

Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu

RNDr. Róbert Bohdal
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta Matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava
bohdal@fmph.uniba.sk

Abstract

The main goal of this paper is to describe some methods for the picture deformation recovery by the image registration methods using the control points, which describe how parts of an image are transformed. An additional goal is to find the most accurate method among them. We also used a new methodology to determine the accuracy of various methods.

Úvod

Katastrálne mapy vlastníkov pôdy sa donedávna archivovali len v klasickej papierovej podobe. Súčasný stav a možnosti výpočtovej techniky umožňujú uchovávať tieto mapy v digitálnom tvare. Vplyvom zmeny vlhkosti bolo mnoho máp tvarovo deformovaných. Pritom z nich potrebujeme dostať pomerne presnú informáciu o výmerách jednotlivých pozemkov. Našťastie už v dobách minulých sa pri kreslení takýchto máp využívali *identifikačné body*, ktoré označovali polohu významných objektov reálneho sveta (stromy, význačné geografické zvláštnosti, alebo rohy väčších budov). Pomocou presnej polohy týchto bodov je možné vhodnými matematickými metódami čiastočne odstrániť deformácie máp.

V tomto príspevku porovnáme najpoužívanejšie transformačné metódy používané pri odstraňovaní deformácie obrazu a štatistickými mierami určíme presnosť s akou tieto deformácie odstraňujú.

Formulácia problému:

Majme zadané dve množiny bodov \mathcal{P} a \mathcal{V} v rovine \mathbb{E}^2 , $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_i[x_i, y_i] \in \mathbb{E}^2; i = 1, 2, \dots, n\}$ a $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_i[x'_i, y'_i] \in \mathbb{E}^2; i = 1, 2, \dots, n\}$. Budeme hľadať takú transformačnú funkciu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, pre ktorú platí $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{v}_i$, kde $i = 1, 2, \dots, n$. Jednotlivé dvojice $(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i)$ budeme nazývať *odpovedajúce si body*. Pomocou funkcie $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ budeme transformovať všetky body vstupného obrazu a získame nový obraz.

Jednosegmentové transformačné metódy

Do tejto triedy metód patria tie metódy, ktorých transformačné funkcie sú určené jedinou vektorovou funkciou $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na celom svojom definičnom obore. Výhodou týchto metód je ich jednoduché vyjadrenie, nenáročná implementácia a možnosť vypočítať hodnoty bodov nového obrazu aj mimo konvexného obalu zadaných odpovedajúcich si bodov. Ich transformačné funkcie majú väčšinou globálny vplyv na transformované body obrazu. Modifikáciou týchto metód môžeme získať transformačné funkcie, ktoré majú lokálny vplyv. V tejto časti uvedieme metódu *tenkostenných splajnov* a *Shepardovu metódu*.

Metóda tenkostenných splajnov

Tenkospajnová metóda patrí medzi najpoužívanejšie metódy pri odstraňovaní tvarových deformácií obrazu. Interpoláčna transformačná funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je určená vzťahom [ISKE03]:

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 x + \mathbf{c}_3 y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i^2 \log(r_i^2), \text{ kde } [x, y] \in \mathbb{E}^2. \quad (1)$$

Riešenie vzťahu (1) nájdeme, ak parametre λ_i , $i = 1, \dots, n$ spĺňajú nasledujúce okrajové podmienky:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathbf{0} \text{ a } \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Použitím podmienok interpolácie $f(\mathbf{p}_i) = v_i$, kde $i = 1, 2, \dots, n$ spolu s okrajovými podmienkami (2) vypočítame neznáme hodnoty c_1, c_2, c_3 a $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ z nasledujúcej sústavy rovníc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 & r_{21}^2 \log(r_{21}^2) & \cdots & r_{n1}^2 \log(r_{n1}^2) \\ 1 & x_2 & y_2 & r_{12}^2 \log(r_{12}^2) & 0 & \cdots & r_{n2}^2 \log(r_{n2}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & r_{1n}^2 \log(r_{1n}^2) & r_{2n}^2 \log(r_{2n}^2) & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \\ \vdots \\ \lambda_n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kde $r_{ij}^2 = r_{ji}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$.

Shepardova metóda

Shepardova metóda uvedená v práci [SHEP68], patrí medzi najznámejšie postupy pri riešení interpolačného problému *nerovnomerne rozptýlených dát* (scattered data interpolation).

Rovnako ako v predošlej metóde, hľadáme transformačnú funkciu $f(\mathbf{x})$, pre ktorú platí $f(\mathbf{p}_i) = v_i$, pre $i = 1, 2, \dots, n$. Funkciu $f(\mathbf{x})$ Shepard definoval ako vážený súčet [HOS93]:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) v_i. \quad (4)$$

Váhové funkcie $\omega_i(\mathbf{x})$ vo vzťahu (4) sú vyjadrené nasledovne:

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^n \sigma_j(\mathbf{x})}, \quad (5)$$

kde $\sigma_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^{-\mu_i}$, pre $\mu_i > 0$. Parameter μ_i umožňuje modifikovať tvar výslednej plochy v okolí interpolovaných bodov.

Globálny vplyv tejto metódy môžeme redukovať prenasobením funkcií $\sigma_i(\mathbf{x})$ tzv. *tlmiacou funkciou* (mollifying function) $\lambda_i(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^d)$. Najznámejšia *Frankeova-Littleova* tlmiaca funkcia má nasledovné vyjadrenie [HOS93]:

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{d_i(\mathbf{x})}{R_i}\right)_+^\mu, \text{ kde } R_i > 0.$$

Franke a Nielson zvolili hodnotu $R_i = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{N_w}{n}}$, kde D je najväčšia vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma bodmi množiny \mathcal{P} zadaných bodov a N_w je pevne zvolené celé číslo (obyčajne $N_w = 19$; heuristicky získaná hodnota).

Franke a Nielson v práci [FRAN80] zovšeobecniili Shepardovu metódu použitím tzv. *lokálnych interpolantov*. Namiesto hodnôt v_i vo vzťahu (4) použili lokálne interpolačné funkcie $L_i(\mathbf{x})$ s vlastnosťou $L_i(\mathbf{p}_i) = v_i$:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) L_i(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Za interpolačné funkcie zvolili triedu kvadratických polynómov a dosiahli dostatočne hladké plochy s relatívne nízkou výpočtovou náročnosťou.

Modifikovanú kvadratickú Shepardovu metódu môžeme opísať nasledovným postupom: Prepísaním vzťahu (6) do vhodnejšieho tvaru dostávame:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) Q_i(x, y), \quad (7)$$

kde lokálny kvadratický interpolant $Q_k(x, y)$ je definovaný vzťahom:

$$\mathbf{Q}_i(x, y) = \mathbf{c}_{i,1}(x - x_i)^2 + \mathbf{c}_{i,2}(x - x_i)(y - y_i) + \mathbf{c}_{i,3}(y - y_i)^2 + \mathbf{c}_{i,4}(x - x_i) + \mathbf{c}_{i,5}(y - y_i) + \mathbf{v}_i. \quad (8)$$

Koeficienty pre $\mathbf{Q}_i(x, y)$ vypočítame pomocou metódy najmenších štvorcov z podmienky:

$$\sum_{k=1, k \neq i}^n \omega_k(x_i, y_i) [\mathbf{c}_{i,1}(x_k - x_i)^2 + \dots + \mathbf{c}_{i,5}(y_k - y_i) + \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_k]^2 \rightarrow 0, \quad (9)$$

kde $\omega_k(x, y) = \left(\frac{R_q - d_k(x, y)}{R_q d_k(x, y)} \right)_+^2$ a R_q je pevne daný polomer vplyvu pre bod $\mathbf{p}_i[x_i, y_i]$ a k nemu zodpovedajúci lokálny interpolant $\mathbf{Q}_i(x, y)$.

Viacsegmentové metódy

Viacsegmentové metódy (známe aj ako *metódy konečných prvkov*) sú založené na triangulácii konvexného obalu vstupných odpovedajúcich si bodov množiny \mathcal{P} . Vo všetkých nasledujúcich metódach je nevyhnutné, aby celý obraz, ktorý chceme transformovať, ležal vnútri konvexného obalu bodov \mathbf{p}_i množiny \mathcal{P} .

Cloughova-Tocherova metóda

Nevýhodou po častiach lineárnych interpolačných plôch je to, že sú iba C^0 -spojité. C^1 -spojitosť vyžaduje konštruovať interpolačné plochy zložené z polynómov vyššieho stupňa ako 1. Na zaručenie C^1 -spojitosti pozdĺž hraníc potrebujeme poznať nielen súradnice $[x_i, y_i]$ vrcholov a ich hodnoty z_i , ale aj dotykovú rovinu (resp. gradient) v danom vrchole, ako i derivácie v priečnom smere prislúchajúce jednotlivým hranám trojuholníkovej siete. Keďže hodnoty gradientov nie sú obyčajne známe, musia byť nejakým spôsobom vypočítané zo zadaných súradníc vrcholov. Detailnejší opis niektorých metód na odhad derivácií môžeme nájsť v [STE84] a [AKI84]. Pri konštrukcii C^1 -spojitého kubického Cloughoveho-Tocheroveho interpolantu rozdelíme každý trojuholník pôvodnej triangulácie na tri *minitrojuholníky* spojením každého vrcholu trojuholníka s jeho ťažiskom.

Hľadanou interpolačnou funkciou bude C^1 -spojitá plocha zložená z *Bézierových trojuholníkových záplat* stupňa 3 nad každým minitrojuholníkom.

Cloughova-Tocherova metóda používa kubické Bézierove trojuholníkové záplaty:

$$\mathbf{X}(u, v, w) = \mathbf{b}_{300}u^3 + 3\mathbf{b}_{210}u^2v + 3\mathbf{b}_{120}uv^2 + \mathbf{b}_{030}v^3 + 3\mathbf{b}_{021}v^2w + 3\mathbf{b}_{012}vw^2 + \mathbf{b}_{003}w^3 + 3\mathbf{b}_{102}w^2u + 3\mathbf{b}_{201}wu^2 + 6\mathbf{b}_{111}uvw. \quad (10)$$

Vyčíslenie riadiacich bodov

Bézierove vrcholy riadiacej siete, troch stýkajúcich sa trojuholníkových záplat, vyčíslime nasledovným postupom [AMID02]:

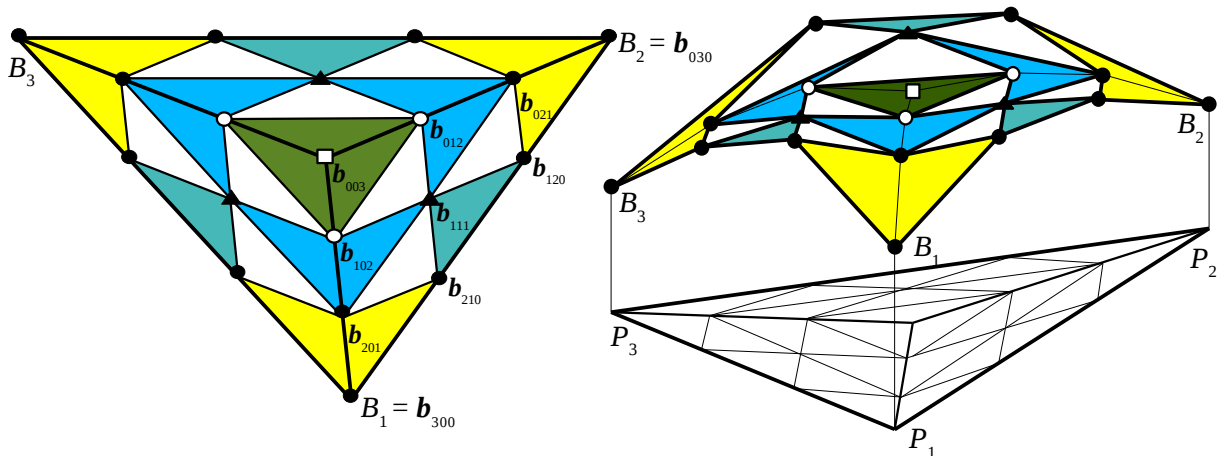
Súradnice $[x, y]$ Bézierových vrcholov nad každým minitrojuholníkom sú určené súradnicami $[x, y]$ vrcholov minitrojuholníka, ďalej súradnicami bodov ležiacich v 1/3 a 2/3 každej jeho strany a nakoniec súradnicami ťažiska minitrojuholníka.

Hodnoty z-ových súradníc Bézierových vrcholov určíme pomocou nasledovných krokov:

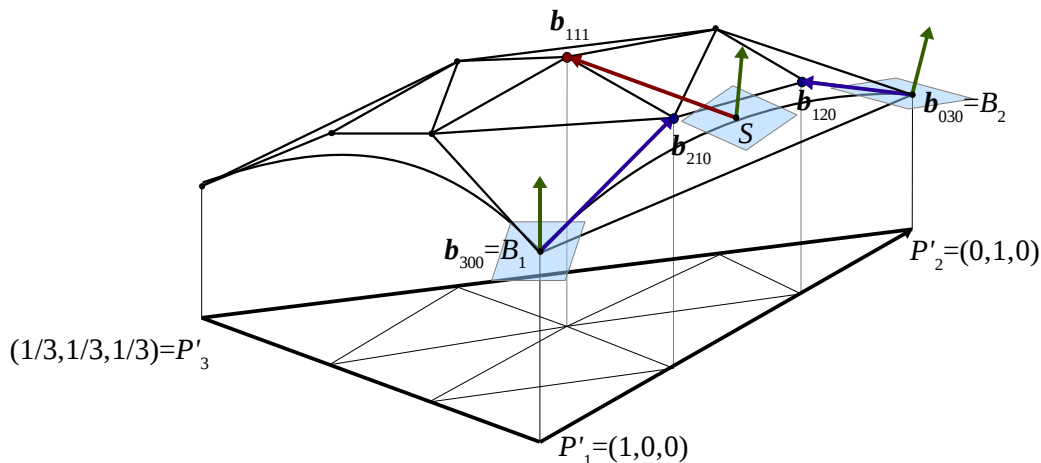
1. Hodnoty z Bézierových vrcholov (nad P_1 a P_2) označených „●“ sú z-ové hodnoty súradníc bodov B_1 a B_2 z danej triangulácie (pozri obrázok 1 vpravo).
2. Hodnoty z vrcholov označených „●“ ležiacich na okraji záplaty vypočítame z podmienky, že tieto vrcholy ležia v dotykovej rovine určenej bodom B_1 alebo B_2 a normálovým vektorom v príslušnom bode (pozri obrázok 1 vpravo a obrázok).
3. Hodnoty z vrcholov označených „●“ ležiacich na spojnici ťažiska trojuholníka s jeho vrcholmi vypočítame z podmienky, že ležia v rovine určenej dvomi už vypočítanými vrcholmi „●“ a jedným daným bodom B_i .

- Hodnoty z troch vrcholov označených „▲“ určíme z odhadnutých derivácií v priechnom smere v strede každej z troch hrán trojuholníka $B_1B_2B_3$. Tieto vrcholy budú ležať v rovine určenej bodom S Bézierovej krivky (pre hodnotu parametra $t = 1/2$) danej riadiacimi bodmi b_{300} , b_{210} , b_{120} , b_{030} a normálovým vektorom vypočítaným z lineárnej kombinácie normálových vektorov vo vrcholoch strany trojuholníka (pozri obrázok 2 a obrázok 1 vľavo).
- Hodnoty z ďalších troch vrcholov označených „○“ vypočítame z podmienky, že ležia v rovine určenej dvomi vrcholmi „▲“ a jedným vnútorným vrcholom „●“ (pretože dva susedné riadiace mikrotrojuholníky s vrcholmi „▲, ●, ○“ musia byť komplanárne, pozri obrázok 1).
- Posledný hľadaný Bézierov vrchol „□“, ležiaci nad ťažiskom trojuholníka $P_1P_2P_3$, leží v rovine určenej tromi vrcholmi „○“, pretože tri „prostredné“ trojuholníky musia byť komplanárne.

Ak už poznáme hodnoty súradníc vrcholov b_{ijk} môžeme použiť vzťah (10) na vyčíslenie bodov Bézierovej záplaty nad konkrétnym minitrojuholníkom. Rovnakým spôsobom budeme postupovať pri všetkých ostatných trojuholníkoch danej triangulácie, čím získame C^1 -spojitú interpolačnú plochu.



Obrázok 1: Konštrukcia siete riadiacich Bézierových vrcholov nad tromi minitrojuholníkmi.



Obrázok 2: Normály a derivácia v priechnom smere určujú polohu Bézierových bodov b_{210} , b_{120} a b_{111} .

Zhodnotenie jednotlivých metód

Presnosť jednotlivých metód pre odstraňovanie deformácií obrazu sme určili na základe obrázku obsahujúceho čiernobielu mriežku a jej troch deformácií (pozri obrázok 1 prílohy). Prvý deformovaný obrázok bol vytvorený stiahnutím stredov okrajov mriežky smerom k jej stredu. Druhý obrázok bol zdeformovaný transformáciou, ktorá zvlnila okraje mriežky. Posledný obrázok bol vytvorený štyrmi lokálnymi deformáciami, z ktorých dve posunuli časti obrazu, ďalšia zväčšila a posledná zmenšila časť obrazu.

Na každý z deformovaných obrázkov sme aplikovali jednotlivé metódy pre odstránenie deformácií obrazov. Pre odstránenie deformácie v prvom obrázku sme použili 13, v druhom 37 a v treťom 86 dvojíc odpovedajúcich si bodov (pozri obrázok 2 prílohy). Počet bodov sme zvolili podľa povahy jednotlivých

deformácií.

Presnosť s akou jednotlivé metódy odstránili deformáciu obrazu sme určili pomocou:

- *odmocniny strednej odchýlky - RMSE:*

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - y_{ij})^2},$$

kde symbolom x_{ij} sú označené hodnoty pixlov vzorového obrazu a symbolom y_{ij} hodnoty pixlov porovnávaného obrazu,

- *pomeru signálu k šumu - SNR:*

$$SNR = 10 * \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{MSE} \right),$$

kde symbol MSE označuje strednú kvadratickú odchýlku,

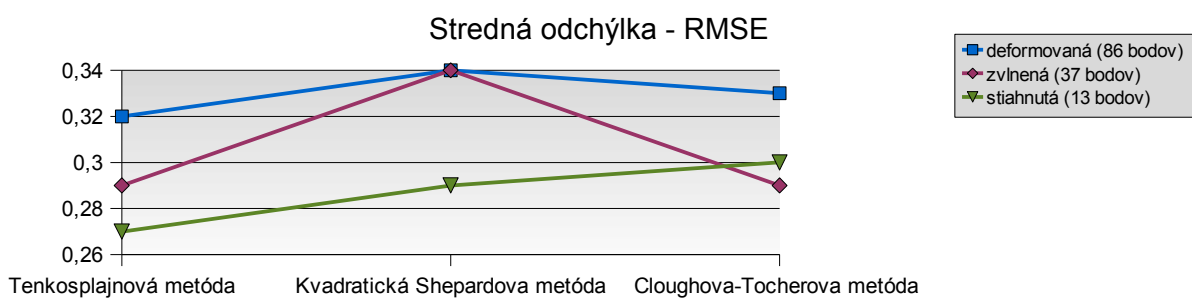
- *koeficientu krížovej korelácie - CC:*

$$CC = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij} - mn \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - mn \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - mn \bar{y}^2)}},$$

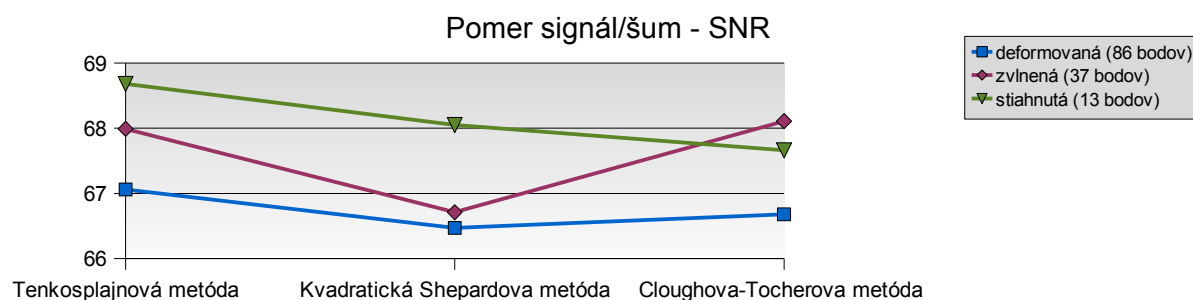
kde \bar{x} , \bar{y} sú priemerné hodnoty: $\bar{x} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ a $\bar{y} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}$.

		deformovaná (86 bodov)	zvlnená (37 bodov)	vťahnutá (13 bodov)
Tenkosplajnová metóda	RMSE	0,31974	0,29178	0,26966
	SNR	67,05630	67,98896	68,68383
	CC	0,77261	0,80886	0,83655
Kvadratická Shepardova metóda	RMSE	0,34258	0,33808	0,29000
	SNR	66,47147	66,71043	68,04685
	CC	0,73866	0,74335	0,81108
Cloughova-Tocherova metóda	RMSE	0,33223	0,28750	0,30271
	SNR	66,68221	68,10920	67,65690
	CC	0,75509	0,81454	0,79438

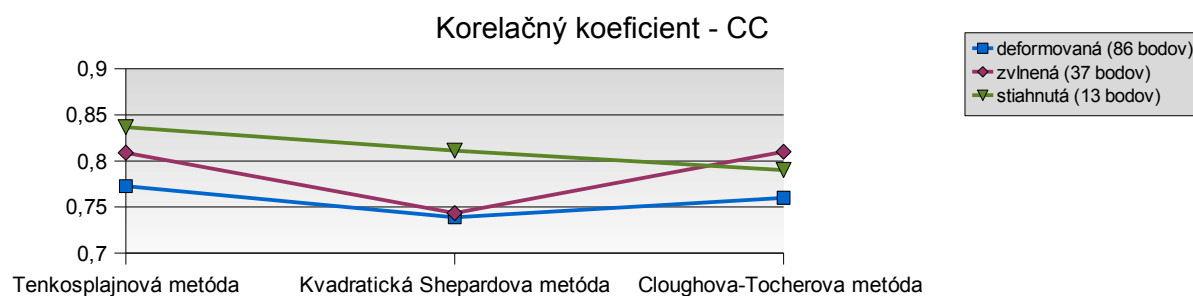
Tabuľka 1: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu zvlnenej, stiahnutej a deformovanej mriežky.



Graf 1: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu zvlnenej, stiahnutej a deformovanej mriežky. Koeficient RMSE.



Graf 2: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu zvlíenej, stiahnutej a deformovanej mriežky. Koefficient SNR.



Graf 3: Porovnanie metód pre odstraňovanie deformácií obrazu zvlíenej, stiahnutej a deformovanej mriežky. Koefficient CC.

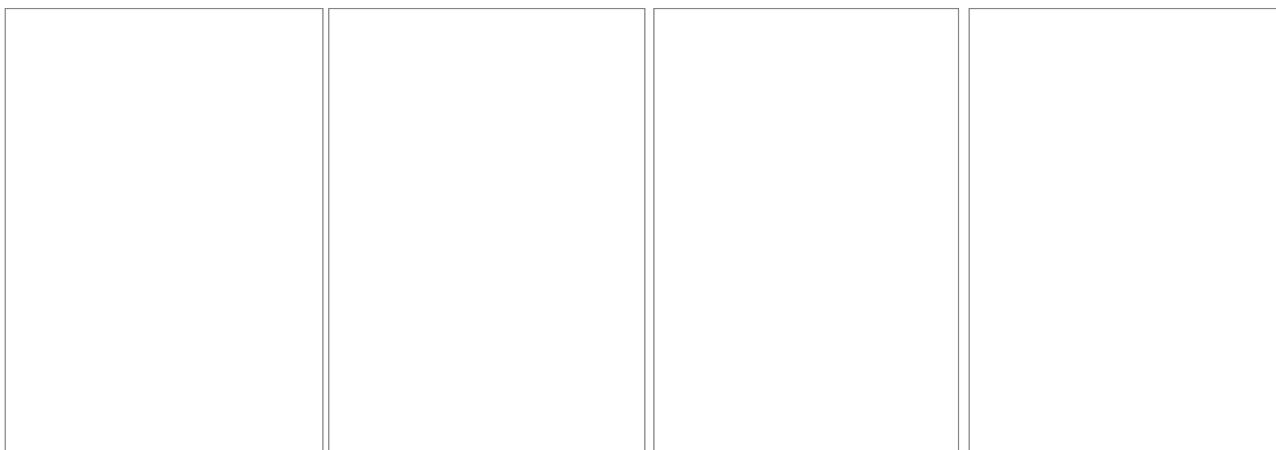
Záver

Presnosť jednotlivých metód pre odstránenie deformácie obrazu, sme určili pomocou viacerých štatistických mier ($RMSE$, SNR , CC). Porovnávali sme vždy pôvodný, nedeformovaný obrázok s obrázkom, v ktorom bola odstránená deformácia konkrétnou metódou. Výsledky týchto porovnaní sú uvedené v tabuľke č. 1 a v grafe č. 1 až 3. Zo všetkých metód na odstránenie deformácií obrazu bola vo všeobecnosti najpresnejšia tenkosplajnová metóda. Práve túto metódu pomerne často používajú autori pri vývoji aplikácií, ktoré vykonávajú transformáciu obrazu. V praxi je koeficient krížovej korelácie najpoužívanejšou mierou pre porovnanie podobnosti dvoch obrazov.

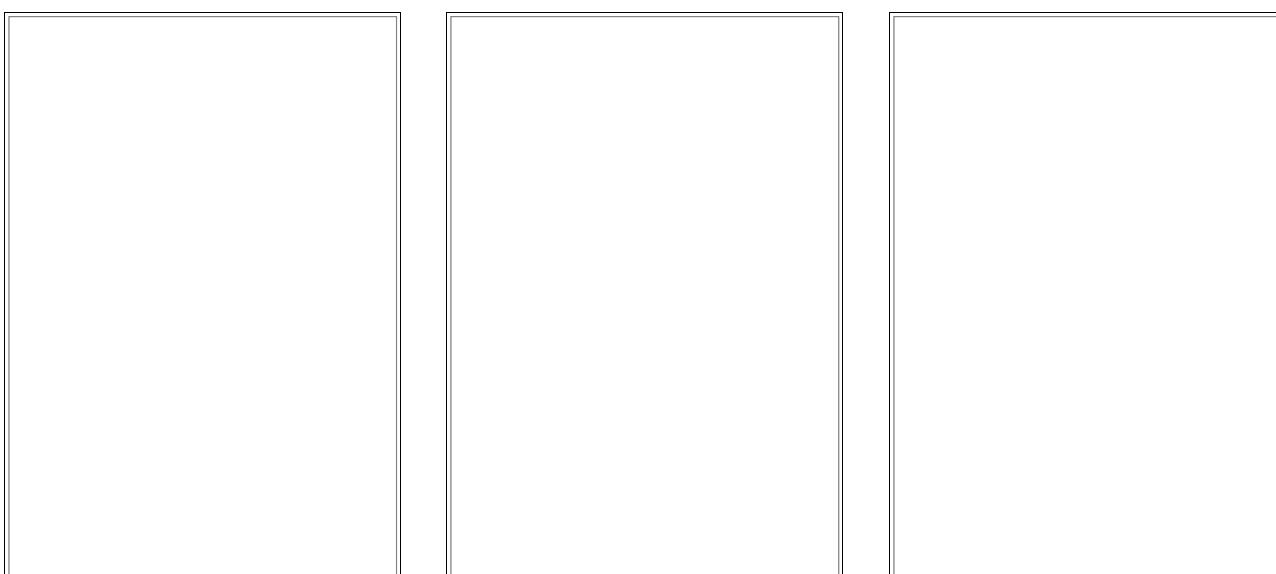
Literatúra

- [AKI84] H. Akima: *On Estimating partial derivatives for bivariate interpolation of scattered*. Rocky Mountain Journal of Mathematics 1(14), 1984, (str. 41-52).
- [AMID02] I. Amidror: *Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems*. Journal of Electronic Imaging 2(11), 2002, (str. 157-176).
- [FRAN80] R. Franke, G. Nielson: *Smooth interpolation of large sets of scattered data*. Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering (15), 1980, (str. 1691-1704).
- [HOS93] J. Hoschek, D. Lasser: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters, Wellesley, MA, 1993, (str. 388-421).
- [ISKE03] A. Iske: *Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for Transport Problem*. Seminar of Mathematics, 2003, (str. 247-274).
- [SHEP68] D. Shepard: *A two dimensional interpolation function for irregular spaced data*. Proceedings 23rd ACM National Conference, 1968, (str. 517-524).
- [STE84] S. Stead: *Estimation of gradients from scattered data*. Rocky Mountain Journal of Mathematics 1(14), 1984, (str. 265-279).

Príloha



Obrázok 1: Pôvodná, nedeformovaná mriežka, stiahnutá mriežka, zvlnená mriežka a deformovaná mriežka.



Obrázok 2: Zadané odpovedajúce si body pre opravu stiahnutej mriežky (vľavo), zvlnenej mriežky (v strede), deformovanej mriežky (vpravo).



Obrázok 3: Odstránená deformácia pomocou tenkosplajnovej metódy stiahnutej mriežky (vľavo), zvlnenej mriežky (v strede), deformovanej mriežky (vpravo).