

1. EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR

Definícia 1.1. Afinný priestor nad \mathbb{R} , ktorého vektorová zložka je metrický vektorový priestor, sa nazýva *euklidovský priestor*. Označenie: $\mathbb{E}^n = (\mathcal{B}, V^n, +)$, kde $V^n = (V^n, \cdot)$ je vektorový priestor s pevne zvoleným skalárnym súčinom.

Definícia 1.2. *Vzdialenosť dvoch bodov A, B je*

$$d(A, B) = |B - A|.$$

Niekedy vzdialenosť bodov A, B označujeme aj $|AB|$.

Veta 1.3. *Pre vzdialenosť bodov v \mathbb{E}^n platí:*

- (i) $d(A, B) \geq 0$, pričom $d(A, B) = 0$ práve vtedy, keď $A = B$.
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$
- (iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, A)$ (trojuholníková nerovnosť).

Dôkaz. Dôkaz vlastností (i) a (ii) je triviálny.

$$(iii) \quad d(A, C) + d(C, B) = |C - A| + |B - C| \geq |(B - C) + (C - A)| = |B - A| = d(A, B).$$

□

Definícia 1.4. Súradnicová sústava $\langle O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v \mathbb{E}^n sa nazýva *karteziánska*, ak báza $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ je ortonormálna. (t.j. $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$).

Veta 1.5. $A, B \in \mathbb{E}^n$. Nech $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ sú súradnice v karteziánskej sústave. Potom

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

Dôkaz. Vyplýva z vlastnosti ortonormálnej bázy.

□

2. KOLMOST' LINEÁRNYCH VARIET

Definícia 2.1. Nech α je lineárna varieta vo \mathbb{E}^n a \mathbf{u} je vektor v $V(\mathbb{E}^n)$. Potom $\mathbf{u} \perp \alpha$ (vektor \mathbf{u} je *kolmý* na lineárnu varietu α), keď $\mathbf{u} \perp V_\alpha$ (je kolmý na všetky smerové vektory variety α).

Vektory kolmé na k -rozmernú lineárnu varietu tak tvoria $(n - k)$ -rozmerný vektorový priestor (priestor V_α^\perp):

- ak α je priamka, tak $\dim V_\alpha^\perp = n - 1$,
- ak α je nadrovina, tak $\dim V_\alpha^\perp = 1$. Generátor tohto priestoru sa nazýva *normálový vektor nadroviny*.

Veta 2.2. *Nech nadrovina α má všeobecnú rovnicu $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$. Uvažujme karteziánsku súradnicovú sústavu. Potom $V_\alpha^\perp = [\mathbf{n}]$, kde $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$.*

Dôkaz. Označme $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$. Platí, že $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, inak by α nebola nadrovina. Preto \mathbf{n} generuje jednorozmerný vektorový priestor.

Vektory V_α sú presne tie vektory, ktoré spĺňajú rovnicu

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

Čiže $\mathbf{u} \in V_\alpha$ práve vtedy, keď $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$, t.j. \mathbf{n} je vektor kolmý na všetky smerové vektory α .
□

Definícia 2.3. Nech $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú lineárne variety. Hovoríme, že α, β sú

- (i) *kolmé* ($\alpha \perp \beta$), keď $V_\alpha \subset V_\beta^\perp$,
- (ii) *normálne*, keď $V_\alpha^\perp \subset V_\beta$,
- (iii) *totálne kolmé*, keď $V_\alpha^\perp = V_\beta$.

Variety α, β sú teda kolmé, keď $V_\alpha \perp V_\beta$. Variety sú totálne kolmé, keď sú kolmé a normálne.

Relácie kolmosti, normálnosti a totálnej kolmosti sú symetrické:

$$\alpha \perp \beta \Rightarrow V_\alpha \subset V_\beta^\perp \Rightarrow (V_\beta^\perp)^\perp \subset V_\alpha^\perp \Rightarrow V_\beta \subset V_\alpha^\perp \Rightarrow \beta \perp \alpha.$$

Prípad normálnosti a totálnej kolmosti sa ukazujú tak isto.

Z definície tiež ľahko vyplýva:

- Ak α, β sú kolmé, tak $\dim V_\alpha + \dim V_\beta \leq n$. Presnejšie platí, že $V_\alpha \cap V_\beta = \mathbf{0}$. (Dôkaz: $V_\alpha \subset V_\beta^\perp$, preto $V_\alpha \cap V_\beta \subset V_\beta^\perp \cap V_\beta = \mathbf{0}$.)
- Ak α, β sú normálne, tak $\dim V_\alpha + \dim V_\beta \geq n$. Presnejšie platí, že $V_\alpha + V_\beta = V^n$. (Dôkaz: $V_\alpha^\perp \subset V_\beta$, preto $V^n = V_\alpha^\perp + V_\alpha \subset V_\beta + V_\alpha$.)
- Ak α, β sú totálne kolmé, tak $\dim V_\alpha + \dim V_\beta = n$.

Príklad. Roviny v trojrozmernom euklidovskom priestore nemôžu byť kolmé. Môžu byť len navzájom normálne. Roviny

$$\alpha: a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0$$

$$\beta: b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0$$

sú normálne práve vtedy, keď $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Tvrdenie 2.4. *(O vzájomnej polohe kolmých a normálnych variet.)*

- (i) *Ak α, β sú kolmé, tak sú buď mimobežné alebo rôznobežné s jediným spoločným bodom.*
- (ii) *Ak α, β sú normálne, tak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.*

Dôkaz. Ak α a β sú kolmé, tak $V_\alpha \cap V_\beta = 0$. Odtiaľ je už zrejmé, že môžu nastať len spomenuté dve vzájomné polohy.

Ak α a β sú normálne, tak $V_\alpha + V_\beta = V^n$. Preto pre $A \in \alpha$ a $B \in \beta$ platí, že $B - A \in V_\alpha + V_\beta$, čo ale znamená, že $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. \square

Dôsledok 2.5. Ak α, β sú totálne kolmé, tak $\alpha \cap \beta$ pozostáva z jedného bodu.

3. KOLMÉ PREMIETANIE

Definícia 3.1. Nech $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je lineárna varieta a $A \in \mathbb{E}^n$ bod. *Kolmopremietacia lineárna varieta* bodu A do lineárnej variety α je

$$\Pi_\alpha^\perp(A) = A + V_\alpha^\perp.$$

Variety α a $\Pi_\alpha^\perp(A)$ sú zrejme navzájom totálne kolmé. Preto platí, že ich prienikom je presne jeden bod.

Definícia 3.2. Bod $A^\perp = A_\alpha^\perp$, ktorý leží v prieniku $\alpha \cap \Pi_\alpha^\perp(A)$ sa nazýva *ortogonálny (kolmý) priemet* bodu A do lineárnej variety α .

Definícia 3.3. Body A, A' sú *súmerné* podľa lineárnej variety α , ak

- $A' - A \perp \alpha$,
- $S(A, A') \in \alpha$.

Príklad. Pre bod $P = (p_1, \dots, p_n)$ a nadrovinu $\alpha: a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$ nájdime priemet P_α^\perp a vypočítajme vzdialenosť bodov P a P_α^\perp (na budúcej prednáške si povieme niečo viac k tomu, že ide v podstate o vzdialenosť bodu P od lineárnej variety α).

Kolmopremietacia lineárna varieta $\Pi_\alpha^\perp(P)$ bude priamka, ktorej smerový vektor je kolmý na nadrovinu α , čiže za smerový vektor môžeme zobrať normálový vektor α . Máme tak parametrické vyjadrenie:

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha^\perp(P): \quad x_1 &= p_1 + a_1t \\ x_2 &= p_2 + a_2t \\ &\dots \\ x_n &= p_n + a_nt. \end{aligned}$$

Prienik $\alpha \cap \Pi_\alpha^\perp(P)$ nájdeme dosadením parametrického vyjadrenia $\Pi_\alpha^\perp(P)$ do všeobecnej rovnice α :

$$\begin{aligned} a_1(p_1 + a_1t) + \dots + a_n(p_n + a_nt) + a_0 &= 0 \\ (a_1^2 + \dots + a_n^2)t + (a_1p_1 + \dots + a_np_n + a_0) &= 0 \\ t &= -\frac{f(P)}{|\mathbf{n}|^2}, \end{aligned}$$

kde $f(P) = a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_0$ (dosadenie súradníc bodu P do rovnice α) a $\mathbf{n} = (a_1, \dots, a_n)$ je normálový vektor α . Bod P^\perp má teda súradnice

$$P^\perp = \left(p_1 - \frac{f(P)}{|\mathbf{n}|^2} a_1, \dots, p_n - \frac{f(P)}{|\mathbf{n}|^2} a_n \right).$$

Vzdialenosť P a P^\perp vypočítame ako dĺžku vektora

$$P - P^\perp = \left(\frac{f(P)}{|\mathbf{n}|^2} a_1, \dots, \frac{f(P)}{|\mathbf{n}|^2} a_n \right),$$

teda

$$\begin{aligned} |P - P^\perp| &= \sqrt{\left(\frac{f(P)}{|\mathbf{n}|^2} a_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{f(P)}{|\mathbf{n}|^2} a_n\right)^2} = \sqrt{\frac{f(P)^2}{|\mathbf{n}|^4} a_1^2 + \dots + \frac{f(P)^2}{|\mathbf{n}|^4} a_n^2} \\ &= \sqrt{\frac{f(P)^2}{|\mathbf{n}|^4} (a_1^2 + \dots + a_n^2)} = \sqrt{\frac{f(P)^2}{|\mathbf{n}|^4} |\mathbf{n}|^2} = \sqrt{\frac{f(P)^2}{|\mathbf{n}|^2}} = \frac{|f(P)|}{|\mathbf{n}|}. \end{aligned}$$