Lineárne a priame súčty VPP

Lineárna algebra

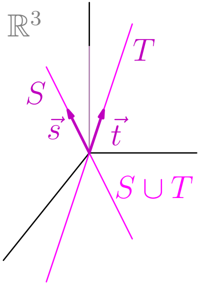
Barbora Pokorná

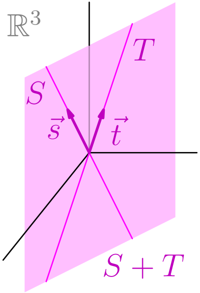
KAG, FMFI UK

2020

Lineárny súčet podpriestorov

Nech S, T sú VPP vektorového priestoru V nad poľom R.





- vektor $\vec{s} \in S \cup T$
- vektor $\vec{t} \in S \cup T$
- avšak vektor $\vec{s} + \vec{t} \notin S \cup T$

Preto $S \cup T$ nie je vektorový podpriestor.

DEFINÍCIA: Množinu

$$S + T = \{\vec{x} + \vec{y};\ \vec{x} \in S,\ \vec{y} \in T\}$$

nazývame lineárny súčet podpriestorov S a T.

Lineárny súčet podpriestorov je VP

VETA

Nech S, T sú VPP vektorového priestoru V nad poľom R. Potom množina $S+T$ je vektorový podpriestor priestoru V. Navyše $S+T$ je najmenší VPP vo V obsahujúci množinu $S \cup T$, čiže $S+T=[S \cup T]$.

DÔKAZ

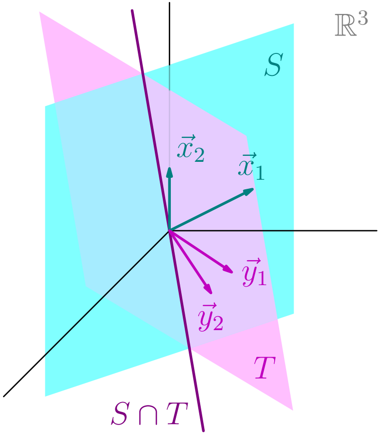
Ukážeme, že $S+T$ je vektorový podpriestor.

- $S+T \neq \emptyset$, lebo $\vec{0}=\vec{0}_{\in S}+\vec{0}_{\in T} \in S+T$
- nech $\vec{a}, \vec{b} \in S+T$, čiže $\vec{a}=\vec{s}_1+\vec{t}_1$ a $\vec{b}=\vec{s}_2+\vec{t}_2$ pre nejaké $s_1, s_2 \in S$ a $t_1, t_2 \in T$ a $\alpha, \beta \in R$
  $$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha(\vec{s}_1+\vec{t}_1)+\beta(\vec{s}_2+\vec{t}_2)=(\alpha\vec{s}_1+\beta\vec{s}_2)+(\alpha\vec{t}_1+\beta\vec{t}_2) \in S+T$$

Ukážeme $S+T=[S \cup T]$.

- $[S \cup T] \subset S+T$, lebo ak $\vec{x} \in [S \cup T]$, tak $\vec{x}$ je nejakou LK vektorov $s_1, s_2, \dots \in S$ a $t_1, t_2, \dots \in T$, čiže $\vec{x}=\vec{s}+\vec{t}$ a teda $\vec{x} \in S+T$
- $S+T \subset [S \cup T]$, lebo ak $\vec{x} \in S+T$, tak $\vec{x}=\vec{s}+\vec{t}$ a teda $\vec{x} \in [S \cup T]$

Grassmannova formula



Obr. 1: Lineárny súčet $S + T = \mathbb{R}^3$.
Prienik $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$.

Nech S, T sú VPP v konečnorozmernom V.

GRASSMANNova formula

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

PRÍKLAD na obr. 1

- $S = [\vec{x}_1, \vec{x}_2]$, čiže $\dim(S) = 2$
- $T = [\vec{y}_1, \vec{y}_2]$, čiže $\dim(T) = 2$
- $\dim(S \cap T) = 1$
- $\dim(S + T) = 2 + 2 - 1 = 3$

Grassmannova formula – dôkaz ☺

VETA

Nech V je konečne generovaný VP nad poľom R a nech S, T sú VPP vo V.
Potom $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$.

DÔKAZ

Ak $\dim(S) = 0$, čiže $S = \{\vec{0}\}$, tak $S + T = T$ a Grassmannova formula platí, lebo

$$\dim(S+T) = 0 + \dim(T) - 0.$$

Podobne by sme to ukázali pre $\dim(T) = 0$, prípadne obe nulové.

Nech teraz $\dim(S) = s$ a $\dim(T) = t$ sú $s, t > 0$. Potom môžu nastať dve možnosti:

- $S \cap T = \{\vec{0}\}$, čiže $\dim(S \cap T) = 0$
- $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$, čiže $\dim(S \cap T) = r > 0$

Poďme ukázať, že Grassmannova formula platí v oboch prípadoch.
Hlavná myšlienka dôkazu: nájsť bázu priestoru $S + T$ a spočítať jej vektory.

Grassmannova formula – pokračovanie dôkazu 😐

1. možnosť: $\dim(S) = s,\ \dim(T) = t,\ \dim(S \cap T) = 0$

Nech $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s \rangle$ je nejaká báza v S a $\langle \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t \rangle$ je nejaká báza v T.
Ukážeme, že $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t \rangle$ je báza v $S + T$.

- $S + T = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t]$, lebo pre
  $\vec{w} = \vec{s}_w + \vec{t}_w = (\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_s \vec{x}_s) + (\beta_1 \vec{y}_1 + \dots + \beta_t \vec{y}_t)$ pre $\vec{w} \in S + T$ a $\alpha_i,\ \beta_j \in R$
- postupnosť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t$ je LN, ukážeme sporom. Predpokladajme teda, že je LZ.
  Prvých s členov je LN, lebo je to báza v S. Čiže medzi zvyšnými členmi musí byť nejaký $\vec{y}_j$ taký, že je LK členov pred ním: $\vec{y}_j = (\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_s \vec{x}_s) + (\beta_1 \vec{y}_1 + \dots + \beta_{j-1} \vec{y}_{j-1})$.
  Potom ale máme:
  $$-\beta_1 \vec{y}_1 - \ldots - \beta_{j-1} \vec{y}_{j-1} + 1.\vec{y}_j = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_s \vec{x}_s =: \vec{a}$$
  Vektor $\vec{a}$ je nenulový (lebo koeficient pri $\vec{y}_j$ je 1 a y-vektory sú LN) a $\vec{a} \in S \cap T$ (lebo sa dá vyjadriť ako LK aj pomocou y-vektorov aj pomocou x-vektorov) a to je spor, lebo $S \cap T = \{\vec{0}\}$.
- teda $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_t \rangle$ je báza v $S + T$ a preto $\dim(S + T) = s + t = s + t - 0$

Grassmannova formula – pokračovanie dôkazu

2. možnosť: $\dim(S) = s,\ \dim(T) = t,\ \dim(S \cap T) = r > 0$

Nech $\langle \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r \rangle$ je nejaká báza v $S \cap T$. Doplníme ju na bázu $\langle \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_s \rangle$ priestoru S a na bázu $\langle \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_t \rangle$ priestoru T.
Ukážeme, že $\langle \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_s, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_t \rangle$ je báza v $S + T$.

- $S + T = [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_s, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_t]$, lebo
  $\vec{w} = \vec{s}_w + \vec{t}_w =$
  $(\alpha_1 \vec{z}_1 + \dots + \alpha_r \vec{z}_r + \alpha_{r+1} \vec{a}_{r+1} + \dots + \alpha_s \vec{a}_s) + (\beta_1 \vec{z}_1 + \dots + \beta_r \vec{z}_r + \beta_{r+1} \vec{b}_{r+1} + \dots + \beta_t \vec{b}_t)$
  $= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{z}_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r)\vec{z}_r + \alpha_{r+1} \vec{a}_{r+1} + \dots + \alpha_s \vec{a}_s + \beta_{r+1} \vec{b}_{r+1} + \dots + \beta_t \vec{b}_t$
- postupnosť $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_r, \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_s, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_t$ je LN, ukážeme sporom. Predpokladajme teda, že je LZ. Prvých s členov je LN, lebo je to báza v S. Čiže medzi zvyšnými členmi musí byť nejaký $\vec{b}_j$ taký, že je LK členov pred ním:
  $$\vec{b}_j = (\gamma_1 \vec{z}_1 + \dots + \gamma_r \vec{z}_r) + (\alpha_{r+1} \vec{a}_{r+1} + \dots + \alpha_s \vec{a}_s) + (\beta_{r+1} \vec{b}_{r+1} + \dots + \beta_{j-1} \vec{b}_{j-1}).$$
  Potom ale máme:
  $$-\beta_{r+1} \vec{b}_{r+1} - \dots - \beta_{j-1} \vec{b}_{j-1} + 1.\vec{b}_j = (\gamma_1 \vec{z}_1 + \dots + \gamma_r \vec{z}_r) + (\alpha_{r+1} \vec{a}_{r+1} + \dots + \alpha_s \vec{a}_s) =: \vec{a}$$

Grassmannova formula – koniec dôkazu

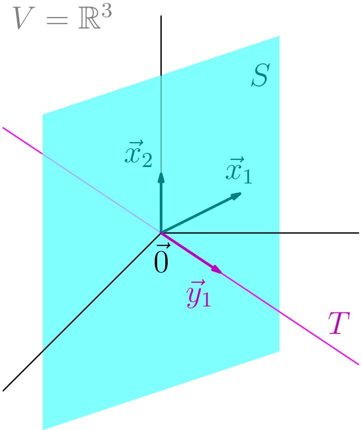
- pokračovanie:
  Vektor $\vec{a}$ je nenulový (lebo koeficient pri $\vec{b}_j$ je 1 a b-vektory sú LN) a $\vec{a} \in S \cap T$ (lebo sa dá vyjadriť ako LK aj pomocou b-vektorov aj pomocou z, a-vektorov).
  Lenže v $S \cap T$ máme bázu $\langle \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_r \rangle$ a teda pre $\vec{a}$ musia existovať nejaké $\delta_1, \ldots, \delta_r \in R$ také, že $\vec{a} = \delta_1 \vec{z}_1 + \cdots + \delta_r \vec{z}_r$. Lenže potom máme:
  $$\begin{aligned} \vec{a} &= \delta_1 \vec{z}_1 + \cdots + \delta_r \vec{z}_r = (\gamma_1 \vec{z}_1 + \cdots + \gamma_r \vec{z}_r) + (\alpha_{r+1} \vec{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_s \vec{a}_s) \\ \vec{0} &= (\gamma_1 - \delta_1) \vec{z}_1 + \cdots + (\gamma_r - \delta_r) \vec{z}_r + \alpha_{r+1} \vec{a}_{r+1} + \cdots + \alpha_s \vec{a}_s \end{aligned}$$
  Keďže postupnosť $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_r, \vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_s$ je LN (lebo je bázou v S), tak musí ísť o triviálnu kombináciu a teda $\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_s = 0$. Lenže to by znamenalo, že
  $$\begin{aligned} \vec{b}_j &= (\gamma_1 \vec{z}_1 + \cdots + \gamma_r \vec{z}_r) + (0.\vec{a}_{r+1} + \cdots + 0.\vec{a}_s) + (\beta_{r+1} \vec{b}_{r+1} + \cdots + \beta_{j-1} \vec{b}_{j-1}) \\ \vec{b}_j &= \gamma_1 \vec{z}_1 + \cdots + \gamma_r \vec{z}_r + \beta_{r+1} \vec{b}_{r+1} + \cdots + \beta_{j-1} \vec{b}_{j-1} \end{aligned}$$
  čo je spor, lebo postupnosť $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_r, \vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_t$ je LN (lebo je bázou v T).
- teda $\langle \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_r, \vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_s, \vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_t \rangle$ je báza v $S + T$ a preto
  $\dim(S + T) = r + (s - r) + (t - r) = s + t - r$

Priamy súčet

DEFINÍCIA

Nech S a T sú VPP vektorového priestoru V také, že $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Potom sa lineárny súčet $S + T$ nazýva priamy súčet podpriestorov S a T a ozn. ho $S \oplus T$.

- $\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T)$
- báza $S \oplus T$ je $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_t \rangle$, kde $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s \rangle$ je báza v S a $\langle \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_t \rangle$ je báza v T



Obr. 2: $S \cap T = \{\vec{0}\}$
$\dim(S \oplus T) = 2 + 1 = 3$

Rozklad priestoru

DEFINÍCIA

Ak sa vektorový priestor V dá vyjadriť v tvare $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ pre nejaké podpriestory $V_1, \ldots, V_n$, tak hovoríme, že V sa rozkladá (alebo aj štiepi) na priamy súčet svojich podpriestorov.

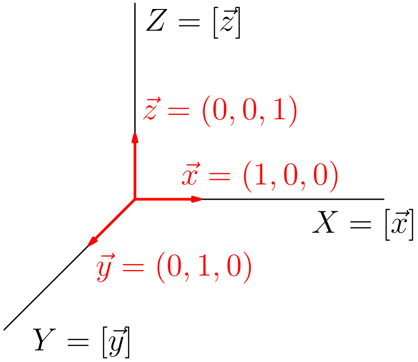
PRÍKLAD

Vektorový priestor $V_3(\mathbb{R})$ sa rozkladá na priamy súčet

$V_3(\mathbb{R}) = X \oplus Y \oplus Z$, kde

$$X = [(1,0,0)]$$
$$Y = [(0,1,0)]$$
$$Z = [(0,0,1)]$$

$V = \mathbb{R}^3$



Obr. 3: Priestor $V_3(\mathbb{R})$ vieme rozložiť na priamy súčet podpriestorov $X \oplus Y \oplus Z$.

Jednoznačnosť vyjadrenia vektorov priameho súčtu

VETA

Nech S, T, P sú VPP vektorového priestoru V. Potom $P = S \oplus T$ práve vtedy, keď $P = S + T$ a každý vektor z P sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako súčet vektora z S a vektora z T.

DÔKAZ

- „$\Rightarrow$“: nech $P = S \oplus T$. Potom samozrejme $P = S + T$. Teda pre každý vektor $\vec{x} \in P$ existujú $\vec{a} \in S$ a $\vec{b} \in T$ také, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$. Nech aj pre $\vec{a}_1 \in S$ a $\vec{b}_1 \in T$ je $\vec{x} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$. Potom máme $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$. Odtiaľ $\vec{a} - \vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b} =: \vec{y}$. Keďže S, T sú VPP, tak sú „uzavreté“ vzhľadom na skladanie ich vektorov a teda $\vec{y} \in S \cap T$. Z toho vyplýva, že $\vec{y} = \vec{0}$, lebo P je priamym súčtom S a T. A teda $\vec{a} = \vec{a}_1$ a $\vec{b} = \vec{b}_1$.
- „$\Leftarrow$“: nech $P = S + T$ a nech každý vektor z P sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako súčet vektora z S a vektora z T. Skúmajme vektor $\vec{a} \in S \cap T$. Platí, že

  $\vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$, kde $\vec{a} \in S$ a $\vec{0} \in T$

  $\vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$, kde $\vec{0} \in S$ a $\vec{a} \in T$

  Keďže toto vyjadrenie má byť jednoznačné, tak $\vec{a} = \vec{0}$ a teda $S \cap T = \{\vec{0}\}$ a $P = S \oplus T$.

Báza priameho súčtu

VETA

Nech S, T sú VPP konečne generovaného vektorového priestoru V nad poľom R. Nech $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s \rangle$ je báza v S a $\langle \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_t \rangle$ je báza v T a nech $P \subset V$ je vektorový podpriestor, ktorého bázou je $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_t \rangle$. Potom $P = S \oplus T$.

DÔKAZ

- ukážeme, že $P \subset S + T$

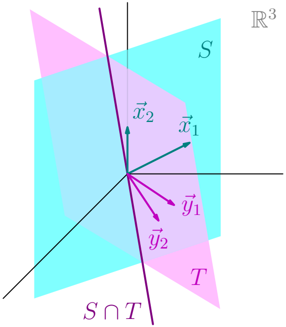
  Keďže $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_t \rangle$ je báza priestoru P, každý vektor z $\vec{x} \in P$ je tvaru

  $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_s \vec{x}_s + \beta_1 \vec{y}_1 + \cdots + \beta_t \vec{y}_t = \vec{s} + \vec{t}$ pre $\vec{s} \in S$ a $\vec{t} \in T$. A teda $\vec{x} \in S + T$.
- ukážeme, že $S + T \subset P$

  Priestor $S + T$ je generovaný vektormi $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_t]$ a teda každý vektor z $\vec{x} \in S + T$ je tvaru $\vec{x} = \delta_1 \vec{x}_1 + \cdots + \delta_s \vec{x}_s + \gamma_1 \vec{y}_1 + \cdots + \gamma_t \vec{y}_t$ a teda $\vec{x} \in P$.
- čiže $P = S + T$ a teda $\dim(S + T) = \dim(P) = s + t = \dim(S) + \dim(T)$
- z Grassmanovej formuly máme, že $\dim(S \cap T) = 0$ a teda $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Čiže $P = S \oplus T$.

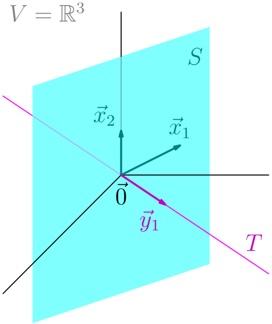
Lineárny vs. priamy súčet

Lineárny súčet



- $S + T = \mathbb{R}^3$
- $S + T = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2]$
- $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ nie je báza
- $\dim(S + T) = \dim V_3(\mathbb{R}) = 3$

Priamy súčet



- $S \oplus T = \mathbb{R}^3$
- $S \oplus T = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1]$
- $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle$ je báza
- $\dim(S \oplus T) = \dim V_3(\mathbb{R}) = 3$

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1 – 3, na slajdoch 2, 13: B. Pokorná