Obsah

Úvod

V súčasnosti sa do popredia dostáva moderná technika, výkonnejšie počítače a grafické kalkulátory, ktoré majú množstvo funkcií a možnosť komunikovať s počítačmi. Majú nám uľahčiť život aj štúdium. Je veľmi jednoduché naučiť sa s nimi pracovať a používať ich v bežnom živote. Jedným z programov je didaktický geometrický softvér Cabri geometria II Plus (ďalej len Cabri).

Stretávame sa s tým, že zadanie problému vyzerá veľmi jednoducho. Komplikácie nastávajú keď chceme narysovať riešenie a zvlášť, keď chceme zobraziť všetky možnosti. Potrebujeme nájsť krajné riešenia, chceme vykresliť veľké množstvo bodov, alebo pri zmene voliteľných útvarov chceme sledovať, či požadované vlastnosti sú splnené. Často je prekážkou presnosť rysovania, alebo zdĺhavosť procesu. Pokiaľ chceme zmeniť aj keď len jeden údaj musíme konštruovať celé riešenie znovu. Potrebujeme taký program, v ktorom keď zmeníme jeden parameter konštrukcia sa sama prekreslí so vzťahmi, ktoré v nej platia. Túto možnosť nám dáva Cabri geometria. Je výhodné mať softvér na takéto zobrazovanie, no keď s ním nepracujeme pravidelne, množstvo jeho funkcií nám môže spôsobiť komplikácie. Pokiaľ sa potrebujeme rýchlo a presne orientovať v pracovnom prostredí potrebujeme manuál, alebo podobnú pomôcku, ktorá by urýchlila našu prácu. Vytvorenie príručky bol preto aj jeden z cieľov tejto práce. Ikonky na tlačidlách názorne zobrazujú aká je funkcia daného tlačidla, ale bolo potrebné aj opísať vstupné parametre, aby všetko fungovalo a nedochádzalo k nežiaducim výsledkom.

Druhým cieľom bolo ukázať aplikácie Cabri. Je to grafický softvér, ktorý umožňuje veľmi prehľadné konštrukcie zvolených problémov. Aj keď Cabri nerieši zadanú úlohu, výrazne uľahčuje zobrazovanie a experimentovanie. Ak máme dané vzťahy medzi útvarmi, sú tieto zachovávané počas celej práce s danou úlohou.

1 Historický vývoj Cabri

Keď v roku 1980 vznikol prvý grafický počítač umožňujúci užívateľovi dynamicky znázorňovať a manipulovať s geometrickými útvarmi bolo už len otázkou času, kedy sa objaví niekto, kto by začal s touto vymoženosťou pracovať a rozvíjať ju ďalej. Taký človek sa objavil vo Francúzsku. Jean-Marie Laborde, programátor, matematik a výskumník v oblasti diskrétnej matematiky sa rozhodol, že je potrebné vytvoriť akúsi knihu geometrie „Cabri-géomètre“ kde slovo CABRI vychádza z prvých písmen slov "**CA**hier de **BR**ouillon **I**nteractif"[1], ktorá umožní užívateľovi skúmať vlastnosti geometrických objektov a ich vzťahov. Spolu s Jean-Marie Laborde-om sa na príprave softvéru podieľali aj Philippe Cayet, Yves Baulac, Franck Bellemain a ich študenti. Cabri Geometria bola spoločnosťou Apple ocenená ako najlepší výučbový softvér. Na čo vlastne Cabri slúži:

- na rýchle a presné rysovanie geometrických konštrukcií,
- obsahuje nástroje pohybu, umožňujúce manipuláciu s hotovou konštrukciou,
- dokáže merať vzdialenosti a čísla opäť v konštrukciách používať,
- obsahuje nástroje pre analytickú geometriu,
- nástroj na experimentovanie a overovanie hypotéz.

V deväťdesiatych rokoch prichádza nová generácia Cabri II, ktorá sa neskôr vyvinula do Cabri II Plus. Táto verzia bola o niečo zložitejšia a mala výrazne viac nástrojov a možností upravovania jednotlivých útvarov. V tom istom roku bol vyvinutý aj softvér Cabri Junior, vytvorený pre grafické kalkulátory. V roku 2004 vznikla úplne nová cesta Cabri a to Cabri 3D. Toto grafické prostredie je vytvorené na riešenie stereometrických úloh, zatiaľ čo doteraz Cabri riešilo prevažne planimetrické úlohy.

[1] Cahier de brouillon Interactif- v doslovnom preklade znamená zošit interaktívnych náčrtkov

Stručný prehľad histórie

1980 Prvý Apple "Macintosh" graficky počítač umožňujúci užívateľovi dynamicky znázorňovať a manipulovať s geometrickými útvarmi.

1985 Vzniká **Cabri geometria**.

1988 Apple ocenil Cabri Geometri ako **"Najlepší výučbový softvér"**

1989 Cabri geometria je dostupná na francúzskom trhu s podporou francúzskeho ministerstva vzdelávania a ďalej v mnohých krajinách verzie pre MacOS alebo DOS.

1990-1996 Vzniká nová generácia Cabri geometrie **Cabri II**.

1996 Špeciálna verzia softvéru je zabudovaná do Texas Instruments grafického kalkulátora TI-92.

2000 Spoločnosť **Cabrilog** je založená Jean-Marie Laborde-om, výskumníkom a riaditeľom národného centra pre vedecký výskum a univerzitou Josepha Fourier-a v Grenóbli vo Francúzsku spolu s Maxom Marcadet-om, ktorý má 33 ročné skúsenosti s prácou v IBM a je vedúcim Malého a stredného podnikania a priemyslu.

Riaditeľom Cabrilog-u je Jean-Marie Labodre, ktorý vedie výskum a vývoj, zatiaľ čo Max Marcadet je zodpovedný za financie.

2003 Na začiatku roka je dostupná nová verzia Cabri geometrie: **Cabri Geometry II Plus**, ktorú nasleduje nový geometrický softvér: **Cabri Junior** pre grafické kalkulátory TI83 and TI84.

2004 V septembri na konferencii Cabriworld v Ríme Jean-Marie Laborde prezentuje Cabri Geometry II plus pre systém MacOS X a v tom istom čase úplne nový produkt **Cabri 3D**. [1]

2 Rozdiely medzi Cabri II a Cabri II Plus

Obrázky

Výkresy, ukladané ako obrázky s príponou FIG vytvorené v Cabri II je možné v Cabri II Plus otvoriť a ďalej s nimi pracovať. Opačný proces nie je možný, vzhľadom na niektoré nové nástroje, ktoré sa v novej verzii nachádzajú.

Postup konštrukcie

Zmenil sa aj názov nástroja na zápis postupu konštrukcie, zatiaľ čo v Cabri II sa tento nástroj nazýva *História* vo verzii Cabri II Plus sa nástroj nazýva *Prehrať konštrukciu*. Okrem zmeny názvu pribudla nová možnosť krokovania postupu, ktorou je možné vypnúť a zapnúť detailné krokovanie makra. V staršej verzii táto možnosť nebola. V Cabri II bolo detailné krokovanie makier automatické, čo malo za následok, že konštrukcie s využitím makier sa zobrazovali príliš detailne a postup konštrukcie sa stával neprehľadný.

Množina bodov danej vlastnosti

V Cabri II nie je množina bodov danej vlastnosti rovnocenným objektom so štandardnými objektmi a preto ju niektoré nástroje nepovoľujú ako parameter. Toto sa v Cabri II Plus zmenilo a je možné mimo iného vytvoriť napríklad priesečník množiny bodov danej vlastnosti s iným objektom.
Podobné je to pri používaní nástroja *Súradnice a rovnice*. Keď máme zobrazenú súradnicovú sústavu, v Cabri II nebolo možné zistiť rovnice vzniknutého objektu, aj keď tento mohol byť priamka, či kružnica. V Cabri II Plus je tento problém vyriešený a rovnice vzniknutej množiny sa dajú jednoducho zobraziť.

Výrazy

Tento nástroj je nový v Cabri II Plus. Výraz vkladáme na plochu pomocou klávesnice a nástroja *Výraz*. Tento sa skladá z číselných konštánt, jednopísmenných premenných a operačných znamienok, podľa bežných pravidiel zapisovania. Ďalej máme dve možnosti ako s výrazom pracovať. Použijeme nástroj *Použi výraz*

- môžeme vyčísliť hodnotu výrazu, keď za jednotlivé premenné zvolíme čísla zadané nástrojom *Číselná hodnota*. Výsledok môžeme umiestniť na plochu a pri zmene hodnôt dosadených za premenné, ako aj pri editácii výrazu sa jeho výsledná hodnota automaticky prepočítava.
- pokiaľ pracujeme len s jednou premennou x je možné vykresliť graf a to kliknutím na výraz a následne na súradnicovú os x.

Farby

V Cabri II Plus je možnosť využiť 41 farieb z palety. Významným rozšírením množstva farieb je možnosť voliť ich zloženie numericky pomocou troch čísel, kde tieto sú postupne červená, zelená a modrá zložka. Čísla, ktoré v tomto prípade dosadzujeme za jednotlivé zložky berieme z plochy. Toto dáva možnosť s farbami experimentovať.

Dôležitou vlastnosťou je aj možnosť zvoliť si priehľadnosť či nepriehľadnosť výplne objektov. A následne určiť, ktorý útvar bude navrchu.

Skrátené priamky

V Cabri II Plus existuje okrem bežného nástroja *Skry/Ukáž* možnosť zobraziť len tú časť priamky, ktorá je použitá v konštrukcii a „koncové“ polpriamky skryť.

Text

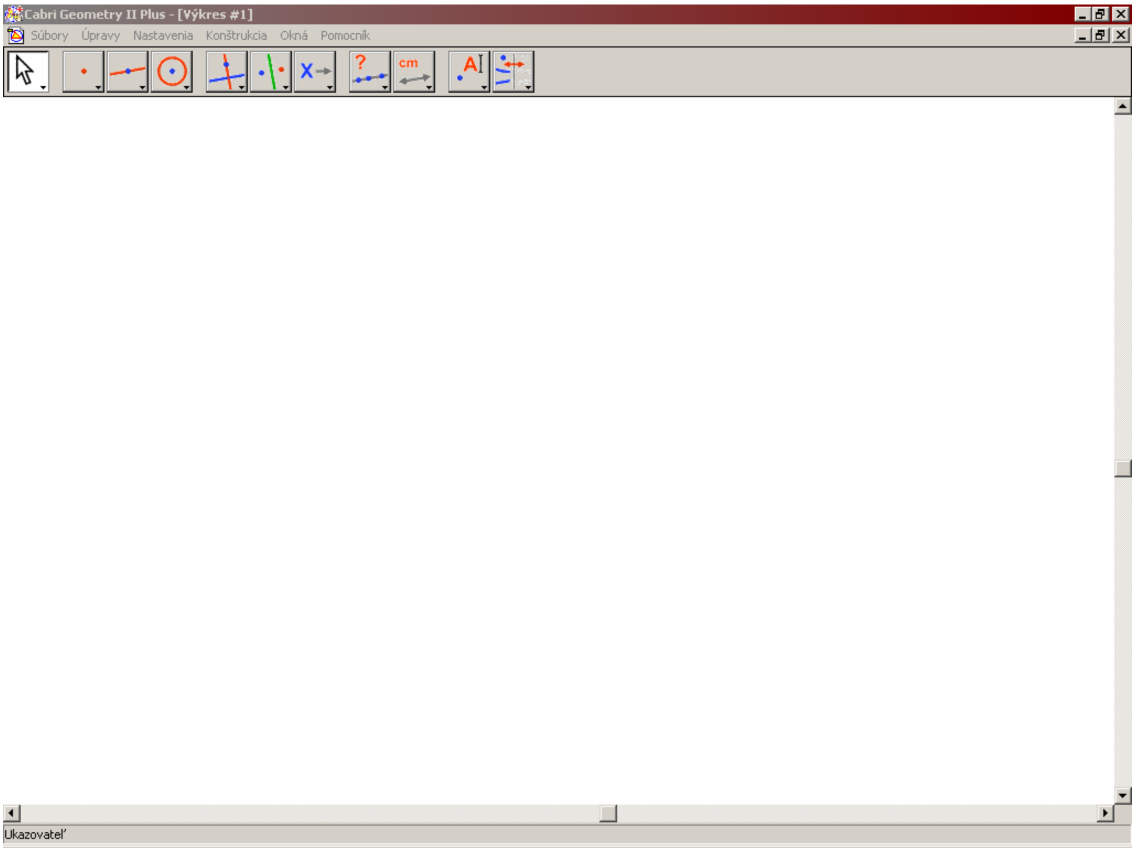
Editor textu je tiež zmenený. Máme možnosť v textovom okienku kombinovať rôzne typy písma ako aj jeho farbu veľkosť a ostatné vlastnosti.

Pomenovania objektov

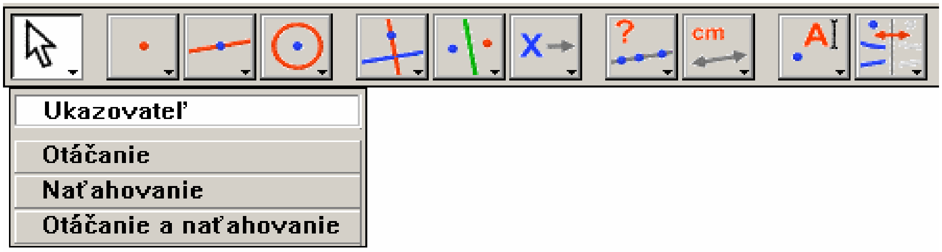
V Cabri II Plus je možné pomenovať všetky objekty a môžeme pri popisoch používať aj horný a dolný index, čo je v geometrii veľmi výhodné. [2]

3 Cabri II Plus

Prostredie Cabri II Plus hneď po spustení programu:

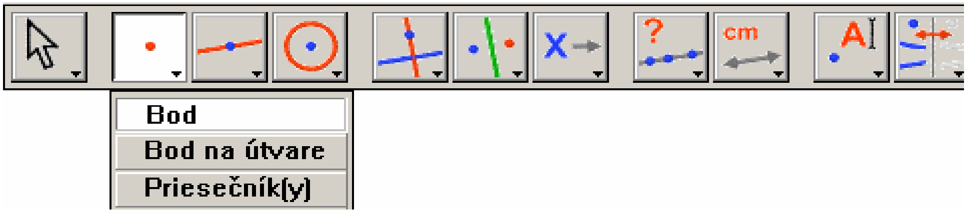


3.1 Ukazovateľ



a) **Ukazovateľ** – pohybom myši ovládame kurzor, ak sme v blízkosti nejakého útvaru, kurzor sa mení na „ukazovák“, a text hlási druh útvaru. Kliknutím označujeme útvary, ktorými chceme ďalej manipulovať – pohybovať nimi, meniť ich veľkosť a tvar, vymazať ich.

3.2 Body



a) **Bod** – kliknutím umiestnime na výkres bod. Pokiaľ klikneme na už zobrazený útvar automaticky sa bod stáva bodom na útvare a nie je možné s ním pohybovať po celej ploche.

b) **Bod na útvare** – kliknutím na útvar umiestnime na ňom bod, ktorý sa môže pohybovať len po danom útvare – priamka, úsečka, trojuholník, kruh a pod.

c) **Priesečník(y)** – kliknutím myši umiestnime bod ako priesečník už narysovaných útvarov.

3.3 Lineárne útvary

a) **Priamka** – je daná dvoma bodmi, preto ju narysujeme kliknutím na dva body výkresu. Prvý bod sa zobrazí. Následne sa ukáže priamka a je možné ju vidieť v závislosti na pohybe myšou. Po druhom kliknutí ostáva priamka na mieste a druhý bod priamky sa nezobrazí. S priamkou je možné ďalej manipulovať a to dvoma spôsobmi:

1. "uchopením" zobrazeného bodu sa priamka presunie a dostaneme priamku rovnobežnú s pôvodnou,

2. “uchopením“ ľubovoľného iného bodu, v tomto prípade sa priamka otáča okolo zobrazeného bodu

b) **Úsečka** – určíme ju dvoma krajnými bodmi. “Uchopením“ krajného bodu môžeme meniť veľkosť úsečky. Ak chceme úsečku iba premiestniť “uchopíme“ niektorý z vnútorných bodov.

c) **Polpriamka** – je daná dvoma bodmi, pričom druhý bod je vnútorným bodom polpriamky. Ďalej platia tie isté pravidlá ako pri priamke. Teda druhý bod sa nezobrazuje a aj pohyb je zabezpečený ako v prípade priamky.

d) **Vektor** – určíme ho dvoma krajnými bodmi, pričom orientácia vektora je od prvého bodu k druhému. Pravidlá manipulácie s vektorom sú totožné s pravidlami manipulácie s úsečkou.

e) **Trojuholník** – je určený tromi bodmi. Pohybom vrcholov sa dá meniť dĺžka strán a veľkosti vnútorných uhlov. Pohybom vnútorných bodov jednotlivých strán môžeme pohybovať celým trojuholníkom, bez toho aby sme menili dĺžky strán, alebo veľkosti vnútorných uhlov. Pozor treba dávať na to, že jednotlivé strany sa nesprávajú ako úsečky. Pokiaľ chceme zmerať dĺžky jednotlivých strán musíme zadávať vzdialenosť vrcholov. V opačnom prípade, kliknútím na vnútorné body strán, dostaneme obvod trojuholníka.

f) **n – uholník** – určíme ho n+1 kliknutiami, n bodov umiestnime na výkres a nakoniec klikneme na prvý bod, n – uholník je tým určený. Manipulácia s n-uholníkom je totožná s manipuláciou s trojuholníkom.

g) **Pravidelný n – uholník** – prvý bod určí stred kružnice, druhý, polomer kružnice opísanej pravidelnému n – uholníku, tretím bodom volíme počet vrcholov n – uholníka. Maximálny počet je 30. Týmto nástrojom môžeme tvoriť aj hviezdy. Pri ich zadávaní sa zobrazí číslo v tvare x/y, kde x je počet cípov a y počet cípov medzi základným vrcholom a vrcholom novo zadaným.

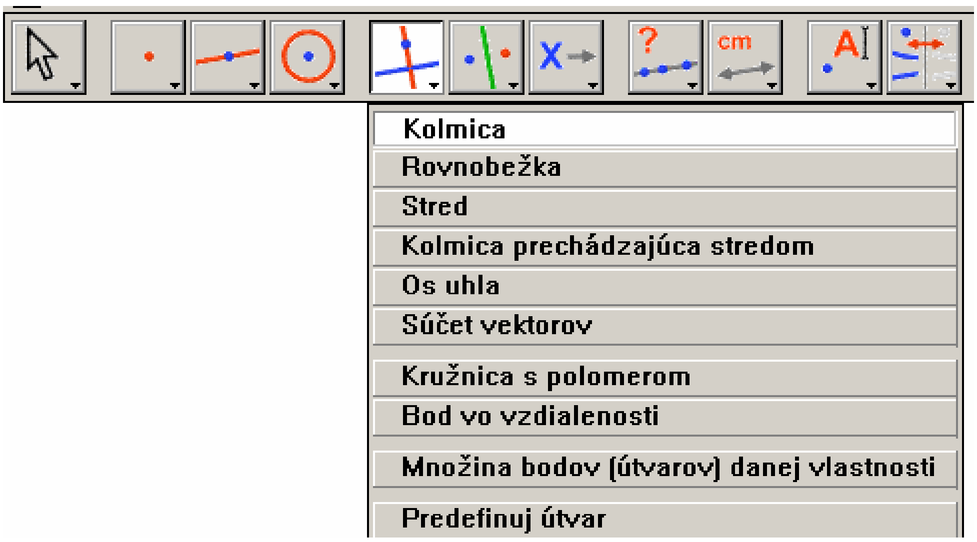
3.4 Nelineárne útvary

a) **Kružnica** – je daná stredom a bodom na obvode kružnice, ktorý vytýči polomer. Určujúci bod na obvode kružnice sa nezobrazuje. "Uchopením" za ľubovoľný bod kružnice môžeme meniť jej polomer. Pohybom stredu presúvame kružnicu bez toho aby sme menili jej polomer.

b) **Oblúk** – je daný troma bodmi: krajným, vnútorným a druhým krajným bodom. Pohyb ako u väčšiny objektov, vyznačenými bodmi meníme polomer a krivosť. Ľubovoľným bodom útvaru môžeme celý útvar presunúť.

c) **Kužeľosečka** – je daná piatimi bodmi. Podľa umiestnenia bodov dostávame elipsu, parabolu, alebo hyperbolu.

3.5 Útvary daných vlastností



a) **Kolmica** – zobrazí priamku kolmú na danú priamku prechádzajúcu daným bodom. Body nemusia do tej doby existovať a môžeme ich získať kliknutím na plochu, alebo na iný objekt. Pokiaľ umiestnime bod na objekt stáva sa tento bodom na útvare a nie je možné s ním pohybovať po celej ploche. Zároveň dostávame závislosť kolmice od smeru priamky. Keď pôvodnú priamku pootočíme automaticky sa otočí aj kolmica.

b) **Rovnobežka** – zobrazí priamku rovnobežnú s danou priamkou, ktorá prechádza daným bodom. Podobne, ako pri kolmici body môžu a nemusia do tej doby existovať a priamo ich môžeme voliť a ploche, či na útvare. Platí aj pravidlo dynamickej práce pri presúvaní závislých útvarov.

c) **Stred** – tento nástroj môžeme používať dvoma spôsobmi:

1. kliknutím na úsečku zobrazí jej stred,
2. kliknutím na dva rôzne body nájde ich stred.

d) **Kolmica prechádzajúca stredom** – kliknutím na úsečku, alebo dva rôzne body zobrazí kolmicu na úsečku, resp. na spojnicu daných bodov.

e) **Os uhla** – nájde os uhla, ktorý určíme kliknutím na bod na ramene, vrchol uhla a bod na druhom ramene.

f) **Súčet vektorov** – zobrazí súčet dvoch daných vektorov. Je potrebné zadať oba vektory a potom počiatočný bod nového vektora. Samozrejme sa zmenou určujúcich vektorov mení aj výsledný vektor.

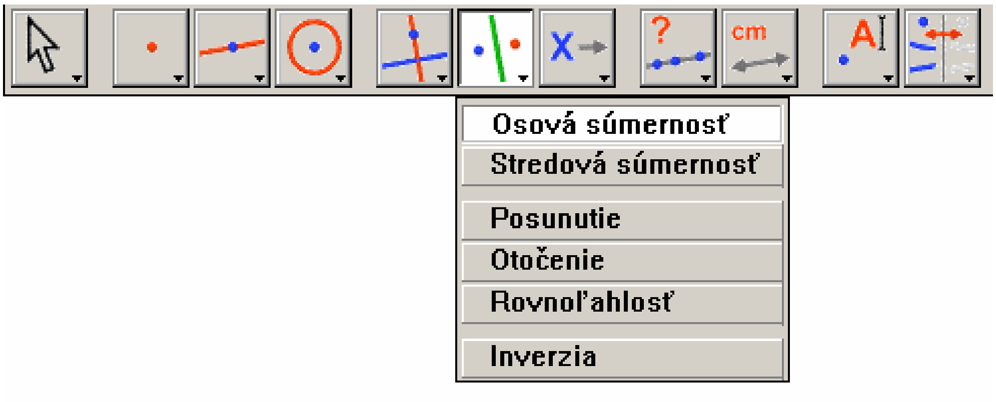
g) **Kružnica s polomerom** – narysuje kružnicu, ktorá je daná stredom a polomerom. Polomer môžeme určiť dvoma spôsobmi:

1. veľkosť danej úsečky, teda klikneme na bod a úsečku,
2. číselná hodnota, alebo ľubovoľný výpočet. V tomto prípade klikneme na bod a na číslo.

h) **Bod vo vzdialenosti** – zobrazí bod, ktorý má od bodu na útvare danú vzdialenosť zadanú ako číselná hodnota, alebo výpočet výrazu.

i) **Množina bodov (útvarov) danej vlastnosti** – zostrojí množinu bodov definovanú pohybom bodu po danom útvare.

3.6 Zobrazenia



a) **Osová súmernosť** – zobrazí obraz útvaru symetrického podľa priamky, polpriamky, úsečky, vektora, alebo strany n-uholníka. Treba kliknúť najprv na vybranú os súmernosti a následne na útvar, ktorý chceme zobraziť.

b) **Stredová súmernosť** – zobrazí obraz útvaru otočeného o 180° okolo daného stredu súmernosti. Treba kliknúť na útvar, ktorý chceme zobraziť a následne na stred súmernosti.

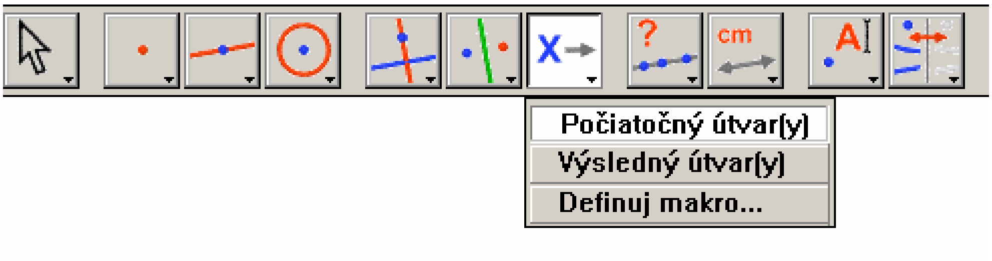
c) **Posunutie** – zobrazí obraz útvaru posunutého o daný vektor. Treba kliknúť najprv na útvar, ktorý chceme zobraziť a následne na vektor posunutia.

d) **Otočenie** – zobrazí obraz útvaru otočeného okolo daného stredu otáčania o uhol zadaný číselnou hodnotou, alebo trojicou bodov v poradí, rameno uhla, vrchol uhla, druhé rameno uhla.

e) **Rovnoľahlosť** – zobrazí obraz útvaru v rovnoľahlosti, vzhľadom na daný bod a koeficient. Treba kliknúť na útvar, ktorý chceme zobraziť, následne na stred rovnoľahlosti a nakoniec na koeficient zadaný číselnou hodnotou.

f) **Inverzia** – zobrazí obraz útvaru v inverzii. Inverzia je definovaná kružnicou a vzorom. Najprv treba kliknúť na kružnicu a potom na bod, ktorý chceme zobrazovať.

3.7 Makro

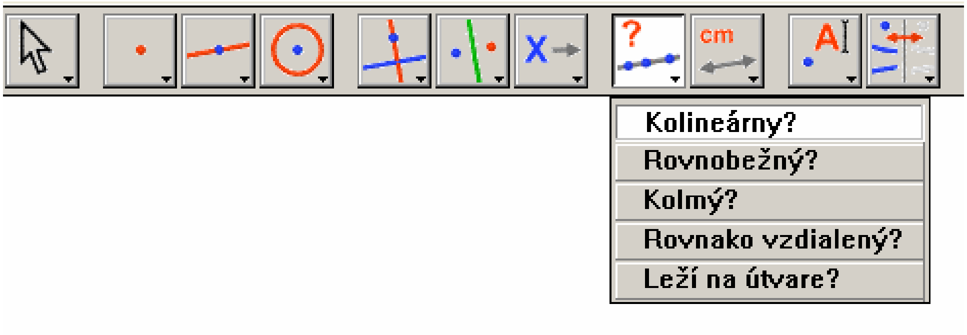


a) **Počiatočný útvar(y)** – týmto nástrojom definujeme vstupný útvar, alebo útvary potrebné na definovanie a použitie makra.

b) **Výsledný útvar(y)** – týmto nástrojom definujeme výstupný útvar, alebo útvary potrebné na definovanie makra.

c) **Definuj makro...** – týmto nástrojom definujeme makro, keď už máme zadané vstupný a výstupný útvar. Zobrazí sa nám okienko, v ktorom si môžeme zvoliť ikonu nového makra ako aj popis v prípade, že by sme nevedeli aký je na makro potrebný vstup. Máme možnosť si makro uložiť do súboru a používať ho aj pri novom otvorení Cabri.

3.8 Vzťahy



Pri všetkých nástrojoch platí:

1) odpoveď sa zobrazuje ako oznamovacia veta v okienku, ktoré je potrebné umiestniť na plochu,

2) odpoveď sa dynamicky mení podľa toho ako s bodmi pohybujeme.

a) **Kolineárny?** – zistí či dané body sú, alebo nie sú kolineárne (ležia na jednej priamke).

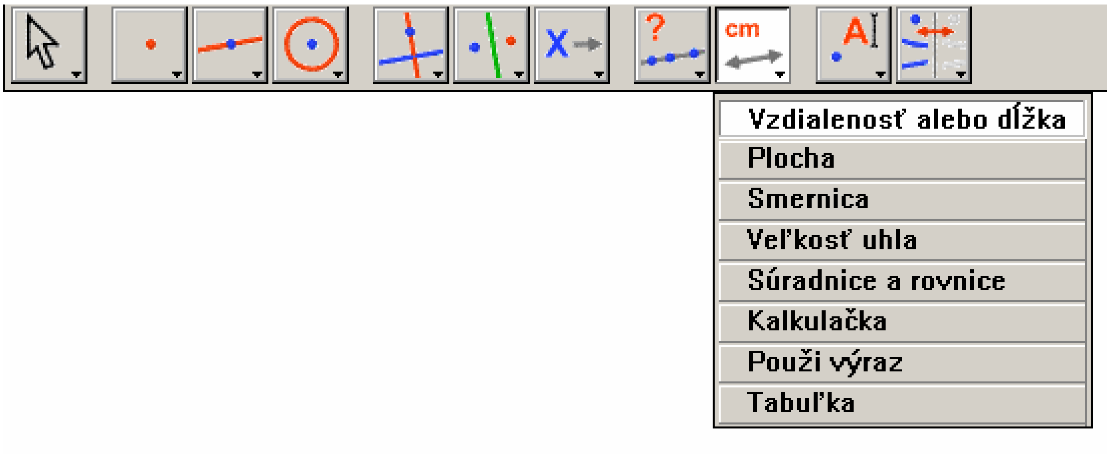
b) **Rovnobežný?** – zistí, či dva útvary (priamka, polpriamka, úsečka, vektor, strany n-uholníka) sú rovnobežné.

c) **Kolmý?** – zistí, či dva útvary (priamka, polpriamka, úsečka, vektor, strany n-uholníka) sú kolmé.

d) **Rovnako vzdialený?** – zistí, či je jeden bod rovnako vzdialený od ďalších dvoch bodov. Prvý zadávame bod, o ktorom chceme zistiť, či je rovnako vzdialený od bodov a následne tie dva body o ktoré sa jedná.

e) **Leží na útvare?** – zistí či bod leží na danom útvare.

3.9 Miery a počty



a) **Vzdialenosť alebo dĺžka** – meria dĺžku úsečky, alebo vzdialenosť dvoch zadaných bodov.

b) **Plocha** – meria obsah danej plochy, mnohouholník, trojuholník, kruh. Problém je keď máme trojuholník zadaný troma úsečkami, vtedy Cabri tento útvar nevníma ako trojuholník, ale ako tri úsečky.

c) **Smernica** – odmeria smernicu priamky, úsečky, polpriamky, alebo vektora.

d) **Veľkosť uhla** – odmeria veľkosť uhla daného tromi bodmi, pričom vrchol uhla je druhý zadaný bod.

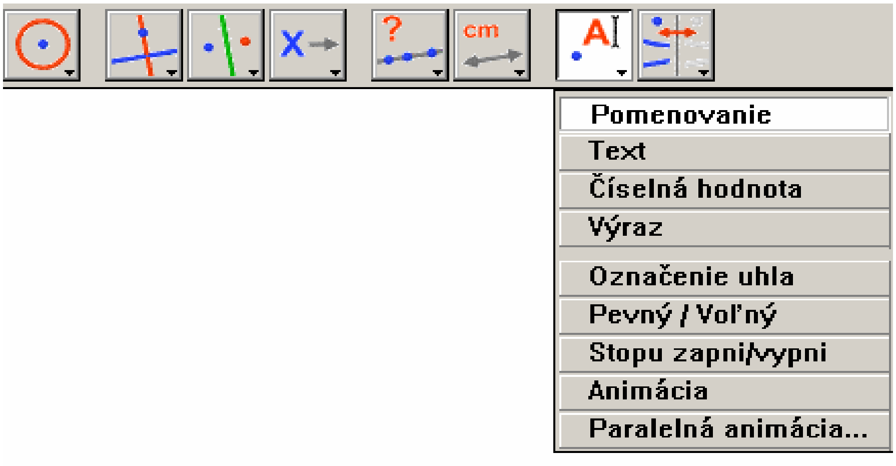
e) **Súradnice a rovnice** – zobrazí súradnice bodu, alebo rovnicu priamky, kružnice, alebo kužeľosečky. Pokiaľ máme definovanú vlastnú súradnicovú sústavu, zobrazí rovnicu objektu v danej sústave.

f) **Kalkulačka** – vypočíta zadaný výraz, ktorý môže obsahovať okrem iného aj čísla a výpočty z plochy.

g) **Použi výraz** – vypočíta výsledok výrazu, kliknutím na výraz a následne na jednotlivé hodnoty. Pokiaľ výraz obsahuje len jednu premennú, kliknutím na výraz a x-ovú os zobrazí príslušnú krivku.

h) **Tabuľka** – vytvorí tabuľku zo zmeraných hodnôt, či už výpočtov, alebo súradníc.

3.10 Popisy



a) **Pomenovanie** – kliknutím na útvar sa otvorí textové okienko na pomenovanie útvaru. Podľa farby útvaru sa farbí aj pomenovanie. Pokiaľ však neskôr farbu útvaru zmeníme pomenovanie ostáva s pôvodnou farbou.

b) **Text** – na plochu je potrebné umiestniť textové pole, do ktorého je možné voľne písať. Môžeme ho podfarbiť príkazom *Vyplň farbou...* a farbu textu meníme pomocou príkazu *Farba textu...*

c) **Číselná hodnota** – umiestnime na plochu číslo, ktorého hodnotu môžeme meniť. Je možné používať desatinné čísla. Zapisujeme ich pomocou bodky.

d) **Výraz** – do textového poľa môžeme zapísať výraz, do ktorého môžeme za jednotlivé premenné dosádzať číselné hodnoty, ktoré môžeme plynule meniť.

e) **Označenie uhla** – označí uhol oblúčikom. Poradie v ktorom je potrebné zadať jednotlivé údaje: jedno rameno, vrchol uhla, druhé rameno.

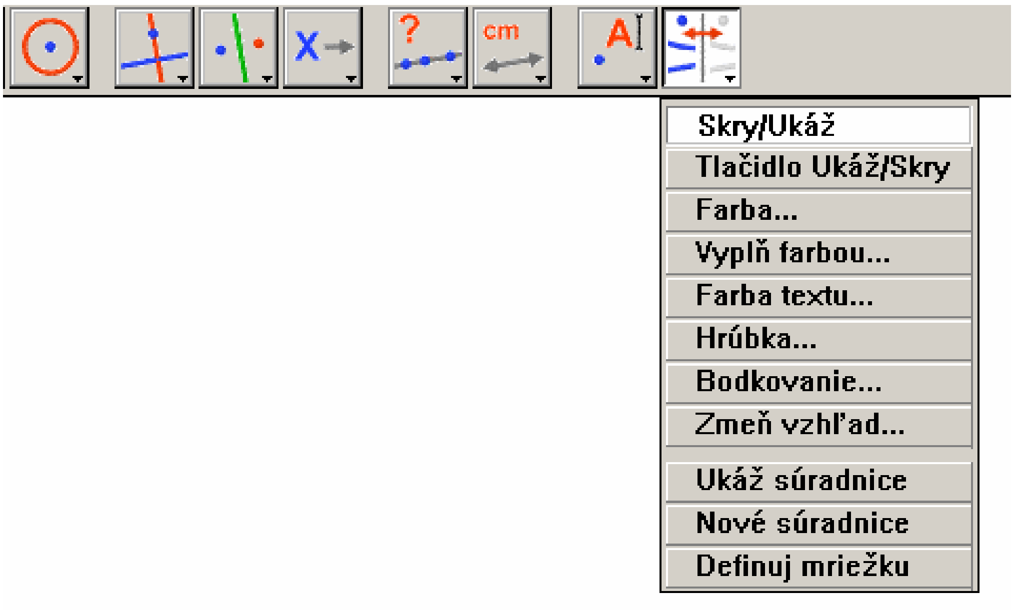
f) **Pevný / Voľný** – umožňuje "prišpendliť" body na plochu aby s nimi nebolo možné pohybovať.

g) **Stopu zapni/vypni** – zapne kreslenie a v prípade, že daným útvarom pohybujeme zobrazuje sa dráha pohybu. Stopu aktivujeme tým, že klikneme na útvar.

h) **Animácia** – pružina, ktorá umožňuje posunutie, alebo otočenie útvaru v závislosti na smere a na útvare, po ktorom sa má posúvať. Na aktiváciu je potrebné kliknúť na útvar, nepustiť a natiahnuť pružinu do opačného smeru, než chceme aby sa objekt pohol.

i) **Paralelná animácia** – umožňuje umiestnenie viacerých pružín zároveň. *Enter*–om potom všetky naraz spustíme.

3.11 Vzhľad



a) **Skry/Ukáž** – umožňuje skrytie a znovu zobrazenie pomocných útvarov, alebo útvarov, ktoré nie je potrebné vidieť.

b) **Farba**... – paleta 41 farieb, meníme farbu útvarov. Neplatí na text.

c) **Vyplň farbou**... – vyplní vnútro tabuľky, textu, kružnice alebo n-uholníka.

d) **Farba textu**... – zmení farbu textu.

e) **Hrúbka** – zmení hrúbku čiar útvaru. Máme možnosť vybrať tri rôzne hrúbky.

f) **Bodkovanie** – zmení čiarový vzor útvaru. Máme tri rôzne možnosti.

g) **Zmeň vzhľad** – objaví sa okienko v ktorom máme viac možností. Môžeme meniť vzhľad bodu, označenia uhla aj priamok, keď nepotrebné časti priamok skryje. Tieto atribúty sa dajú meniť aj pomocou klávesy F9, keď sa nám ukážu ako ikony na ľavej strane plochy.

h) **Ukáž súradnice** – zobrazí karteziánsku súradnicovú sústavu. Pokiaľ je táto už zobrazená mení sa nástroj na **Skry súradnice**.

i) **Nové súradnice** – umožní definovať vlastné súradnice pomocou troch bodov. Prvý umiestňujeme stred novej sústavy, následne os x a os y.

j) **Definuj mriežku** – umiestni mriežku podľa súradnicových osí. Zobrazíme ju kliknutím na x-ovú os.

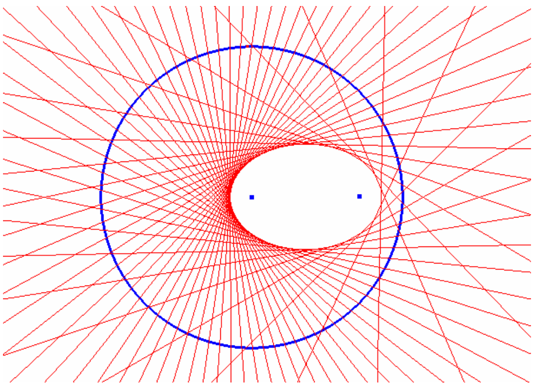
4 Aplikácie Cabri geometrie II plus

4.1 Kužeľosečky

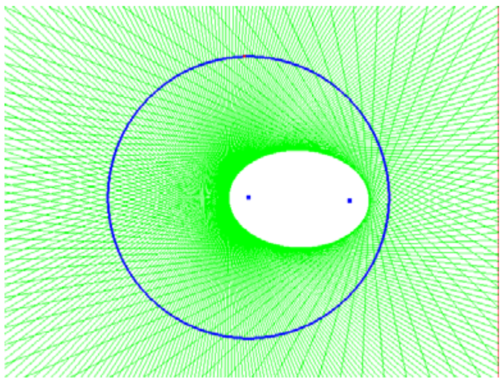
Veta: Body súmerne združené s jedným ohniskom podľa dotyčníc elipsy, tvoria kružnicu so stredom v druhom ohnisku a polomerom rovnajúcim sa dĺžke hlavnej osi elipsy. Táto kružnica sa nazýva **riadiaca kružnica** elipsy. [4]

Aplikovaním vety je ľahké v Cabri elipsu zobraziť, ako množinu bodov danej vlastnosti (obr. 1), alebo pomocou animácie (obr. 2). Výhody práce s množinou daných vlastností je ten, že množina sa priamo prekresľuje, zatiaľ čo keď pracujeme s animáciou musíme najprv zmeniť parameter a potom spustiť animáciu nanovo. Pri animácii však získavame presnejšie obrázky, čo môže byť dôležité obzvlášť pri práci v limitných prípadoch.

Keďže Cabri je dynamický softvér môžeme po vykreslení kužeľosečiek experimentovať. Uchopením kružnice môžeme meniť jej polomer a sledovať pritom, ako sa mení elipsa aj jej dotyčnice. Toto isté môžeme pozorovať pri zmene vzdialenosti ohnísk. Keďže voľným ohniskom môžeme hýbať v celom priestore kruhu, neobmedzuje nás, že obvykle zobrazujeme hlavnú os vodorovne. V prípade, že presne určíme 5 bodov tejto kužeľosečky môžeme vypísať rovnicu príkazom *Súradnice a rovnice* a pohybom sledovať zmeny jednotlivých parametrov.



obr. 1

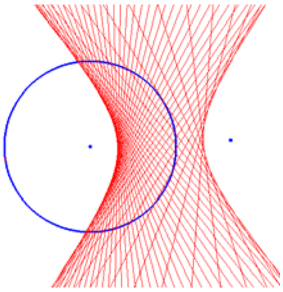


obr. 2

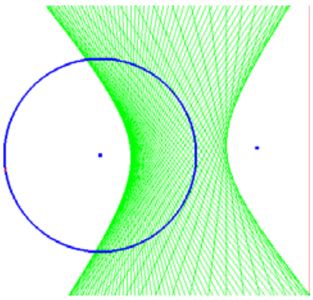
Postup konštrukcie elipsy (obr.1):

1. Najprv zostrojíme ľubovoľný *Bod na útvare* na riadiacej kružnici.
2. Pomocou nástroja *Kolmica prechádzajúca stredom* zostrojíme priamku, označíme ohnisko, ktoré nie je stredom riadiacej kružnice a zvolený bod na riadiacej kružnici. Táto priamka je dotyčnicou elipsy.
3. Použitím *Množiny bodov danej vlastnosti*, kliknutím na vytvorenú dotyčnicu a na bod na kružnici program vykreslí 60 dotyčníc (množstvo vykreslených dotyčníc je možné nastaviť).

Keď voľným ohniskom vyjdeme za hranice riadiacej kružnice prestáva platiť, že vzdialenosť ohnísk je menšia ako zadaná konštanta 2a, teda dĺžka hlavnej osi. A podľa definície dostávame hyperbolu zobrazenú, ako množina bodov danej vlastnosti (obr. 3), alebo pomocou animácie (obr. 4).

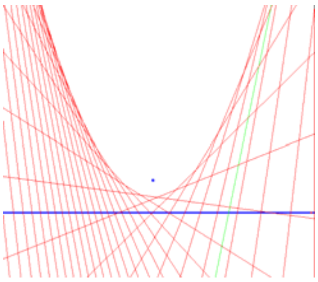


obr. 3

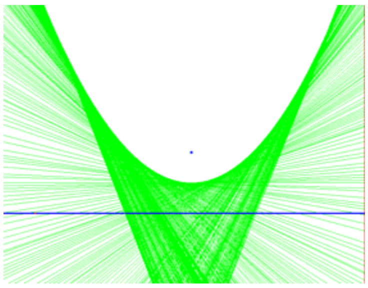


obr.4

Rovnako ako pri elipse aj pri parabole platí podobná veta, s tou obmenou, že riadiaca kružnica sa zmení na **riadiacu priamku**. Tento prípad je tiež možné zobraziť, ako množinu bodov danej vlastnosti (obr. 5) alebo animáciou (obr. 6).



obr. 5



obr. 6

4.2 Apolloniove úlohy

4.2.1 Teória Apolloniových úloh

Apolloniova úloha **"Zostrojte kružnicu dotýkajúcu sa daných troch geometrických útvarov z útvarov bod, priamka, kružnica."** (v tej istej rovine), pričom „dotyk s bodom“ znamená incidenciu, má svoje meno podľa gréckeho geometra **Apollonia z Pergy** (262 – 200 p. n. l.). Najjednoduchšie prípady nastanú, keď sú dané tri body, alebo tri priamky. Tieto prípady vyriešil už Euklides. Apollonius vyriešil všetky ostatné prípady s výnimkou prípadu troch kružníc v diele "**O dotykoch**". Bola to dvojzväzková práca, ktorá sa bohužiaľ nedochovala, ale zmienil sa o nej Pappos okolo roku 320. Nevieme teda povedať, akým spôsobom Apollonius úlohy riešil. Vieme, že najprv formuloval úlohu pre tri zadané kružnice, neskôr boli tieto kružnice postupne nahradené bodom (kružnica s nulovým polomerom) a priamkou (kružnica s nekonečne veľkým polomerom). Prípad s tromi zadanými kružnicami vyriešil ako prvý F. Viéte v spise Apollonius Gallus v roku 1600. V riešení použil stredy rovnoľahlosti troch kružníc. [5] [6]

Počet riešení Apolloniových úloh závisí od vzájomnej polohy vstupujúcich útvarov a ich vlastností. Podľa toho môžeme mať 0 – 8 a v niektorých prípadoch nekonečne veľa riešení riešení.

4.2.2 Čiastkové riešenia

Niektoré úlohy budú ku svojmu riešeniu potrebovať čiastkové riešenia, ktoré keď spojíme dostaneme komplexné riešenie celej úlohy. Keby sme riešili toto zadanie bežnou metódou na papier, pravdepodobne by nám to trvalo dlho a výsledný obrázok, by vzhľadom na množstvo konštrukcií, ktoré sú nutné k riešeniu nemusel byť dostatočne prehľadný. S Cabri je riešenie tejto úlohy otázkou niekoľko málo minút. Pričom konštrukcia je prehľadná, pretože priamky, ktoré nepotrebujeme vidieť je možné skryť a v prípade potreby znovu ukázať.

Zadanie: Zostrojte množinu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú kružnice k a prechádzajú bodom B.

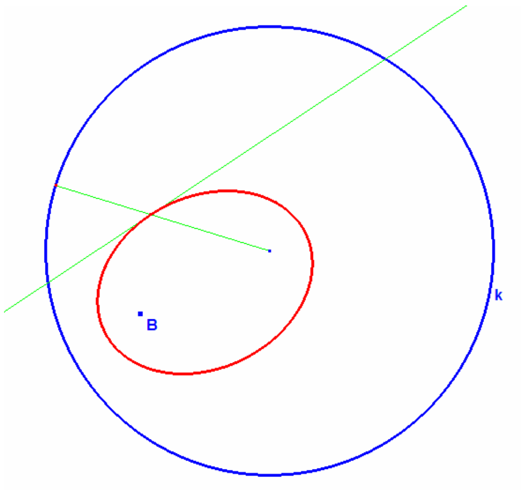
Rozbor: Záleží od polohy bodu B vzhľadom na kružnicu k.

1. bod B je vnútorným bodom kružnice k – výsledná množina bodov je elipsa,
2. bod B je vonkajším bodom kružnice k – výsledná množina bodov je hyperbola,
3. bod B patrí kružnici k – výsledná množina je priamka.

Riešenie:

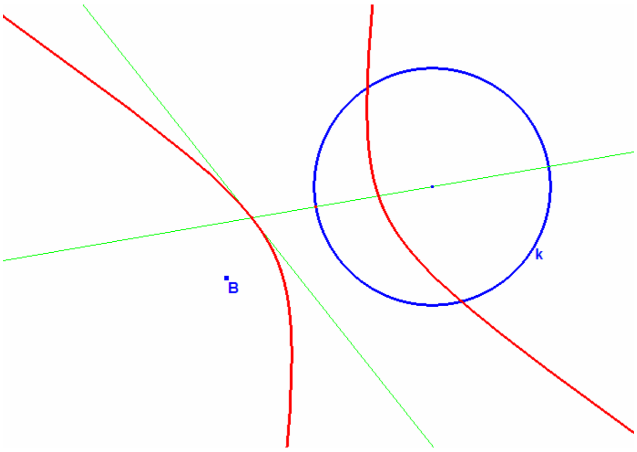
1. Postup konštrukcie:

1. Zvolíme ľubovoľný bod na kružnici k pomocou nástroja *Bod na útvare*. Tento musí patriť hľadanej kružnici. Je to jej dotykový bod.
2. Použijeme nástroj *Kolmica prechádzajúca stredom*. Medzi bodom B a voleným bodom na kružnici. Na tejto osi leží aj stred hľadanej kružnice.



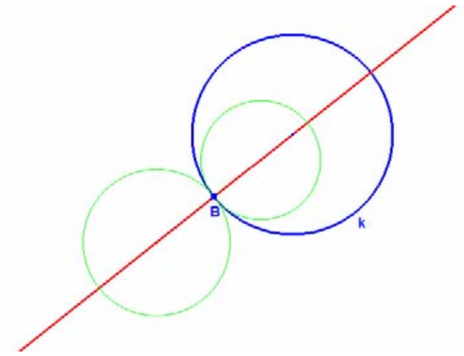
3. Nástrojom *Úsečka* zostrojíme spojnicu dotykového bodu a stredu.
4. Priesečník osi a úsečky je hľadaný stred kružnice.
5. Použijeme nástroj *Množina bodov danej vlastnosti*, kliknutím na priesečník, teda stred hľadanej kružnice a následným kliknutí na bod na kružnici k dostaneme Množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú kružnice k a prechádzajú bodom B. Táto množina sa nazýva **elipsa**.

2. Postup konštrukcie:



1. Nástrojom Bod na útvare zvolíme ľubovoľný bod na kružnici k.
2. Použijeme nástroj *Kolmica prechádzajúca stredom*. Medzi bodom B a voleným bodom na kružnici. Na tejto osi leží aj stred hľadanej kružnice.
3. Nástrojom *Priamka* zostrojíme spojnicu dotykového bodu a stredu.
4. Priesečník osi a priamky je hľadaný stred kružnice.
5. Použijeme nástroj *Množina bodov danej vlastnosti*, kliknutím na priesečník, teda stred hľadanej kružnice a následným kliknutí na bod na kružnici k dostaneme Množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú kružnice k a prechádzajú bodom B. Táto množina sa nazýva **hyperbola**.

3. Postup konštrukcie:



1. Pomocou nástroja Priamka spojíme stred kružnice k a bod B. Množina všetkých stredov kružníc je incidentná práve s touto **priamkou**.

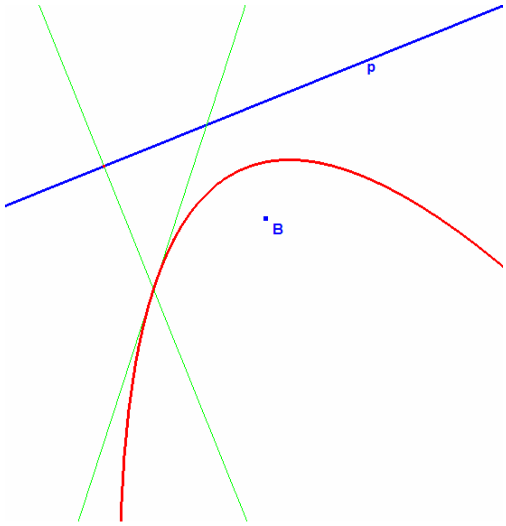
Zadanie: Zostrojte množinu stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky p a prechádzajú bodom B.

Rozbor: Záleží od polohy bodu B vzhľadom na priamku p.

1. bod B je rôzny od priamky p – výsledná množina bodov je parabola,
2. bod B je incidentný s priamkou p – výsledná množina bodov je priamka.

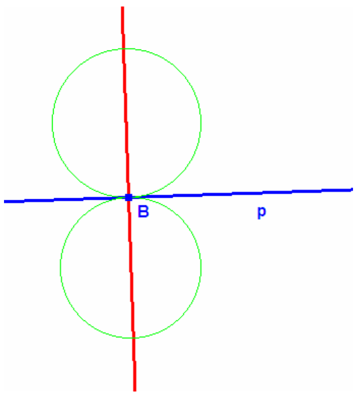
Riešenie:

1. Postup konštrukcie:



1. Pomocou nástroja *Bod na útvare* zostrojíme ľubovoľný bod na priamke p.
2. Nástrojom *Kolmica prechádzajúca stredom* vytvoríme kolmicu medzi bodom B a nami zvoleným bodom na priamke.
3. Vytvoríme kolmicu na priamku p prechádzajúcu zvoleným bodom.
4. Nástrojom *Priesečník* zvýrazníme priesečník oboch kolmíc.
5. Pomocou *Množiny bodov danej vlastnosti* zobrazíme množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú daným bodom B a dotýkajú sa priamky p.

2. Postup konštrukcie:



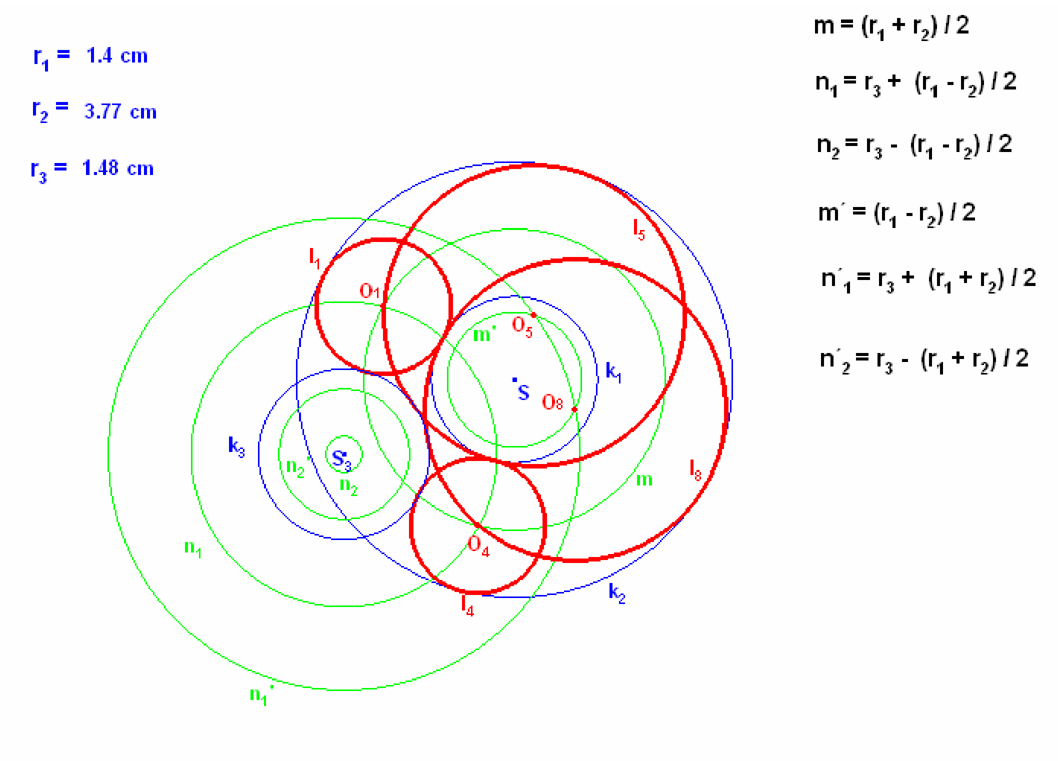
1. Pomocou nástroja Kolmica zostrojíme priamku kolmú na priamku p a prechádzajúcu bodom B. Tým získame množinu stredov kružníc, dotýkajúcich sa priamky p a prechádzajúcich bodom B.

Zadanie: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných troch kružníc, z ktorých dve sú sústredné.

Rozbor: Ak sa má hľadaná kružnica dotýkať sústredných kružníc je množina stredov všetkých takých kružníc sústredná kružnice m, resp. m´. Pokiaľ sa má dotýkať aj tretej kružnice platí, že stredy kružníc sa nachádzajú na kružniciach so stredom S_3 a polomer je vypočítaný podľa vzťahu n_1, n_2, resp. $n´_1$, $n´_2$.

Riešenie: Postup konštrukcie

1. Nástrojom *Vzdialenosť alebo dĺžka* zmeriame polomery všetkých zadaných kružníc.
2. Použijeme nástroj *Výraz* a zadáme výrazy pre m, m´,n_1, $n´_1$, n_2, $n´_2$
3. Nástrojom *Kružnica s polomerom* zostrojíme m, m´ so stredom v bode S a n_1, $n´_1$, n_2, $n´_2$ so stredom v bode S_3.
4. Použijeme *Prienik* a zobrazíme prieniky m s n_1 a n_2 a prieniky m´ s $n´_1$ a $n´_2$
5. Zostrojíme kružnice l_{1-8}



4.2.3 Apolloniove úlohy

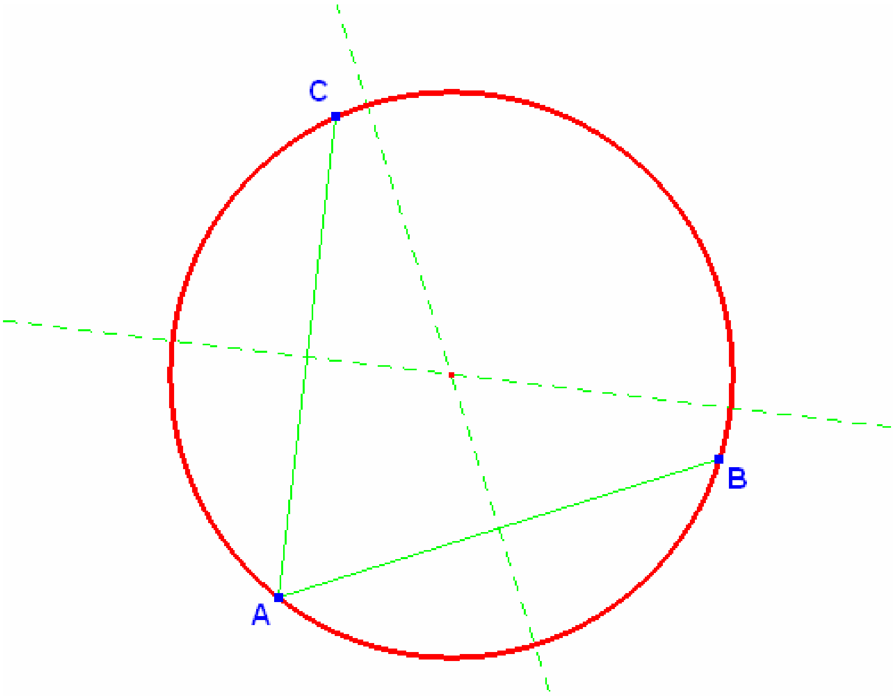
Zadanie BBB: Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza tromi rôznymi bodmi A, B, C.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) body A, B, C ležia na jednej priamke	0
2) body A, B, C neležia na jednej priamke	1

Riešenie:

2) keďže body neležia na jednej priamke tvoria trojuholník. Musíme zostrojiť osi strán. Ich priesečník je stred hľadanej kružnice.

Konštrukcia:



Zadanie BBp: Zostrojte kružnicu, ktorá sa bude dotýkať priamky p a bude prechádzať bodmi A a B, rôznymi od priamky p.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) body A, B ležia na priamke p	0
2) jeden bod leží na priamke p	1
3) ani jeden bod neleží na priamke p	
a) body A, B ležia v opačných polrovinách	0
b) body A, B ležia v rovnakej polrovine	
i) priamka AB je rovnobežná s priamkou p	1
ii) priamka AB je rôznobežná s priamkou p	0 – 2

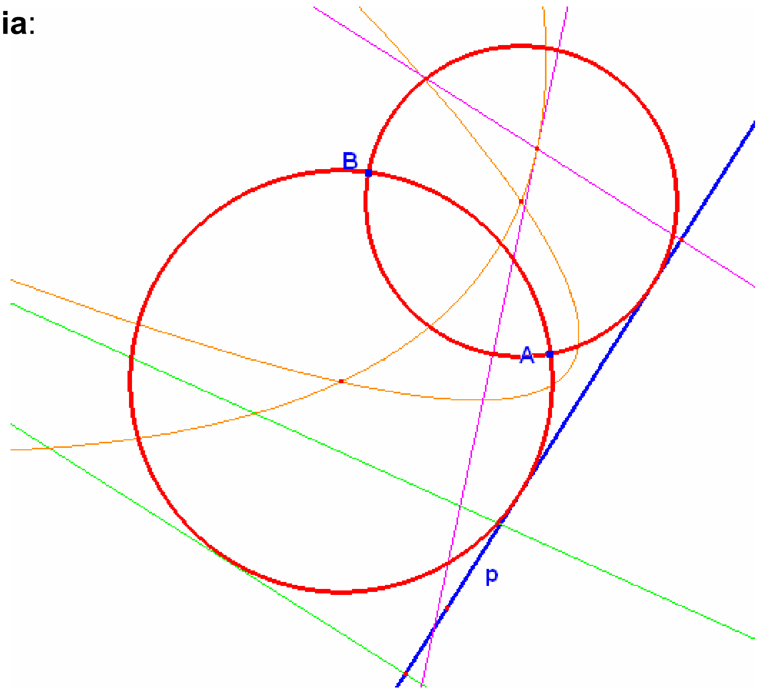
Riešenie: rozdelíme úlohu na čiastkové prípady:

1) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom A a dotýkajú sa priamky p,

2) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom B a dotýkajú sa priamky p.

Riešením každej s týchto úloh je parabola. Následne potom stačí nájsť priesečník týchto kužeľosečiek a máme hľadané stredy kružníc.

Konštrukcia:



Zadanie BBk: Zostrojte kružnicu, ktorá sa bude dotýkať kružnice k a bude prechádzať bodmi A a B, rôznymi od kružnice k.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) body A, B ležia na kružnici k	0
2) jeden bod leží na kružnici k	1
3) oba body neležia na kružnici	
a) jeden bol leží vnútri kružnice a druhý zvonka kružnice	0
b) oba body ležia vnútri, alebo vonku kružnice	0 – 4

Riešenie:

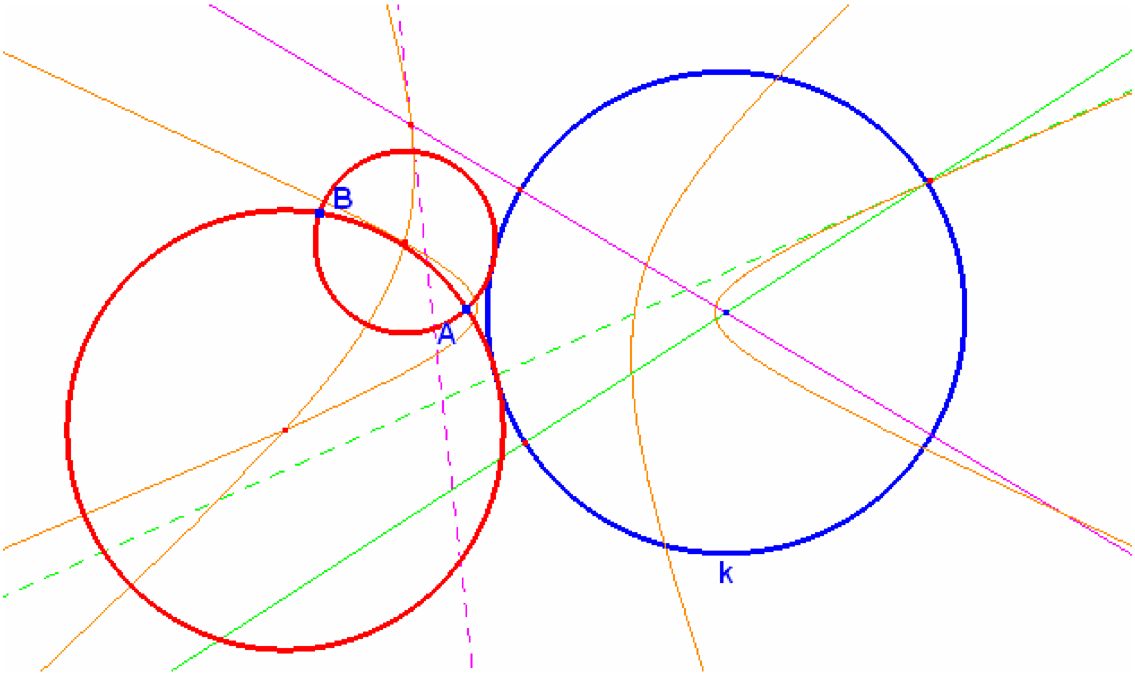
3. b)Rozdelíme teda úlohu na dve jednoduchšie:

1) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom A a dotýkajú sa kružnice k,

2) zostrojiť kružnicu, ktorá prechádza bodom B a dotýka sa kružnice k.

Riešením každej s týchto úloh je hyperbola. Následne potom stačí nájsť priesečník týchto kužeľosečiek a máme hľadané stredy kružníc.

Konštrukcia:



Zadanie Bpp: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka dvoch rôznych priamok a, b a bodom B, ktorý nie je incidentný ani s jednou z priamok a, b.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) priamky p_1 a p_2 sú rovnobežné	
a) bod B leží mimo pásu určeného priamkami	0
b) bod b leží na niektorej z priamok	1
c) bod B leží vo vnútri pásu určeného priamkami	2
2) priamky p_1 a p_2 sú rôznobežné	
a) bod B leží v priesečníku priamok	0
b) bod B leží na niektorej priamke	2
c) bod B neleží na žiadnej priamke	0 – 2

Riešenie:

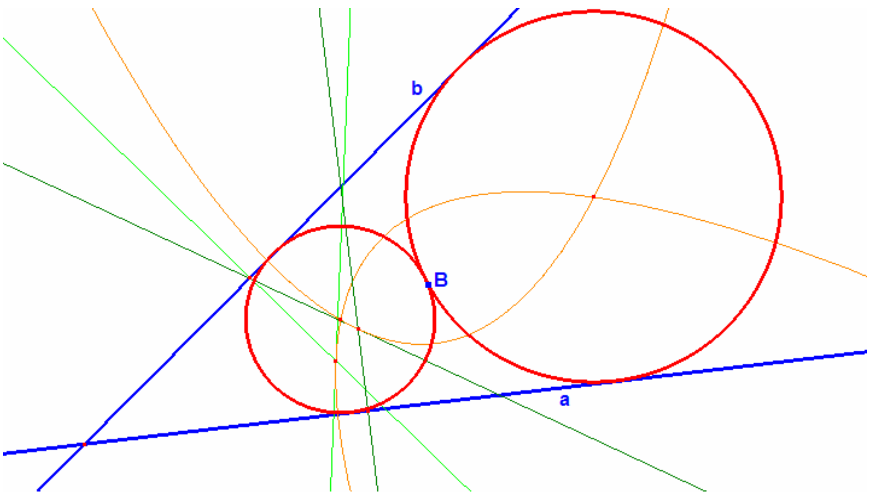
Rozdelíme teda úlohu na dve menšie a to:

1) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom B a dotýkajú sa priamky a,

2) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom B a dotýkajú sa priamky b.

Riešením každej s týchto úloh je parabola. Následne potom stačí nájsť priesečník, alebo priesečníky týchto kužeľosečiek a máme hľadané stredy kružníc.

Konštrukcia



Zadanie Bkk: Zostrojte kružnicu, ktorá sa bude dotýkať dvoch rôznych kružníc k, l a bude prechádzať bodom B, ktorý nepatrí ani jednej z kružníc.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) kružnice k_1, k_2 sú sústredné $r_1 < r_2$	
a) bod B leží vo vnútri k_1	0
b) bod B leží zvonka k_2	0
c) bod B leží na niektorej z kružníc	2
d) bod B leží v medzikruží	0 – 4
2) kružnice k_1, k_2 sú nesústredné, $r_1 < r_2$, k_1 leží vo vnútri k_2	
a) bod B leží vo vnútri k_1	0
b) bod B leží zvonka k_2	0
c) bod B leží na niektorej z kružníc	2
d) bod B leží vo vnútri k_2 a zvonka k_1	0 – 4
3) kružnice k_1, k_2 majú vnútorný dotyk	
a) bod B je dotykovým bodom oboch kružníc	∞
b) bod B leží na jednej z kružníc	1
c) bod B neleží na žiadnej kružnici	
i) bod B leží medzi k_1 a k_2	3
ii) bod B leží zvonka oboch kružníc	1
4) kružnice k_1, k_2 majú vonkajší dotyk	
a) bod je bodom dotyku zadaných kružníc	∞
b) bod B patrí jednej kružnici	1
c) bod B leží vo vnútri jednej z kružníc	1
d) bod B leží zvonka oboch kružníc	3
5) kružnice k_1, k_2 sa pretínajú	
a) bod B je jedným bodom prieniku	0
b) bod B leží na jednej kružnici	2
c) bod B leží zvonka oboch kružníc	2
6) kružnice k_1, k_2 nemajú spoločný bod a nie sú sústredné	
a) bod B leží vo vnútri jednej z kružníc	0
b) bod B leží na jednej kružnici	2
c) bod B neleží na žiadnej z kružníc	0 – 4

Riešenie:

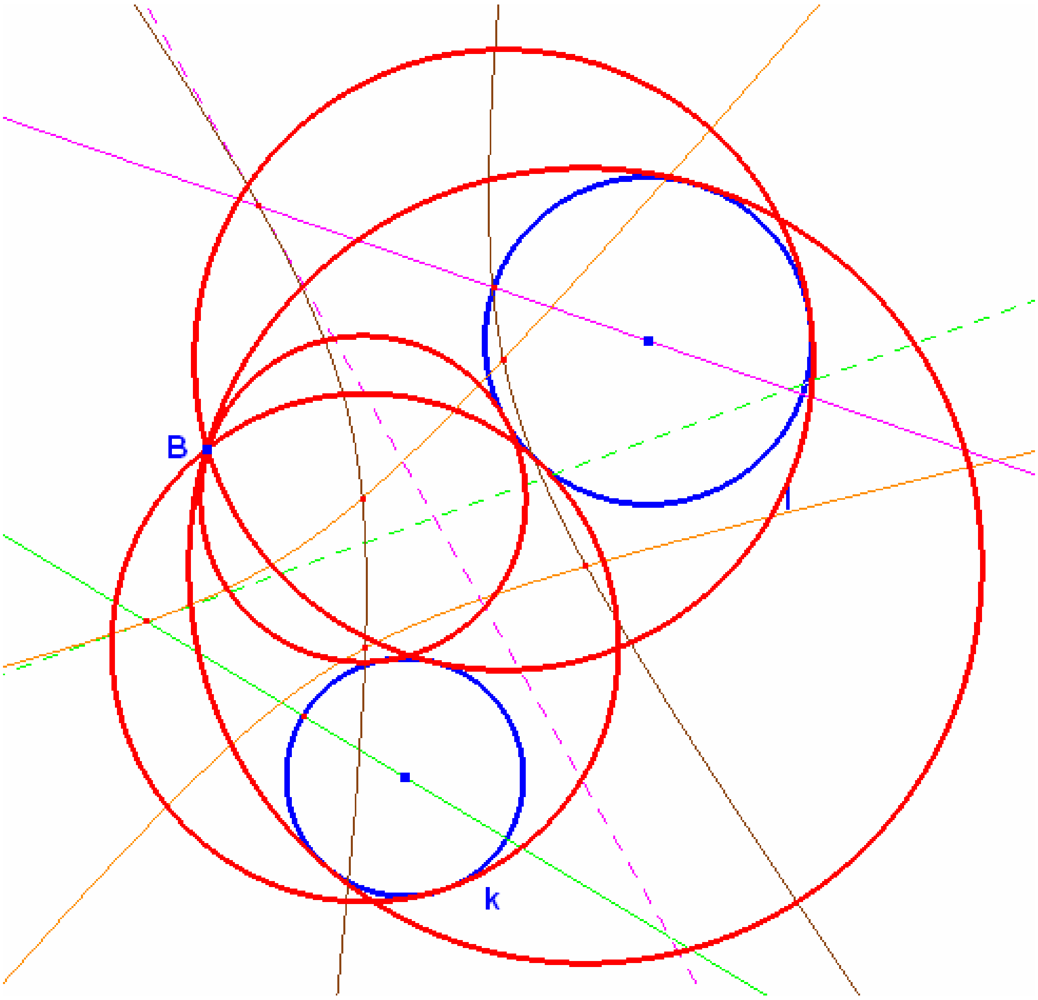
Rozdelíme úlohu na dve čiastkové a to:

1) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom B a dotýkajú sa kružnice k,

2) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom B a dotýkajú sa kružnice l.

Vieme, že riešením každej s týchto úloh je hyperbola. Následne potom stačí nájsť priesečník týchto kužeľosečiek a máme stredy hľadaných kružníc.

Konštrukcia:



Zadanie Bpk: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka kružnice k, priamky p, ktorá nie je dotyčnica kružnice a prechádza bodom B rôznym od S a neincidentným s kružnicou k ani s priamkou p a patrí vnútru kružnice.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) bod B je spoločným bodom priamky p a kružnice k	
a) priamka p je dotyčnicou kružnice k	∞
b) priamka p je sečnicou kružnice k	0
2) bod B patrí priamke p, ale nepatrí kružnici k	2
3) bod B patrí kružnici k, ale nepatrí priamke p	2
4) bod B neleží ani na priamke p ani na kružnici k	
a) priamka p je sečnica kružnice	
i) bod B leží vo vnútri kružnice	0 – 2
ii) bod B leží zvonka kružnice	0 – 4
b) priamka p je dotyčnica kružnice	
i) bod B leží vnútri kružnice k	1
ii) bod B a kružnica k ležia v opačných polrovinách	1
iii) bod B a kružnica k ležia v rovnakej polrovine	0 – 3
c) priamka nemá s kružnicou spoločný bod	
i) bod B leží vo vnútri kružnice	0
ii) bod B a kružnica k ležia v opačných polrovinách	0
iii) bod B aj kružnica ležia v rovnakej polrovine	0 – 4

Riešenie:

4. a – i) Rozdelíme teda úlohu na dve menšie a to:

1) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom a dotýkajú sa kružnice,

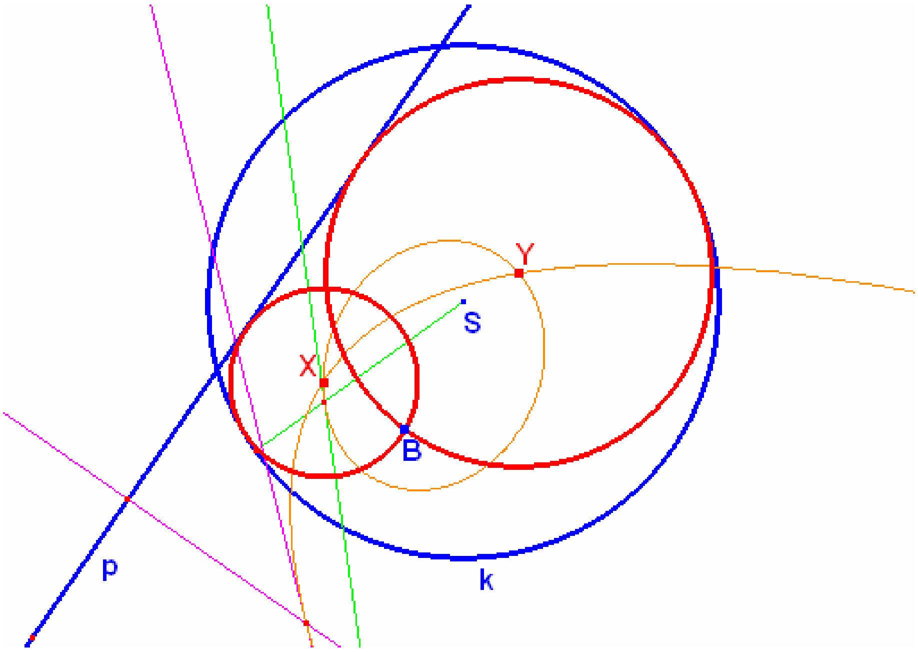
2) zostrojiť množinu stredov kružníc, ktoré prechádzajú bodom a dotýkajú sa priamky.

Vieme, že riešením každej s týchto úloh je kužeľosečka. Následne potom stačí nájsť priesečník týchto kužeľosečiek a máme stredy hľadaných kružníc.

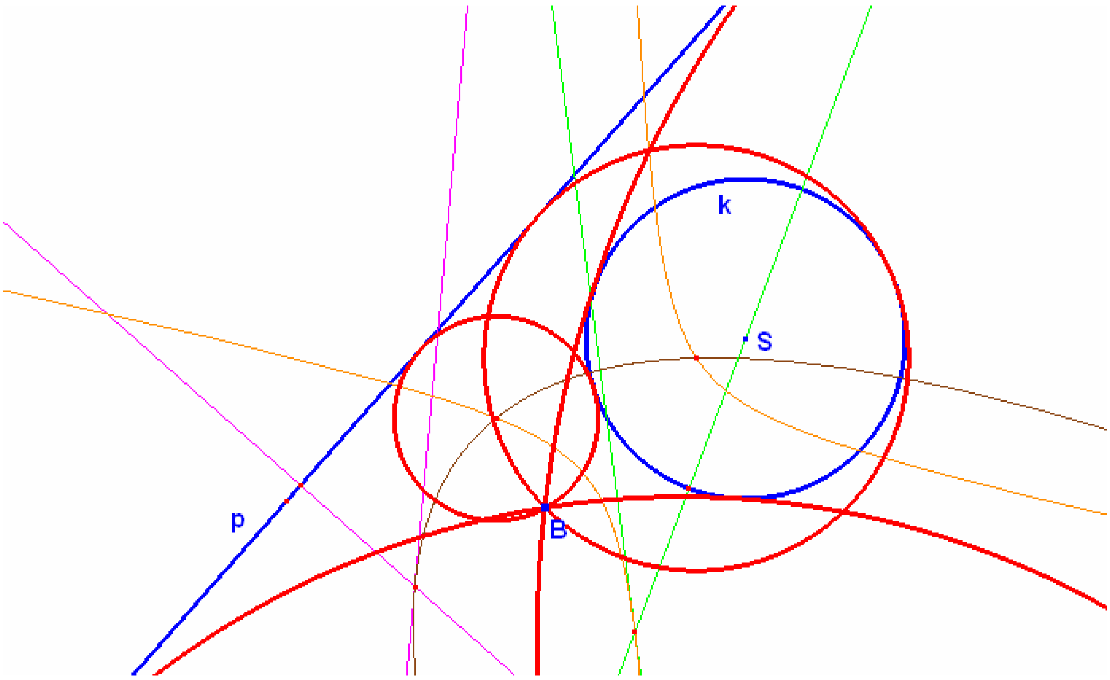
4. a – ii). Množina stredov kružníc dotýkajúcich sa kružnice a prechádzajúcich bodom B, ktorá vznikne je hyperbola. Ďalej riešenie pokračuje ako v prvom prípade.

Konštrukcia:

4.a – i)



4.a – ii)



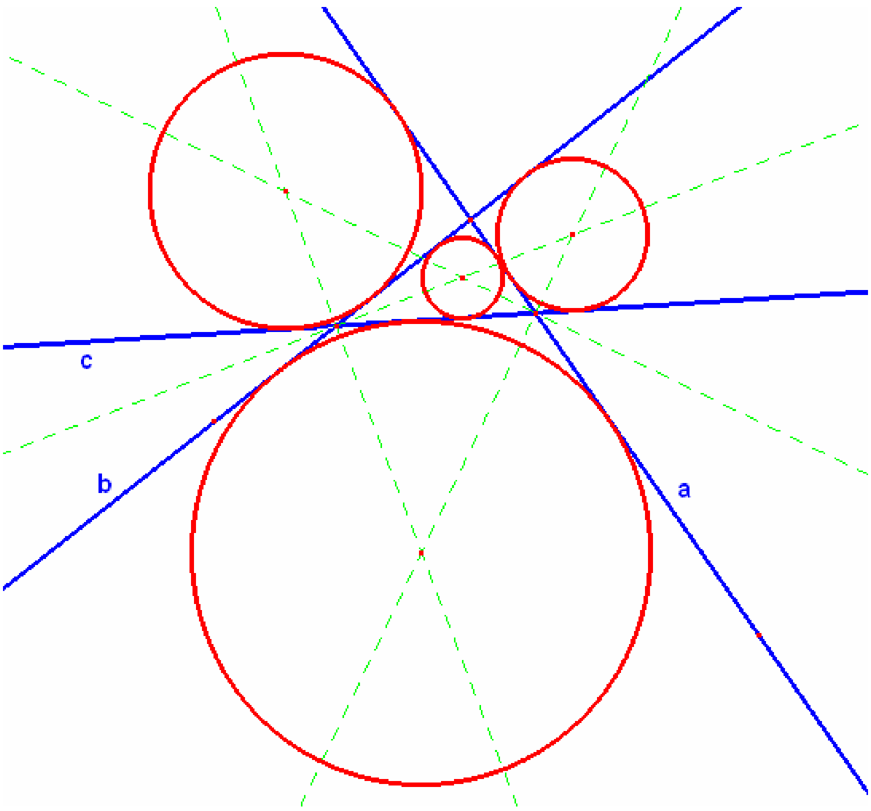
Zadanie ppp: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných troch navzájom rôznych priamok a, b, c.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) priamky sú rovnobežné	0
2) priamky sú rôznobežné	
a) prechádzajú jedným bodom	0
b) pretínajú sa v troch rôznych bodoch	4
3) dve priamky sú rovnobežné a tretia s nimi rôznobežná	2

Riešenie:

Stredy hľadaných kružníc sa nachádzajú v prienikoch osí uhlov každých dvoch priamok.

Konštrukcia:



Zadanie ppk: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných dvoch navzájom rôznych priamok a, b a kružnice k.

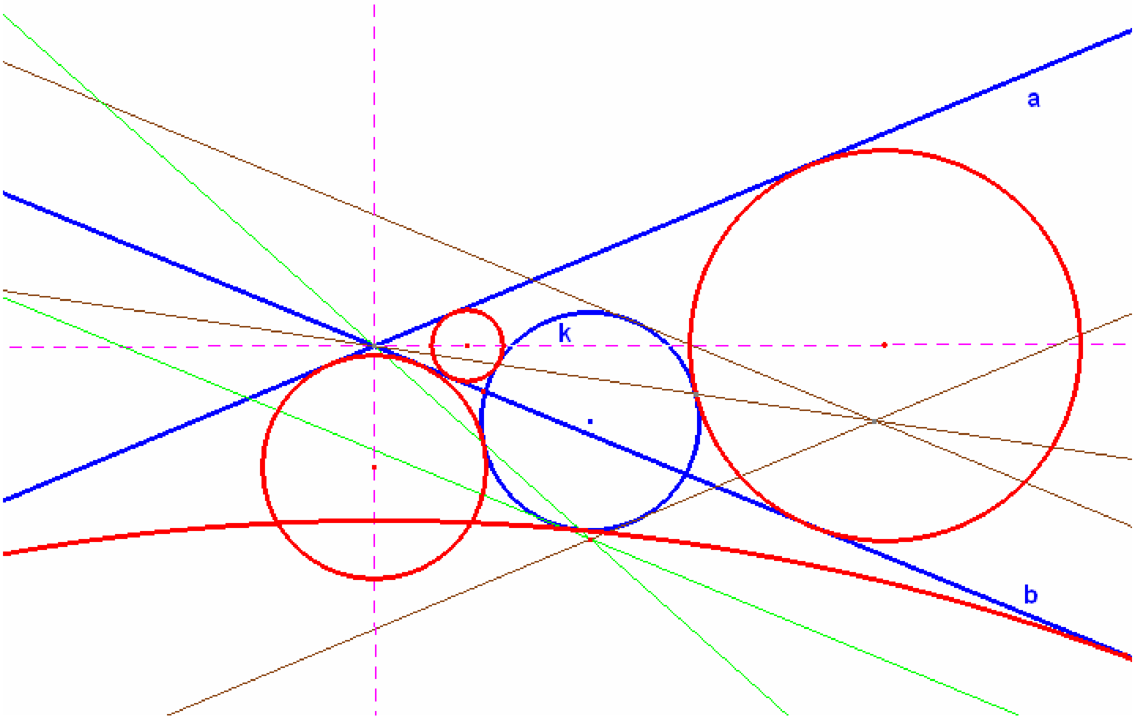
vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) priamky sú rovnobežné	
a) kružnica leží mimo pásu určeného priamkami	0
b) jedna z priamok je dotyčnica kružnice	
i) stred kružnice leží vnútri pásu určeného priamkami	3
ii) stred kružnice leží mimo pásu určeného priamkami	1
c) jedna z priamok je sečnica kružnice	2
d) priamky sú dotyčnice kružnice	2
e) priamky sú sečnicami kružnice	4
f) kružnica leží vo vnútri pásu určeného priamkami	4
2) priamky sú rôznobežné	
a) kružnica nemá s priamkami žiadny spoločný bod	4
b) kružnica sa dotýka priamky p_1 a/alebo p_2 v jednom bode	4
c) jedna z priamok je sečnica kružnice	4
d) jedna priamka je sečnica a druha dotyčnica	6
e) obe priamky sú sečnice	8

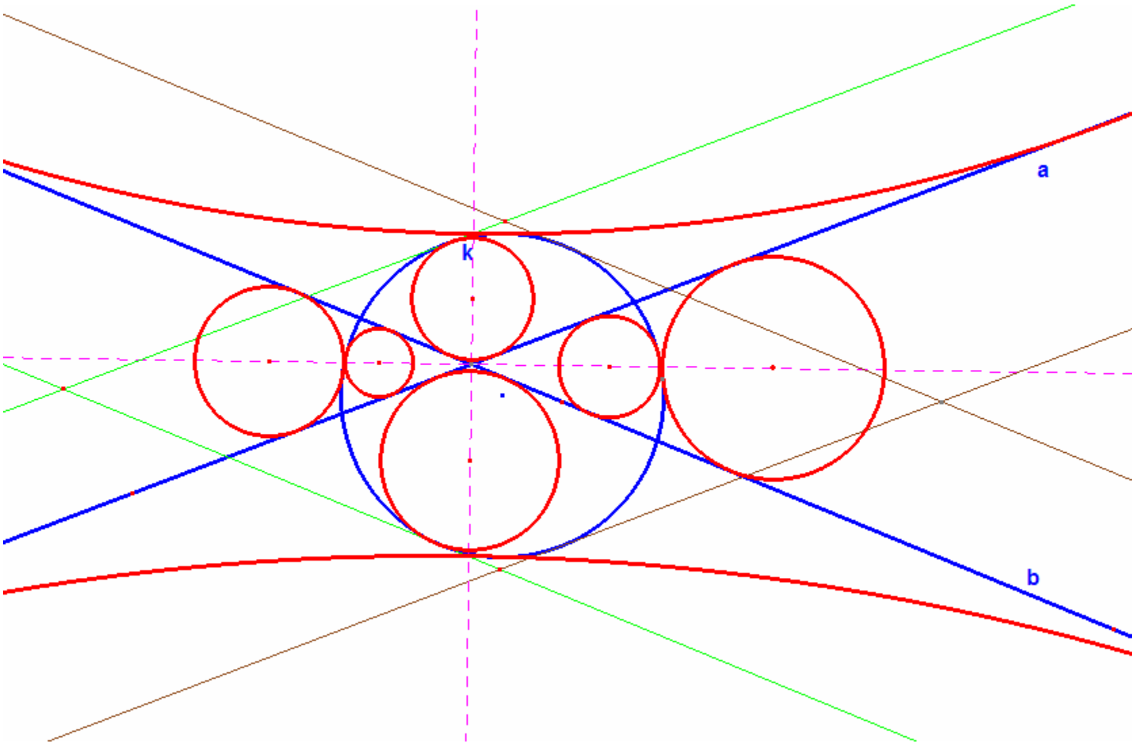
Riešenie:

2) c), e) stredy hľadaných kružníc musia ležať na osiach uhlov daných priamok. Dotykové body hľadaných kružníc so zadanou kružnicou nájdeme nasledujúcim spôsobom:

1. zobrazíme rovnobežky s danými priamkami dotýkajúce sa danej kružnice,
2. prienik týchto priamok spojený s prienikom zadaných priamok tvorí priamku, prienikom tejto priamky s kružnicou získame dotykové body hľadaných kružníc.

Konštrukcia:





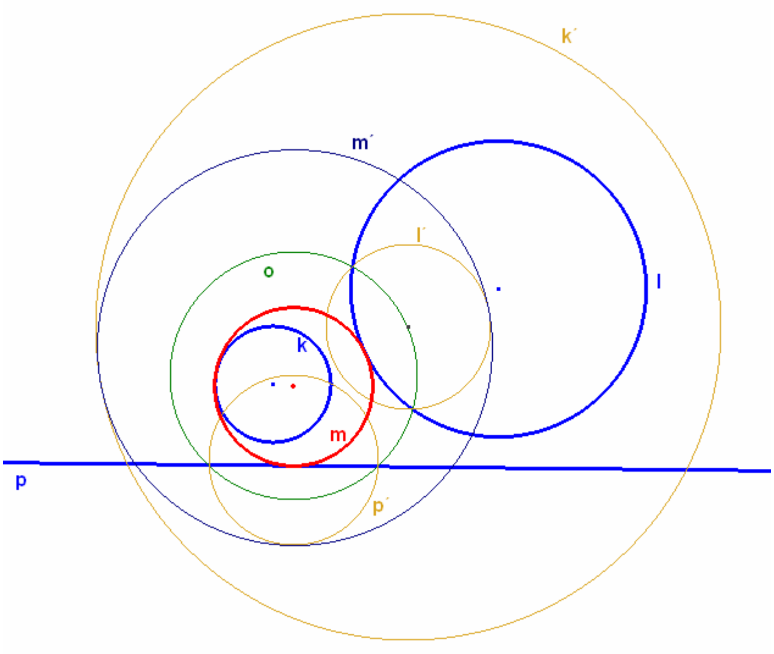
Zadanie pkk: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných dvoch navzájom rôznych kružníc k, l a priamky p.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) kružnice sú sústredné	
a) priamka p je sečnica aspoň jednej kružnice	4
b) priamka p nepretína žiadnu z kružníc	0
2) kružnice nie sú sústredné	
a) priamka p má s kružnicami spoločný jeden bod	2
b) priamka má s kružnicami dva spoločné body	
c) Priamka má s kružnicami tri spoločné body	2
d) priamka nemá s kružnicami žiadny spoločný bod	
i) kružnice sú v rôznych polrovinách	0
ii) kružnice sú v rovnakej polrovine	8

Riešenie:

Pomocou kružnicovej inverzie zobrazíme kružnice k, l na sústredné. Ďalej zobrazíme v kružnicovej inverzii priamku a riešime rovnakú úlohu ako v čiastkových úlohách.

Konštrukcia:

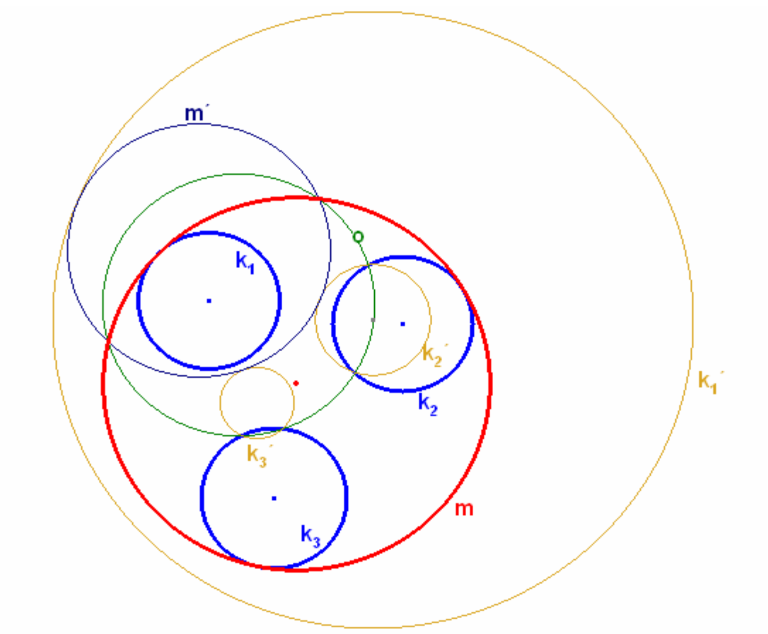


Zadanie kkk: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných troch navzájom rôznych kružníc.

vzájomná poloha útvarov	počet riešení
1) všetky tri kružnice sú sústredné	0
2) dve kružnice s sústredné	
a) tretia kružnica nemá spoločný bod s ostatnými	
i) kružnica neleží v medzikruží	0
ii) kružnica leží v medzikruží	8
b) kružnica sa dotýka jednej z kružníc	6
c) kružnica pretína jednu z kružníc	4
d) kružnica pretína obe kružnice	4
3) kružnice sú nesústredné	
a) kružnice nemajú žiadny spoločný bod	8
b) kružnice sa pretínajú v jednom bode	4
c) kružnice sa pretínajú v dvoch bodoch	4

Riešenie: Keď kružnice nemajú spoločný žiadny bod existuje 8 riešení. Využijeme kružnicovú inverziu a kružnice k_1 a k_2 zmeníme na sústredné zobrazíme aj k_3 a opäť riešime čiastkovú úlohu.

Konštrukcia:



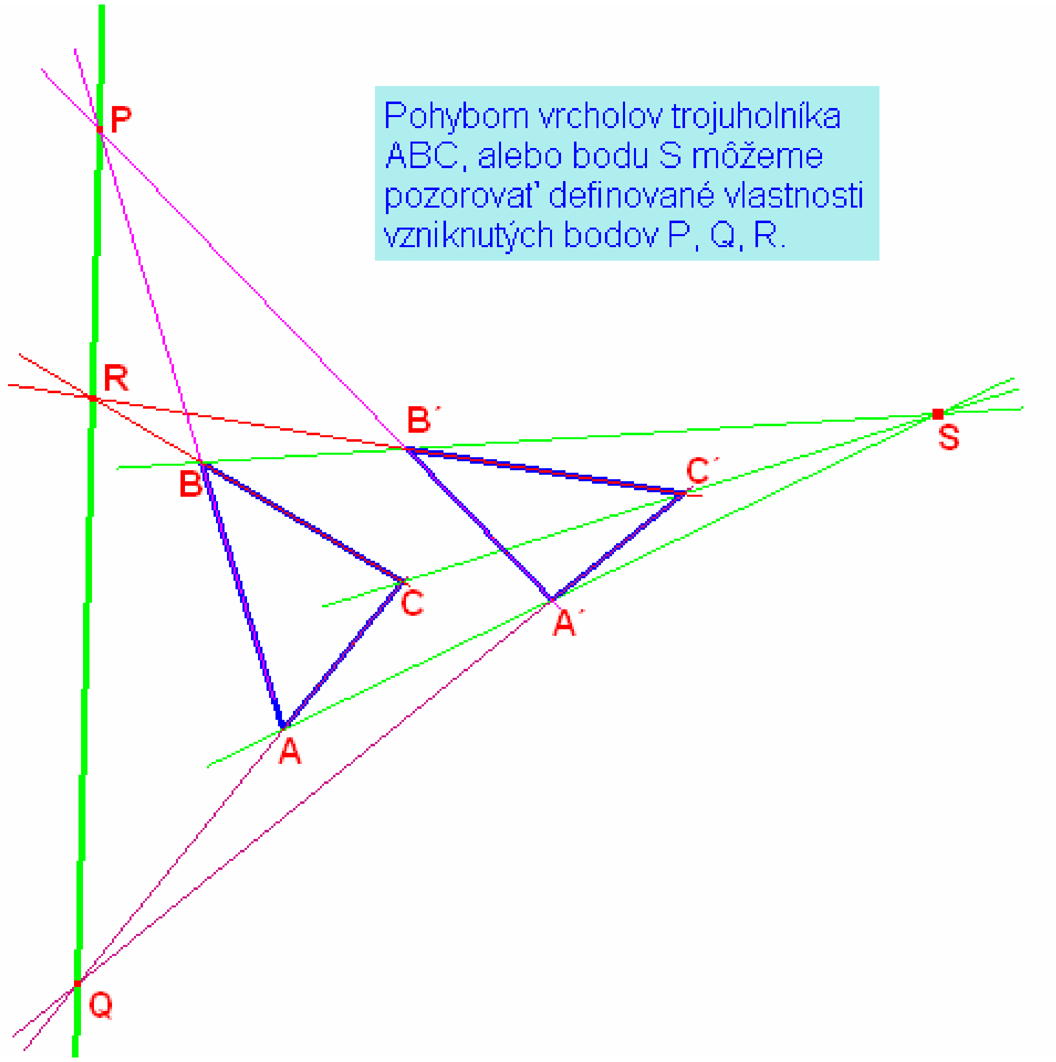
4.3 Projektívna geometria

Veľmi dobré uplatnenie Cabri je aj v projektívnej geometrii. Nie všetky problémy súvisia s metrikou. V geometrii sa stretávame aj s problémami, v ktorých je dôležitá poloha útvarov. Chceme v týchto úlohách ukázať napríklad, či body ležia na priamke, alebo nie.

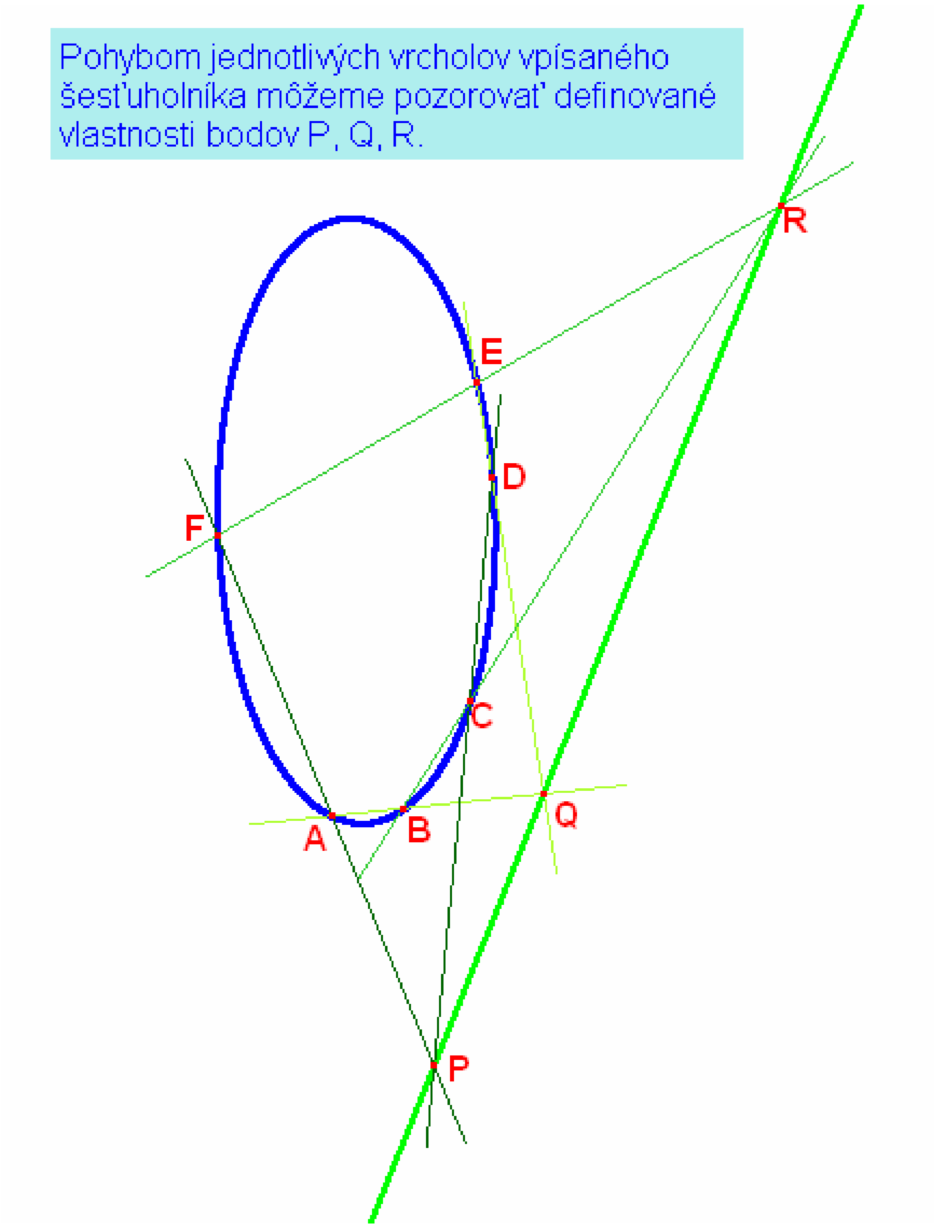
Niektoré konštrukcie, ktoré sú zložité v prípade keď používame bežné pomôcky, sú v tomto prostredí ľahko zobraziteľné. Presne tak, ako postupujeme pri konštrukcii na papier, či tabuľu postupujeme aj v Cabri. Rozdiel je v tom, že konštrukcia je v tomto prípade presnejšia. Nevznikajú také problémy, že trojica priamok, ktorá by mala prechádzať jedným bodom sa pretne vo viacerých bodoch, alebo body ktoré by vo výsledku mali ležať na jednej priamke tvoria trojuholník. Stáva sa, že odchýlka priamok je veľmi malá a keď chceme nájsť priesečník týchto priamok dostávame aj centimeter dlhý "prienik". Nájsť presný bod prieniku je obtiažne. S Cabri tento problém nenastáva, pretože kliknutím na obe priamky sa hneď presne zobrazí ich prienik. Je veľmi zaujímavé zobrazovať aj špeciálne prípady a overovať, či aj tu platia predpokladané vlastnosti. [7]

Ďalej ukážeme niekoľko príkladov, že experimentovať s Cabri sa dá veľmi ľahko. Vybrali sme niekoľko viet, ako ukážku toho, ako veľmi dôležitá je dynamickosť.

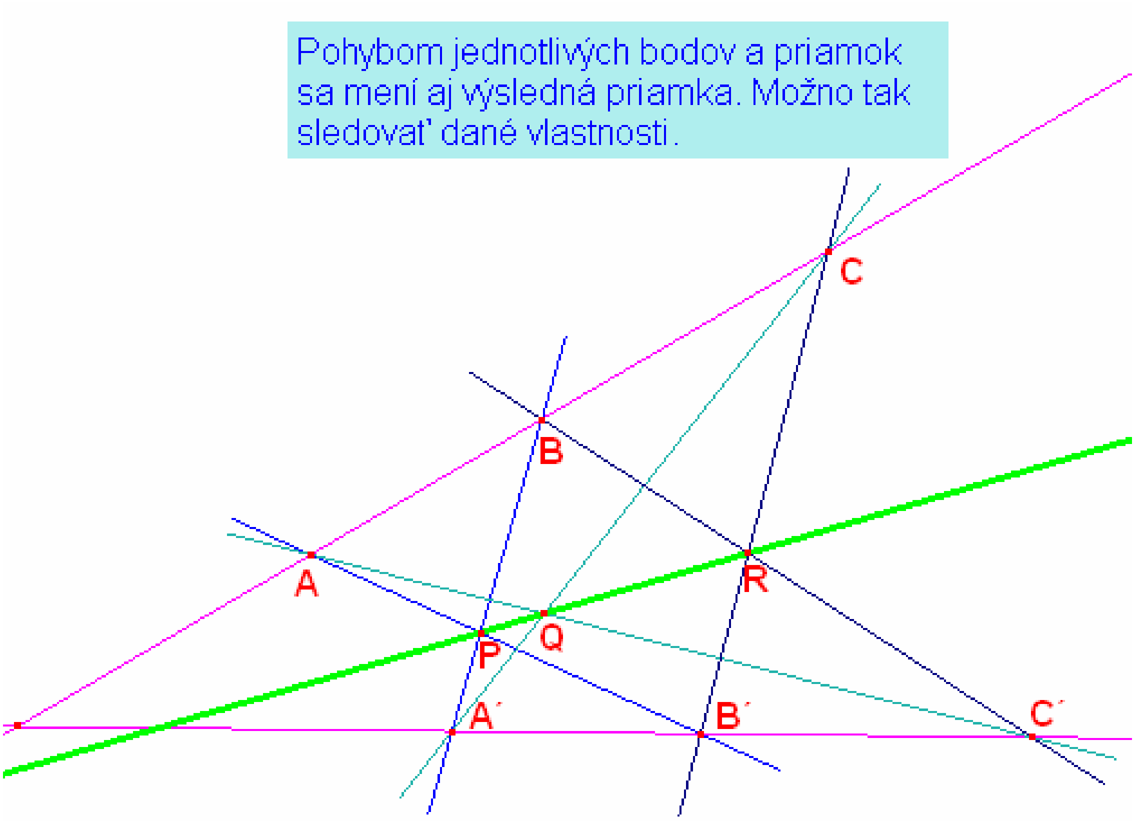
Desargova veta: V rozšírenom Euklidovom priestore nech sú dané dva trojuholníky ∆ABC a ∆A´B´C´. Ak priamky AA´, BB´, CC´ prechádzajú jedným bodom S, body P = AB ∩ A´B´, Q = AC ∩ A´C´, R = BC ∩ B´C´.



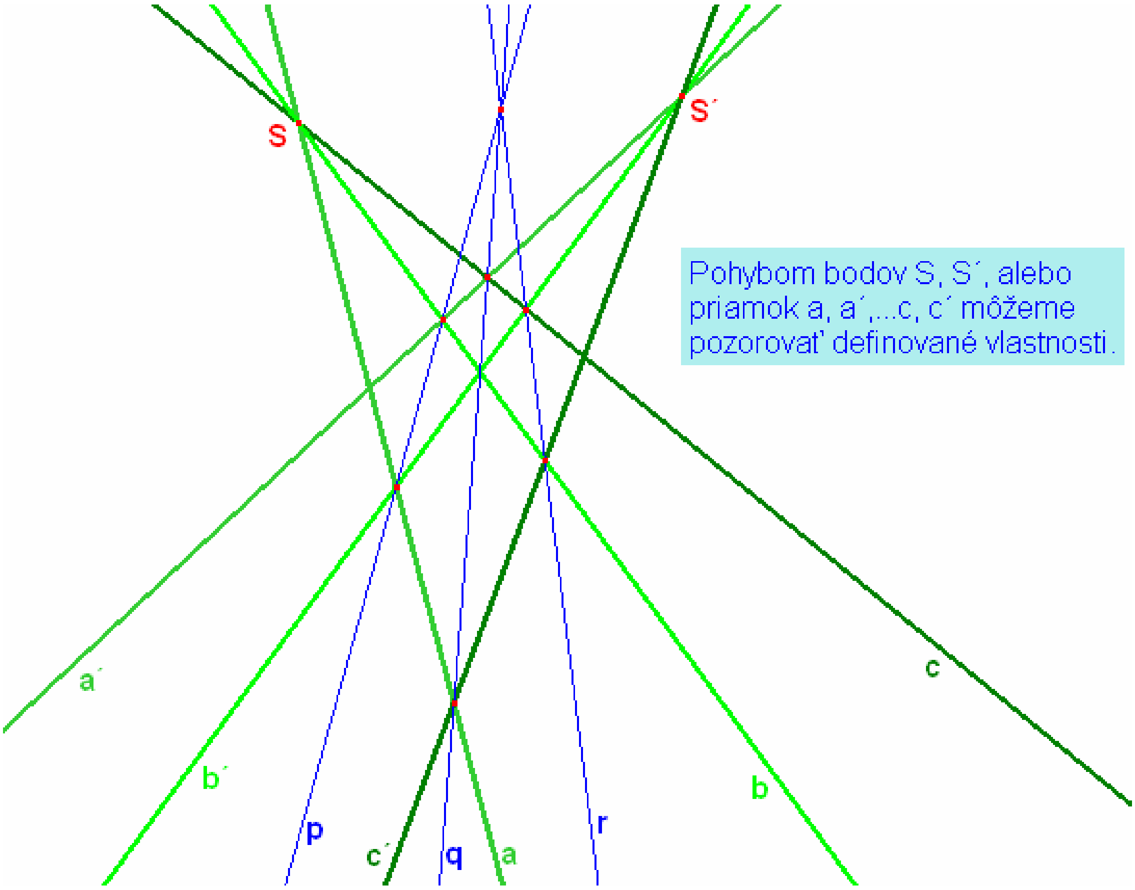
Pascalova veta: Priesečníky protiľahlých strán jednoduchého šesťuholníka ABCDEF vpísaného do regulárnej kužeľosečky ležia na jednej priamke.



Pappova veta: Nech p, p´ sú dve rôzne priamky, A, B, C tri navzájom rôzne body priamky p, A´, B´, C´ tri navzájom rôzne body priamky p´, všetky rôzne od priesečníka priamok p, p´. Potom body P = AB´ ∩ A´B, Q = AC´ ∩ A´C, R = BC´ ∩ B´C sú kolineárne.



Duálna veta k Pappovej vete: Nech S, S´ sú dva rôzne body, a, b, c sú tri rôzne priamky zväzku Z(S), a´, b´, c´ sú tri rôzne priamky zväzku Z(S´), všetky rôzne od priamky SS´. Potom priamky p = (a ∩ b´)U(a´∩ b), q = (a ∩ c´)U(a´∩ c) r = (b ∩ c´)U(b´∩ c)prechádzajú jedným bodom.



5 Záver

Na začiatku tejto práce sme spracovali krátku históriu Cabri a vytvorili porovnanie medzi Cabri II a Cabri II Plus. Vzhľadom na to, že sa mnohé nástroje zmenili a niektoré novo vznikli je potrebné, aby toto bolo prehľadne rozpísané. Obe verzie sa ešte používajú, prechod z prvej verzie do druhej je bezproblémový. Opačne to ale neplatí, pretože novšia verzia má viac funkcií a nástrojov a návrat do staršej, “chudobnejšej“ verzie nie je možný.

Prvým cieľom bolo vytvoriť pomôcku, ktorá je koncipovaná najmä so zreteľom na lepšiu v prostredí Cabri geometria II Plus. Tento cieľ sa podarilo splniť. Aby bol užívateľovi poskytnutý čo najpresnejší prehľad, je na 10 stranách podrobný popis jednotlivých tlačidiel. Je tu ich popis, aj poradie vstupujúcich parametrov. Pretože niekedy záleží aj na poradí útvarov a nástrojov v akom musia byť zvolené. Aby bola táto pomôcka dostatočne názorná je pri každom tlačidle aj obrázok s nástrojmi, ktoré sa v ňom nachádzajú.

Druhým cieľom bolo vytvoriť príklady na aplikáciu Cabri. V štvrtej kapitole sme sa preto venovali:

1. Kužeľosečkám a ich zobrazovaniu. Čo je veľmi dôležité pre spoznávanie ich vlastností. Keďže máme možnosť zobraziť rovnicu kužeľosečky môžeme sledovať, ako sa menia parametre rovnice pri zmene jednotlivých bodov.
2. Apolloniovym úlohám. Riešenie niektorých zadaní je naozaj triviálne,zatiaľ čo s inými sa treba zaoberať viac. Cabri toto výrazne zjednodušuje. Aj keď tieto úlohy nerieši máme možnosť sledovať počet riešení pri dynamickej zmene parametrov.
3. Problémom projektívnej geometrie. Často pri vysvetľovaní a zobrazovaní viet dochádza k nepresnostiam a výsledné obrázky nie sú tými, ktoré by sme čakali. Navyše takéto zobrazenia nie sú dynamické a teda keď sa

nám menia parametre musíme ich vždy prekresľovať. Ako ukazujeme v tejto práci nie je to vždy tak. Stačí niekoľko minút a obrázky spolu s vlastnosťami máme zachytené ako Cabri výkresy. Keď vo výsledku potrebujeme zistiť či sú dané body kolineárne máme na to jednoduchý nástroj *Kolineárne?*.

Táto práca je umiestnená na internete, na stránke www.sccg.sk/~nunukova preto dúfam, že pomôže všetkým, ktorých geometria zaujíma, prípadne radi pracujú s Cabri a hľadajú jeho alternatívne využitie.

6 Použitá literatúra

[1] http://www-cabri.imag.fr/cabri2/historique-e.php (22.1.2007)

[2] http://www.pf.jcu.cz/cabri (20.1.2007)

[3] Ňuňuková P., *Posunutie, stredová a osová súmernosť vo vyučovaní matematiky na ZŠ aplikovaním IKT,* diplomová práca FMFI UK Bratislava,2006

[4] Urban A., Harant M., Menšík M., *Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl*, 1966

[5] http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/apoll/apoll.html (30.1.2007)

[6] Sklenáriková Z., *K metódam riešenia Apolloniovej úlohy*, In Matematika v proměnách věků III, Edícia Dějiny matematiky, ISBN 80-7285-040-7, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2004

[7] Solčan Š., *Projektívna geometria*, ISBN 80-223-0887-0, 1995

7 Prílohy

CD s príkladmi aplikácií Cabri geometrie II Plus.