujú tieto strany (na obrázku 5.13 je to napr. bod  $b_5$ ) v pomeroch  $(1 - \alpha : \alpha)$ ,  $(1 - \beta : \beta)$  a  $(1 - \gamma : \gamma)$ . Koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  môžeme vypočítať zo vzťahov:

$$\alpha = \frac{vu_1 - uv_1}{u_1 - u}, \quad \beta = \frac{wv_2 - vw_2}{v_2 - v} \quad \text{a} \quad \gamma = \frac{uw_3 - wu_3}{w_3 - w}, \quad (5.6.2)$$

kde  $(u, v, w)$  a  $(u_i, v_i, w_i)$  pre  $i = 1, 2, 3$  sú barycentrické súradnice stredov kružníc  $Q$  a  $Q_i$  vzhľadom na  $\Delta P_1P_2P_3$ .



Obrázok 5.13: Konštrukcia riadiacej siete Bézierových vrcholov metódou Cendes a Wonga [CEN87]. Body  $Q$  a  $Q_1$  sú stredy vpísaných kružníc príslušných trojuholníkov.

Majme dané vrcholy trojuholníkovej siete  $P_i[x_i, y_i]$ , ich funkčné hodnoty  $z_i$  a normálové vektory  $(n_i^x, n_i^y, n_i^z)$  pre  $i = 1, \dots, n$ . Potom  $z$ -ové hodnoty riadiacich vrcholov Bézierovej trojuholníkovej záplaty stupňa 2, nad daným  $\Delta P_1 P_2 P_3$ , môžeme vypočítať nasledovným postupom [EBER99]:

1.  $b_2 = z_1$  (pozri obrázok 5.13)  
 $b_4 = z_2$   
 $b_6 = z_3$
2.  $b_{14} = b_2 + c_1 z_1^x + d_1 z_1^y$   
 $b_{16} = b_4 + c_2 z_2^x + d_2 z_2^y$   
 $b_{18} = b_6 + c_3 z_3^x + d_3 z_3^y$
3.  $b_7 = b_2 + c_4 z_1^x + d_4 z_1^y$        $b_8 = b_2 + c_5 z_1^x + d_5 z_1^y$   
 $b_9 = b_4 + c_6 z_2^x + d_6 z_2^y$        $b_{10} = b_4 + c_7 z_2^x + d_7 z_2^y$   
 $b_{11} = b_6 + c_8 z_3^x + d_8 z_3^y$        $b_{12} = b_6 + c_9 z_3^x + d_9 z_3^y$
4.  $b_1 = \beta b_{12} + (1 - \beta) b_7$        $b_{13} = \beta b_{18} + (1 - \beta) b_{14}$   
 $b_3 = \gamma b_8 + (1 - \gamma) b_9$        $b_{15} = \gamma b_{14} + (1 - \gamma) b_{16}$   
 $b_5 = \alpha b_{10} + (1 - \alpha) b_{11}$        $b_{17} = \alpha b_{16} + (1 - \alpha) b_{18}$
5.  $b_0 = \alpha b_{14} + \beta b_{16} + \gamma b_{18}$ ,

kde koeficienty  $c_i$  sú dané vzťahmi:

$$c_1 = (x_0 - x_1) / 2$$

$$c_2 = (x_0 - x_2) / 2$$

$$c_3 = (x_0 - x_3) / 2$$

$$c_4 = \beta(x_3 - x_1) / 2$$

$$c_5 = (1 - \gamma)(x_2 - x_1) / 2$$

$$c_6 = \gamma(x_1 - x_2) / 2$$

$$c_7 = (1 - \alpha)(x_3 - x_2) / 2$$

$$c_8 = \alpha(x_2 - x_3) / 2$$

$$c_9 = (1 - \beta)(x_1 - x_3) / 2.$$

Koeficienty  $d_i$  sú určené podobne, iba nahradíme premenné  $x_i$  premennými  $y_i$ .

Hodnoty  $(z_i^x, z_i^y)$  sú určené súradnicami normál vo vrchoch  $B_i$ :

$$z_i^x = -n_i^x / n_i^z \text{ a } z_i^y = -n_i^y / n_i^z \text{ pre } i = 1, 2, 3.$$

Koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  vypočítame podľa vzťahu 5.6.2.

Výsledné z-ové hodnoty riadiacich vrcholov  $j$ -tej (pre  $j = 1, 2, \dots, 6$ ) kvadratickej Bézierovej trojuholníkovej záplaty sú určené:

$$b_{200} = b_0$$

$$b_{020} = b_j$$

$$b_{002} = b_{1+j \bmod 6}$$

$$b_{110} = b_{12+j}$$

$$b_{101} = b_{13+j \bmod 6}.$$

Výhodou Powellovej-Sabinovej metódy je, že používa iba kvadratické funkcie, a najmä pri použití Cendesovho-Wongovho algoritmu [CEN87] je výpočtovo veľmi efektívna a nevyžaduje poznať derivácie v priečnom smere v stredoch hrán triangulácie. Ak však požadujeme určiť hodnoty druhej derivácie (napr. pri výpočte krivosti plôch interpolujúcej vzorku bodov), tak túto metódu nemôžeme použiť.



## 5.7 Metóda hladkého spájania trojuholníkov

V tejto časti opíšeme poslednú z metód založených na triangulácii vstupných odpovedajúcich si bodov  $P_i$ .

Najskôr priradíme každému vrcholu triangulácie  $P_i[x_i, y_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kvadratický interpolačný polynóm:

$$z_i = p_i(x, y) = a_{i,1}x^2 + a_{i,2}xy + a_{i,3}y^2 + a_{i,4}x + a_{i,5}y + a_{i,6}.$$

Neznáme koeficienty určíme z podmienok, že tento polynóm prechádza bodom  $[x, y, z]$  a jeho piatimi najbližšími susedmi danej triangulácie.

Hodnotu  $z$  v ľubovoľnom bode  $[x, y]$  určíme nasledovným postupom [AMID02]:

1. Určíme trojuholník (z danej triangulácie), v ktorom tento bod leží. Nech to bude  $\Delta P_1P_2P_3$ .
2. Výsledná hodnota  $z$  je určená ako vážený priemer hodnôt troch polynomických interpolantov (každý prislúchajúci konkrétnemu vrcholu trojuholníka) v bode  $[x, y]$ :

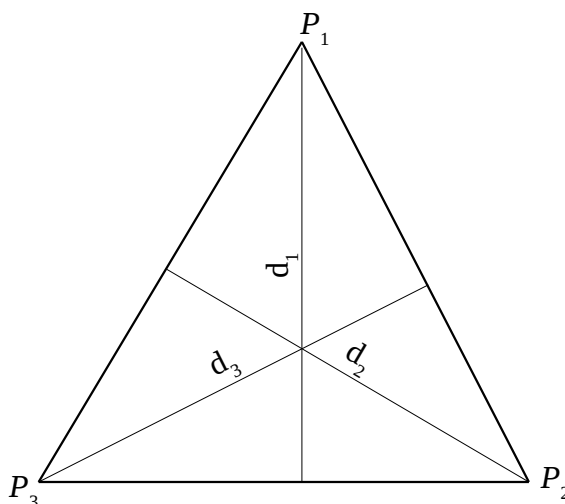
$$z = w_1p_1(x, y) + w_2p_2(x, y) + w_3p_3(x, y).$$

Hladkosť prechodu medzi trojuholníkmi zabezpečíme, ak bude každá váha  $w_i$  pozdĺž hrany trojuholníka, nachádzajúca sa oproti  $i$ -temu vrcholu rovná nule. Túto podmienku dosiahneme nasledovným predpisom pre  $w_i$ :

$$w_i = d_i^k / (d_1^k + d_2^k + d_3^k) \text{ pre } i = 1, 2, 3,$$

kde  $d_i^k$  označuje  $k$ -tu mocninu (zvyčajne  $k = 2$  alebo  $3$ ) vzdialenosti  $d_i$  vrcholu  $P_i$  trojuholníka  $P_1P_2P_3$  k jeho protiláhej strane (pozri obrázok 5.14).

Ďalšie varianty tejto metódy zabezpečujúce  $C^1$ -spojitosť pozdĺž hrán triangulácie môžeme nájsť v [MCLA76].



Obrázok 5.14: Určenie váhy  $w_i$  pomocou dĺžok  $d_i$ .

## 6 Odhad normál pre viacsegmentové metódy

Hodnoty normálových vektorov a smerové derivácie majú veľký význam vo väčšine metód, ktoré používajú interpolanty nad trojuholníkovou sieťou. Kvalita týchto interpolačných plôch (v zmysle vizuálnej hladkosti, spojitosti, presnosti, atď.) výrazne závisí na presnosti s akou odhadneme hodnoty normál. Derivácie majú často väčší vplyv na tvar plochy ako zvolený stupeň polynómov či stupeň hladkosti. Existuje mnoho metód ako odhadnúť hodnoty normál. Najčastejšie sa používajú metódy váženého priemeru<sup>38</sup> a metódy využívajúce lokálne interpolanty či aproximanty. O niečo menej často sa používajú globálne metódy, obyčajne využívajúce minimalizáciu hodnoty určitého integrálu na triangulačnej sieti.

### Normály vypočítané váženým priemerom

Majme dané body  $B_i[x_i, y_i, z_i]$  (vrcholy trojuholníkovej siete  $\mathcal{T}$ ), kde  $[x_i, y_i]$  sú súradnice bodov  $P_i$  z množiny zadaných odpovedajúcich si bodov  $\mathcal{P}$  a  $z_i$  ich príslušné hodnoty. Potom hodnoty normál  $\hat{\mathbf{n}}_i$  vo vrcholoch  $B_i$  môžeme odhadnúť pomocou predpisu [HOS93]:

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \sum_{\mathcal{N}_i} \omega_{ijk} \mathbf{n}_{\Delta_{ijk}}, \quad (6.1)$$

kde váha  $\omega_{ijk}$  je vyjadrená vzťahom:

$$\omega_{ijk} = \frac{\sigma_{ijk}}{\sum_{\mathcal{N}_i} \sigma_{ijk}},$$

a kde  $\mathbf{n}_{\Delta_{ijk}}$  označuje normálu trojuholníka  $B_i B_j B_k$ . Suma vo vzťahu 6.1 je vyčíslená pre všetky trojice indexov  $(i, j, k)$  z množiny:

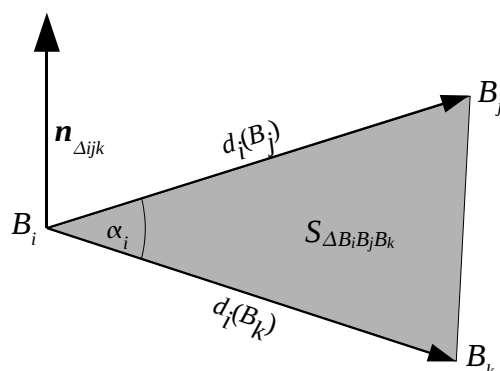
$$\mathcal{N}_i = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3; j \neq k, \text{ kde } B_j, B_k \text{ vyhovujú „kritériu výberu“}\}.$$

Kritérium výberu obyčajne zahŕňa všetky vrcholy, ktoré buď tvoria hranu s vrcholom  $B_i$ , alebo ležia v predpísanom okolí vrcholu  $B_i$ .

Hodnoty  $\sigma_{ijk}$  často vyberáme z nasledovných možností [HOS93] (pozri obrázok 6.1):

- **aritmetický priemer** (Gouraud) –  $\sigma_{ijk} = 1$ ,
- **prevrátená hodnota dĺžok** (Little) –  $\sigma_{ijk} = d_i(B_j)^{-r} d_i(B_k)^{-r}$ , (štandardne  $r = 1, 2$  alebo  $1/2$ ),
- **uhol pri vrchole** (Thurmer) –  $\sigma_{ijk} = \alpha_i$ , kde  $\alpha_i = \sphericalangle B_j B_i B_k$ ,
- **plocha trojuholníka** (Akima) –  $\sigma_{ijk} = S_{\Delta_{B_i B_j B_k}}$ , ( $S$  označuje plochu),
- **modifikovaná plocha** (Akima) –  $\sigma_{ijk} = \cos \theta_{ijk} \cdot S_{\Delta_{B_i B_j B_k}}$ , kde  $\theta_{ijk} = \sphericalangle(\mathbf{e}_3, \mathbf{n}_{\Delta_{ijk}})$ .

[38] Metódy váženého priemeru sú síce výpočtovo najmenej náročné, avšak dávajú najhoršie výsledky.



Obrázok 6.1: Určenie váhy pre normálu  $\mathbf{n}_{\Delta_{ijk}}$  trojuholníka  $B_i B_j B_k$ . Symbol  $d_i(B_j)$  (resp.  $d_i(B_k)$ ) označuje vzdialenosť bodov  $B_i, B_j$  (resp.  $B_i, B_k$ ). Symbol  $S_{\Delta_{B_i B_j B_k}}$  označuje plochu trojuholníka  $B_i B_j B_k$ .

### Normály vypočítané pomocou lokálnej interpolácie alebo aproximácie

Ďalšou možnosťou určenia normály v bode  $B_i$  je preložiť bodom  $B_i$  funkciu, ktorá interpoluje resp. aproximuje množinu „vybraných susedov“ bodu  $B_i$ , a normálu vypočítať pomocou gradientu alebo parciálnych derivácií príslušnej funkcie. V práci [STE84] je porovnaných niekoľko typov funkcií, medzi ktoré patria:

- *Shepardov interpolant*
- *Hardyho MQ interpolant*
- *lineárna polynomická funkcia určená metódou najmenších štvorcov*
- *kvadratická polynomická funkcia určená metódou najmenších štvorcov*

Podľa testov uskutočnených Steadom, najlepšie výsledky dosahuje Hardyho MQ interpolant. Ako príklad si ukážeme poslednú z týchto metód, ktorú navrhol R. Renka v práci [REN84].

### Normály vypočítané pomocou aproximačnej kvadratickej funkcie

Normálu vo vrchole  $B_i$  určíme pomocou parciálnych derivácií kvadratickej polynomickej funkcie, ktorá interpoluje vrchol  $B_i$  a aproximuje množinu „blízkych vrcholov“ v zmysle metódy najmenších štvorcov. Každému vrcholu  $B_j$  z množiny blízkych vrcholov je priradená váha  $\omega_j$  tak, aby vrcholy najviac vzdialené od  $B_i$  prispievali k výslednej hodnote derivácie čo najmenej:

$$\omega_j = \frac{(r_i - d_i(B_j))_+}{r_i d_i(B_j)},$$

kde  $d_i(B_j) = |B_i - B_j|$  a  $r_i$  je polomer vplyvu okolia vrcholu  $B_i$ .

Nech  $n$  označuje počet bodov triangulácie. Hodnotu polomeru vplyvu okolia určíme nasledovným postupom:

1. • Ak  $n \geq 9$ , tak nech  $d = |B_i - B_{i8}|$ , kde  $B_{i8}$  je v poradí ôsmy najbližší vrchol k  $B_i$ ,
  - ak  $n < 9$ , tak  $d$  je vzdialenosť medzi  $B_i$  a najvzdialenejším vrcholom k  $B_i$ .
2. Veľkosť polomeru  $r_i$  potom bude
  - vzdialenosť medzi vrcholom  $B_i$  a vrcholom, ktorý je najbližší k  $B_i$  (ak existuje), pričom jeho vzdialenosť od  $B_i$  je väčšia ako  $d$ ,
  - ak neexistuje taký vrchol, zvolíme hodnotu polomeru ľubovoľne, napríklad  $r_i = 2d$ .

Definujme množinu  $\mathcal{N}_i$  obsahujú indexy blízkych vrcholov k  $B_i$ :

$$\mathcal{N}_i = \{j \in \mathbb{N} \mid B_j \text{ je vrchol triangulácie } \mathcal{T} \text{ a } d_i(B_j) \leq r_i\}.$$

Kvadratickú funkciu  $f_i(x, y)$  prechádzajúcu bodom  $B_i$  a aproximujúcu body určene množinou  $\mathcal{N}_i$  vyjadríme vzťahom [REN84]:

$$f_i(x, y) = z_i + a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i)(y - y_i) + c_i(y - y_i)^2 + f_{i,x}(x - x_i) + f_{i,y}(y - y_i).$$

Neznáme hodnoty  $a_i, b_i, c_i, f_{i,x}, f_{i,y}$  určíme pomocou metódy najmenších štvorcov zo vzťahu:

$$\underset{a_i, b_i, c_i, f_{i,x}, f_{i,y}}{\operatorname{arg\,min}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\omega_j (f_i(x_j, y_j) - z_j)]^2 \right\} \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

## Normály vypočítané pomocou globálnych metód

Najlepšie výsledky pri odhade normál dosiahneme pomocou globálnych metód, ktoré sú založené na hľadaní minima integrálnych funkcií.

- **Nielsonova sieť minimálnej normy** (Nielson's minimum norm network)

Označme symbolom  $e_{ij}$  hranu spájajúcu vrcholy  $B_i$  a  $B_j$  danej triangulácie  $\mathcal{T}$  a symbolom  $\mathcal{N}_e$  množinu indexov všetkých hrán triangulácie. Hľadáme sieť interpolačných kriviek, definovanú nad všetkými hranami triangulácie  $\mathcal{T}$ , kde každá krivka je po častiach zložená kubická funkcia s hladkosťou  $C^1$ . Túto sieť získame nájdením minima nasledovnej sumy [SHEU99]:

$$\sum_{ij \in \mathcal{N}_e} \int_{e_{ij}} (D_{e_{ij}}^2 F(x, y))^2 ds_{ij}, \quad (6.3)$$

kde  $D_{e_{ij}} F(x, y)$  je označenie smerovej derivácie funkcie  $F(x, y)$ , vzhľadom na smer hrany  $e_{ij}$ , definovanej vzťahom:

$$D_{e_{ij}} F(x, y) = \frac{x_j - x_i}{|e_{ij}|} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{y_j - y_i}{|e_{ij}|} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

a  $ds_{ij}$  je element dĺžky oblúka nad hranou  $e_{ij}$ .

Dá sa ukázať, že riešením minima 6.3 je kubická funkcia  $S(x, y)$  interpolujúca body  $B_i$  s vlastnosťami [SHEU99]:

$$1. \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j - x_i}{|e_{ij}|^3} [(x_j - x_i)S_x(B_i) + (y_j - y_i)S_y(B_i) + \frac{1}{2}(x_j - x_i)S_x(B_j) + \frac{1}{2}(y_j - y_i)S_y(B_j) - \frac{3}{2}(z_j - z_i)] = 0$$

$$2. \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}_i} \frac{y_j - y_i}{|e_{ij}|^3} [(x_j - x_i)S_x(B_i) + (y_j - y_i)S_y(B_i) + \frac{1}{2}(x_j - x_i)S_x(B_j) + \frac{1}{2}(y_j - y_i)S_y(B_j) - \frac{3}{2}(z_j - z_i)] = 0,$$

kde  $\mathcal{N}_i = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid e_{ij} \text{ je hrana triangulácie } \mathcal{T} \text{ s koncovým vrcholom } B_i\}$

$$\text{a } S_x(B_i) = \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x, y) = B_i}, \quad S_y(B_i) = \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x, y) = B_i}.$$

Hľadanými parciálnymi deriváciami v bode  $B_i$  sú neznáme  $S_x(B_i)$  a  $S_y(B_i)$ , ktoré vypočítame z predošlého systému rovníc.

Globálne metódy pre odhad derivácií síce dávajú lepšie výsledky ako lokálne metódy, avšak pri ich výpočte musíme riešiť systémy rovníc s väčším počtom prvkov. Navyše odhad derivácií pomocou globálnych metód je len o málo presnejší ako v lokálnych metódach.

## 7 Implementácia transformačných metód

Pre porovnanie presnosti a využiteľnosti jednotlivých transformačných metód som vytvoril aplikáciu *OpravaDeformacii*. Vyvinul som ju v prostredí programu *Borland Builder*, pretože firma Borland poskytuje verziu *Personal* tohto produktu pre nekomerčné účely zdarma<sup>39</sup>. Ďalej preto, že aplikácie vytvorené v prostredí *Borland Builder* je možné bez väčších ťažkostí preniesť pod operačný systém *Linux*. Firma *Borland* poskytuje bezplatne softvérový balík *OpenKylix*, ktorý funguje v prostredí linuxu a má takmer identické vývojové prostredie s programom *Borland Builder*.

Pri tvorbe tejto aplikácie som použil matematické knižnice *TNT* – Template Numerical Toolkit, *ACM TOMS Algorithms* a *MathPack*. Knižnica *TNT* poskytuje okrem iného skupinu procedúr pre výpočet systému *normálnych rovníc*, ako aj pre riešenie sústavy rovníc so *zle podmienenou maticou*. Knižnica *MathPack* obsahuje rozsiahle množstvo procedúr pre numerické, algebraické a štatistické výpočty ako i nástroje pre vizualizáciu 2D aj 3D dát<sup>40</sup>. *Netlib* a *ACM TOMS Algorithms* patria medzi najrozsiahlejšie a asi najpoužívannejšie knižnice využívané vedcami v rôznych oblastiach výskumu. Ďalej som použil voľne prístupné (freeware) komponenty *TGIFImage* a *TPNGImage*, ktoré umožňujú import a export obrázkov vo formáte *GIF* a *PNG*.

Pre testovacie účely, som vyvinul dve pomocné aplikácie *UpravObrazok* a *TestFunkcii*. Pomocou prvej aplikácie som vybral do výsledného programu najvhodnejšiu cenovú funkciu pre rekonštrukciu obrazu pomocou DDT (pozri kapitolu 2.4) ako i vhodné filtre nerozmazávajúce hrany objektov obrazu (pozri kapitolu 2.2). Pomocou druhej aplikácie som určil vhodných kandidátov pre  $n$ -bodové transformačné metódy. Túto aplikáciu som použil aj na vytvorenie tabuľky č. 4 na str. 136 porovnávajúcu presnosť jednotlivých interpolačných metód ako aj všetky obrázky a grafy nachádzajúce sa v prílohe B. Aplikácia *TestFunkcii* je vhodná aj na vizualizáciu interpolačných plôch, ktoré sú vypočítané na základe zadaných odpovedajúcich si bodov a používané pri odstraňovaní deformácie konkrétnych obrázkov.

Ovládanie programu *OpravaDeformacii* je veľmi jednoduché a intuitívne. V prípade ťažkostí je možné použiť integrovanú nápovedu, ktorá je vyvolaná pomocou menu alebo štandardne stlačením klávesu F1.

Počas implementácie viacsegmentových metód používajúcich trianguláciu bolo treba vyriešiť problém ako zobrazovať pixle obrázku (zvolenou transformačnou metódou), ktoré ležia mimo konvexného obalu zadaných odpovedajúcich si bodov. Takéto pixle sa totiž nenachádzajú v žiadnom trojuholníku vytvorenej triangulácie a nemajú sa ako zobrazovať. Riešenia sú dve:

[39] Celá táto práca (text a obrázky) bola vytvorená v nekomerčných *OpenSource* produktoch *OpenOffice* a *GIMP*.

[40] V knižnici *MathPack* môžeme nájsť aj procedúru na výpočet bodov interpolačnej plochy pomocou kvadratickej Shepardovej metódy.

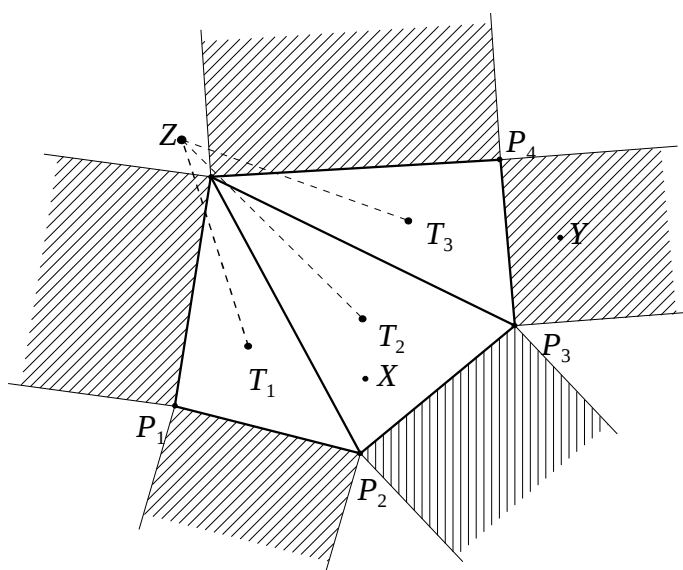
1. Použiť na určenie polohy pixlu výsledného obrazu „najbližší“ trojuholník a zobrazovať ho podľa transformačnej funkcie k nemu prislúchajúcej.
2. Doplniť trianguláciu o nové trojuholníky tak, aby všetky pixle vstupného obrazu ležali v novej triangulácii.

### Určenie „najbližšieho“ trojuholníka k bodu

Pre body ležiace v konvexnom obale triangulácie bude najbližší trojuholník ten, v ktorom daný bod leží (pozri obrázok 7.1, bod *X*). Pre body ležiace mimo konvexný obal určíme najbližší trojuholník podľa nasledovného postupu:

1. Kladne zorientujeme konvexný obal odpovedajúcich si bodov. To znamená, že postupnosť za sebou idúcich hrán je orientovaná „proti smeru chodu hodinových ručičiek“.
2. Pre každú obvodovú hranu triangulácie vytvoríme pás, ktorý vznikne prienikom troch polrovín. Prvá polrovina je určená priamkou, ktorá prechádza danou hranou a priestorom vpravo od nej. Druhá polrovina je určená priamkou, ktorá vznikne otočením hrany o  $90^\circ$  v koncovom bode hrany a opäť priestorom vpravo od nej. Tretia polrovina je určená priamkou, ktorá vznikne otočením hrany o  $-90^\circ$  v začiatočnom bode hrany a priestorom vpravo od nej.
3. Postupne prehľadávame všetky pásy pokiaľ nájdeme taký, v ktorom daný bod leží. Najbližší trojuholník bude ten, ktorý obsahuje hranu vytvárajúcu nájdený pás (pozri obrázok 7.1, bod *Y*).
4. Ak bod neleží v žiadnom páse (pozri obrázok 7.1, bod *Z*), tak najbližší trojuholník bude ten, ktorého ťažisko je k danému bodu najbližšie.

Tento prístup, bez nutnosti vytvárania ďalších trojuholníkov pri okraji triangulácie, môžeme použiť iba v trojuholníkových metódach (pozri kapitoly 5.1, 5.2 a 5.3). Ak použijeme metódu, v ktorej je nutné trojuholníky ďalej deliť, tak musíme rozšíriť pôvodnú trianguláciu o nové trojuholníky. Postup rozšírenia triangulácie „zachovávajúcej topológiu“ okrajových trojuholníkov, ukážeme v nasledujúcej časti.



Obrázok 7.1: Určenie „najbližšieho“ trojuholníka k bodu.

### Rozšírenie triangulácie o obvodový pás

V prípade, že potrebujeme zabezpečiť, aby každý pixel vstupného obrazu ležal v nejakom trojuholníku, musíme doplniť existujúcu trianguláciu o obvodový pás určený novými bodmi tak, aby výsledná triangulácia pokryla celý vstupný obraz.

Majme danú trianguláciu, ktorá nepokrýva celý vstupný obraz. Označme symbolom  $\mathcal{M}$  konvexný mnohoúhelník tvoriaci hranicu triangulácie  $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{M} = \{P_i \in \mathbb{E}^2 \mid P_i \text{ je hraničný vrchol triangulácie } \mathcal{T}, \text{ kde } i = 1, \dots, m\}.$$

Algoritmus výpočtu nových bodov, rozširujúcich danú trianguláciu môžeme opísať nasledovným postupom:

1. V každom vrchole  $P_i$  mnohoúhelníka  $\mathcal{M}$  vypočítame os uhla, ktorý je určený jeho dvomi stranami stýkajúcimi sa v tomto vrchole. Na obrázku 7.2 je zobrazená os  $P_jP_j'$  pre  $\sphericalangle(P_iP_j, P_jP_k)$ .
2. Vypočítame body  $P_i'$  prienikov každej osi uhla so stranami obdĺžnika tvoreného okrajmi vstupného obrazu.
3. Body  $B_i'$  novej triangulácie v priestore určíme ako prienik priamky  $p_i$  prechádzajúcej bodom  $P_i'$  rovnobežne s osou  $z$  s rovinou  $\alpha_i$  určenou bodom  $B_i$  a odhadnutou normálou vo vrchole  $B_i$ .
4. Polohu rohového bodu  $S_{ij}$  určíme tak, že skonštruujeme priamku  $p_{ij}$  určenú rohovým bodom obrazu  $R_{ij}$  a smerom rovnobežným s priamkou  $P_i'P_j'$ . Prienik tejto priamky s osou  $P_iP_i'$  označíme bodom  $P_i''$  a prienik s osou  $P_jP_j'$  bodom  $P_j''$  (pozri obrázok 7.2). Body  $B_i''$  a  $B_j''$



vypočítame podobne ako v kroku 3. Ak  $P_i' = R_{ij}$ , tak položíme  $S_{ij} = B_i'$  a nasledujúci krok 5 vynecháme.

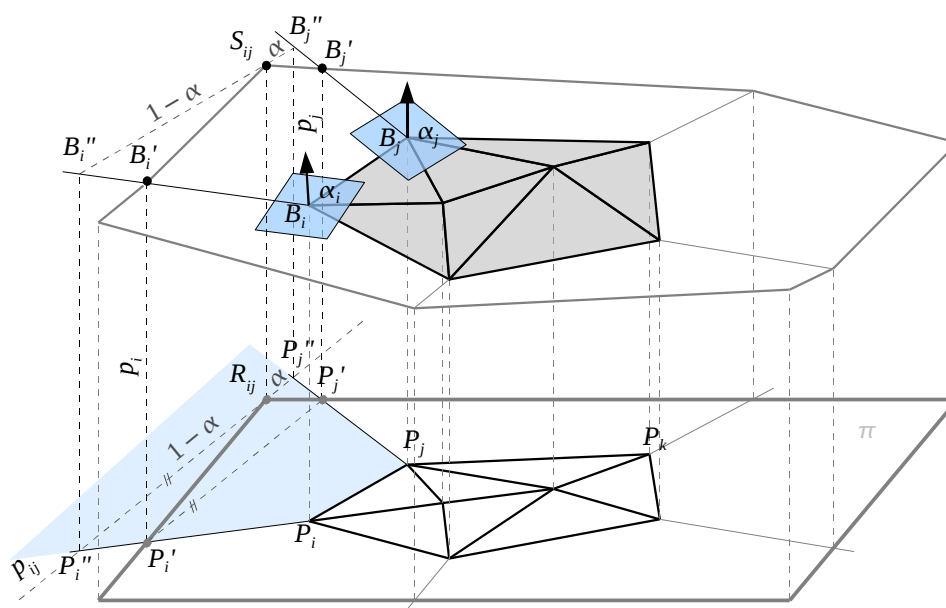
Indexy  $i$  a  $j$  rohového bodu  $R_{ij}$  nájdeme tak, že postupne prechádzame každú hranu  $P_iP_j$  mnohoholníka  $\mathcal{M}$ , pokiaľ nájdeme takú, pre ktorú platí, že priestor tvorený prienikom polrovín, určených postupne priamkami  $P_i'P_i$ ,  $P_iP_j$  a  $P_jP_j'$  a polrovinami vľavo od nich obsahuje bod  $R_{ij}$ .

5. Polohu rohového bodu  $S_{ij}$  vypočítame ako vážený priemer bodov  $B_i''$  a  $B_j''$ :

$$S_{ij} = \alpha B_i'' + (1 - \alpha) B_j'', \text{ kde koeficient } \alpha = |R_{ij} - P_j''| / |P_i'' - P_j''|.$$

Bod  $S_{ij}$  potom leží na priamke prechádzajúcej bodom  $R_{ij}$  rovnobežne s osou  $z$ .

Po vypočítaní súradníc všetkých bodov  $P_i'$ ,  $B_i'$  a  $S_{ij}$  pôvodnú trianguláciu zrušíme a vytvoríme novú, ktorá bude obsahovať všetky pôvodné i práve vypočítané body.



Obrázok 7.2: Rozšírenie triangulácie o okraj tvoriaci rám. Výpočet polohy nových bodov  $P_i'$  (v rovine obrazu  $\pi$ ) a  $B_i'$ ,  $S_{ij}$  (v priestore).

## 8 Zhodnotenie a použiteľnosť jednotlivých metód

V tejto kapitole porovnáme jednotlivé transformačné metódy z hľadiska ich použiteľnosti na odstránenie deformácie obrazu.

Základné transformácie objektov v rovine, ako sú posunutie, otočenie a škálovanie (pozri kapitolu 3.3), sú určené pre také obrazy, ktoré boli deformované iba jednou z uvedených transformácií. Ak napríklad bol obraz počas snímania pootočený, použijeme otočenie, aby okraje výsledného (transformovaného) obrazu boli opäť rovnobežné s osami. Podobne, ak je obraz zmenšený, resp. zväčšený v dôsledku nevhodného kopírovania, môžeme s výhodou použiť škálovanie, aby sme obrazu „vrátili“ pôvodný rozmer.

Ak vieme, že obraz bol zdeformovaný iba zložením niektorých základných transformácií, tak môžeme deformáciu opraviť určením dvoch dvojíc odpovedajúcich si bodov (pozri kapitolu 3.4).

Trojbodová – metóda afinnej transformácie (kapitola 4.1) je vhodná vtedy, ak sa v obraze nachádzajú len tri význačné body, ktorých pôvodná poloha je presne známa.

Štvorbodová – metóda projektívnej transformácie (kapitola 4.2) sa často používa v prípade, ak poznáme alebo vieme určiť (vypočítať) pôvodné polohy všetkých štyroch rohov rámu.

N-bodové transformačné metódy (jednosegmentové – kapitola 4 i viacsegmentové – kapitola 5) sú použiteľné pre odstránenie deformácie pomocou 5 a viac dvojíc odpovedajúcich si bodov. Výnimkou je modifikovaná kvadratická Shepardova metóda, ktorá používa na transformáciu obrazu aspoň 6 dvojíc odpovedajúcich si bodov. Použitie jednosegmentových metód s hladkosťou vyššou ako  $C^0$  zvyčajne znamená nutnosť riešenia systému lineárnych rovníc. Tieto systémy môžu mať zle podmienenú maticu, resp. môžu byť neúplné, čo vedie k nutnosti použiť spoľahlivé a dostatočne presné numerické metódy na riešenie systému rovníc (metóda *QR dekompozície*, rozklad pomocou *SVD*, riešenie *systému normálnych rovníc*, atď.). Viacsegmentové metódy zase požadujú vytvoriť dostatočne dobrú trianguláciu zadanej množiny bodov a vypočítať normály vo vrcholoch triangulácie. Tieto normály majú veľmi veľký vplyv na presnosť viacsegmentových transformačných metód.

Transformačné funkcie pre odstraňovanie deformácií obrazov sú väčšinou založené na interpolačných funkciách. Z toho vyplýva, že presnosť jednotlivých interpolačných metód určuje presnosť, s akou transformačné funkcie odstraňujú deformáciu obrazu. Táto presnosť je často testovaná na nasledujúcich funkciách [FRAN82]:

$$F_1(x, y) = \frac{3}{4} \exp \left[ -\frac{(9x-2)^2 + (9y-2)^2}{4} \right] + \frac{3}{4} \exp \left[ -\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{(9y+1)^2}{10} \right] + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{(9x-7)^2 + (9y-3)^2}{4} \right] - \frac{1}{5} \exp [-(9x-4)^2 - (9y-7)^2],$$

$$F_2(x, y) = \frac{\tanh(9x-9y)+1}{9},$$

$$F_3(x, y) = \frac{1.25 + \cos(5.4y)}{6 + 6(3x-1)^2},$$

$$F_4(x, y) = \frac{1}{3} \exp \left[ -\frac{81}{16} ((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2) \right],$$

$$F_5(x, y) = \frac{1}{3} \exp \left[ -\frac{81}{4} ((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2) \right],$$

$$F_6(x, y) = \frac{\sqrt{64 - 81((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}}{9} - 0.5,$$

$$F_7(x, y) = 1/\sqrt{1 + 2 \exp[-3(\sqrt{x^2 + y^2} - 6.7)]},$$

$$F_8(x, y) = 50 \exp[-200((x-0.3)^2 + (y-0.3)^2)] + \exp[-50((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)].$$

Interpolačné metódy som testoval postupne na troch množinách vzorkovacích bodov ležiacich v intervale  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$  roviny  $\mathbb{E}^2$ . Prvá množina bola vytvorená 75-timi náhodnými bodmi. Druhú množinu tvorilo 75 náhodne vygenerovaných bodov, ktoré splňali podmienku, že vzdialenosť medzi jej ľubovoľnými dvoma bodmi bola väčšia ako dopredu stanovená hodnota. Posledná množina bodov bola tvorená štvorcovou sieťou rovnomerne rozložených bodov.

Presnosť interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F(x, y)$  som vyčíslil pomocou hodnôt:

- *strednej kvadratickej odchýlky* –  $e_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - F(x_i, y_i))^2}$ ,
- *absolútnej chyby* –  $e_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |f(x_i, y_i) - F(x_i, y_i)|$ ,
- *relatívnej chyby* –  $r_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - F(x_i, y_i))^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^n F(x_i, y_i)^2}$ ,

kde  $n$  je počet vzorkovacích bodov,  $f(x, y)$  je interpolačná funkcia určená konkrétnou interpolačnou metódou a  $F(x, y)$  je jedna z ôsmich vyššie uvedených testovacích funkcií. Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód môžeme nájsť v tabuľke č. 4 a 5; interpolačné plochy týchto metód pre čiastočne náhodne vygenerované vzorkovacie body funkcie  $F_1(x, y)$  sú na obrázkoch 36-43 prílohy B.

Na základe grafov 3 až 10 prílohy B môžeme tenkosplajnovú interpolačnú metódu považovať vo všeobecnosti za „najpresnejšiu“. Cloughova-Tocherova interpolačná metóda dosahovala najlepšie výsledky pre normály vyčíslené pomocou Thurmerovej metódy (pozri kapitolu 6).

Presnosť jednotlivých metód pre odstraňovanie deformácií obrazu som určil na základe obrázku obsahujúceho čiernobiely mriežku (pozri obrázok 1 prílohy A) a jej troch deformácií. Prvý deformovaný obrázok (pozri obrázok 2 prílohy A) bol vytvorený stiahnutím stredov okrajov mriežky smerom k jej stredu. Druhý obrázok bol zdeformovaný transformáciou, ktorá zvlhla okraje mriežky (pozri obrázok 10 prílohy A). Posledný obrázok bol vytvorený štyrmi lokálnymi deformáciami, z ktorých dve posunuli časti obrazu, ďalšia zväčšila a posledná zmenšila časť obrazu (pozri obrázok 18 prílohy A).

Na každý z deformovaných obrázkov som aplikoval jednotlivé metódy pre odstránenie deformácií obrazov. Pre odstránenie deformácie v prvom obrázku som použil 13, v druhom 37 a v treťom 86 dvojíc odpovedajúcich si bodov (pozri obrázky 3, 11 a 19 prílohy A). Počet bodov som zvolil podľa povahy jednotlivých deformácií.

Presnosť s akou jednotlivé metódy odstránili deformáciu obrazu som určil pomocou:

- *koeficientu krížovej korelácie* –

$$CC = \left| \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij} - m n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - m n \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - m n \bar{y}^2)}} \right|,$$

kde  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  sú priemerné hodnoty:  $\bar{x} = \frac{1}{m n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$  a  $\bar{y} = \frac{1}{m n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}$ . Symbolom  $x_{ij}$  sú označené hodnoty pixlov vzorového obrazu a symbolom  $y_{ij}$  hodnoty pixlov porovnávaného obrazu,

- *univerzálného koeficientu kvality obrazu [WAN02]* –

$$UIQI = \frac{4 \sigma_{xy} \bar{x} \bar{y}}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(\bar{x} + \bar{y})},$$

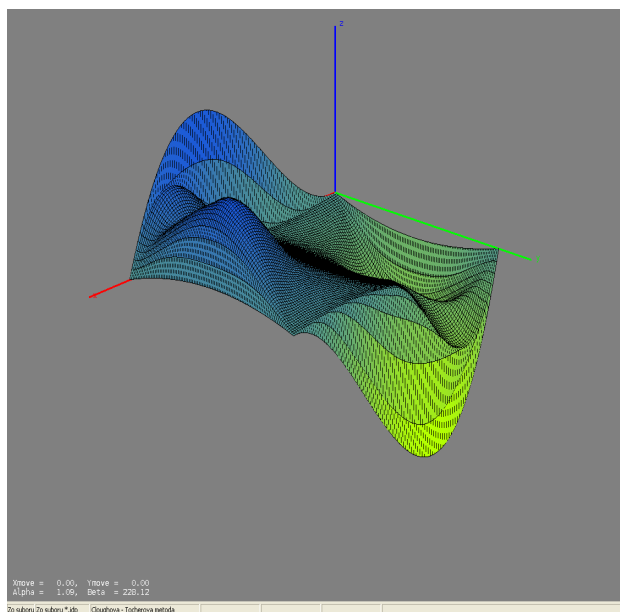
$$\text{kde } \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2}{(m-1)(n-1)}, \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2}{(m-1)(n-1)} \quad \text{a} \quad \sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y})}{(m-1)(n-1)}.$$

Porovnával som vždy pôvodný, nedeformovaný obrázok s obrázkom, v ktorom bola odstránená deformácia konkrétnou metódou. Na obrázkoch č. 4-9, 12-17 a 20-25 prílohy A sú zobrazené dvojice mriežok. Červenou farbou je zafarbená mriežka v pôvodnom, nedeformovanom obrázku, čiernou farbou mriežka obrázku s odstránenou deformáciou. Výsledky týchto porovnaní sú uvedené v tabuľke č. 3 a v grafoch 1 a 2 prílohy A. Zo všetkých metód na odstránenie deformácií obrazu bola najpresnejšia tenkosplajnová metóda.

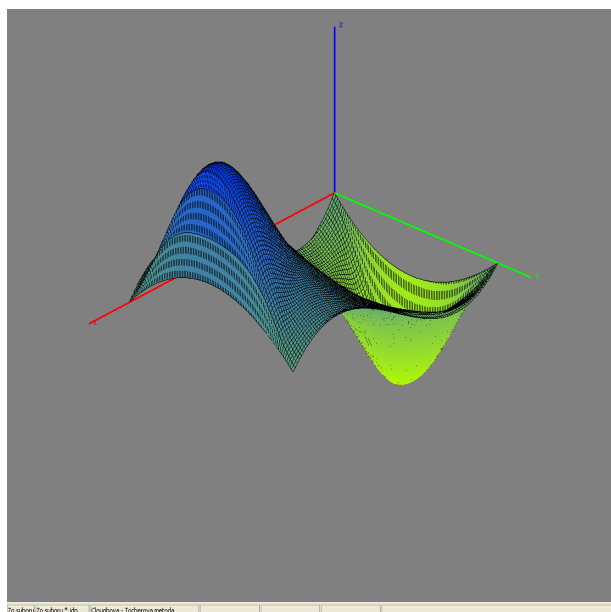
Použitie Cloughovej-Tocherovej metódy v prípade odstránenia deformácie stiahnutej mriežky nevedlo k dobrým výsledkom. Dôvodom bol vznik veľkej oscilácie pri okrajoch vypo-

čítanej interpolačnej plochy (pozri obrázok 8.1). Tento nežiadúci efekt je možné odstrániť použitím Akimovej metódy pre odhad normál (pozri obrázok 8.2), prípadne určiť normálu pomocou metódy lokálneho aproximantu (pozri kapitolu 6).

Transformačné metódy používajúce základné transformácie objektov v rovine (otočenie, posunutie a škálovanie), spolu s dvojbodovou, trojbodovou a štvorbodovou transformačnou metódou sú metódy s globálnym vplyvom. Podobne to platí i pre väčšinu jednosegmentových metód. Metódy s globálnym vplyvom sa používajú v prípade, keď zadaním malého počtu odpovedajúcich si bodov potrebujeme dosiahnuť zmeny v celom obraze. Pri potrebe metód s lokálnym vplyvom je vhodné zvoliť ľubovoľnú viacsegmentovú metódu, prípadne použiť modifikácie niektorých jednosegmentových metód – napr. metódy radiálnych bázických metód s lokálnym nosičom (kapitola 4.4), resp. modifikovanú kvadratickú Shepardovu metódu (kapitola 4.6).



Obrázok 8.1: Cloughova-Tocherova metóda. Normály počítane pomocou Thurmerovho odhadu.



Obrázok 8.2: Cloughova-Tocherova metóda. Normály počítane pomocou Akimovho odhadu.

## Záver

Predkladaná dizertačná práca sa zaoberá metódami umožňujúcimi odstrániť tvarové deformácie obrazu. Prvá časť práce uvádza postupy úpravy obrazu pomocou filtrácie a binarizácie obrazu, druhá časť obsahuje popis jednotlivých metód pre odstránenie deformácií obrazov a posledná ich zhodnotenie z hľadiska presnosti.

Hlavným cieľom práce bolo zozbierať interpolačné metódy, ktoré sú použiteľné pre odstránenie deformácie obrazu (ODO), navrhnúť nové metódy a porovnať presnosť s akou odstraňujú deformácie. Ďalej odpovedať na otázku: „Ktoré interpolačné metódy sú vhodné pre odstránenie konkrétnych deformácií obrazu a prečo“. Výsledky práce sú použité v priloženom programe *OpravaDeformacii* určenom pre úpravu obrázkov.

Z množstva mne dostupných publikovaných článkov sa zaoberá tematikou porovnania viacerých metód pre ODO len jediná práca [NCG96], no i v nej nie je možné nájsť také široké množstvo porovnávaných metód ako v tejto práci. Samotnou problematikou ODO sa nezaobrá mnoho autorov, avšak prác s príbuznou témou – *metódy registrácie obrazu* (image registration) je možné nájsť pomerne dosť. Z nich najznámejšie sú práce A. Goshtasbyho [GOSH86], [GOSH87] a [GOSH88].

Väčšina metód pre ODO, tak ako sú navrhnuté v tejto práci, používa interpolačné plochy. Takto je možné použiť takmer ľubovoľnú metódu pre interpoláciu nerovnomerne rozptýlených dát.

V práci som použil pomerne veľké množstvo aktuálnej literatúry z teórie spracovania obrazu ako i z oblasti interpolačných metód nerovnomerne rozptýlených dát. Pri výbere metód som kládol dôraz na rýchlosť ich výpočtu, nenáročnosť z hľadiska implementácie a použiteľnosť pre interaktívnu prácu. Zozbierané interpolačné metódy som doplnil o vlastné metódy, ktoré som v práci nazval trojuholníkové. Tieto nové metódy dávajú prijateľné výsledky a sú veľmi rýchle v porovnaní s ostatnými.

Presnosť metód ODO používajúcich trianguláciu vstupných dát závisí aj od odhadu normál vo vrchoch trojuholníkovej siete. Mojou snahou preto bolo zozbierať čo možno najväčšie množstvo metód odhadu normál, aby som vo výslednej aplikácii použil taký odhad, ktorý zabezpečí dostatočnú presnosť aj pri rozmanitých polohách odpovedajúcich si bodov.

Navrhol som novú metodiku určenia presnosti metód pre ODO. Pomocou obrazov obsahujúcich deformovanú mriežku som porovnal ich presnosť a našiel odpoveď na otázku, ktorá metóda je najpresnejšia a najvhodnejšia.

Pretože triangulácia množiny odpovedajúcich si bodov nemusí vždy pokrývať celú plochu obrázku, navrhol som postup ako túto trianguláciu rozšíriť na celý obrázok.

V časti spracovania obrazu som navrhol vlnovú metódu, využívajúcu princíp koherencie, ktorú som použil na urýchlenie výpočtu pixlov nového obrazu. Keďže toto urýchlenie nebolo dostačujúce, vytvoril som nový postup príbuzný technike „dopredného zobrazovania“, ktorý umožňuje transformovať i veľký obraz v reálnom čase bez nutnosti poznať inverznú transformáciu. Metódy vhodné pre ODO som implementoval v programe pre kompletnú úpravu obrázku. Pomocou tohto programu je možné nielen odstrániť deformácie obrázku pomocou dvojíc odpovedajúcich si bodov ale i obrázkov filtrovať a binarizovať.

Niektoré z navrhnutých transformačných metód (tenkosplajnovú, trojuholníkové a Shepar-dovú metódu) som použil pri vytvorení rozsiahleho grafického programu pre úpravy a spracovanie katastrálnych máp. Tento program bol vytvorený na základe požiadavky Ministerstva pôdohospodárstva pre účely vytvorenia registra obnovenej evidencie pozemkov SR (ROEP).

V budúcnosti chcem implementovať metódy radiálnych bázických funkcií s lokálnym nosičom (a nahradiť tak lokálne pracujúcu Cloughovu-Tocherovu metódu), keďže predpokladám, že ich presnosť je väčšia ako u Cloughovej-Tocherovej metódy. Najskôr však overím, či odhad normál pomocou lokálneho interpolantu nezabezpečí výrazne zväčšenie presnosti Cloughovej-Tocherovej metódy.

# Literatúra

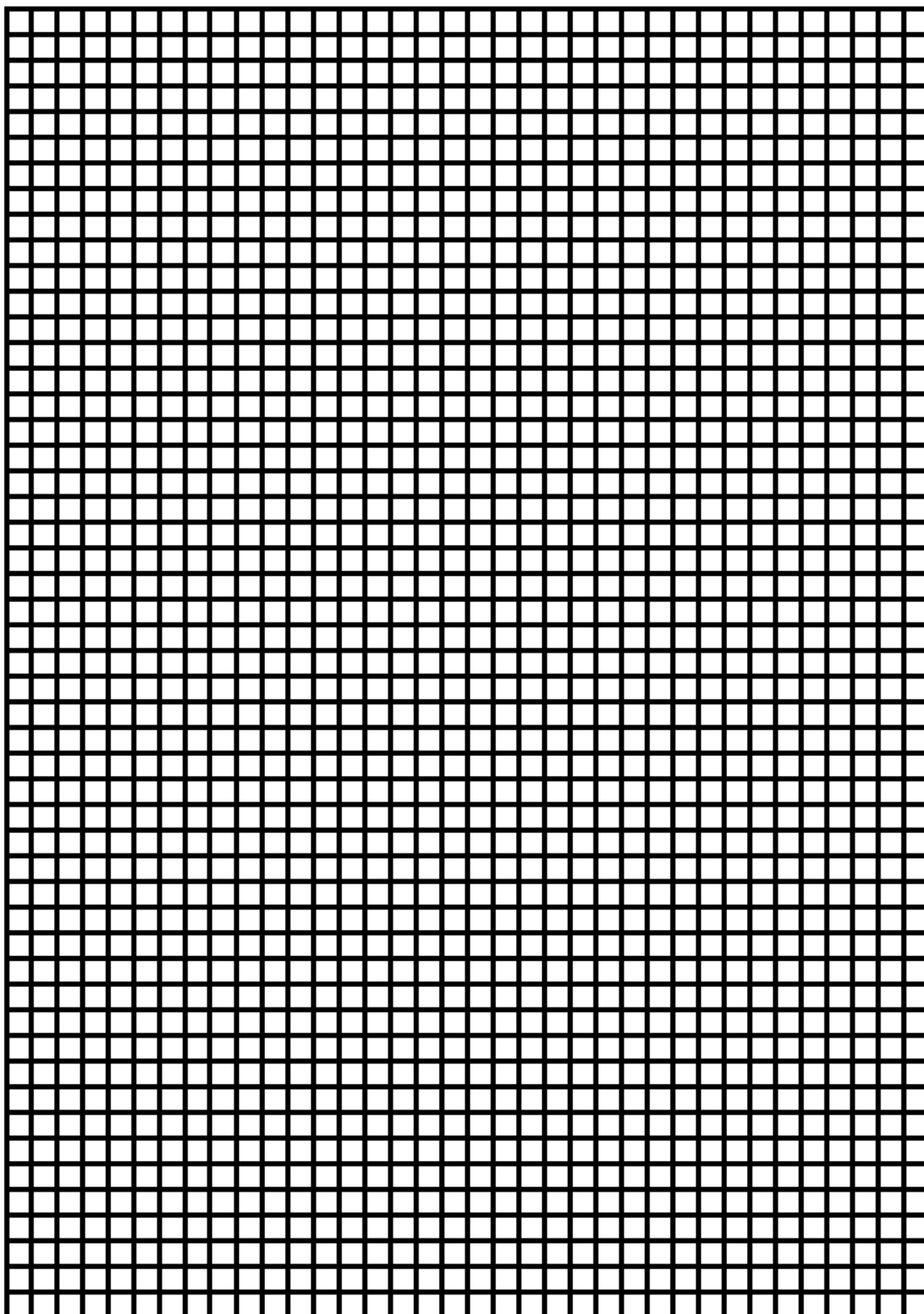
- [AKI84] H. Akima: *On Estimating partial derivatives for bivariate interpolation of scattered data*. Rocky Mountain Journal of Mathematics 1(14), 1984, (str. 41-52).
- [AMID02] I. Amidror: *Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems*. Journal of Electronic Imaging 2(11), 2002, (str. 157-176).
- [AURE87] F. Aurenhammer: *Power diagrams: properties, algorithms and applications*. SIAM Journal of Computing 16, 1987, (str. 78-96).
- [BERG00] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf: *Computational Geometry Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2000.
- [BLAZ] <http://dip.sccg.sk>, *Digital Image Processing*.
- [BOOK89] F. Bookstein: *Principal Warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine 6(11), 1989, (str. 567-585).
- [BUH04] M. Buhmann: *A new class of radial basis functions with compact support*. Mathematics of Computation 70(233), 2004, (str. 307-318).
- [CATT92] F. Catte, P. Lions, J. Morel: *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*. SIAM Journal on Numerical Analysis 29(3), 1992, (str. 845-886).
- [CEN87] Z. Cendes, S. Wong:  *$C^1$  quadratic interpolation over arbitrary point sets*. IEEE Computer Graphics And Applications, 1987, (str. 8-16).
- [COMP] <http://www.compuphase.com/cmetric.htm>, *Colour metric*.
- [CHOW72] C. Chow, T. Kaneko: *Automatic boundary detection of the left ventricle from cineangiograms*. Computers and Biomedical Research 5, 1972, (str. 388-410).
- [DELFT] <http://www.ph.tn.tudelft.nl/Courses/FIP/frames/fip.html>, *Image Processing Fundamentals*.
- [DUCH77] J. Duchon: *Lecture Notes in Mathematics 571*. Springer-Verlag, Berlin, 1977, (str. 85-100).
- [DUR96] V. Ďuráči: *Spracovanie medicínskych dát*. Diplomová práca. FMFI Univerzita Komenského, Bratislava, 1996.
- [DURA02] F. Durand, J. Dorsey: *Fast Bilateral Filtering for the Display of High-Dynamic-Range Images*. ACM Transactions on Graphics, 2002, (str. 257-266).
- [DYN90] N. Dyn, D. Levin, S. Rippa: *Data dependent triangulation for piecewise linear interpolation*. IMA Journal of Numerical Analysis 10(1), 1990, (str. 137-154).
- [EBER99] D. Eberly:  *$C^1$  Quadratic Interpolation of Meshes*. Geometric Tools, 1999, (str. 1-10).
- [FAR85] G. Farin: *A modified Clough-Tocher interpolant*. Computer Aided Design 2, 1985, (str. 19-27).
- [FAR97] G. Farin: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic, San Diego, 1997.
- [FOL92] T. Foley, K. Opitz: *Hybrid cubic bezier triangle patches*. Mathematical Methods in CAGD II, 1992, (str. 275-286).
- [FORN99] M. Fornefett, K. Rohr, H. Stiehl: *Elastic Registration of Medical Images Using Radial Basis Functions with Compact Support*. Computer Vision and Pattern Recognition, 1999, (str. 402-407).
- [FRAN80] R. Franke, G. Nielson: *Smooth interpolation of large sets of scattered data*. Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering 15, 1980, (str. 1691-1704).
- [FRAN82] R. Franke: *Scattered data interpolation: Test of some methods*. Mathematics of Computation 38(157), 1982, (str. 181-200).



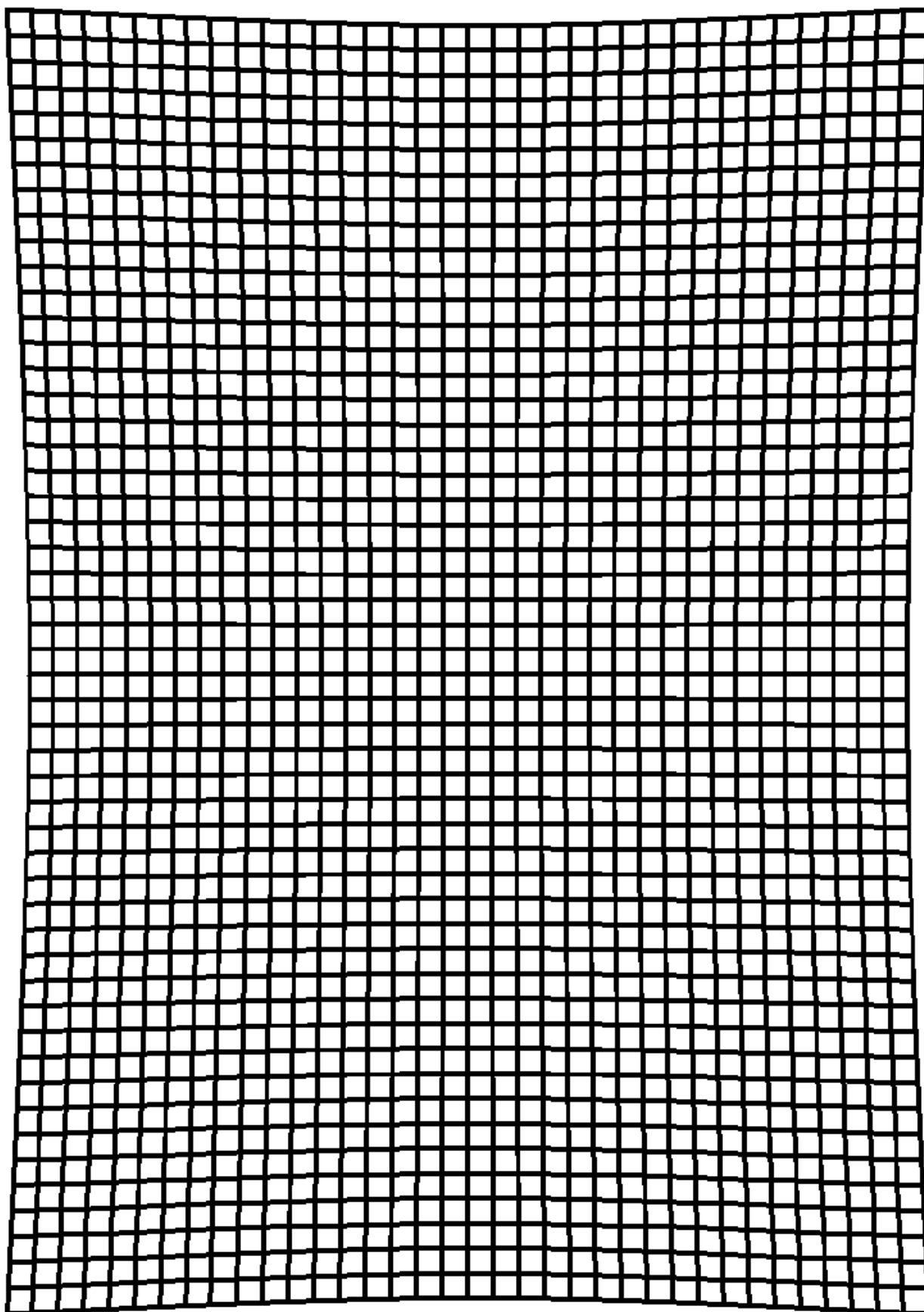
- [GOSH86] A. Goshtasby: *Piecewise Linear Mapping Functions for Image Registration*. Pattern Recognition 9(6), 1986, (str. 459-466).
- [GOSH87] A. Goshtasby: *Piecewise Cubic Mapping Functions for Image Registration*. Pattern Recognition 20(5), 1987, (str. 525-533).
- [GOSH88] A. Goshtasby: *Image Registration by Local Approximation Methods*. Image and Vision Computing 6(4), 1988, (str. 255-261).
- [GRE77] P. J. Green, R. Sibson: *Computing the Dirichlet Tesselation in the Plane*. The Computer Journal 2(21), 1977, (str. 168-173).
- [HAR71] R. Hardy: *Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces*. Journal Geophysical Research (76), 1971, (str. 1905-1915).
- [HOS93] J. Hoschek, D. Lasser: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters, Wellesley, MA, 1993, (str. 388-421).
- [HRACH03] <http://physics.ujep.cz/~jkrejci/Skola/Hrach/PF-II.pdf>, *Počítačová fyzika II*.
- [ISKE03] A. Iske: *Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for Transport Problem*. Seminar of Mathematics, 2003, (str. 247-274).
- [ISO03] Klaus Richter: *Reference Report from the TC1-57*. CIE Standard - CIELAB, 2003.
- [KASH96] P. Kashyap: *Improving Clough-Tocher Interpolants*. Computer Aided Geometric Design 13, 1996, (str. 629-651).
- [LAW77] C. L. Lawson: *Software for  $C^1$  surface interpolation*. Academic Press, 1977, (str. 161-194).
- [LEHM99] T. Lehmann, C. Gonner, K. Spitzer: *Interpolation Method in Medical Image Processing*. IEEE Transactions on Medical Imaging 18(11), 1999, (str. 1049-1075).
- [LIND] <http://www.brucelindbloom.com>, *RGB To XYZ conversion*.
- [MACK] <http://www.cs.sfu.ca/~stella/papers/blairthesis/main/main>, *Intracranial Boundary Detection and Radio Frequency Correction in Magnetic resonance images*.
- [MANN98] S. Mann: *Cubic precision Clough-Tocher interpolation*. Computer Science Department, 1998, (str. 1-11).
- [MCLA76] D. McLain: *Two dimensional interpolation from random data*. The Computer Journal 19, 1976, (str. 178-181).
- [MIKA85] S. Míka: *Numerické metody algebry*. SNTL, 1985, (str. 122-126).
- [MITCH88] D. Mitchell, A. Netravali: *Reconstruction filters in computer graphics*. In Proceedings of SIGGRAPH '88 22(4), 1988, (str. 221-228).
- [MORS98] B. Morse, D. Schwartzwald: *Isophote-based interpolation*. International Conference on Image Processing, 1998, (str. 227-231).
- [MRAZ01] P. Mrázek: *Nonlinear Diffusion for Image Filtering and Monotonicity Enhancement*. Dizertačná práca. Czech Technical University, 2001.
- [NCG96] D. Fogel, L. Tinney: *Image Registration using Multiquadric Functions, the Finite Element Method, Bivariate Mapping Polynomials and the Thin Plate Spline*. National Center for Geographic Information and Analysis, 1996, (str. 1-63).
- [OHT03] Y. Ohtake, A. Belyaev, M. Alexa, G. Turk, H. Seidel: *Multi-level partition of unity implicits*. ACM Transactions on Graphics 22(3), 2003, (str. 463-470).
- [PER90] P. Perona, J. Malik: *Scale-space and edge-detection using anisotropic diffusion*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine 12(7), 1990, (str. 629-639).

- [POUD04] J. Poudroux, I. Tobor, J. Gonzato, P. Guitton: *Adaptive hierarchical RBF interpolation for creating smooth digital elevation models*. Proc. of the 12th annual ACM intern. workshop, 2004, (str. 232-240).
- [POW77] M. Powell, M. Sabin: *Piecewise Quadratic Approximations on Triangles*. ACM Transactions on Mathematical Software 3(4), 1977, (str. 316-325).
- [REN84] R. Renka, A.Cline: *A Triangle-Based  $C^1$  Interpolation Method*. Rocky Mountain Journal of Mathematics 14(1), 1984, (str. 223-237).
- [RIDL78] T. Ridler, S. Calvard: *Picture Thresholding Using an Iterative Selection Method*. IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics 8, 1978, (str. 630-632).
- [SED87] O. Šedivý, M. Božek, J. Duplák, P. Kršňák, M. Trenkler: *Geometria 2*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1987, (str. 136-224,198-206).
- [SHEP68] D. Shepard: *A two dimensional interpolation function for irregular spaced data*. Proceedings 23rd ACM National Conference, 1968, (str. 517-524).
- [SHEU99] G. Sheuermann, X. Tricoche, H. Hagen:  *$C^1$ -interpolation for vector field topology visualization*. Proceedings of the conference on Visualization '99, 1999, (str. 271-278).
- [SIBS78] R. Sibson: *Locally equiangular triangulations*. The Computer Journal 2(21), 1978, (str. 243-245).
- [SMIT95] S. Smith, J. Brady: *SUSAN A New Approach to Low Level Image Processing*. 1995.
- [SOL93] Š. Solčan: *Projektívna geometria*. Univerzita Komenského v Bratislave, 1993, (str. 72-79).
- [STE84] S. Stead: *Estimation of gradients from scattered data*. Rocky Mountain Journal of Mathematics 1(14), 1984, (str. 265-279).
- [STR73] G. Strang, G. Fix: *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [TOM98] C. Tomasi, R. Manduchi: *Bilateral Filtering for Gray and Color Images*. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference, 1998.
- [TOTH04] Z. Tóth: *Rekonštrukcia obrazu pomocou triangulácie*. Diplomová práca. FMFI Univerzita Komenského, Bratislava, 2004
- [WAN02] Z. Wang, A. Bovik: *A universal Image Quality Index*. IEEE Processing Signal Letters 9(3), 2002, (str. 81-84).
- [WEN95] H. Wendland: *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*. Advances in Computational Mathematics (4), 1995, (str. 389-396).
- [WIKI1] <http://en.wikipedia.org/wiki/CIELAB>, *CIELab definition*.
- [WOR87] A. J. Worsey, G. Farin: *An  $n$ -dimensional Clough-Tocher interpolant*. Constructive Approximation (3), 1987, (str. 99-110).
- [YU01] X. Yu, B. Morse, T. Sederberg: *Image Reconstruction Using Data Dependent Triangulation*. Journal IEEE Computer Graphics And Applications 21(3), 2001, (str. 62-66).
- [ZACK77] G. Zack, W. Rogers, S. Latt: *Automatic Measurement of Sister Chromatid Exchange Frequency*. Journal of Histochemistry and Cytochemistry 25(7), 1977, (str. 741-753).

# Príloha A



Obrázok 1: Pôvodná, nedeformovaná mriežka.



Obrázok 2: Deformovaná mriežka – stiahnutá.

4

8  
8

4

15

10

16  
16

9

16  
16

13  
13

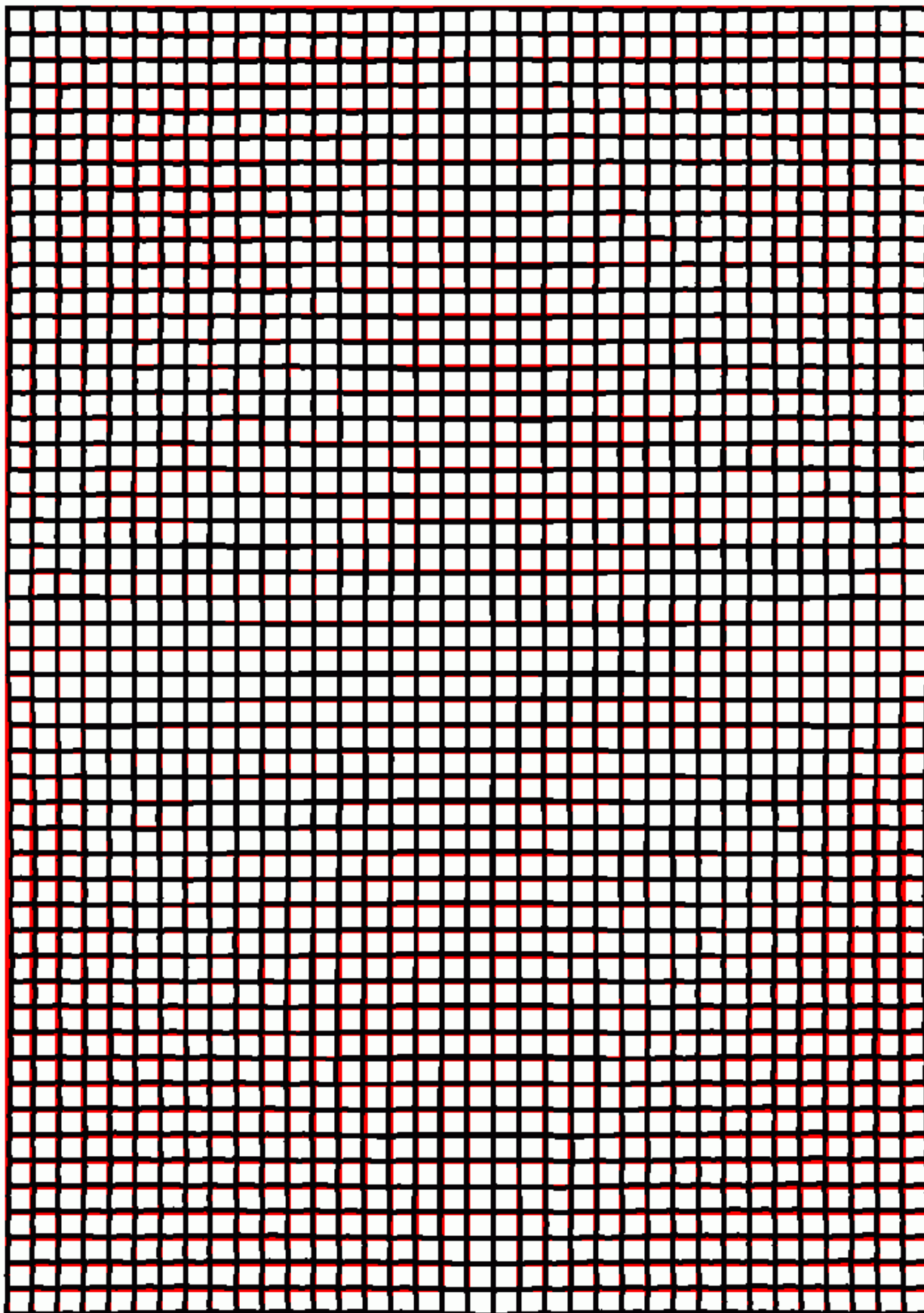
12  
12

13

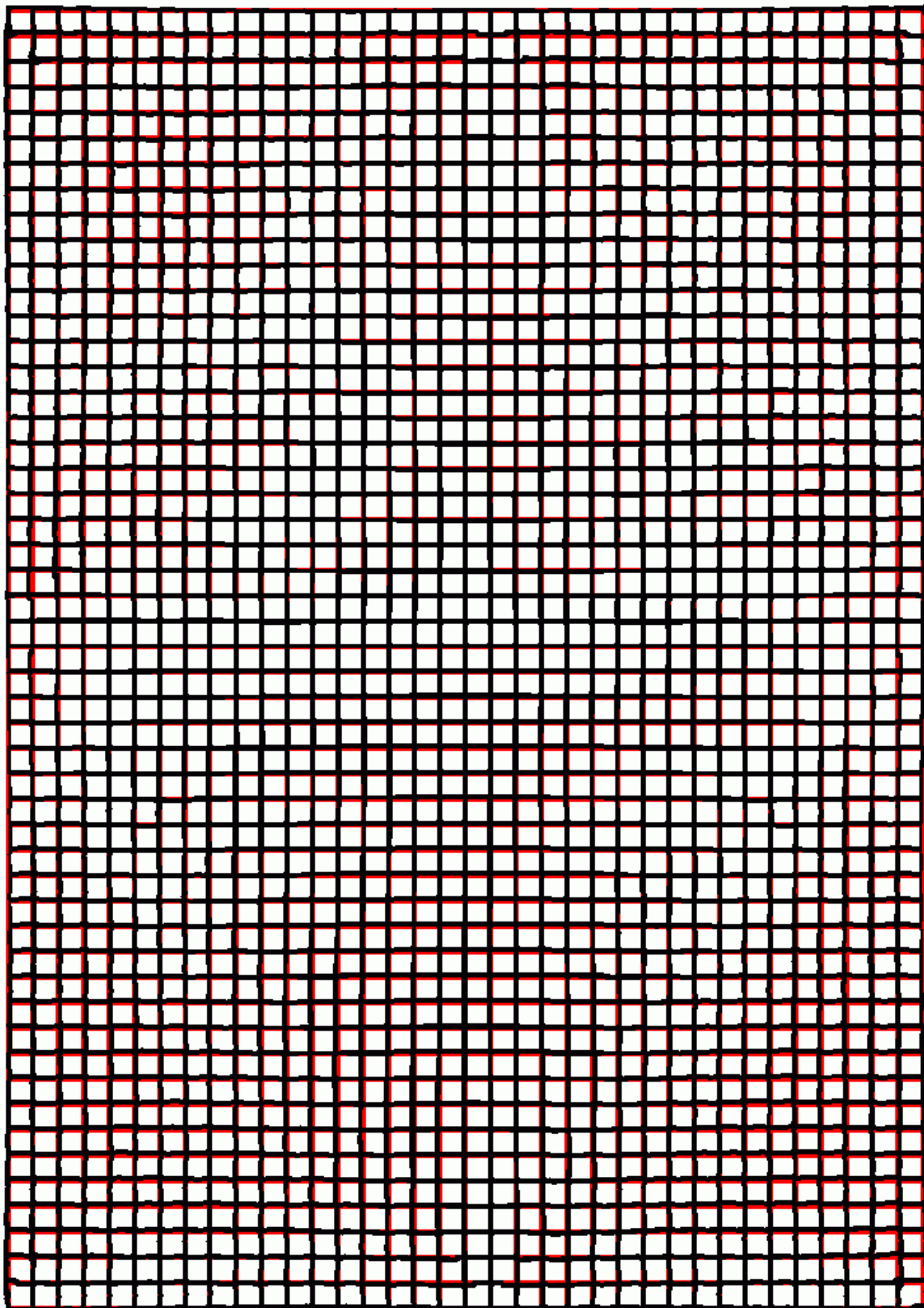
17  
17

12

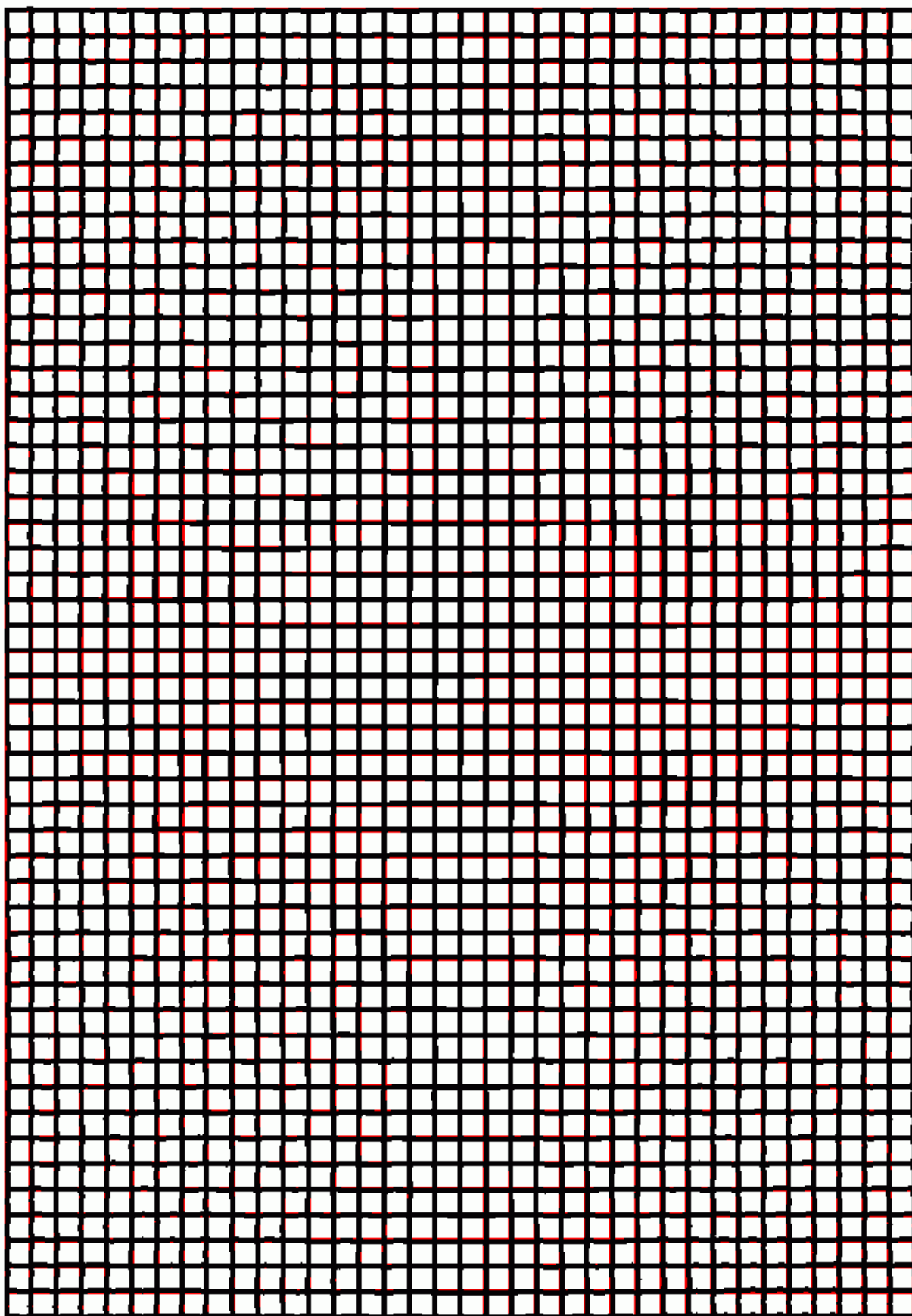
Obrázok 3: Zadané odpovedajúce si body pre opravu stiahnutej mriežky (13 bodov).



Obrázok 4: Opravenie stiahnutej mriežky – jednoduchá trojuholníková metóda ( $CC = 0,74822$ ).

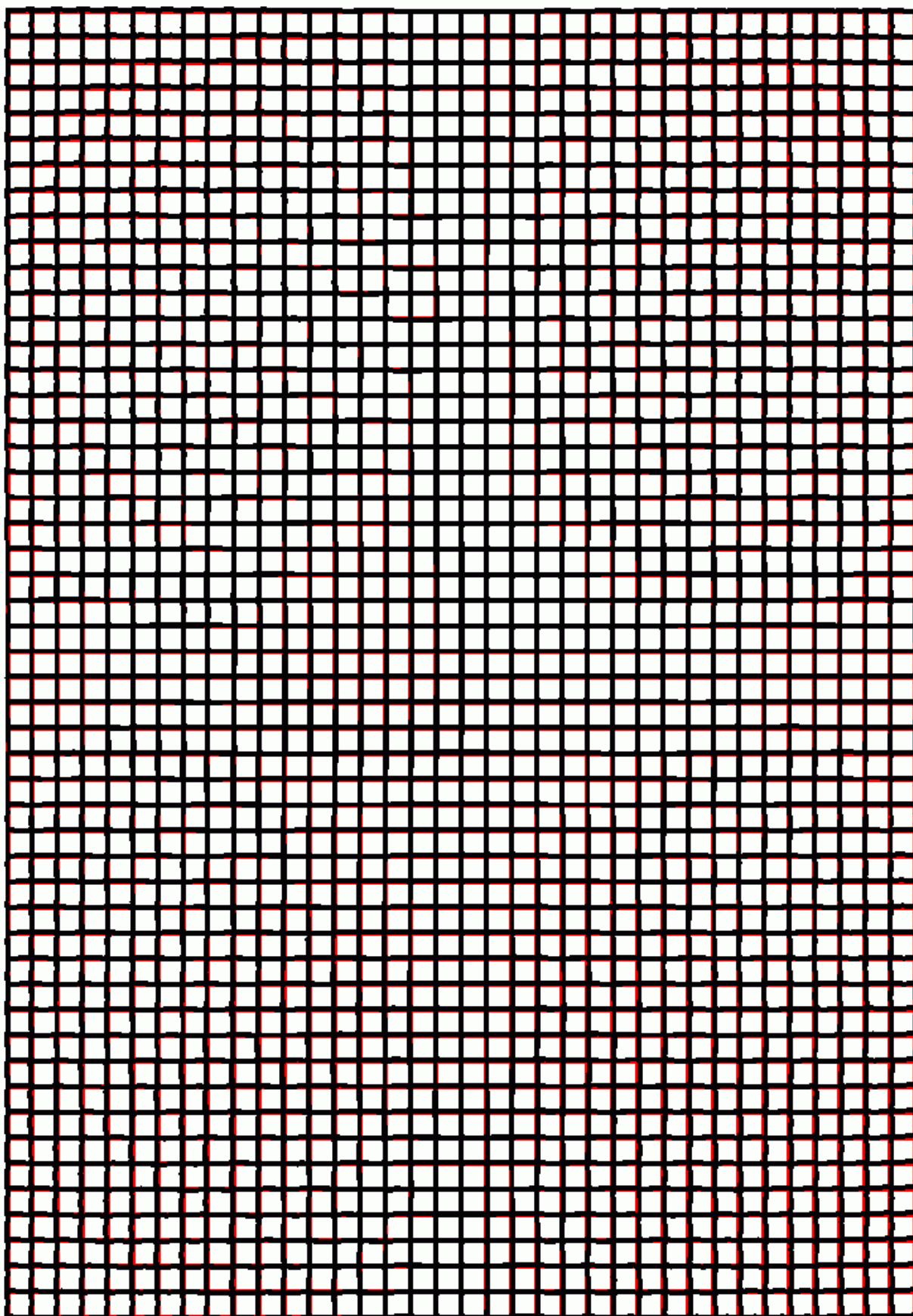


Obrázok 5: Opravenie stiahnutej mriežky – hladká trojuholníková metóda ( $CC = 0,75398$ ).

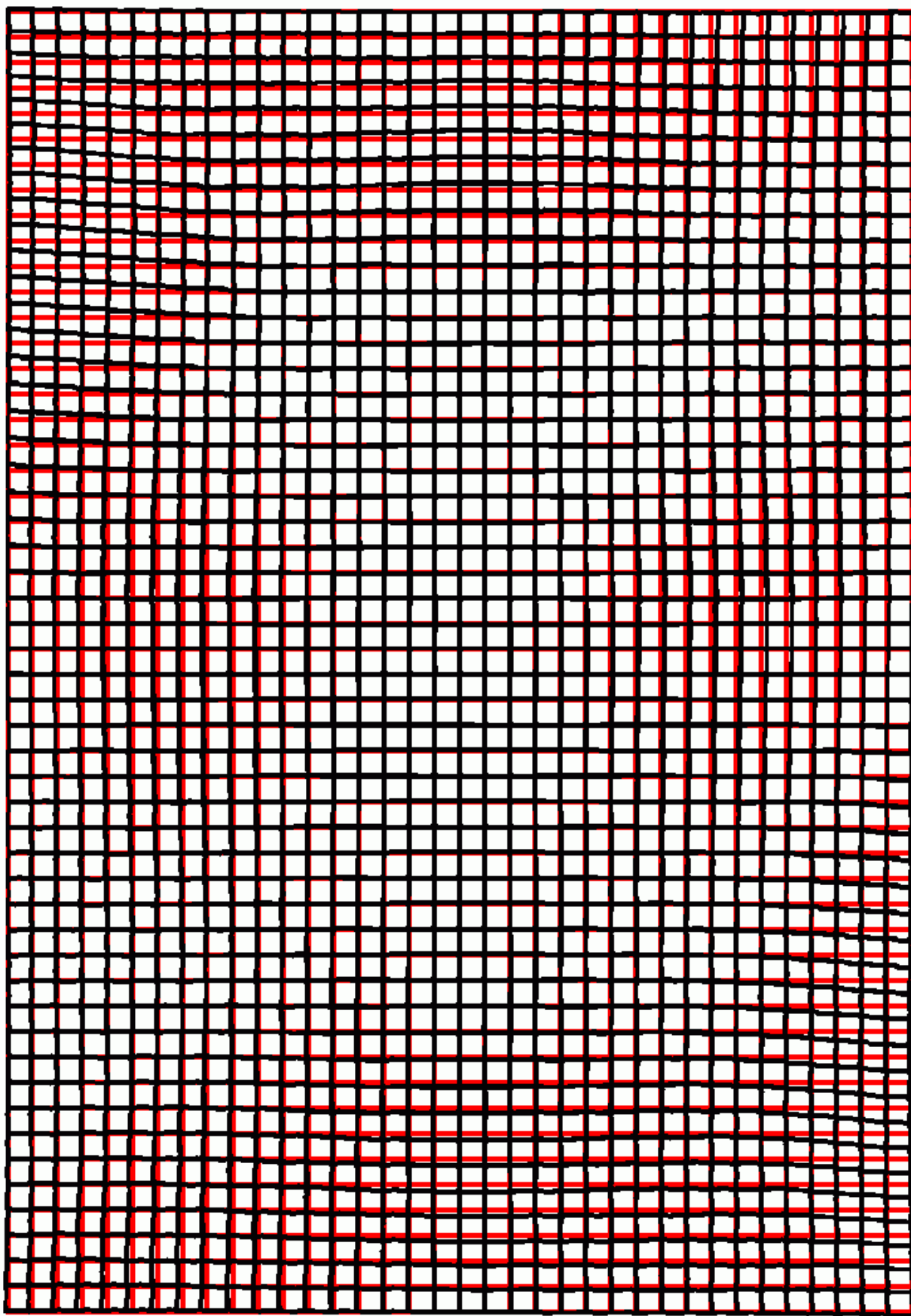


Obrázok 6: Opravenie stiahnutej mriežky – tenkosplajnová metóda ( $CC = 0,83655$ ).

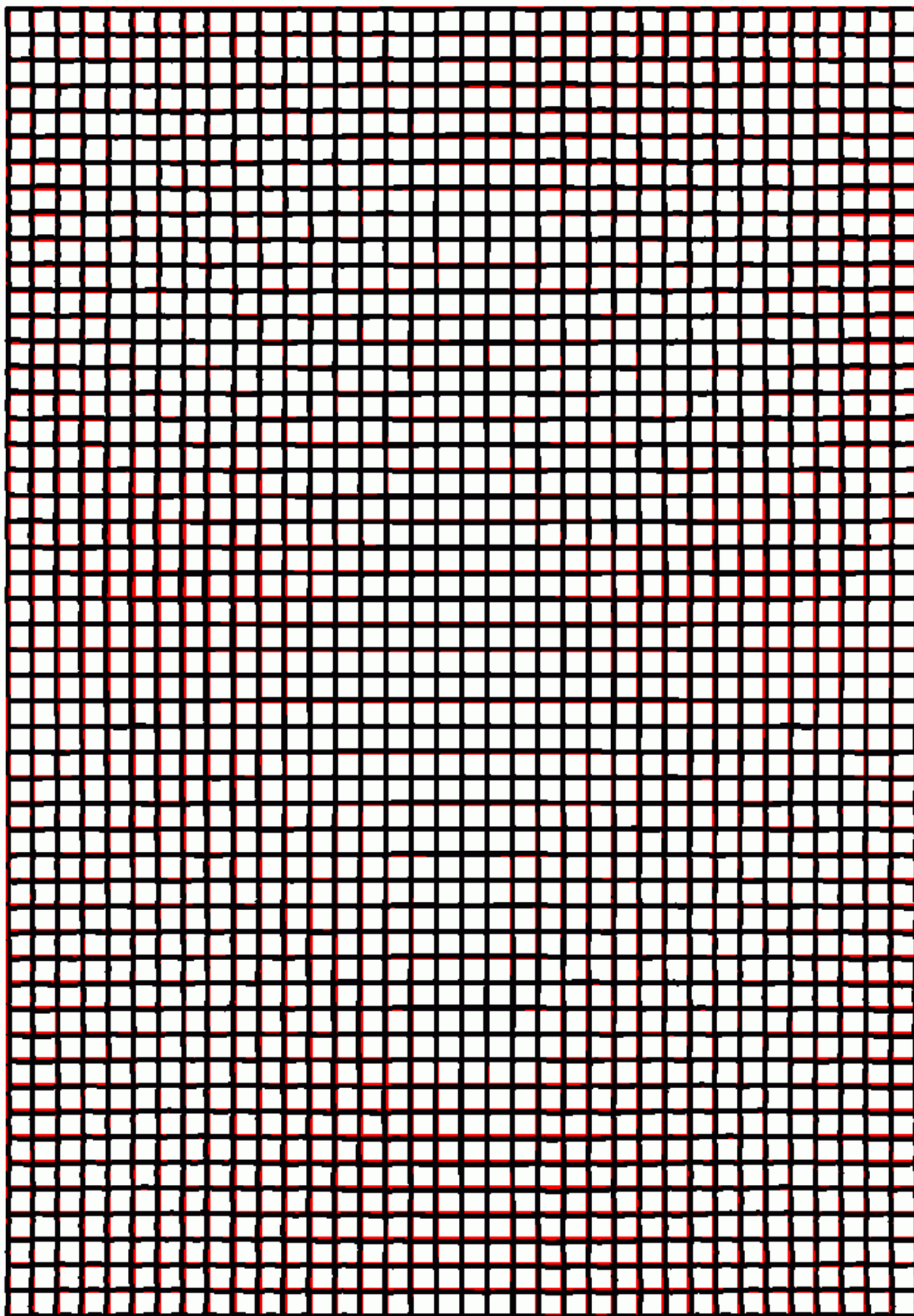




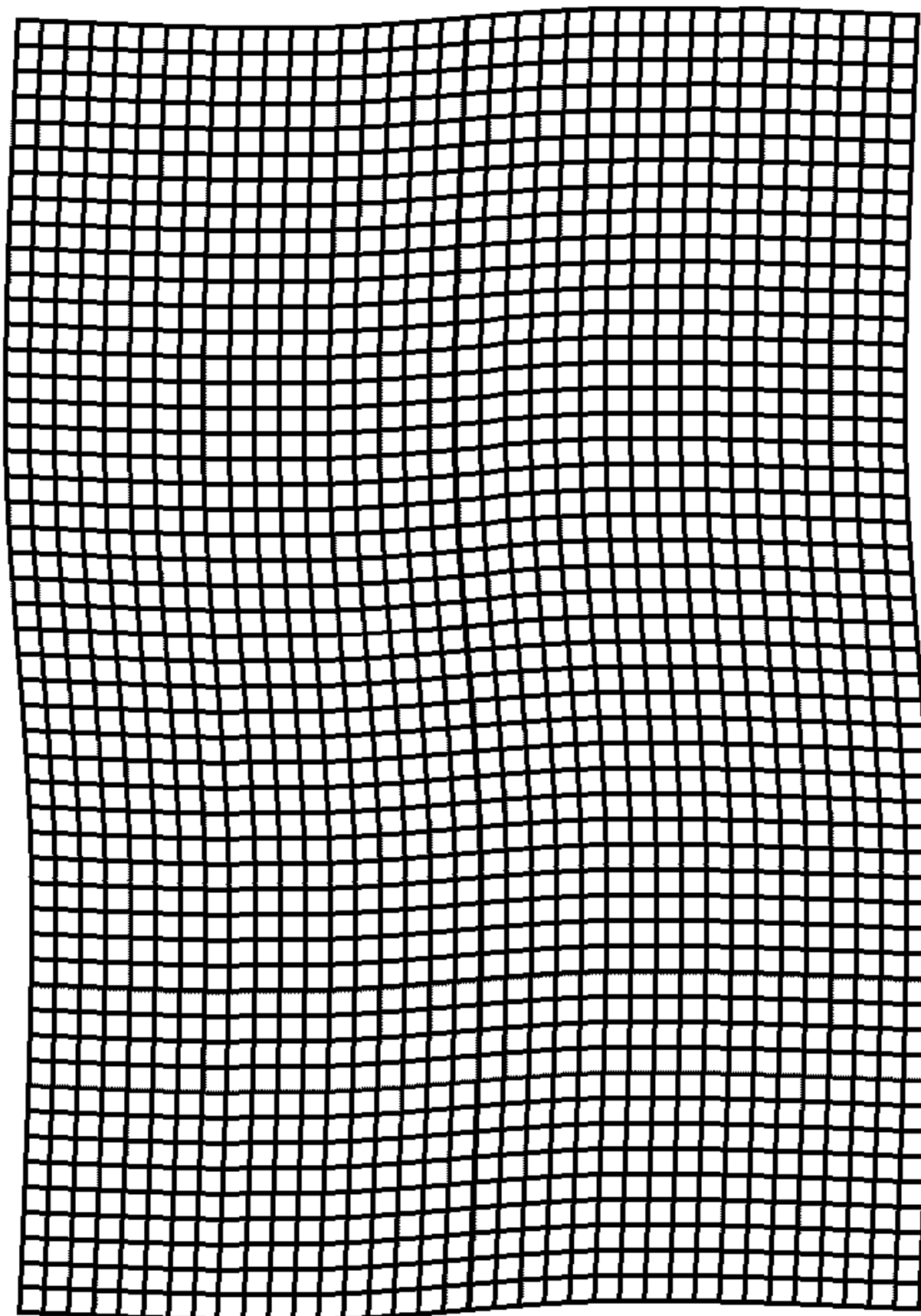
Obrázok 7: Opravenie stiahnutej mriežky – kvadratická Shepardova metóda ( $CC = 0,81108$ ).



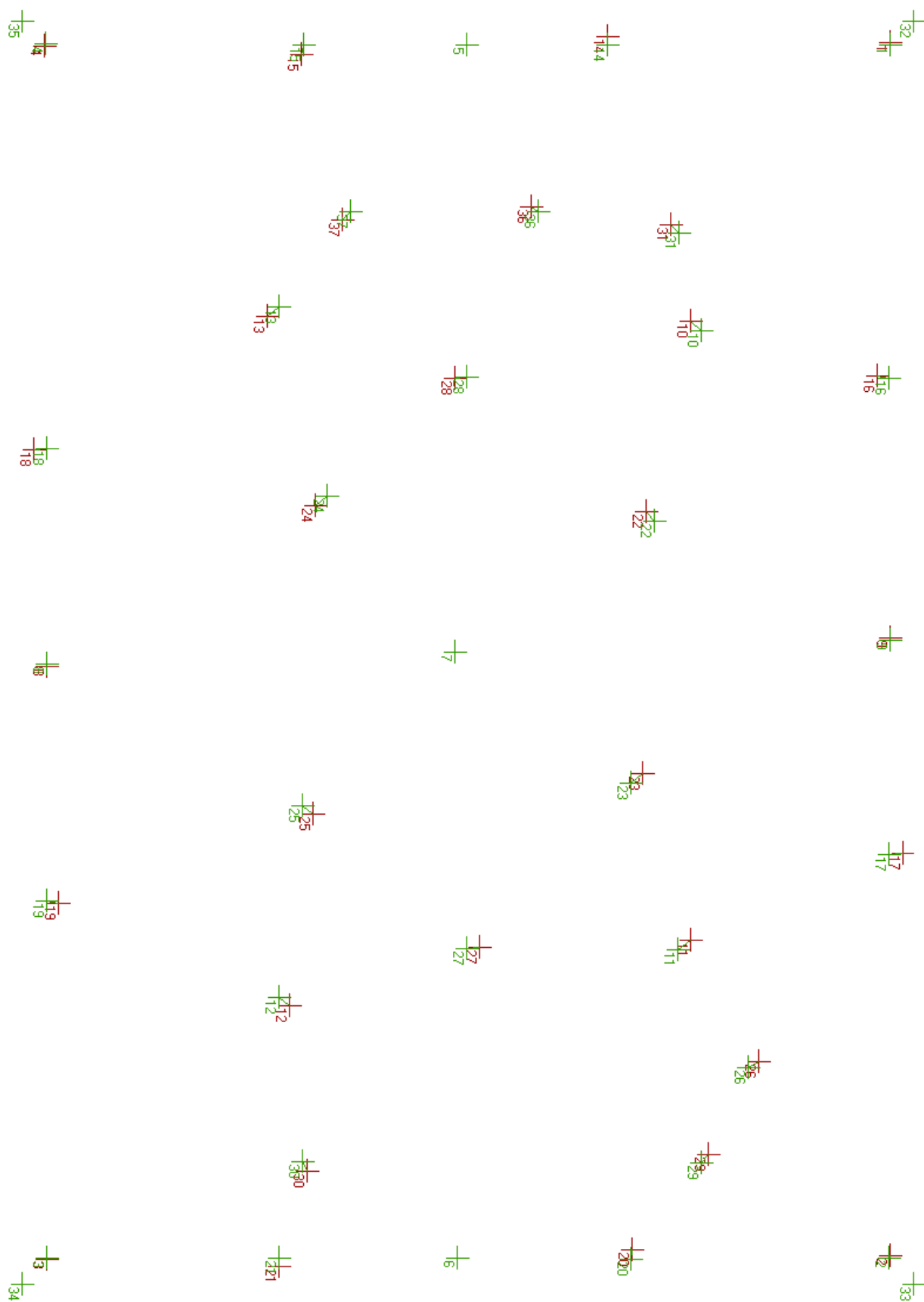
Obrázok 8: Opravenie stiahnutej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda. Normály vypočítané podľa Thurmerovej metódy ( $CC = 0,58551$ ).



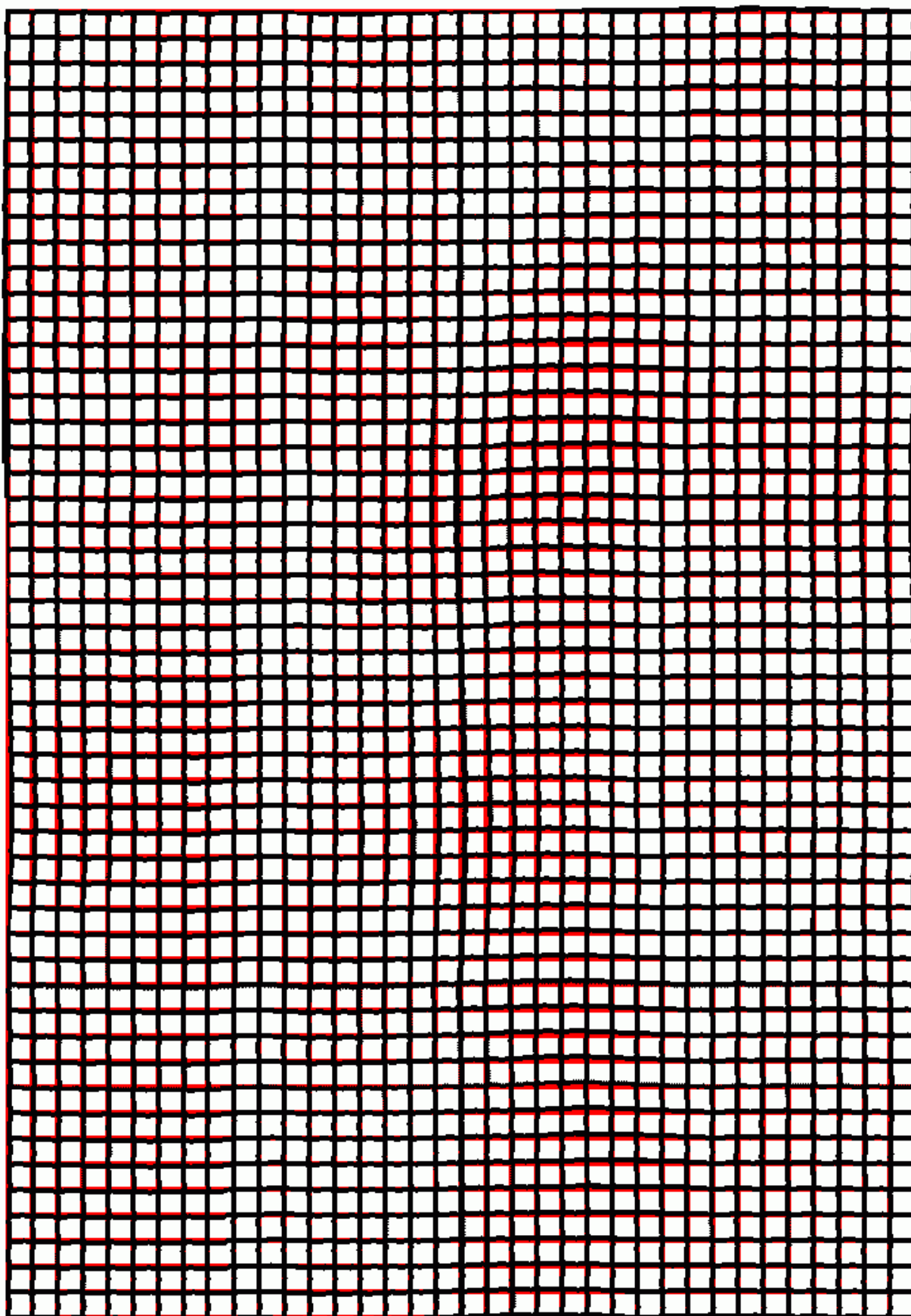
Obrázok 9: Opravenie stiahnutej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda. Normály vypočítané podľa Akimovej metódy ( $CC = 0,79438$ ).



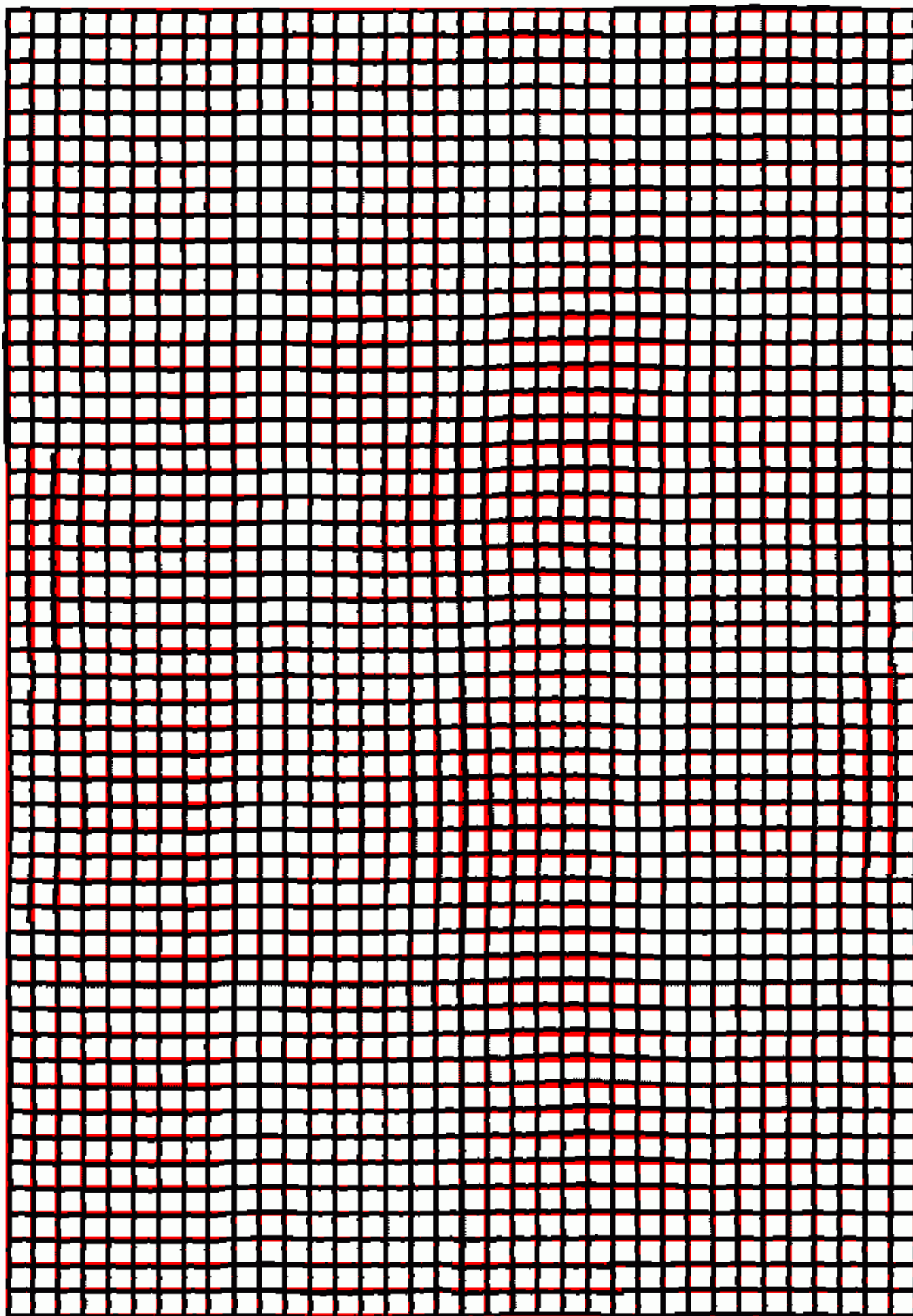
Obrázok 10: Deformovaná mriežka – zvlnená.



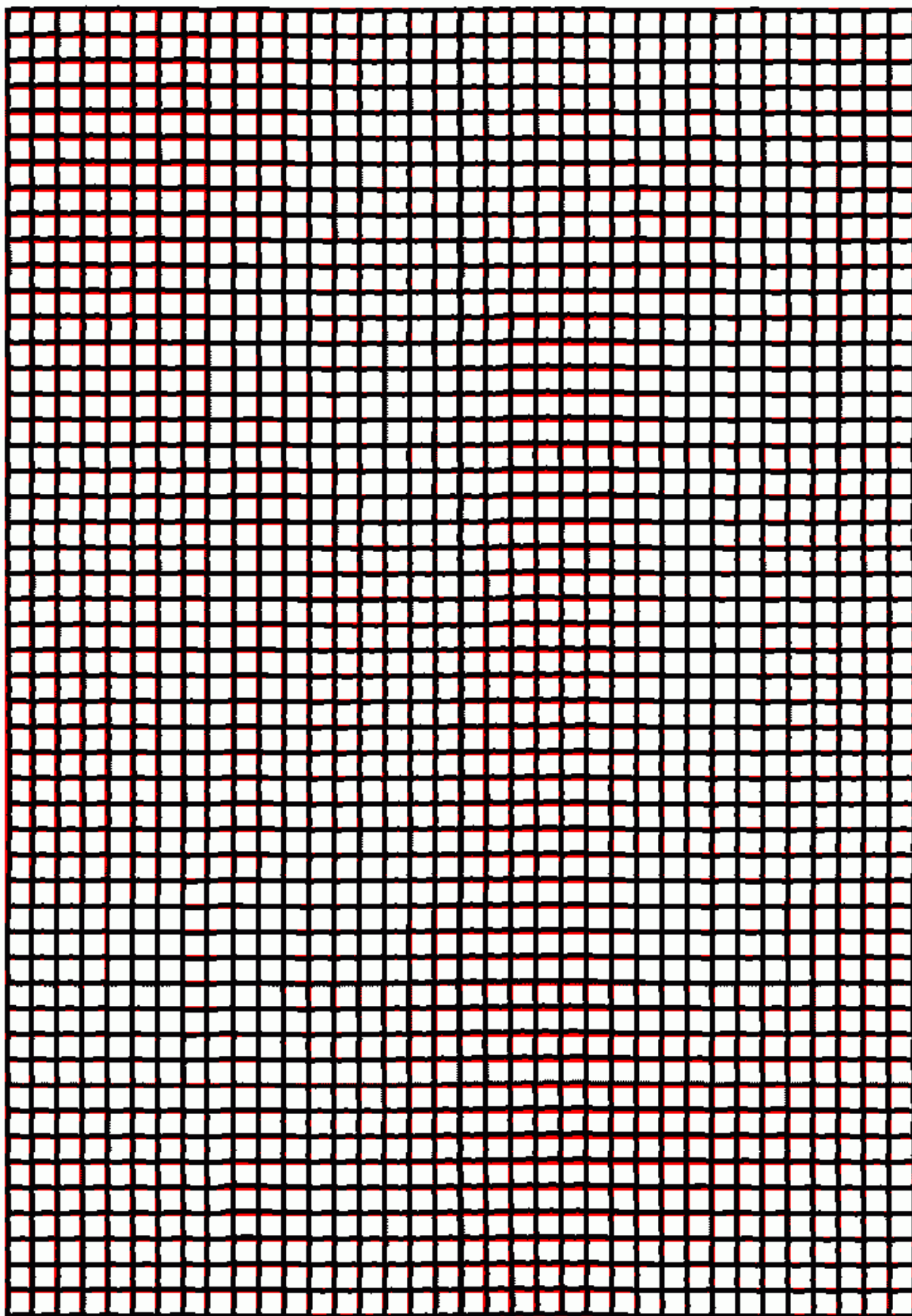
Obrázok 11: Zadané odpovedajúce si body pre opravu zvlnenej mriežky (37 bodov).



Obrázok 12: Opravenie zvlnenej mriežky – jednoduchá trojuholníková metóda ( $CC = 0,72185$ ).

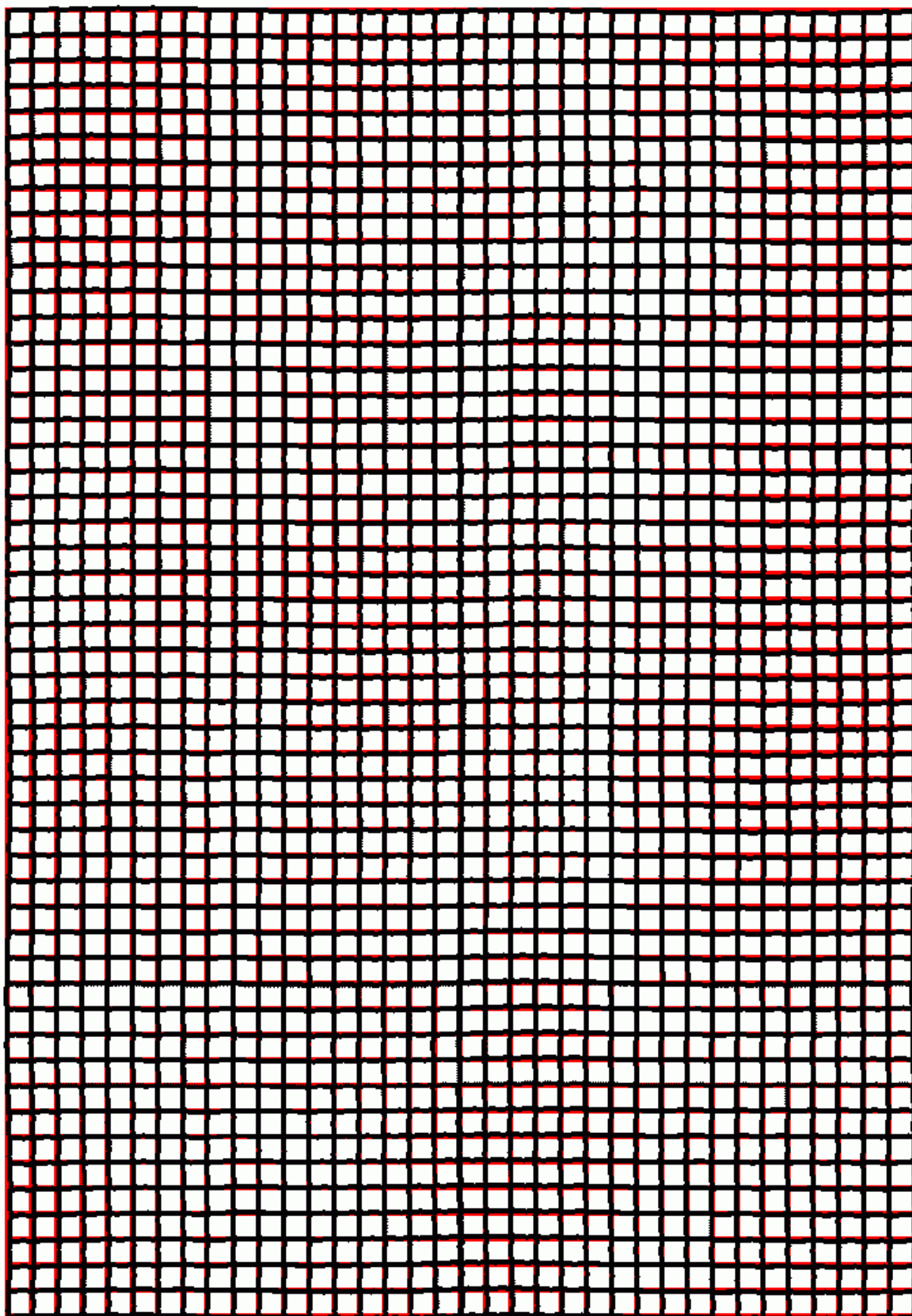


Obrázok 13: Opravenie zvlnenej mriežky – hladká trojuholníková metóda ( $CC = 0,73162$ ).

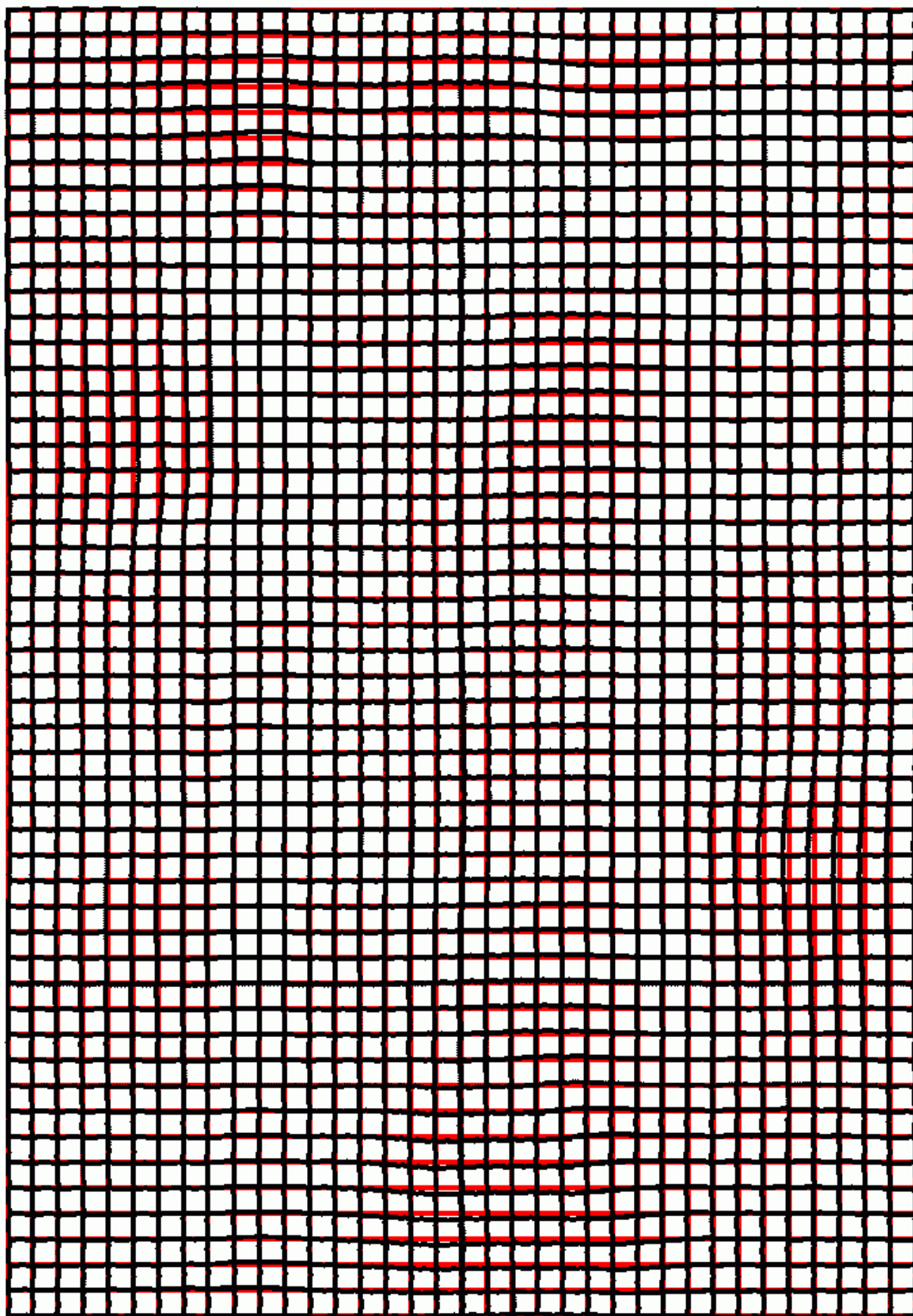


Obrázok 14: Opravenie zvlnenej mriežky – tenkosplajnová metóda ( $CC = 0,80886$ ).

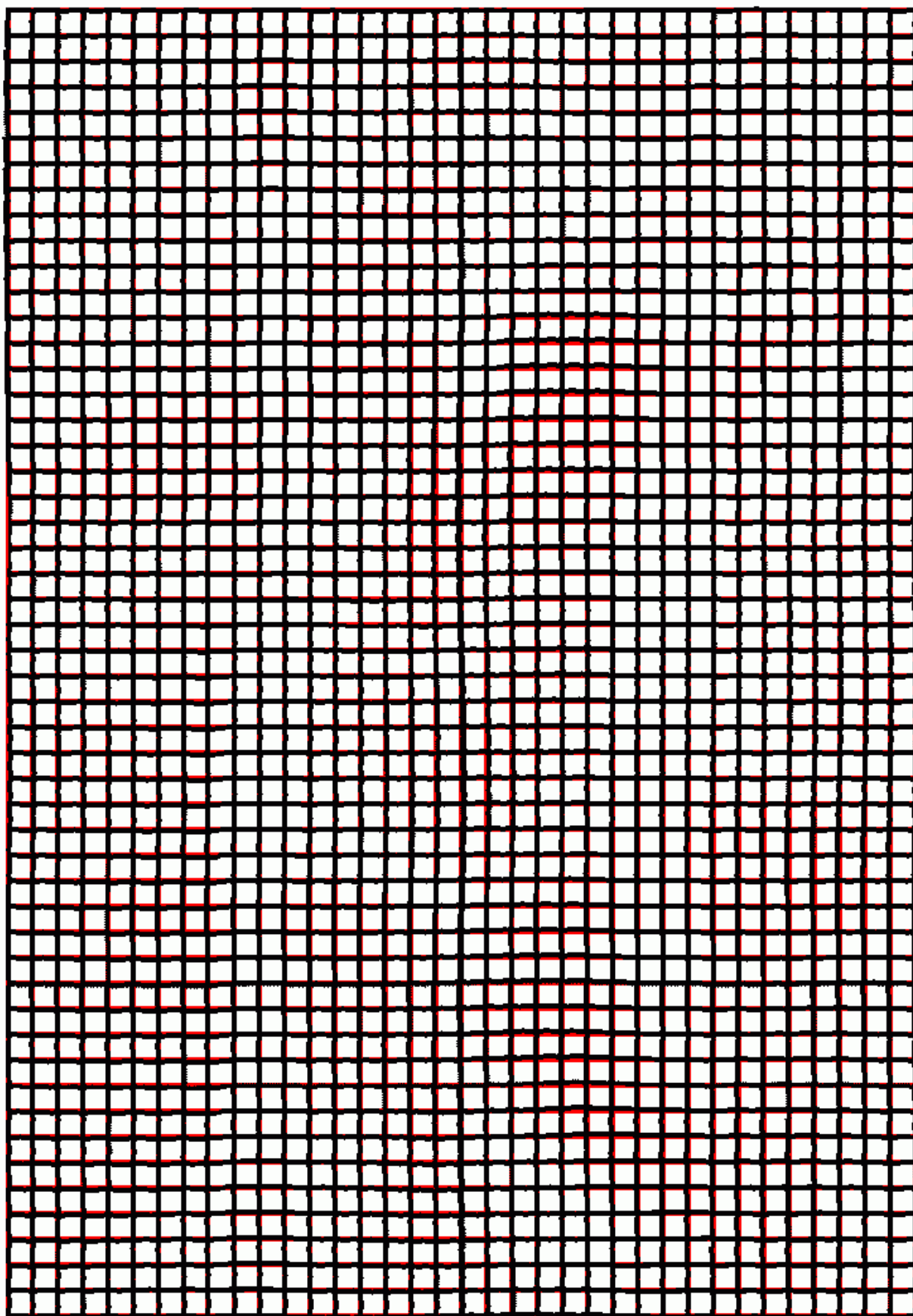




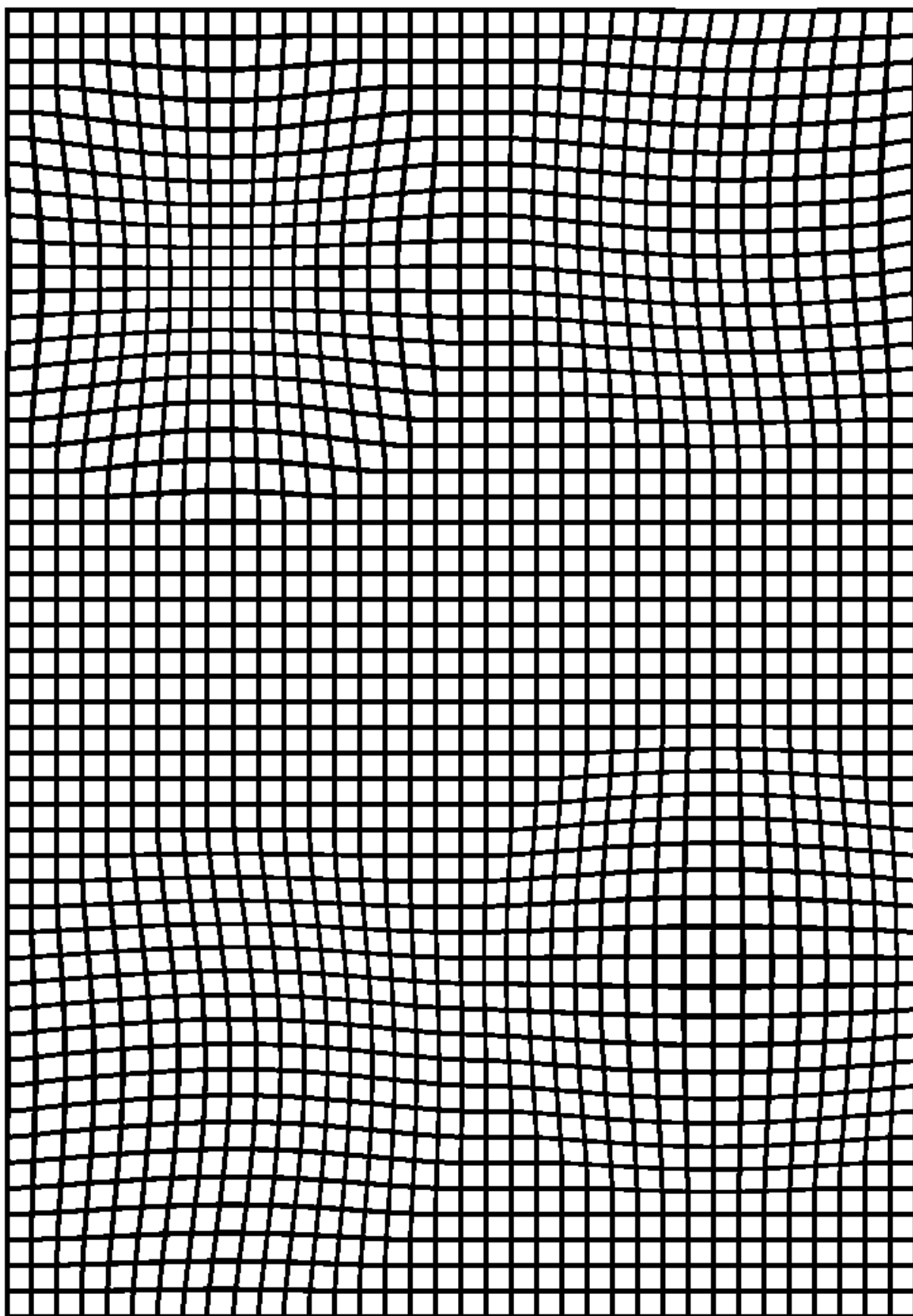
Obrázok 15: Opravenie zvlnenej mriežky – kvadratická Shepardova metóda ( $CC = 0,74335$ ).



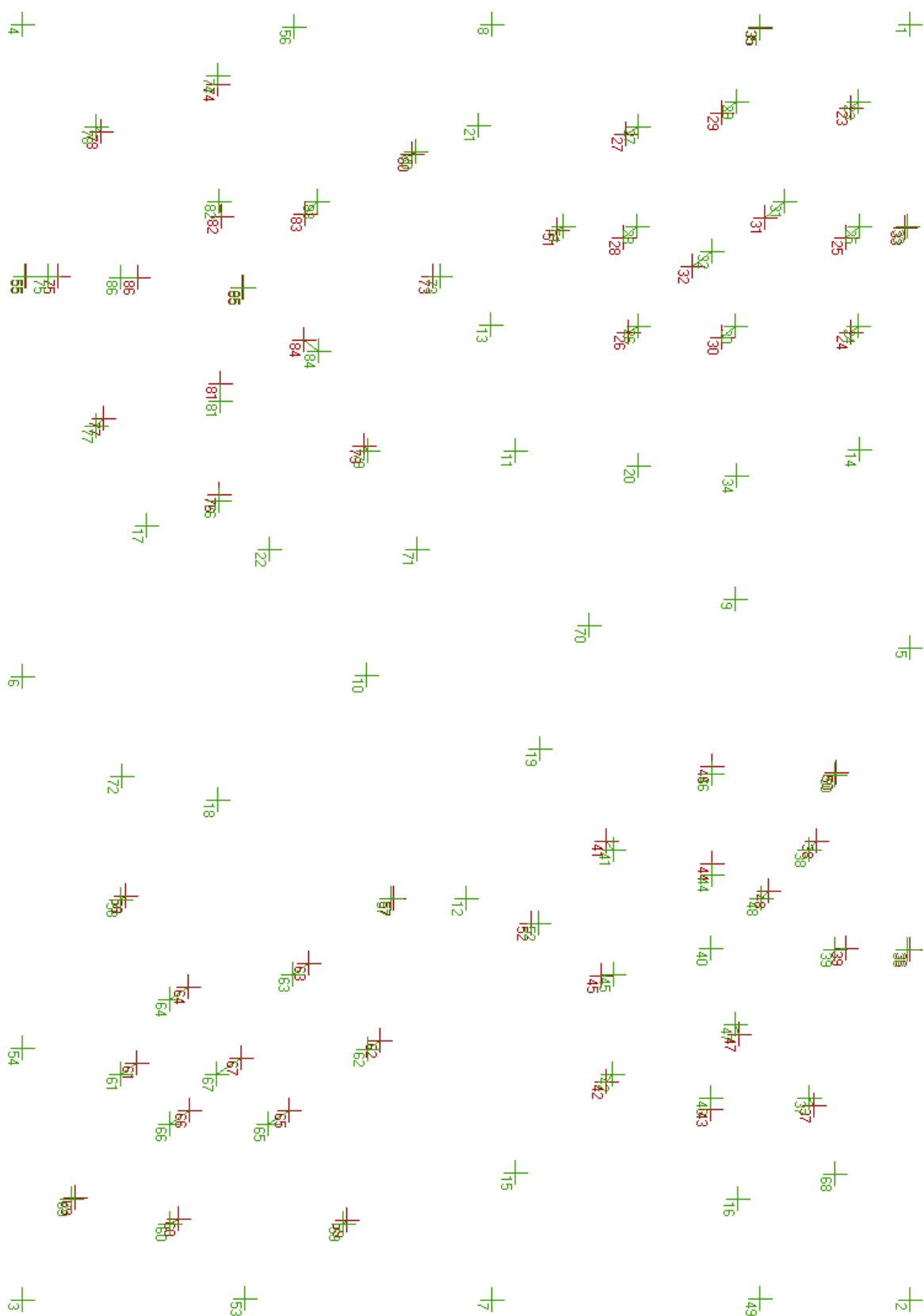
Obrázok 16: Opravenie zvlnenej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda. Normály vypočítané podľa Thurmerovej metódy ( $CC = 0,74530$ ).



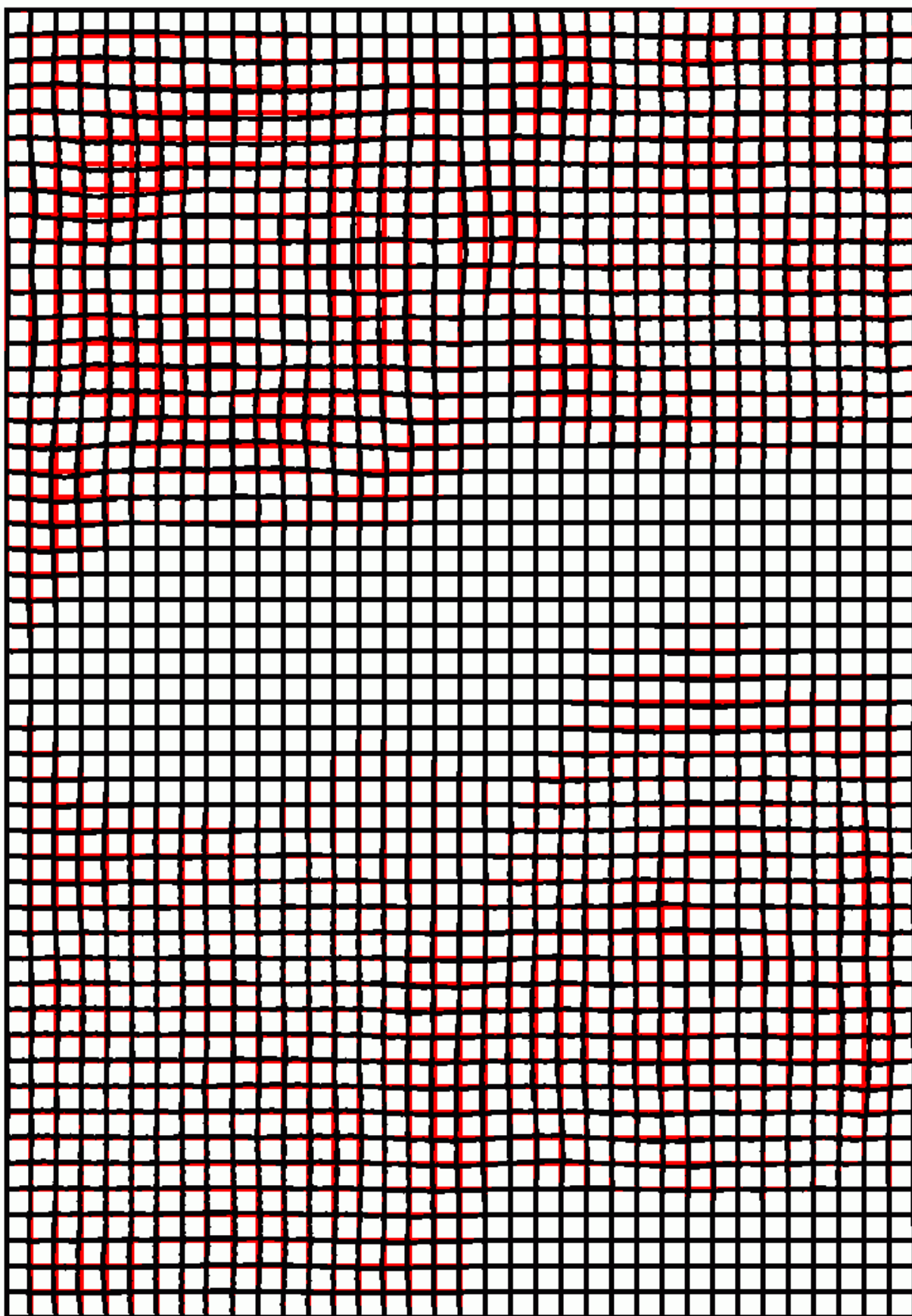
Obrázok 17: Opravenie zvlnenej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda. Normály vypočítané podľa Akimovej metódy ( $CC = 0,81454$ ).



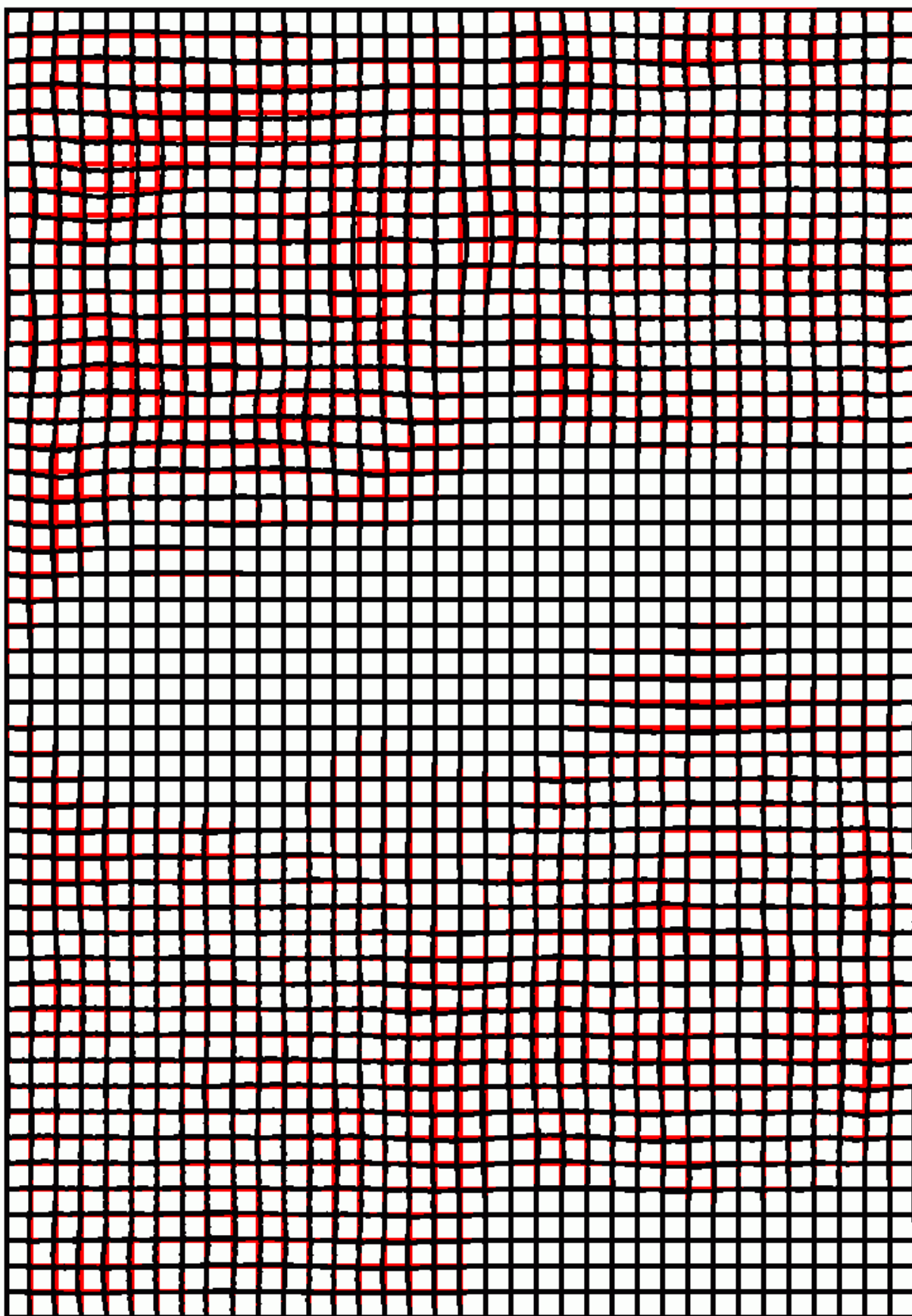
Obrázok 18: Deformovaná mriežka.



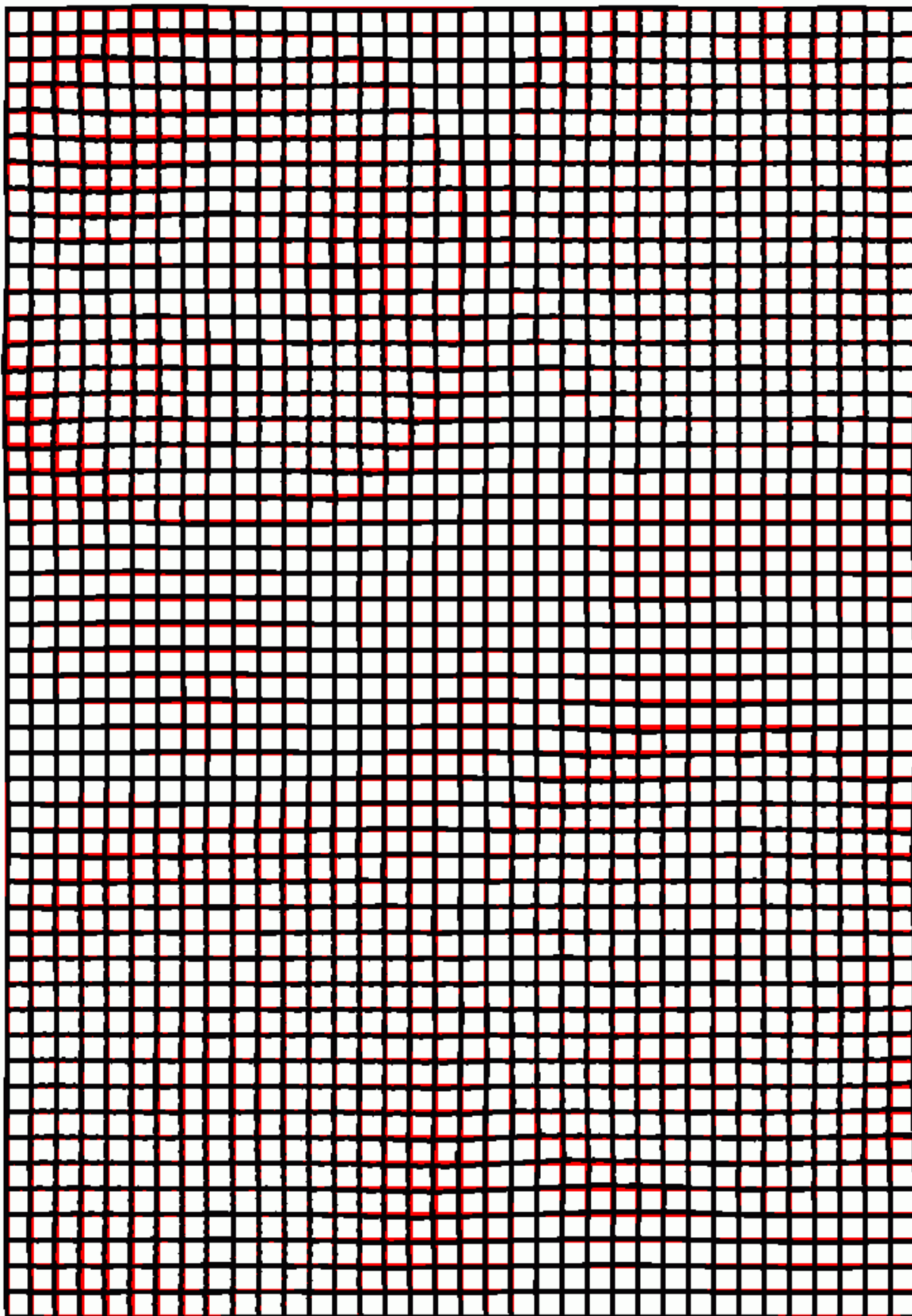
Obrázok 19: Zadané odpovedajúce si body pre opravu deformovanej mriežky (86 bodov).



Obrázok 20: Opravenie deformovanej mriežky – jednoduchá trojuholn. metóda ( $CC = 0,72185$ ).

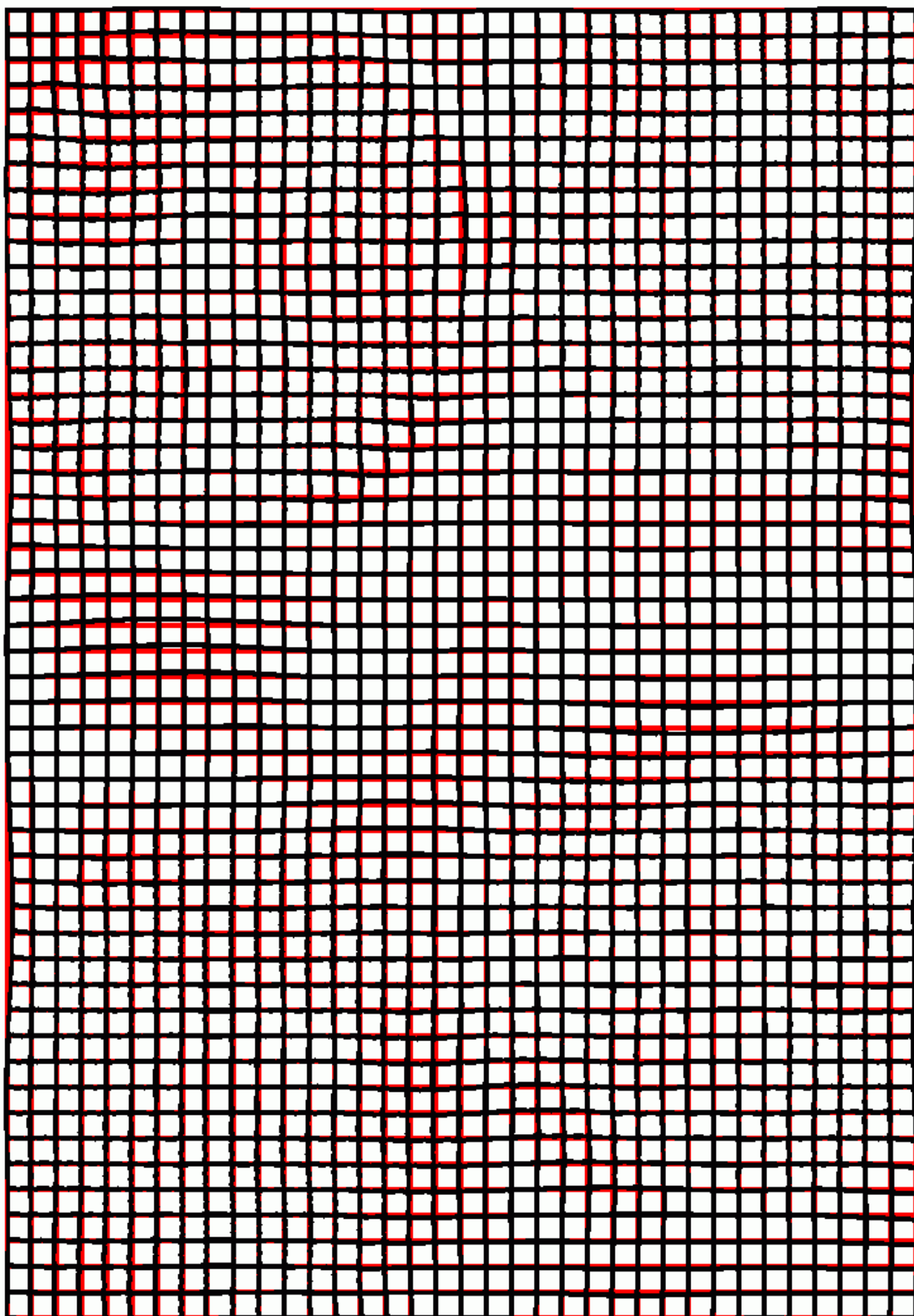


Obrázok 21: Opravenie deformovanej mriežky – hladká trojuholníková metóda ( $CC = 0,72318$ ).

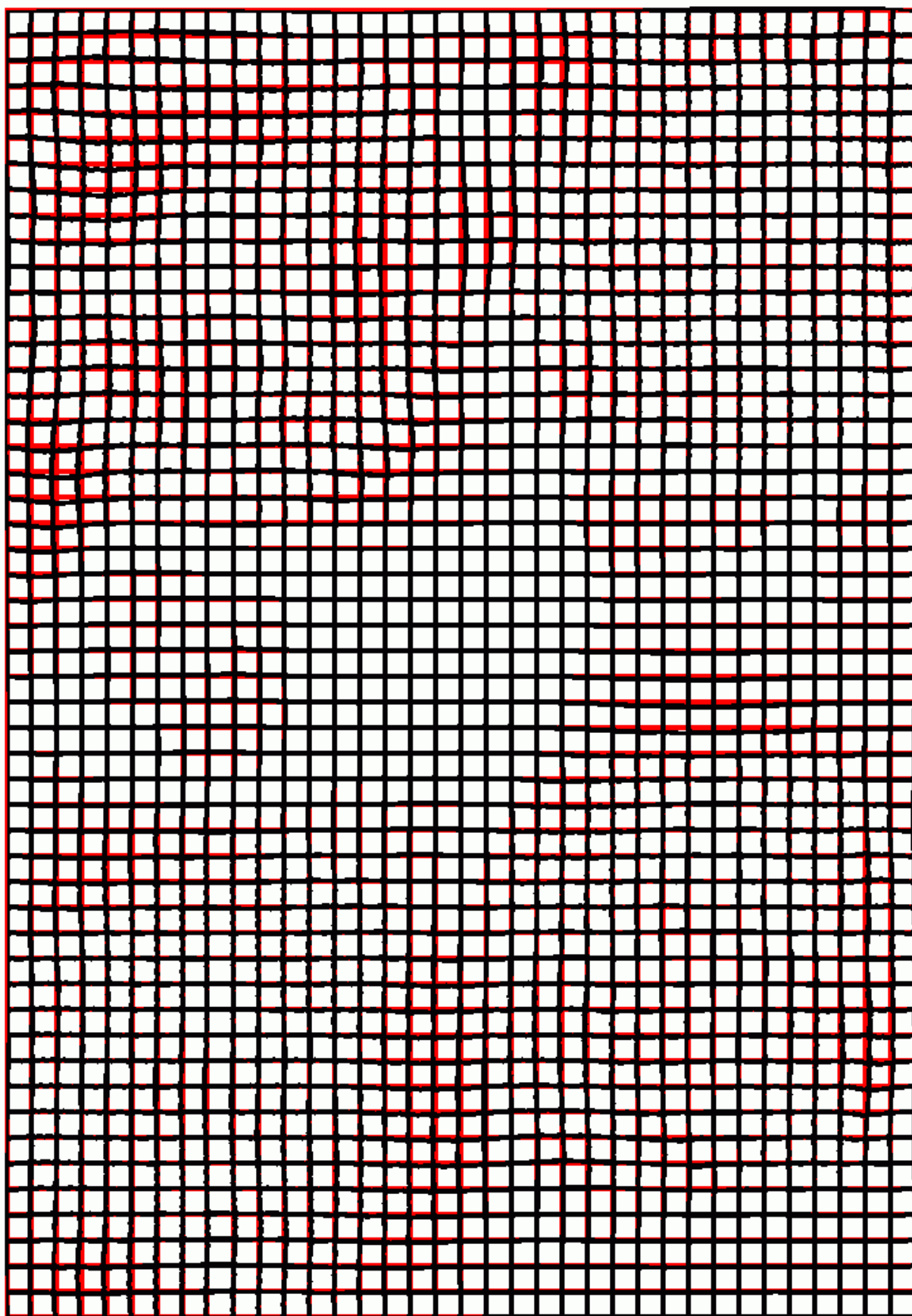


Obrázok 22: Opravenie deformovanej mriežky – tenkosplajnová metóda ( $CC = 0,77261$ ).

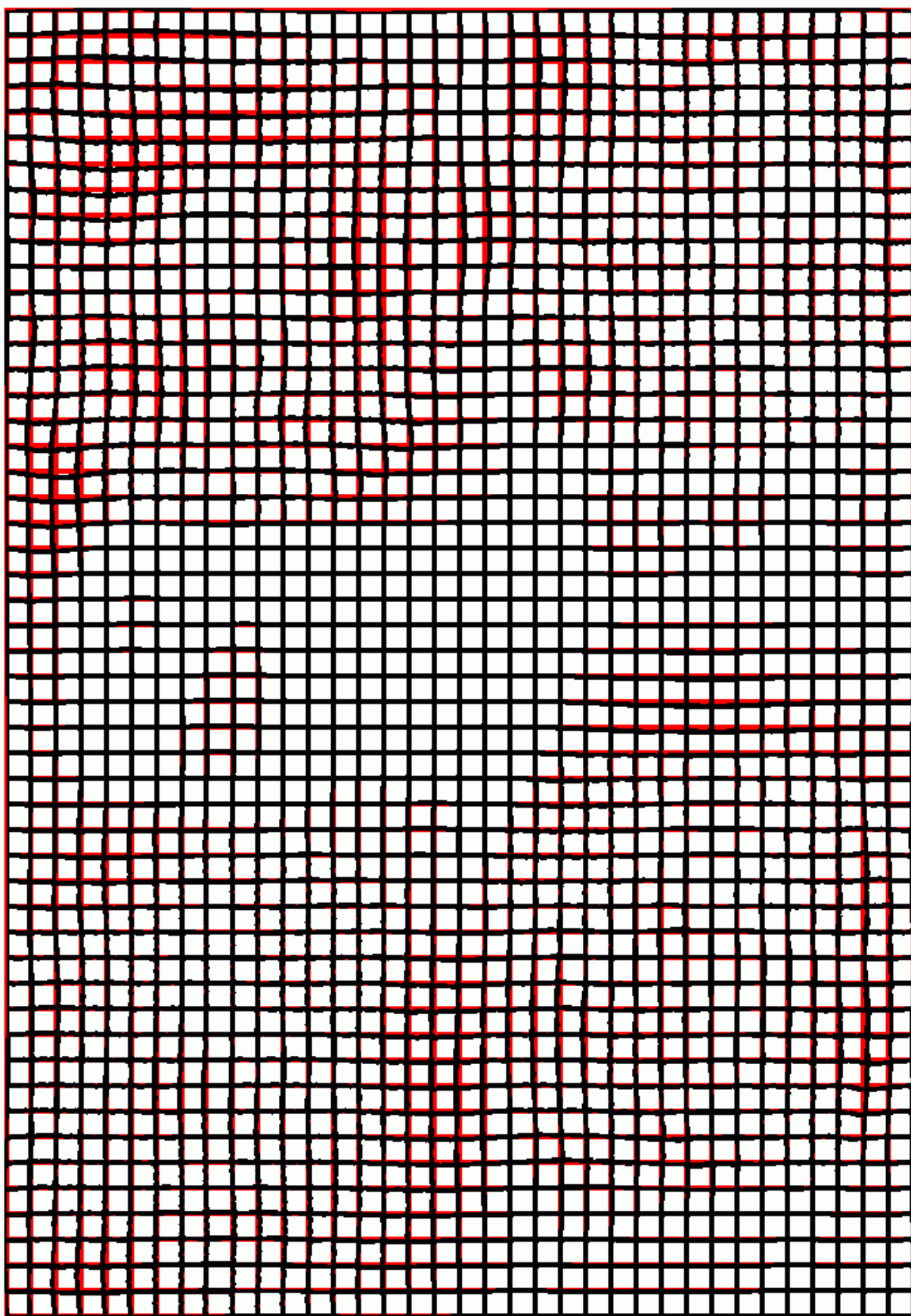




Obrázok 23: Opravenie deformovanej mriežky – kvadratická Shepardova metóda ( $CC = 0,73866$ ).



Obrázok 24: Opravenie deformovanej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda. Normály vypočítané podľa Thurmerovej metódy ( $CC = 0,74830$ ).

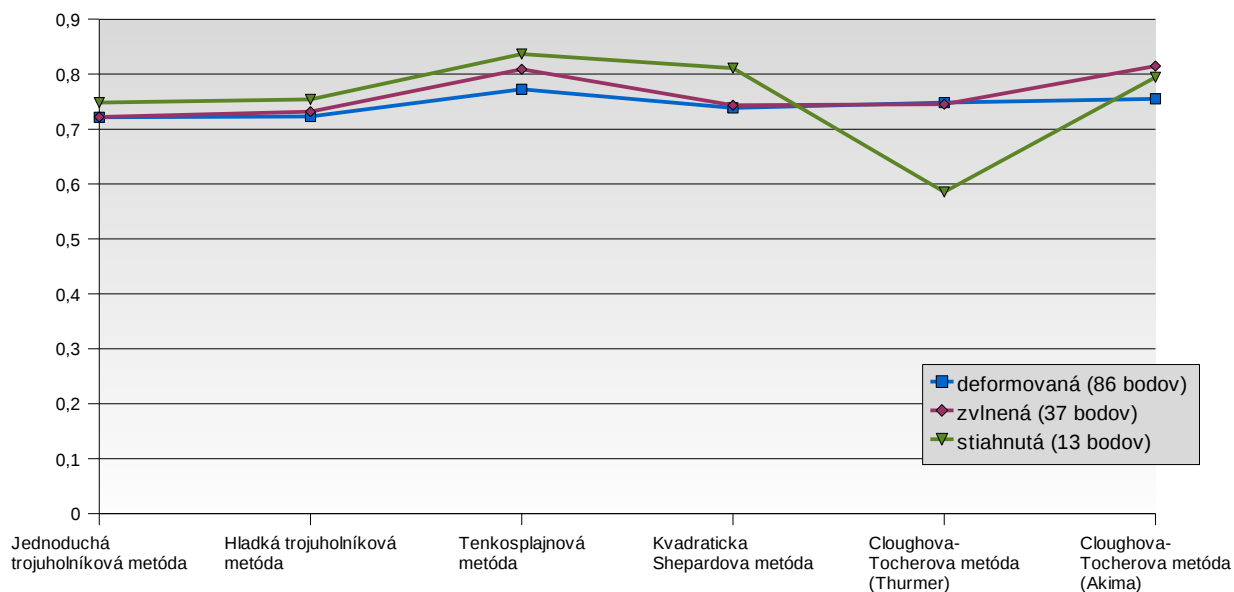


Obrázok 25: Opravenie deformovanej mriežky – Cloughova-Tocherova metóda. Normály vypočítané podľa Akimovej metódy ( $CC = 0,75509$ ).

		deformovaná (86 bodov)	zvlnená (37 bodov)	vťahnutá (13 bodov)
Jednoduchá trojuholníková metóda	<i>CC</i>	0,72158	0,72185	0,74822
	<i>UIQI</i>	0,72157	0,72185	0,74822
Hladká trojuholníková metóda	<i>CC</i>	0,72318	0,73162	0,75398
	<i>UIQI</i>	0,72317	0,73162	0,75398
Tenkosplajnová metóda	<i>CC</i>	0,77261	0,80886	0,83655
	<i>UIQI</i>	0,77261	0,80886	0,83655
Kvadraticka Shepardova metóda	<i>CC</i>	0,73866	0,74335	0,81108
	<i>UIQI</i>	0,73866	0,74335	0,81108
Cloughova-Tocherova metóda (Thurmer)	<i>CC</i>	0,74830	0,74530	0,58551
	<i>UIQI</i>	0,74827	0,74530	0,58551
Cloughova-Tocherova metóda (Akima)	<i>CC</i>	0,75509	0,81454	0,79438
	<i>UIQI</i>	0,75505	0,81454	0,79438

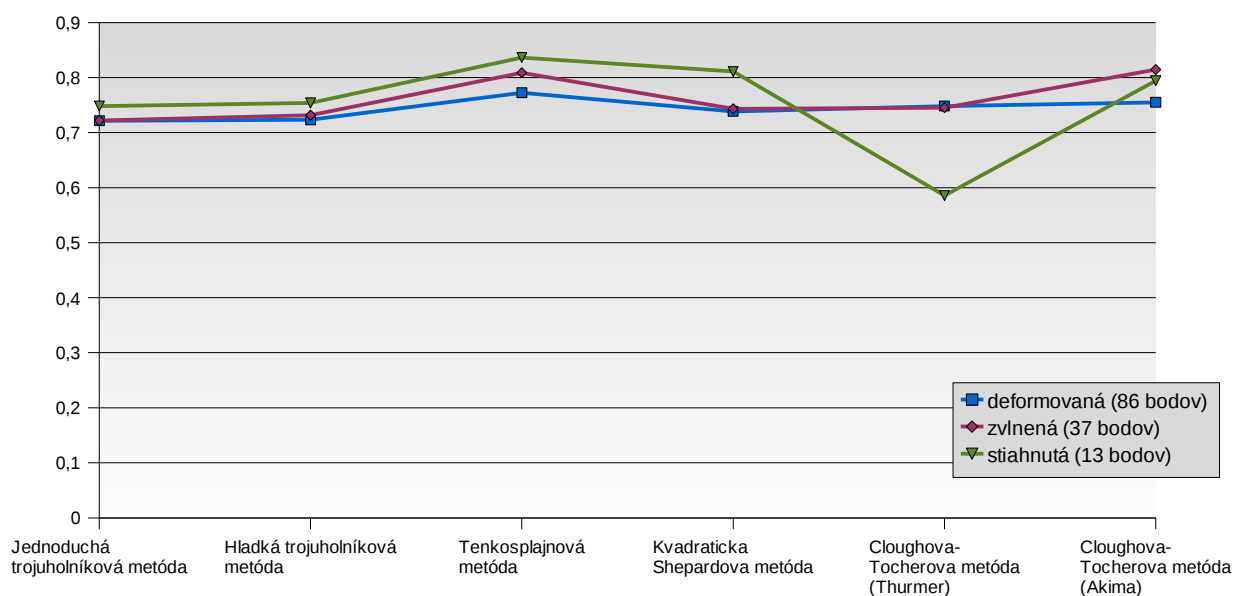
*Tabuľka 3:* Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu zvlnenej, stiahnutej a deformovanej mriežky. *CC* = koeficient krížovej korelácie, *UIQI* = univerzálny koeficient kvality obrazu.

### Odstraňovanie deformácií mriežky - koeficient CC



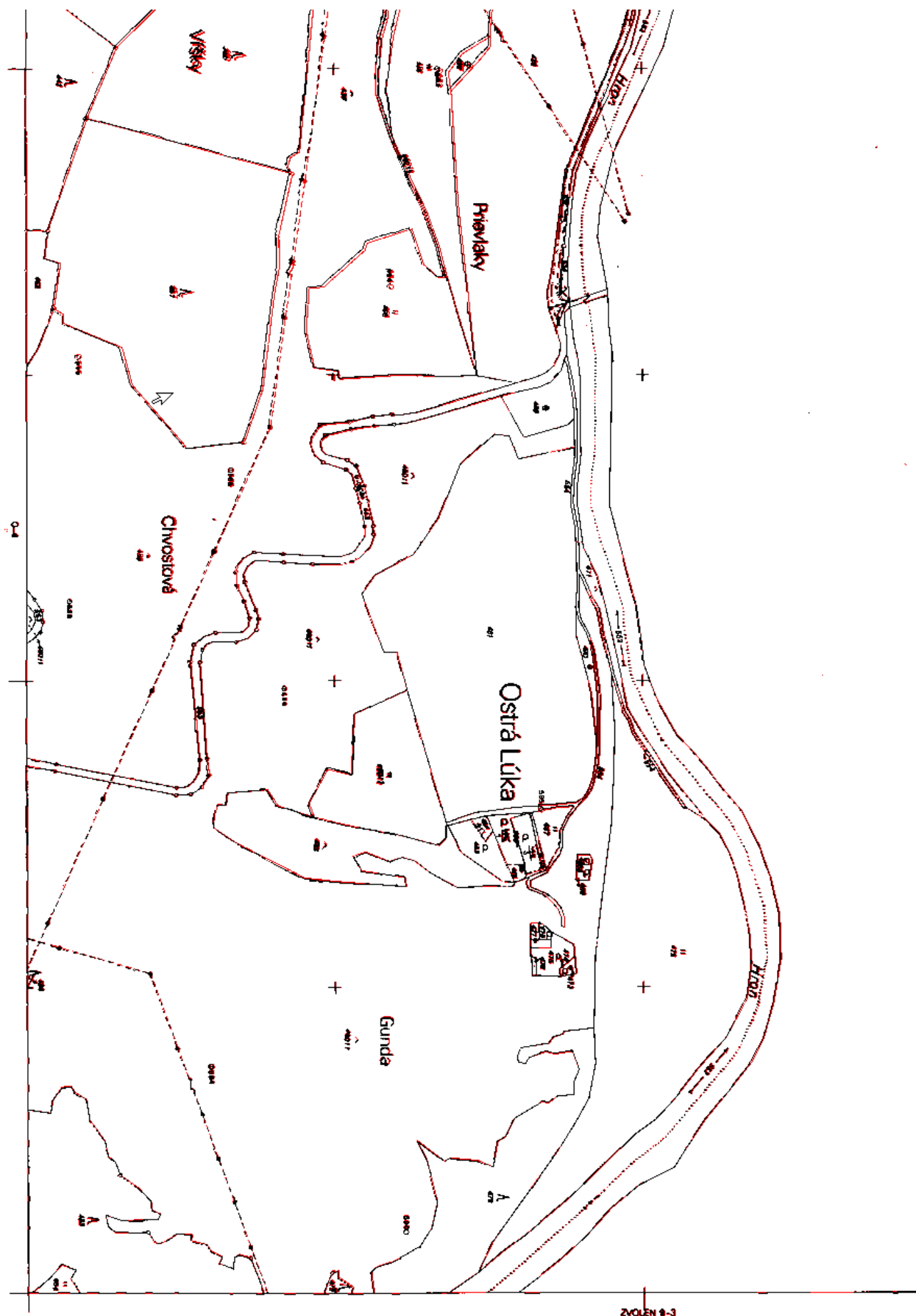
Graf 1: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu zvlnenej, stiahnutej a deformovanej mriežky. CC = koeficient krížovej korelácie.

### Odstraňovanie deformácií mriežky - koeficient UIQI



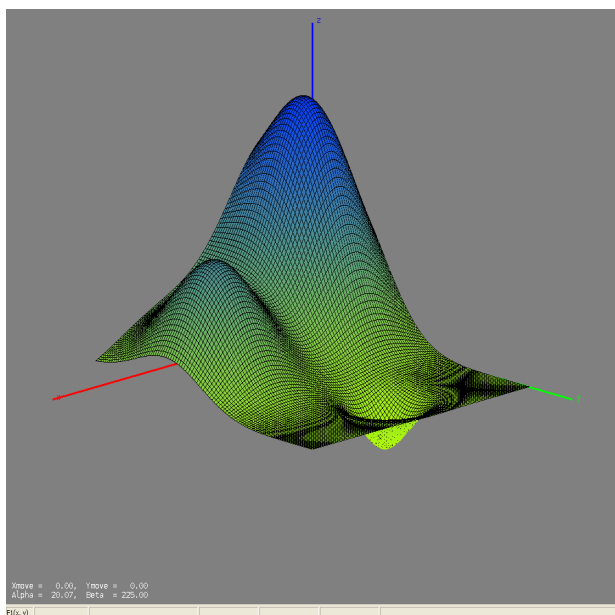
Graf 2: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu zvlnenej, stiahnutej a deformovanej mriežky. UIQI = univerzálny koeficient kvality obrazu.



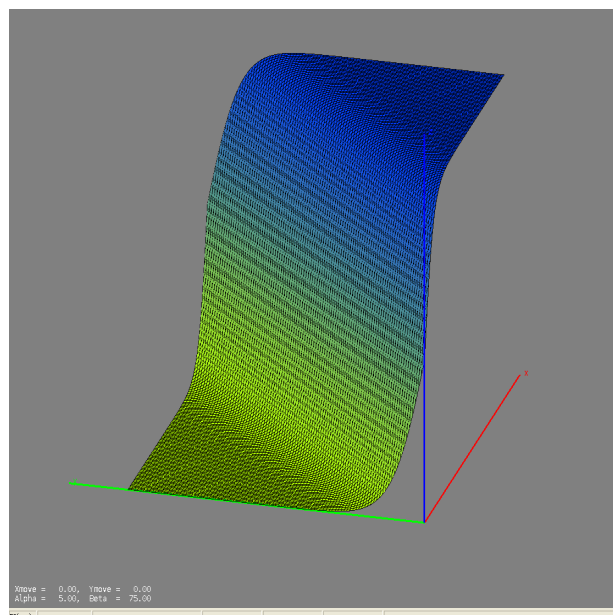


Obrázok 27: Odstránenie deformácie mapy pomocou tenkosplajnej metódy. Poloha dvojíc odpovedajúcich si bodov bola určená pomocou súradnicových krížikov mapy.

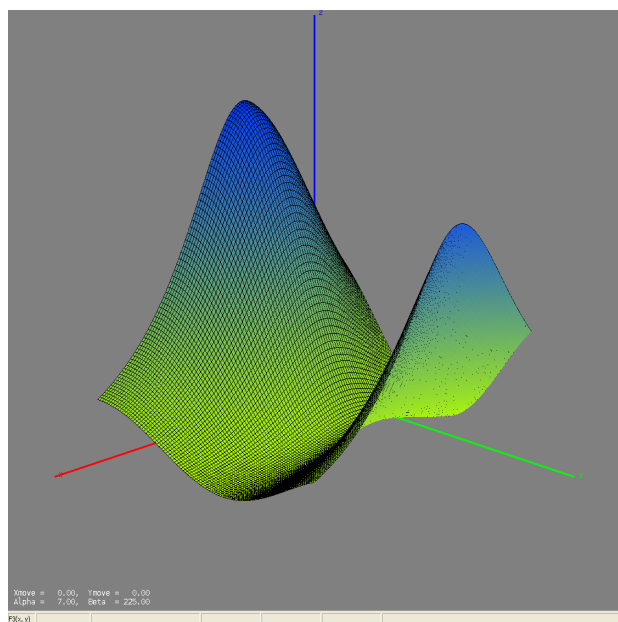
## Príloha B



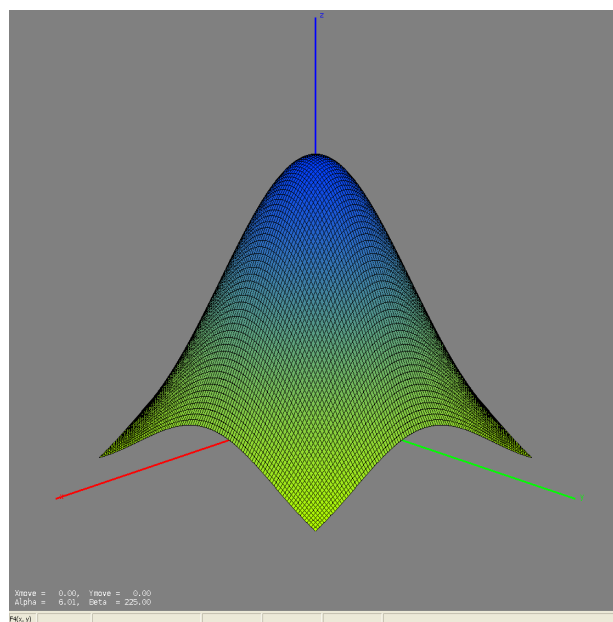
Obrázok 28: Graf testovacej funkcie  $F_1(x, y)$ .



Obrázok 29: Graf testovacej funkcie  $F_2(x, y)$ .

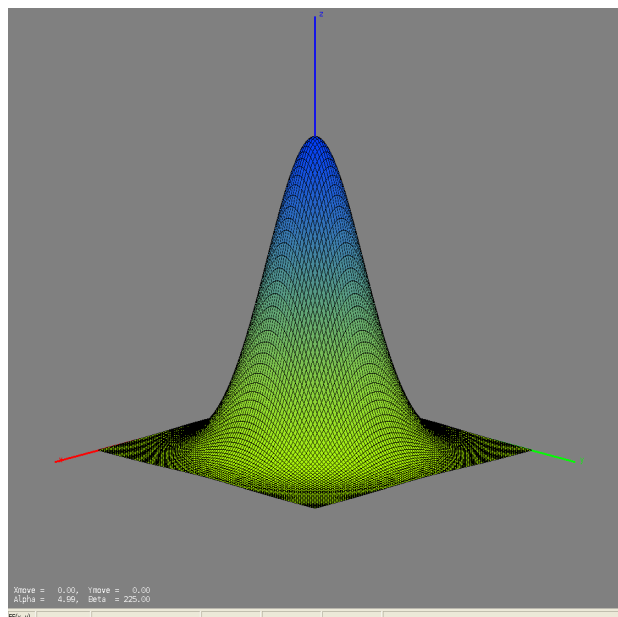
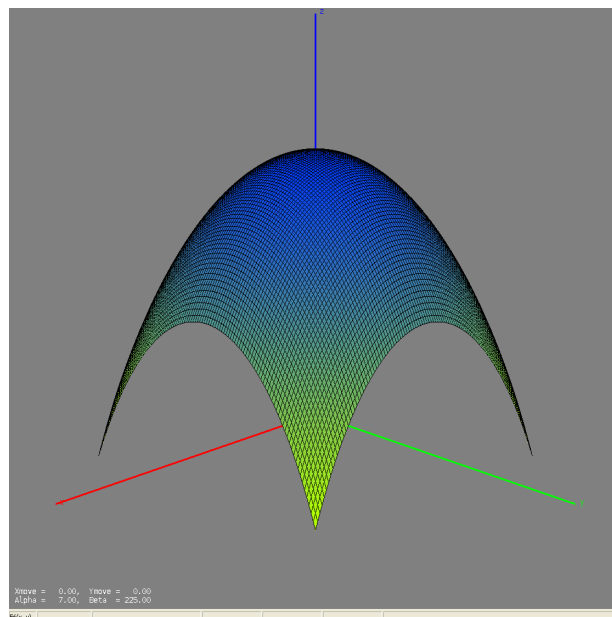
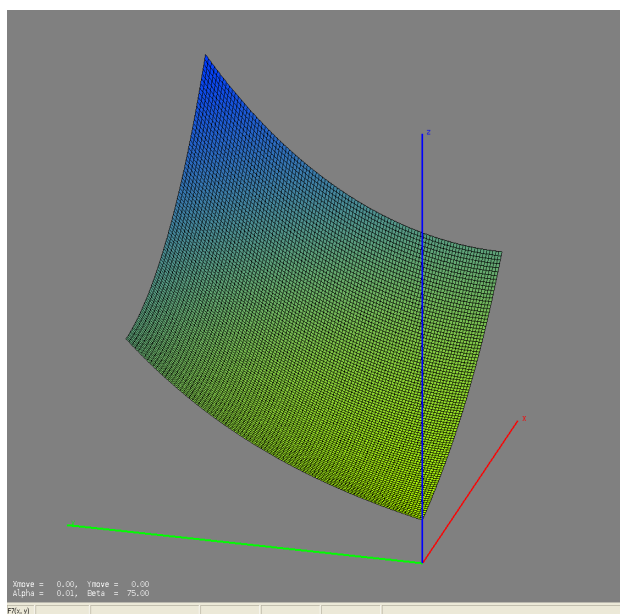
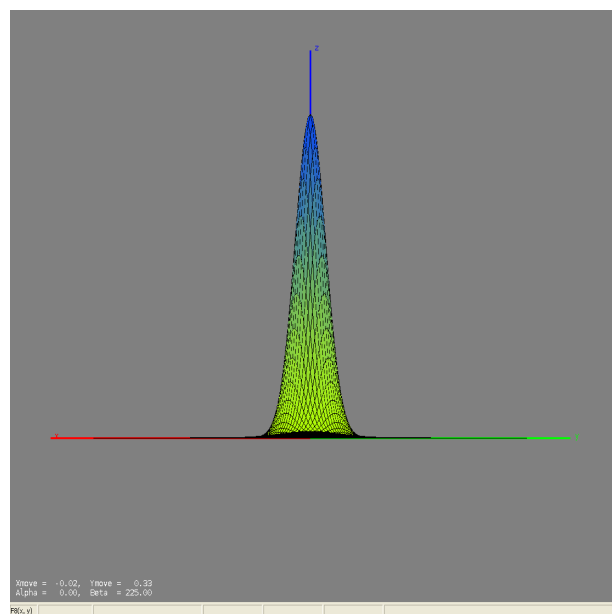


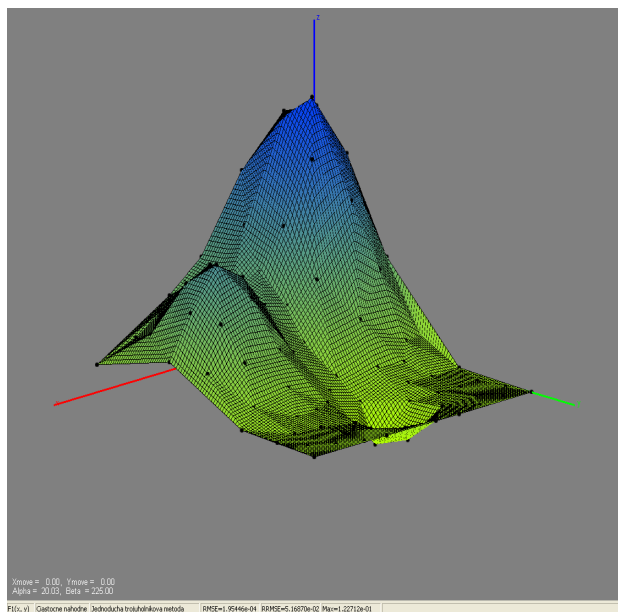
Obrázok 30: Graf testovacej funkcie  $F_3(x, y)$ .



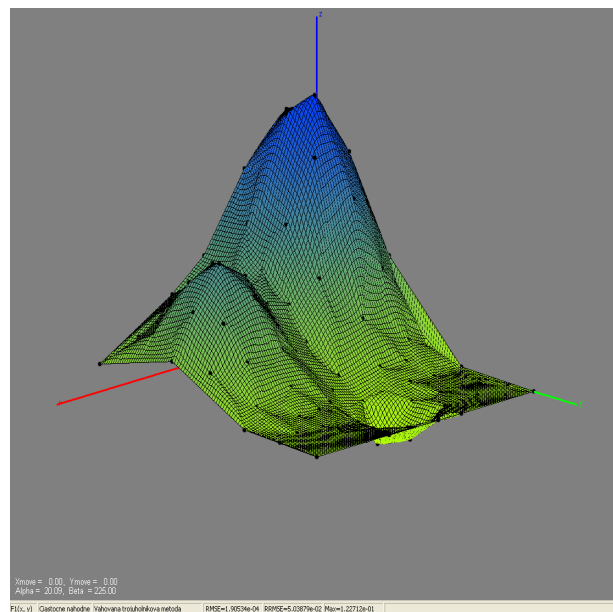
Obrázok 31: Graf testovacej funkcie  $F_4(x, y)$ .



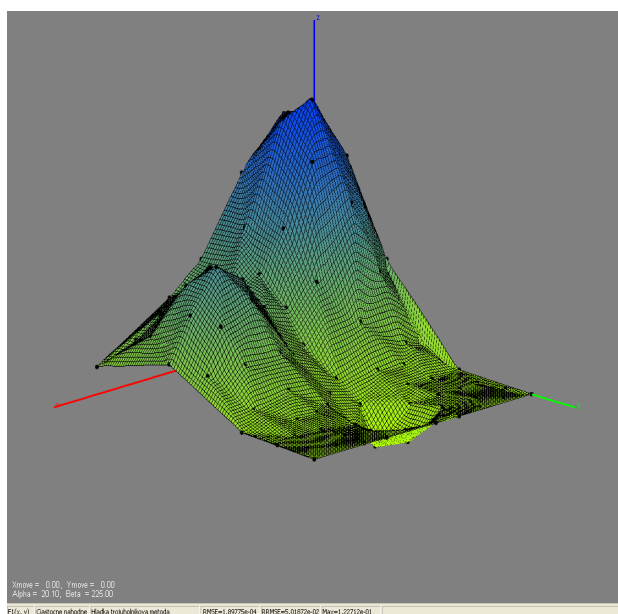
Obrázok 32: Graf testovacej funkcie  $F_5(x, y)$ .Obrázok 33: Graf testovacej funkcie  $F_6(x, y)$ .Obrázok 34: Graf testovacej funkcie  $F_7(x, y)$ .Obrázok 35: Graf testovacej funkcie  $F_8(x, y)$ .



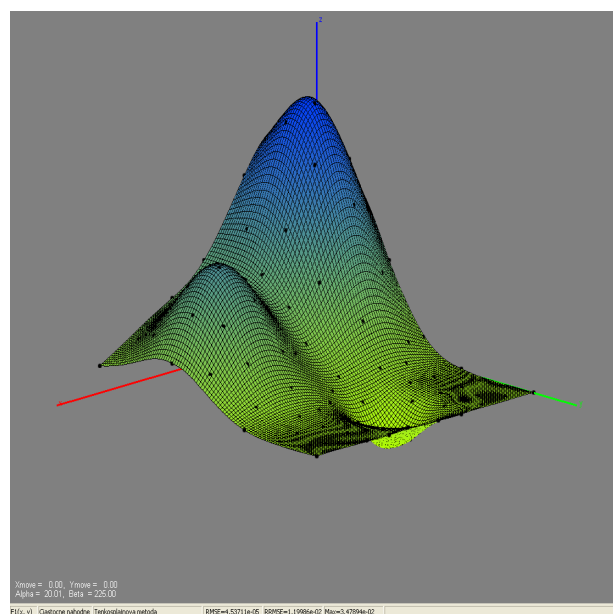
Obrázok 36: Trojuhlníková interpolačná metóda na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .



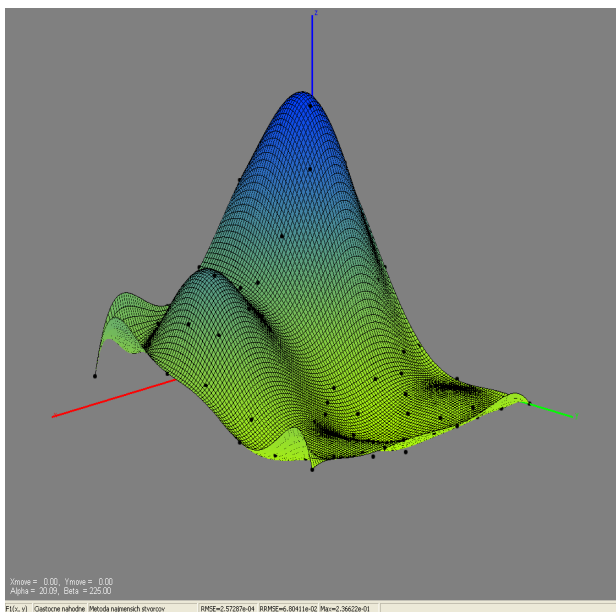
Obrázok 37: Váňovaná trojuhlníková metóda na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .



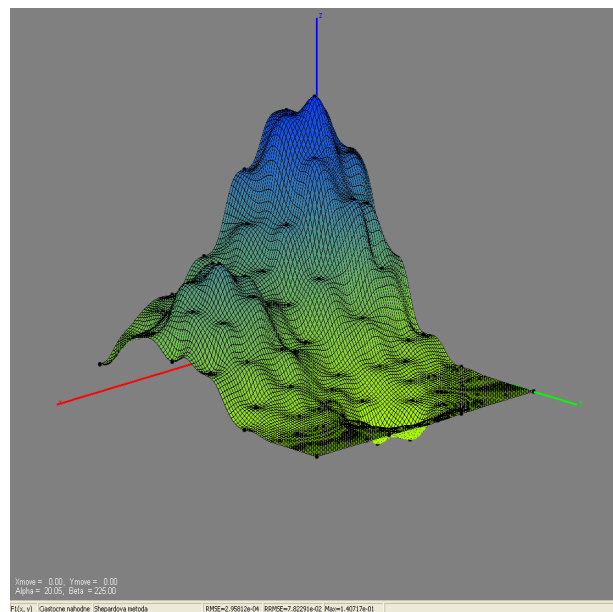
Obrázok 38: Hladká trojuhlníková metóda na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .



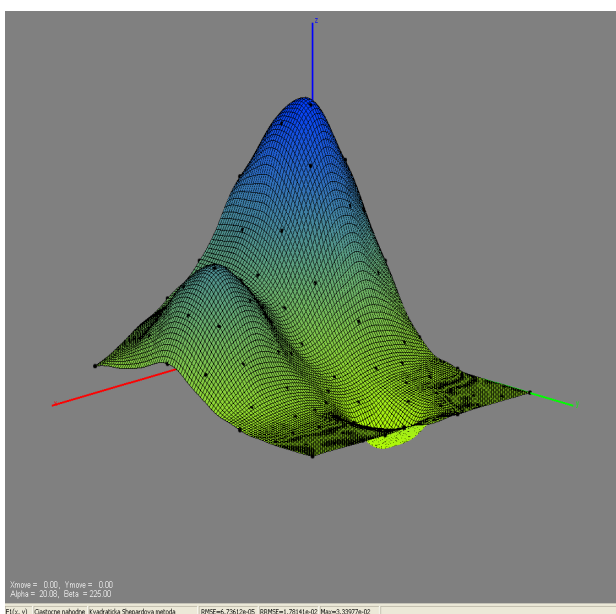
Obrázok 39: Tenkosplajnová interpolačná metóda na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .



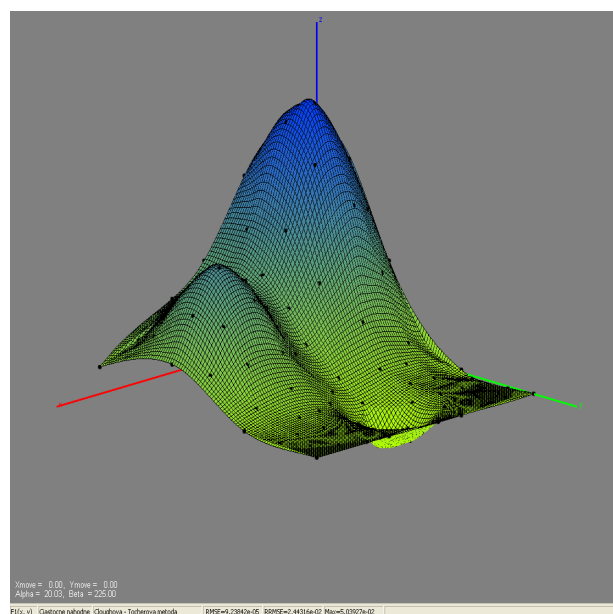
Obrázok 40: Metóda najmenších štvorcov na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .



Obrázok 41: Shepardova interpolačná metóda na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .



Obrázok 42: Kvadratická Shepardova metóda na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .



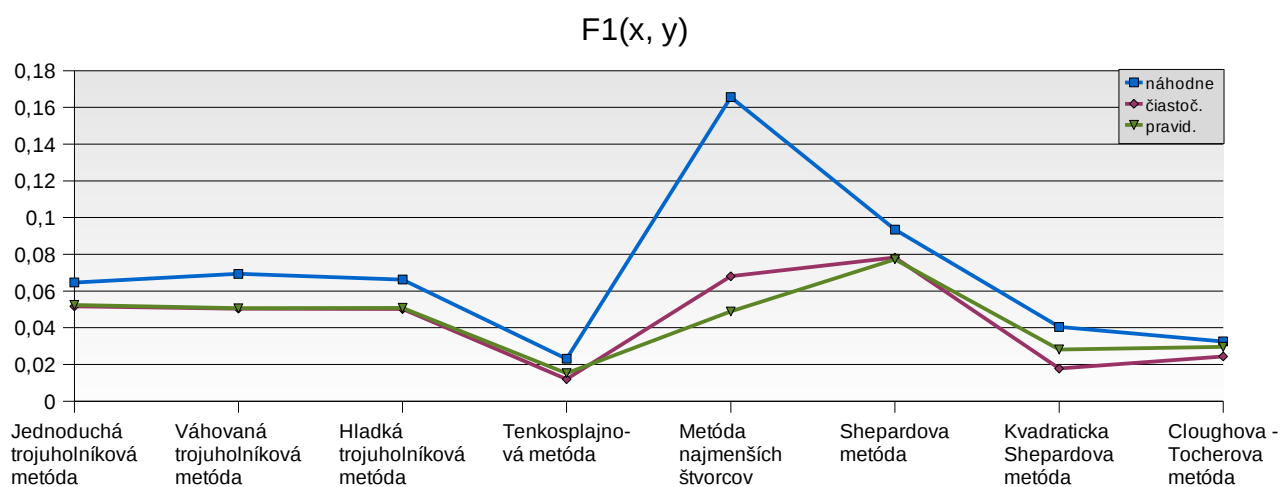
Obrázok 43: Cloughova-Tocherova metóda na vzorke bodov funkcie  $F_1(x, y)$ .

		F1(x,y)			F2(x,y)			F3(x,y)			F4(x,y)		
		náhodne	čiasoč.	pravid.	náhodne	čiasoč.	pravid.	náhodne	čiasoč.	pravid.	náhodne	čiasoč.	pravid.
Jednoduchá trojuholníková metóda	$e_2$	2,44E-4	1,95E-4	1,98E-4	1,27E-4	7,61E-5	4,31E-5	8,94E-5	4,98E-5	4,36E-5	6,05E-5	3,32E-5	3,60E-5
	$r_e$	6,46E-2	5,17E-2	5,25E-2	8,53E-2	5,11E-2	2,89E-2	6,08E-2	3,39E-2	2,96E-2	3,37E-2	1,85E-2	2,01E-2
	$e_\infty$	1,23E-1	1,23E-1	8,73E-2	6,37E-2	4,84E-2	1,16E-2	4,70E-2	2,86E-2	2,11E-2	1,82E-2	1,45E-2	1,23E-2
Váňovaná trojuholníková metóda	$e_2$	2,62E-4	1,91E-4	1,92E-4	1,30E-4	7,44E-5	4,21E-5	9,09E-5	5,56E-5	4,25E-5	6,49E-5	3,38E-5	3,41E-5
	$r_e$	6,94E-2	5,04E-2	5,07E-2	8,74E-2	5,00E-2	2,83E-2	6,18E-2	3,78E-2	2,89E-2	3,61E-2	1,88E-2	1,90E-2
	$e_\infty$	1,23E-1	1,23E-1	8,67E-2	6,45E-2	4,84E-2	1,16E-2	4,72E-2	5,45E-2	2,11E-2	3,64E-2	1,88E-2	1,24E-2
Hladká trojuholníková metóda	$e_2$	2,51E-4	1,90E-4	1,92E-4	1,28E-4	7,40E-5	4,21E-5	8,98E-5	5,19E-5	4,23E-5	6,29E-5	3,30E-5	3,43E-5
	$r_e$	6,63E-2	5,02E-2	5,08E-2	8,62E-2	4,97E-2	2,83E-2	6,10E-2	3,53E-2	2,88E-2	3,50E-2	1,84E-2	1,91E-2
	$e_\infty$	1,23E-1	1,23E-1	8,67E-2	6,42E-2	4,84E-2	1,16E-2	4,71E-2	3,24E-2	2,11E-2	2,88E-2	1,44E-2	1,24E-2
Tenkosplajnová metóda	$e_2$	8,74E-5	4,54E-5	5,79E-5	8,42E-5	3,80E-5	3,11E-5	1,28E-5	7,81E-6	6,36E-6	6,03E-6	2,12E-6	2,79E-6
	$r_e$	2,31E-2	1,20E-2	1,53E-2	5,65E-2	2,55E-2	2,09E-2	8,69E-3	5,31E-3	4,32E-3	3,36E-3	1,18E-3	1,55E-3
	$e_\infty$	4,50E-2	3,48E-2	4,96E-2	5,31E-2	2,07E-2	1,09E-2	5,73E-3	5,94E-3	2,77E-3	3,09E-3	1,23E-3	1,38E-3
Metóda najmenších štvorcov	$e_2$	6,26E-4	2,57E-4	1,85E-4	1,92E-4	1,11E-4	6,56E-5	5,84E-5	3,76E-5	2,18E-5	4,77E-6	1,83E-6	1,65E-6
	$r_e$	1,66E-1	6,80E-2	4,89E-2	1,29E-1	7,45E-2	4,40E-2	3,97E-2	2,56E-2	1,48E-2	2,65E-3	1,02E-3	9,18E-4
	$e_\infty$	6,73E-1	2,37E-1	8,92E-2	2,16E-1	1,16E-1	2,06E-2	5,90E-2	5,44E-2	1,10E-2	5,51E-3	1,66E-3	4,11E-4
Shepardova metóda	$e_2$	3,53E-4	2,96E-4	2,92E-4	1,86E-4	1,10E-4	9,80E-5	1,70E-4	1,00E-4	8,40E-5	1,49E-4	8,82E-5	7,73E-5
	$r_e$	9,35E-2	7,82E-2	7,73E-2	1,25E-1	7,38E-2	6,58E-2	1,16E-1	6,81E-2	5,71E-2	8,31E-2	4,91E-2	4,30E-2
	$e_\infty$	1,52E-1	1,41E-1	1,35E-1	8,74E-2	4,70E-2	3,87E-2	5,66E-2	3,80E-2	3,04E-2	4,59E-2	2,71E-2	1,95E-2
Kvadratická Shepardova metóda	$e_2$	1,53E-4	6,74E-5	1,06E-4	1,29E-4	4,18E-5	4,66E-5	3,45E-5	9,06E-6	1,16E-5	1,48E-5	5,27E-6	6,79E-6
	$r_e$	4,05E-2	1,78E-2	2,82E-2	8,67E-2	2,80E-2	3,13E-2	2,34E-2	6,16E-3	7,86E-3	8,22E-3	2,93E-3	3,78E-3
	$e_\infty$	9,90E-2	3,34E-2	6,17E-2	8,78E-2	1,96E-2	1,65E-2	1,91E-2	5,27E-3	4,95E-3	7,61E-3	2,64E-3	1,69E-3
Cloughova-Tocherova metóda	$e_2$	1,23E-4	9,24E-5	1,12E-4	1,12E-4	6,53E-5	2,44E-5	4,97E-5	2,46E-5	1,67E-5	3,47E-5	1,90E-5	9,42E-6
	$r_e$	3,25E-2	2,44E-2	2,96E-2	7,53E-2	4,38E-2	1,64E-2	3,38E-2	1,68E-2	1,13E-2	1,93E-2	1,06E-2	5,24E-3
	$e_\infty$	4,81E-2	5,04E-2	6,78E-2	6,83E-2	9,06E-2	9,69E-3	2,46E-2	1,79E-2	1,15E-2	1,64E-2	1,91E-2	3,20E-3

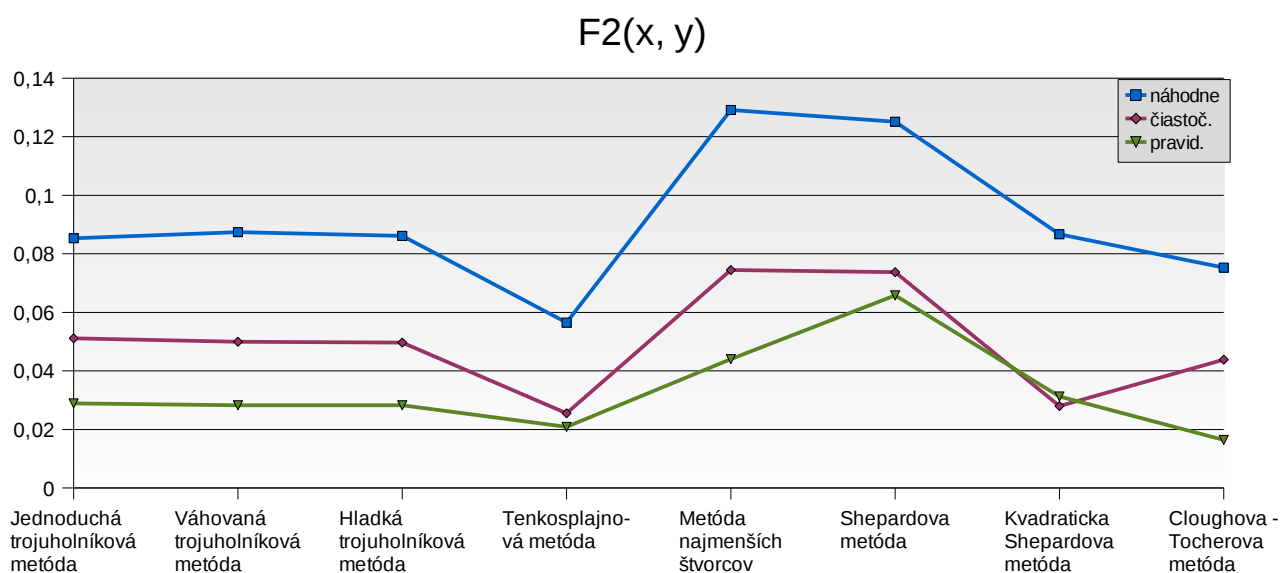
Tabuľka 4: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii.

		F5(x,y)			F6(x,y)			F7(x,y)			F8(x,y)		
		náhodne	čiasoč.	pravid.	náhodne	čiasoč.	pravid.	náhodne	čiasoč.	pravid.	náhodne	čiasoč.	pravid.
Jednoduchá trojuholníková metóda	$e_2$	9,49E-5	6,79E-5	7,52E-5	9,18E-5	5,89E-5	4,17E-5	1,35E-8	7,84E-9	6,51E-9	2,40E-2	1,49E-2	2,86E-2
	$r_e$	1,03E-1	7,39E-2	8,18E-2	3,13E-2	2,01E-2	1,42E-2	1,19E-2	6,89E-3	5,72E-3	5,45E-1	3,39E-1	6,50E-1
	$e_\infty$	4,47E-2	3,77E-2	4,13E-2	2,79E-2	2,79E-2	1,23E-2	4,82E-6	4,82E-6	1,96E-6	2,13E+1	1,94E+1	3,69E+1
Váňovaná trojuholníková metóda	$e_2$	1,08E-4	6,65E-5	7,29E-5	8,83E-5	6,47E-5	3,88E-5	1,29E-8	8,30E-9	6,07E-9	2,65E-2	1,49E-2	2,84E-2
	$r_e$	1,17E-1	7,24E-2	7,93E-2	3,01E-2	2,21E-2	1,33E-2	1,14E-2	7,30E-3	5,33E-3	6,03E-1	3,38E-1	6,46E-1
	$e_\infty$	4,85E-2	3,77E-2	4,21E-2	2,79E-2	5,93E-2	1,23E-2	4,82E-6	6,25E-6	1,96E-6	2,18E+1	1,94E+1	3,69E+1
Hladká trojuholníková metóda	$e_2$	1,02E-4	6,64E-5	7,27E-5	8,87E-5	6,12E-5	3,94E-5	1,30E-8	7,95E-9	6,15E-9	2,55E-2	1,46E-2	2,84E-2
	$r_e$	1,11E-1	7,22E-2	7,91E-2	3,03E-2	2,09E-2	1,35E-2	1,14E-2	6,99E-3	5,41E-3	5,81E-1	3,32E-1	6,47E-1
	$e_\infty$	4,45E-2	3,77E-2	4,18E-2	2,79E-2	4,14E-2	1,23E-2	4,82E-6	4,82E-6	1,96E-6	2,15E+1	1,87E+1	3,69E+1
Tenkosplajnová metóda	$e_2$	3,49E-5	9,22E-6	9,40E-6	1,90E-5	9,53E-6	1,31E-5	2,87E-9	1,25E-9	1,77E-9	2,99E-2	1,19E-2	2,60E-2
	$r_e$	3,80E-2	1,00E-2	1,02E-2	6,48E-3	3,25E-3	4,48E-3	2,52E-3	1,10E-3	1,55E-3	6,81E-1	2,71E-1	5,92E-1
	$e_\infty$	1,52E-2	5,72E-3	4,76E-3	1,30E-2	7,59E-3	7,86E-3	2,14E-6	1,01E-6	1,29E-6	1,96E+1	1,03E+1	3,40E+1
Metóda najmenších štvorcov	$e_2$	1,71E-4	6,98E-5	5,89E-5	3,38E-7	1,48E-7	2,06E-7	2,86E-10	2,21E-10	2,19E-10	1,11E-1	3,68E-2	3,07E-2
	$r_e$	1,86E-1	7,60E-2	6,41E-2	1,16E-4	5,04E-5	7,04E-5	2,52E-4	1,95E-4	1,93E-4	2,52E+0	8,38E-1	6,98E-1
	$e_\infty$	2,00E-1	6,36E-2	1,89E-2	4,11E-4	1,20E-4	1,29E-4	3,76E-7	2,98E-7	3,45E-7	1,11E+2	2,95E+1	3,48E+1
Shepardova metóda	$e_2$	1,92E-4	1,11E-4	1,12E-4	1,52E-4	9,36E-5	7,82E-5	4,91E-8	2,63E-8	2,08E-8	2,83E-2	1,29E-2	3,00E-2
	$r_e$	2,09E-1	1,21E-1	1,22E-1	5,20E-2	3,19E-2	2,67E-2	4,32E-2	2,31E-2	1,83E-2	6,43E-1	2,95E-1	6,83E-1
	$e_\infty$	7,63E-2	5,68E-2	5,03E-2	5,31E-2	4,87E-2	2,57E-2	2,53E-5	1,59E-5	7,31E-6	2,21E+1	1,58E+1	3,90E+1
Kvadratická Shepardova metóda	$e_2$	7,10E-5	1,93E-5	2,85E-5	5,90E-6	3,23E-6	3,51E-6	7,00E-10	4,33E-10	5,03E-10	3,87E-2	1,04E-2	2,75E-2
	$r_e$	7,73E-2	2,10E-2	3,11E-2	2,01E-3	1,10E-3	1,20E-3	6,16E-4	3,81E-4	4,42E-4	8,80E-1	2,37E-1	6,25E-1
	$e_\infty$	4,30E-2	1,11E-2	1,26E-2	4,14E-3	2,82E-3	1,77E-3	7,48E-7	4,05E-7	5,14E-7	2,86E+1	8,95E+0	3,54E+1
Cloughova - Tocherova metóda	$e_2$	5,07E-5	2,97E-5	2,90E-5	2,83E-5	2,30E-5	1,38E-5	4,90E-9	1,55E-8	1,97E-9	2,57E-2	1,30E-2	2,74E-2
	$r_e$	5,52E-2	3,23E-2	3,16E-2	9,67E-3	7,84E-3	4,72E-3	4,31E-3	1,37E-2	1,73E-3	5,84E-1	2,95E-1	6,24E-1
	$e_\infty$	2,56E-2	1,78E-2	1,93E-2	1,61E-2	3,67E-2	8,39E-3	2,34E-6	2,85E-5	1,25E-6	2,65E+1	1,83E+1	3,55E+1

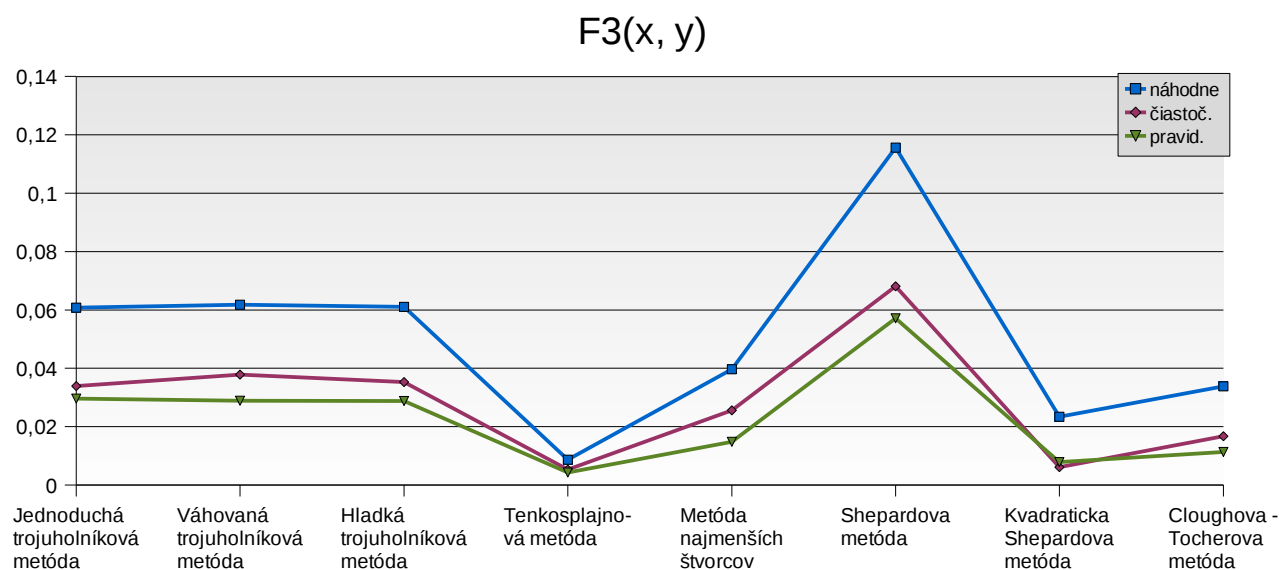
Tabuľka 5: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii.



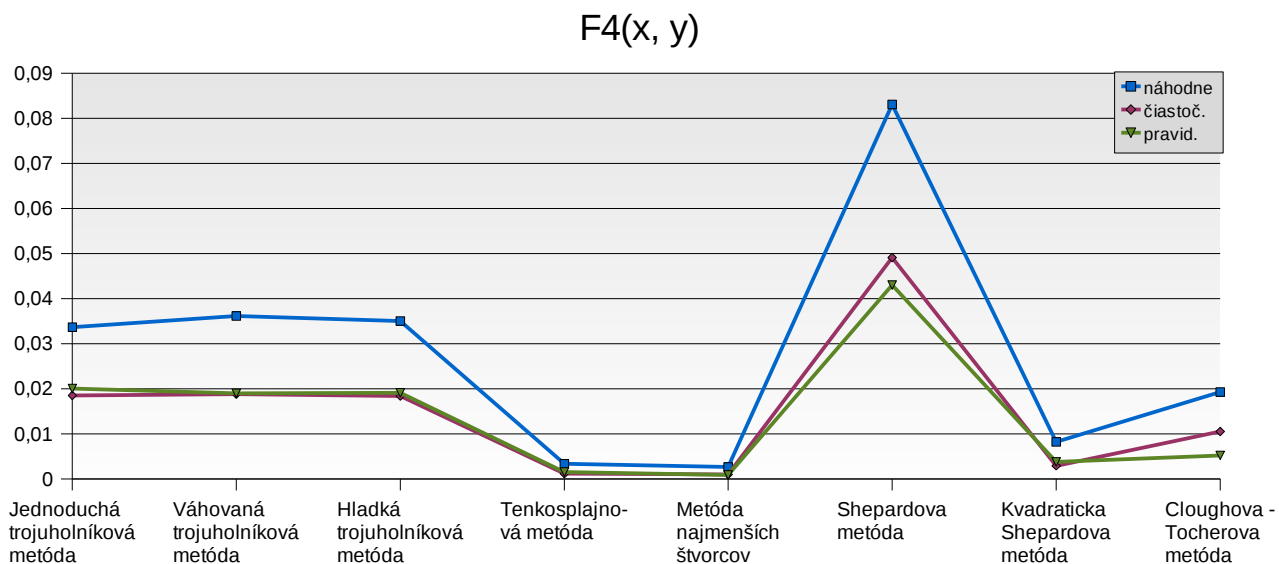
Graf 3: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_1(x, y)$ .



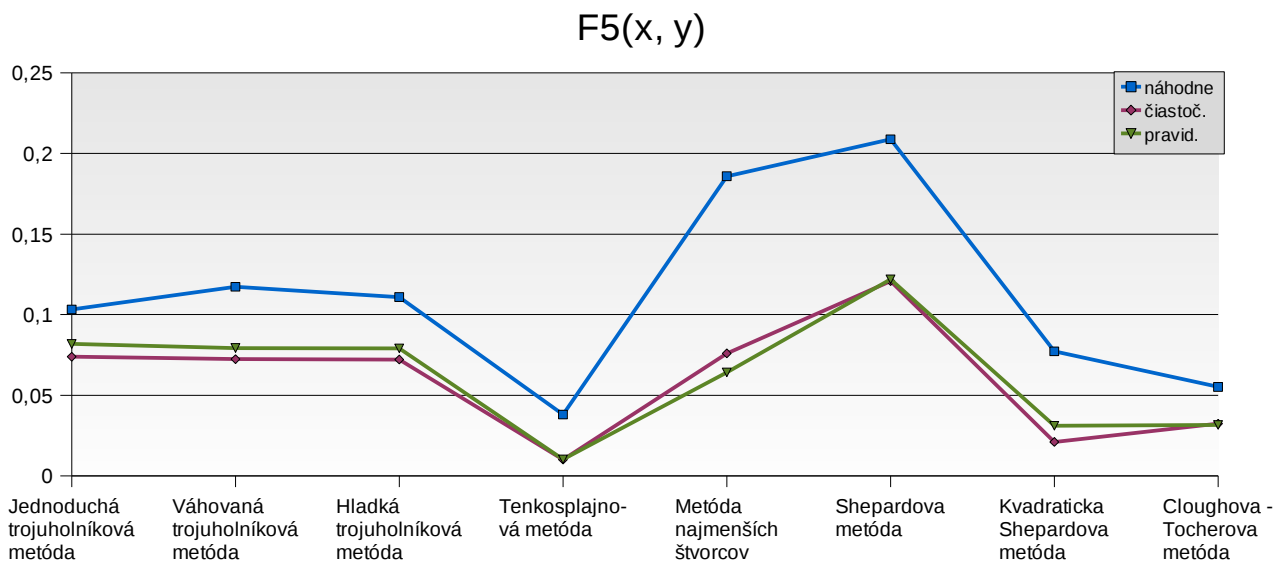
Graf 4: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_2(x, y)$ .



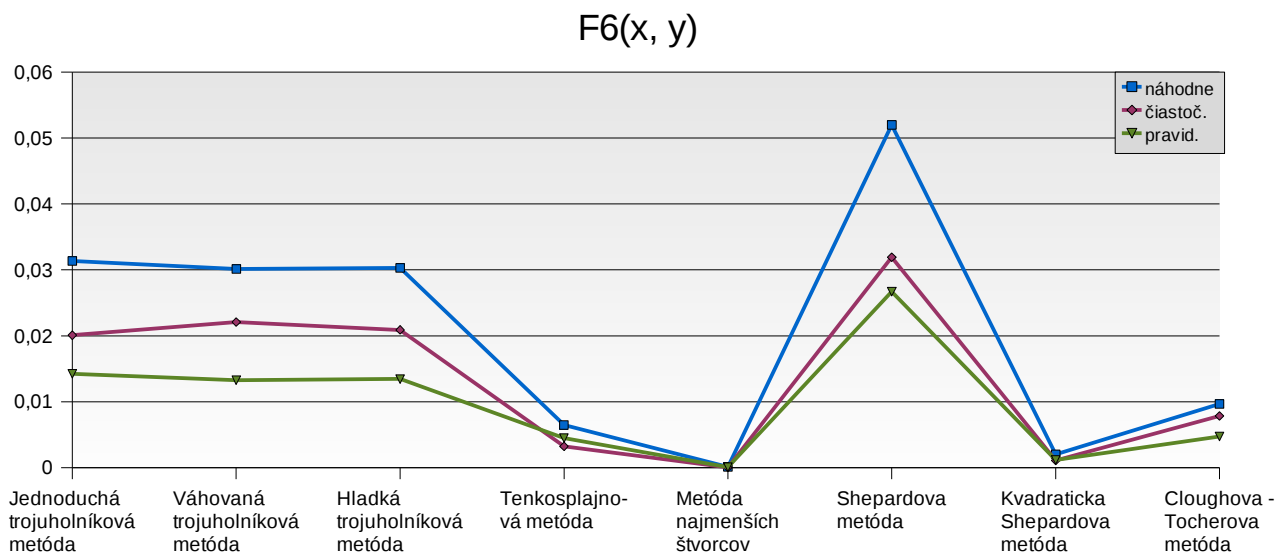
Graf 5: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_3(x, y)$ .



Graf 6: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_4(x, y)$ .

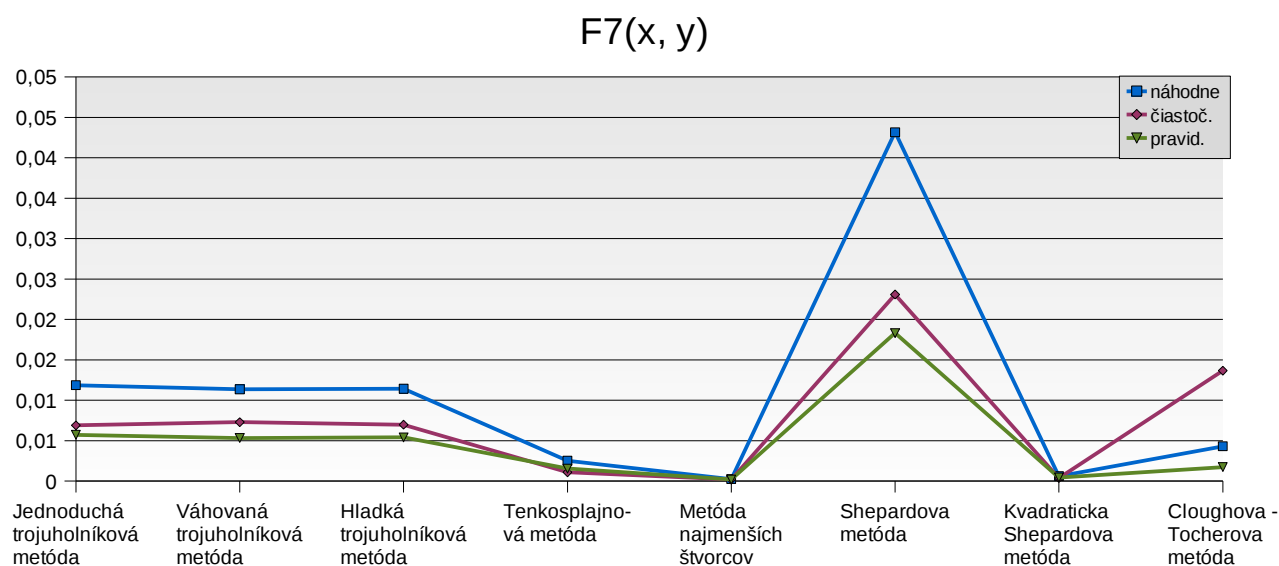


Graf 7: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_5(x, y)$ .

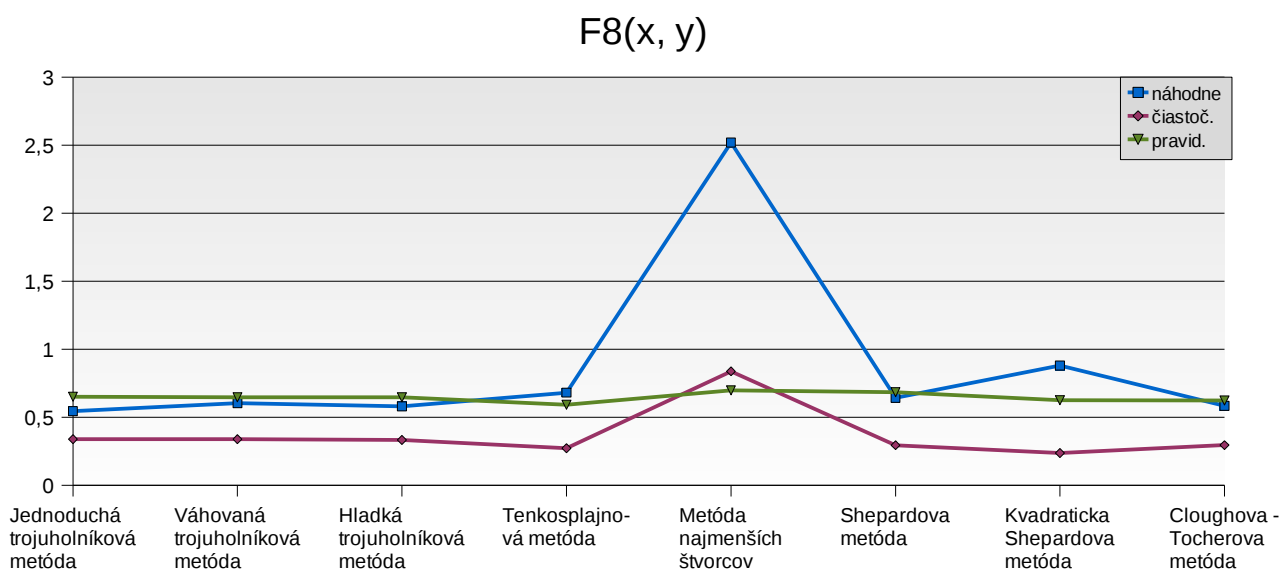


Graf 8: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_6(x, y)$ .





Graf 9: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_7(x, y)$ .



Graf 10: Porovnanie presnosti jednotlivých interpolačných metód s akou sa približujú k testovanej funkcii  $F_8(x, y)$ .